

Trabalho (2022/ 2023)

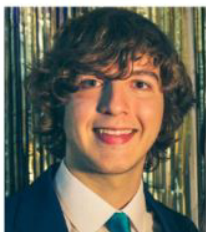


Otimização para a Ciência de Dados

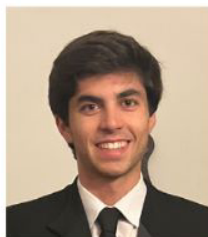
Trabalho submetido como elemento de avaliação
final para aprovação na unidade curricular
Otimização para a Ciência de Dados
Docente: Ana Catarina Nunes

Trabalho realizado por:

Grupo 7



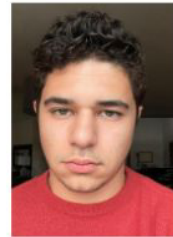
Eduardo Parracho
nº 111423
Turma CDA2



Gonçalo Girão
nº 111515
Turma CDA2



João Magarça
nº 111640
Turma CDA2



Tomé Marques
nº 110966
Turma CDA2

Índice

Introdução	3
Parte I – MODELO	4
Parte II – RESOLUÇÃO DO MODELO	4
Parte III – PLANO DE PRODUÇÃO	4
Parte IV – QUESTÕES DA ADMINISTRAÇÃO.....	6
Parte V – ESTUDO DE RENDIMENTO	7
Parte VI – PROPOSTA DE ALTERAÇÃO	8
Apêndices	12

Introdução

O presente trabalho é realizado na unidade curricular de Optimização para a Ciência de Dados, como elemento de avaliação final, para aprovação na unidade curricular.

Este trabalho apresenta quatro propósitos: 1) Desenvolver um modelo em programação linear que nos permita determinar o plano ótimo de produção de papel para o próximo mês, minimizando o custo de produção da empresa TorresPapel. 2) Responder às questões que nos são propostas por parte da administração. 3) Estudar o impacto do rendimento do papel de embrulho a partir de papel misto, no custo total. 4) Apresentar uma proposta de alteração ao caso da TorresPapel. Para responder às questões propostas, foram utilizadas as matérias aprendidas em aula, tais como o solver no programa Excel e a criação do modelo de Programação Linear.

Parte I – MODELO

Variáveis:

- x_1 Quantidade de Jornal a transformar em papel Kraft
- x_2 Quantidade de Jornal a transformar em papel de Embrulho
- x_3 Quantidade de papel Misto a transformar em papel Kraft
- x_4 Quantidade de papel Misto a transformar em papel de Embrulho
- x_5 Quantidade de papel Misto a transformar em papel de Impressão
- x_6 Quantidade de papel de Escritório a transformar em papel Kraft
- x_7 Quantidade de papel de Escritório a transformar em papel de Embrulho
- x_8 Quantidade de papel de Escritório a transformar em papel de Impressão
- x_9 Quantidade de Cartão a transformar em papel Kraft
- x_{10} Quantidade de Cartão a transformar em papel de Embrulho

Função minimizante:

$$(15+6,5)x_1+(15+11)x_2+(16+9,75)x_3+(16+12,25)x_4+(16+9,5)x_5+(19+4,75)x_6 \\ +(19+7,75)x_7+(19+8,5)x_8+(17+7,5)x_9+(17+8,5)x_{10}$$

Restrições:

- $0,85 x_1+0,90 x_3+0,90 x_6+0,80 x_9 = 500$ (encomenda em papel kraft em toneladas)
- $0,80 x_2+0,80 x_4+0,85 x_7+0,70 x_{10} = 600$ (encomenda de papel de embrulho em toneladas)
- $0,70x_5+0,80x_8 = 300$ (encomenda de papel de impressão em toneladas)

Parte II – RESOLUÇÃO DO MODELO

A Parte II encontra-se resolvida no ficheiro Excel enviado juntamente no ficheiro em formato compactado.

Parte III – PLANO DE PRODUÇÃO

Solução Ótima:

- Utilizar 588,2353 toneladas de jornais para produzir papel Kraft e 111,7647 toneladas para produzir papel de embrulho;
- Utilizar 428,5714 toneladas de papel misto para imprimir papel de impressão e 171,4286 para produzir papel de embrulho;
- Utilizar 350 toneladas de papel de escritório para produzir papel de embrulho;
- Utilizar 108,4934 toneladas de cartão para produzir papel de embrulho.

$$x_1 = 588,2353$$

$$x_2 = 111,7647$$

$$x_4 = 171,4286$$

$$x_5 = 428,5714$$

$$x_7 = 350$$

$$x_{10} = 108,4934$$

$$x_3 = x_6 = x_8 = x_9 = 0$$

Valor Ótimo:

Min. Custo: O custo total será de 43453,45€.

Restrições:

1. Foram utilizadas 700 toneladas de jornais, o que corresponde à totalidade disponível;
2. Serão utilizadas 600 toneladas de papel misto, o que corresponde à totalidade disponível;

3. Serão utilizadas 350 toneladas de papel de escritório, o que corresponde à totalidade disponível;
4. Serão utilizadas 108,4934 toneladas de cartão, ou seja, 291,5066 toneladas abaixo do máximo permitido (400);
5. Serão produzidas 500 toneladas de papel Kraft;
6. Serão produzidas 600 toneladas de papel de embrulho;
7. Serão produzidas 300 toneladas de papel de impressão.

A da tabela 1 responde às perguntas acerca da quantidade total a comprar de cada material e detalhes de como será utilizado, quantidade dos materiais a usar na produção de cada tipo de papel e da quantidade total obtida de cada papel e detalhes de como será obtido.

Atendendo à tabela 2 obtém-se as respostas às perguntas sobre o custo de cada papel por tipo de material, por tonelada e o custo de cada material por cada tipo de papel, por tonelada.

A tabela 3 responde às perguntas custo de cada tipo de materiais, consoante a quantidade de materiais usada e o custo total.

Através das figuras 1 e 2 obtém-se a distribuição do custo de compra de cada material e do custo total de transformação de cada tipo de papel, respetivamente.

Papel Produzido	Material Utilizado				Total
	Jornais	Papel Misto	Papel de escritório	Cartão	
Kraft	588,24	0,00	0,00	0,00	588,23
Embrulho	111,76	171,43	350	108,49	741,68
Impressão	-	428,57	0,00	-	428,57
Total	700	600	350	108,49	1758,49

Tabela 1: Quantidades dos materiais a usar na produção de cada tipo de papel, em toneladas, quantidade total a comprar de cada material e como/onde será usado, em toneladas e quantidade total obtida de cada papel, em toneladas.

Papel Produzido	Custo de compra e transformação (por ton.) (em €)				Total
	Jornais	Papel Misto	Papel de escritório	Cartão	
Kraft	21,5	25,75	23,75	24,5	95,5
Embrulho	26	28,25	26,75	25,5	106,5
Impressão	-	25,5	27,5	-	53
Total	47,5	79,5	78	50	-

Tabela 2: Custo de cada papel por tipo de material, por tonelada e custo de cada material por cada tipo de papel, por tonelada

Papel Produzido	n				Custo Total
	Jornais	Papel Misto	Papel de escritório	Cartão	
Kraft	588,24	0,00	0,00	0,00	
Embrulho	111,76	171,43	350,00	108,49	
Impressão	-	428,57	0,00	-	
Custo	15552,94	15771,43	9362,50	2766,582	43453,45'

Tabela 3: Custo de cada tipo de materiais, consoante a quantidade de materiais usada e o custo total

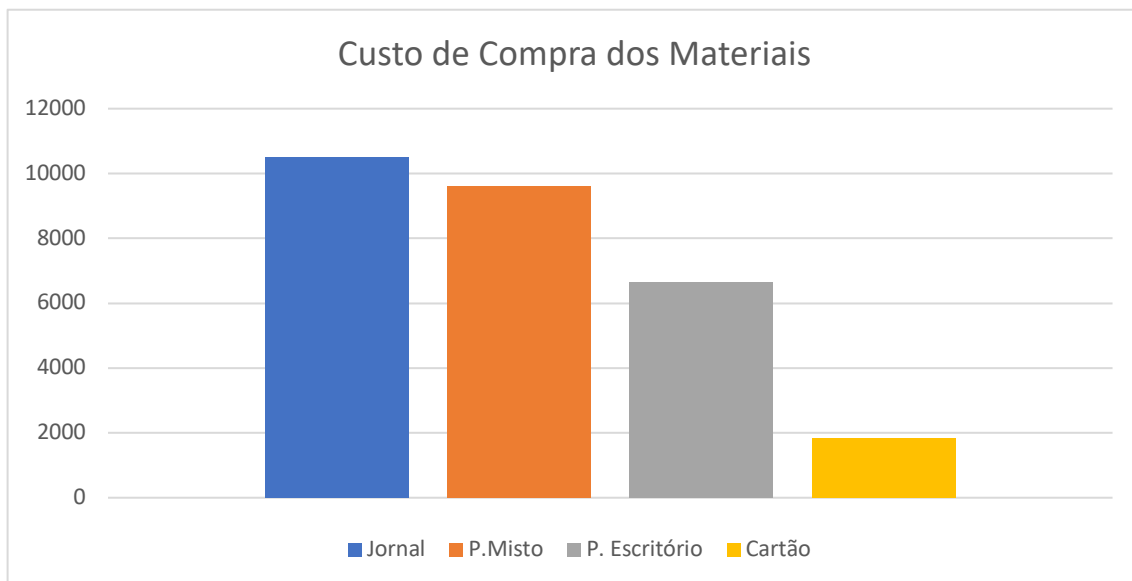


Figura 1: Custo de Compra dos Materiais

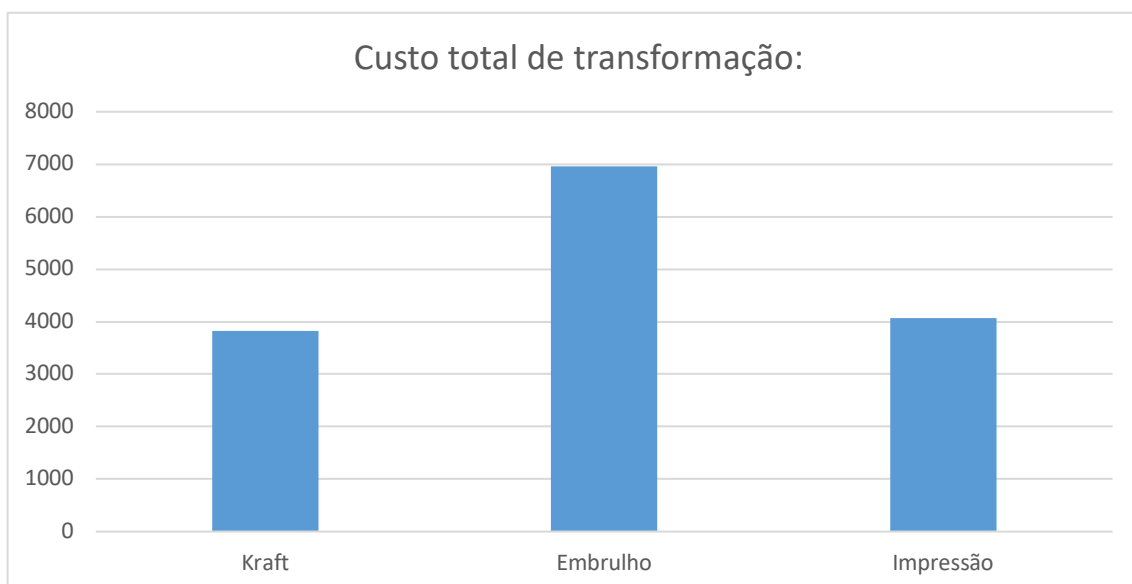


Figura 2: Custo total de transformação

Parte IV – QUESTÕES DA ADMINISTRAÇÃO

A. Se o custo de transformação do cartão em papel de embrulho passar a ser de 8,00€ por tonelada, o plano ótimo será o mesmo? E o custo total?

Se o custo de transformação do cartão em papel de embrulho passar a ser de 8€ o plano ótimo não se altera, porém, o custo total diminuirá passando a ser de 43399,2€.

Porque o rendimento da transformação do cartão em papel de embrulho é baixo então a redução do preço continua a não compensar transformar cartão em papel de embrulho.

B. O que acontecerá ao custo total se houver uma redução de 100 toneladas nos jornais disponíveis no mercado?

Se houver uma redução de 100 toneladas nos jornais disponíveis no mercado, o custo total diminuirá ficando 43767,74€, pois ao reduzir o número de toneladas de jornal disponíveis, a quantidade de jornal utilizado também diminui e a quantidade de cartão utilizada aumentará.

C. Quanto custa satisfazer a encomenda de papel de impressão? Em quanto reduziria o custo total caso essa encomenda fosse eliminada?

Satisfazer a encomenda de papel de impressão tem um custo de 10928,57 €. Se essa encomenda fosse eliminada o custo total seria de 32440,12€, reduzindo em 11013,33€.

D. A TorresPapel gostaria de produzir papel de impressão a partir de papel de escritório. O que teria de acontecer ao respetivo custo de processamento para que tal passasse a ser economicamente mais vantajoso?

De acordo com o relatório de sensibilidade o custo de processamento de produzir papel de impressão a partir de papel de escritório para que tal passasse a ser economicamente mais vantajoso teria de diminuir em cerca de 1,55€ (Allowable Decrease).

Cell	Name	Final Value	Reduced Cost	Objective Coefficient	Allowable Increase	Allowable Decrease
\$C\$20	Jornais Kraft	588,2352941	0	21,5	0,51984127	1E+30
\$D\$20	Jornais Embrulho	111,7647059	0	26	3,142857143	0,51984127
\$C\$21	P. Misto Kraft	0	0,550420168	25,75	1E+30	0,550420168
\$D\$21	P. Misto Embrulho	171,4285714	0	28,25	0,550420168	1,357142857
\$C\$22	P. Escritório Kraft	0	1,871848739	23,75	1E+30	1,871848739
\$D\$22	P. Escritório Embrulho	350	0	26,75	1,551020408	1E+30
\$C\$23	Cartão Kraft	0	1,306722689	24,5	1E+30	1,306722689
\$D\$23	Cartão Embrulho	108,4933974	0	25,5	1,21484375	0,78125
\$E\$21	P. Misto Impressão	428,5714286	0	25,5	1,357142857	1E+30
\$E\$22	P. Escritório Impressão	0	1,551020408	27,5	1E+30	1,551020408

Figura 3: Variable Cells

E. Existem outros planos ótimos para o problema?

No relatório de sensibilidade verifica-se que para todas as células de permissível aumentar ou permissível diminuir (allowable increase e allowable decrease respetivamente), os valores são diferentes de 0. Desta forma é possível concluir que este seria o único plano ótimo.

Parte V – ESTUDO DE RENDIMENTO

%	Valor Final
65	43547,8091
70	43547,8091
75	43547,8091
80	43453,4514
85	42955,4922
90	41929,2017
95	41000,6303

Tabela 4 Rendimentos no intervalo de 65% a 95% em incrementos de 5%.

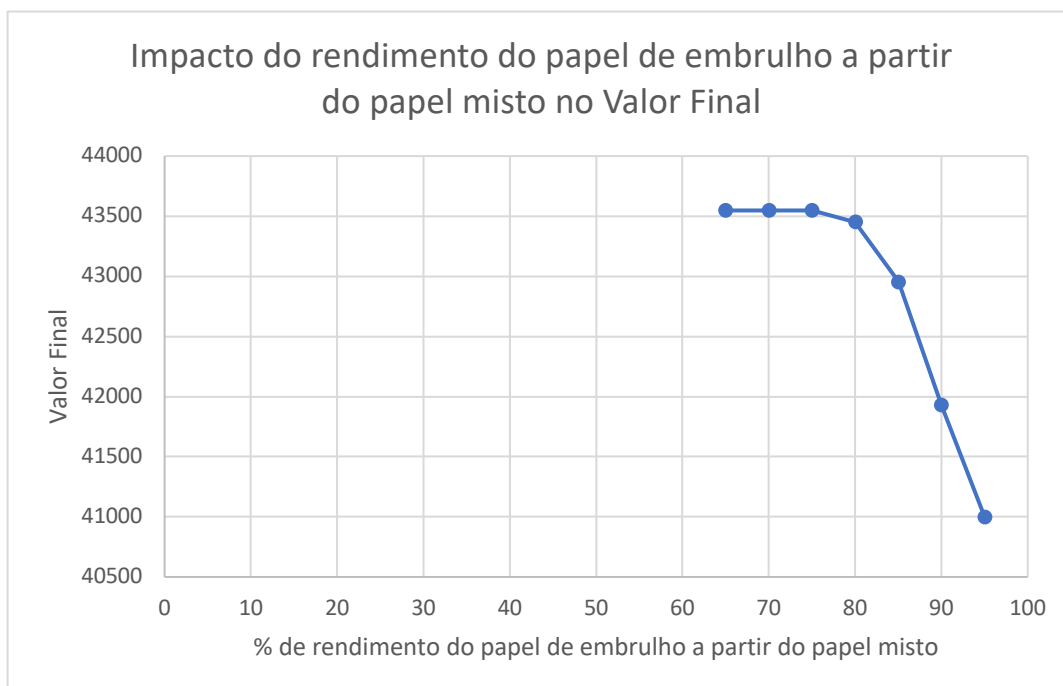


Figura 4 Impacto do rendimento do papel de embrulho a partir do papel misto no Valor Final

A tabela 4, que compara o rendimento (em percentagem) com o custo total (descrito como valor final), verifica-se que para um rendimento entre os 65% e os 75%, o custo total mantém-se e é superior ao custo relativo a um rendimento de 80% em 94,3577€.

No outro intervalo, rendimento entre 80% e 95% verifica-se que o custo total vai sucessivamente diminuindo até aos 41000,6303€ aquando de um rendimento de 95%.

Quanto ao valor que a empresa estaria disposta a pagar no mês seguinte de modo a aumentar o rendimento, neste caso em 5%, seria a diferença entre custos (custo total com rendimento de 85% - custo total com rendimento 80%), que se prende nos 497,9592€.

A figura 4 destaca o impacto do rendimento do papel de embrulho a partir do papel misto no valor final.

Parte VI – PROPOSTA DE ALTERAÇÃO

A empresa TorresPapel concebeu uma nova alternativa para a produção deste mês. Surgiu uma quinta alternativa de material usado, o papel de revista. A TorresPapel pretende agora cumprir as encomendas de 600toneladas de kraft, 600 toneladas de papel de embrulho e 300 toneladas de papel de impressão agora com 5 alternativas no menor custo possível.

Material Usado	Rendimento do Papel		
	Kraft	Embrulho	Impressão
Jornais	85%	80%	0%
P. Misto	90%	80%	70%
P. Escritório	90%	85%	80%
Cartão	80%	70%	0%
Revista	85%	75%	85%

Tabela 5: Rendimento do Papel

Material usado	Toneladas Disponíveis	Custo por tonelada	Custo de Transformação		
			Kraft	Embrulho	Impressão
Jornais	700	15	6,5	11	
P. Misto	600	16	9,75	12,25	9,5
P. Escritório	350	19	4,75	7,75	8,5
Cartão	400	17	7,5	8,5	
Revista	250	18	8	10	9

Tabela 6: Custo de produção de cada papel

Variáveis:

- x_1 Quantidade de Jornal a transformar em papel Kraft
- x_2 Quantidade de Jornal a transformar em papel de Embrulho
- x_3 Quantidade de papel Misto a transformar em papel Kraft
- x_4 Quantidade de papel Misto a transformar em papel de Embrulho
- x_5 Quantidade de papel Misto a transformar em papel de Impressão
- x_6 Quantidade de papel de Escritório a transformar em papel Kraft
- x_7 Quantidade de papel de Escritório a transformar em papel de Embrulho
- x_8 Quantidade de papel de Escritório a transformar em papel de Impressão
- x_9 Quantidade de Cartão a transformar em papel Kraft
- x_{10} Quantidade de Cartão a transformar em papel de Embrulho
- x_{11} Quantidade de papel de Revista a transformar em papel Kraft
- x_{12} Quantidade de papel de Revista a transformar em papel de embrulho
- x_{13} Quantidade de papel de Revista a transformar em papel de impressão

Função minimizante:

$$(15+6,5)x_1 + (15+11)x_2 + (16+9,75)x_3 + (16+12,25)x_4 + (16+9,5)x_5 + (19+4,75)x_6 + (19+7,75)x_7 + (19+8,5)x_8 + (17+7,5)x_9 + (17+8,5)x_{10} + (18+8)x_{11} + (18+10)x_{12} + (18+9)x_{13}$$

Restrições:

- $0,85 x_1 + 0,90 x_3 + 0,90 x_6 + 0,80 x_9 + 0,85 x_{11} = 500$ (encomenda em papel kraft em toneladas)
- $0,80 x_2 + 0,80 x_4 + 0,85 x_7 + 0,70 x_{10} + 0,75 x_{12} = 600$ (encomenda de papel de embrulho em toneladas)
- $0,70 x_5 + 0,80 x_8 + 0,85 x_{13} = 300$ (encomenda de papel de impressão em toneladas)

Solução Ótima:

- Utilizar 588,2353 toneladas de jornais para produzir papel Kraft e 111,7647 toneladas para produzir papel de embrulho;
- Utilizar 125 toneladas de papel misto para imprimir papel de impressão e 266,3603 para produzir papel de embrulho;
- Utilizar 350 toneladas de papel de escritório para produzir papel de embrulho;
- Deixar de utilizar cartão e passar a utilizar 250 toneladas de papel de Revista.

$$x_1 = 588,2353$$

$$x_2 = 111,7647$$

$$x_4 = 266,3603$$

$$x_5 = 125$$

$$x_7 = 350$$

$$x_{10} = 0$$

$$x_3 = x_6 = x_8 = x_9 = 0$$

$$x_{13} = 250$$

Valor Ótimo:

Min. Custo: O custo total será de 42377,61949€.

Ou seja, com a adição do papel de Revista na empresa TorresPapel, foi conseguido minimizar os custos de produção necessários para o mês.

Conclusão

A criação do modelo de programação linear, que se encontra na Parte I e solucionado na parte II, permitiu criar o plano de produção, na Parte III, e analisar o caso da TorresPapel, este modelo, constituído por 10 variáveis, permitiu determinar que de modo a respeitar as encomendas requisitadas a solução ótima seria de 588,2353 toneladas de jornais para produzir papel Kraft e 111,7647 toneladas para produzir papel de embrulho, utilizar 428,5714 toneladas de papel misto para imprimir papel de impressão e 171,4286 para produzir papel de embrulho, utilizar 350 toneladas de papel de escritório para produzir papel de embrulho e utilizar 108,4934 toneladas de cartão para produzir papel de embrulho. Foi ainda determinado que o valor ótimo, que neste caso, simboliza o custo mínimo é de 43453,45€.

Com o estudo de rendimento, na Parte V, entende-se que dos 65% aos 75% o valor do rendimento é igual e que nos 80% atinge o seu valor ótimo, sendo que dos 80% aos 95% o valor decresce não sendo, portanto, um resultado ideal.

Para proposta de alteração ao caso da TorresPapel optou-se por adicionar uma variável, Revista, e concluiu-se que a solução ótima seria utilizar 588,2353 toneladas de jornais para produzir papel Kraft e 111,7647 toneladas para produzir papel de embrulho, utilizar 125 toneladas de papel misto para imprimir papel de impressão e 266,3603 para produzir papel de embrulho e utilizar 350 toneladas de papel de escritório para produzir papel de embrulho deixando também de utilizar 250 toneladas de Cartão e passar a usar de Revista. Determinou-se também que o valor ótimo que representa o custo mínimo, à mesma, é de 42377,61949€. Concluindo então que a adição da variável Revista resulta numa diminuição do custo total.

Apêndices

(Parte IV)

A

No ficheiro Excel alterou-se o valor do custo de transformação do cartão em papel de embrulho para 8€, como se pode ver na tabela 7. Posteriormente, com ajuda do Solver obteve-se o resultado exposto na tabela 8.

Material usado	Toneladas Disponíveis	Custo por tonelada	Custo de Transformação		
			Kraft	Embrulho	Impressão
Jornais	700	15	6,5	11	
P. Misto	600	16	9,75	12,25	9,5
P. Escritório	350	19	4,75	7,75	8,5
Cartão	400	17	7,5	8	

Tabela 7 Custos de produção com alteração do custo de transformação do cartão em papel de embrulho

Custo min:	43399,20468
------------	-------------

Tabela 8 Custo mínimo com a alteração feita na tabela 7

B

Alterou-se o valor das toneladas disponíveis de jornais para 600, como se pode comprovar na tabela 9. Posteriormente, com o Solver obteve-se resultado apresentado na tabela 10.

Material usado	Toneladas Disponíveis	Custo por tonelada	Custo de Transformação		
			Kraft	Embrulho	Impressão
Jornais	600	15	6,5	11	
P. Misto	600	16	9,75	12,25	9,5
P. Escritório	350	19	4,75	7,75	8,5
Cartão	400	17	7,5	8,5	

Tabela 9 Alteração das toneladas de jornais disponíveis.

Custo min:	43767,73709
------------	-------------

Tabela 10 Custo mínimo com a alteração feita na tabela 9.

C

Colocou-se com o valor zero, a quantidade de papel de impressão a ser fabricado, como podemos ver na tabela 11. Posteriormente com a ajuda do Solver, obteve-se o resultado exposto na tabela 12.

Material	Quantidade	Restrições
Kraft	500 =	500
Embrulho	600 =	600
Impressão	0 =	0

Tabela 11 Quantidade de cada material a produzir, alterando o valor do papel de embrulho para 0.

Custo min:	32440,11949
------------	-------------

Tabela 12 Custo mínimo com a alteração feita na tabela 11.

E

Com base na análise de sensibilidade o Permissível Aumentar e o Permissível Diminuir dos termos independentes das restrições verificou-se que nenhum é zero. Logo a solução é não degenerada, tendo apenas uma solução ótima.

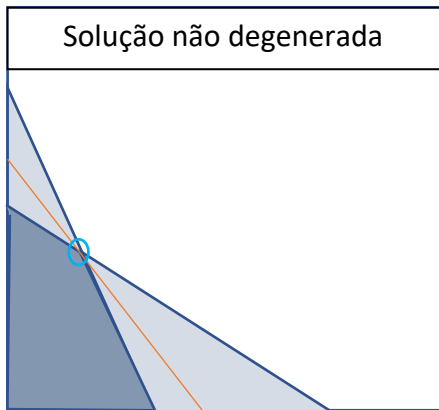


Figura 5 Solução não degenerada

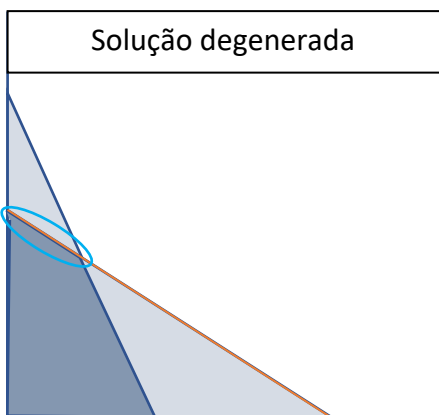


Figura 6 Solução degenerada