Análisis numérico

Tema 1. Aproximación numérica y errores

Ing. Eduardo Flores Rivas

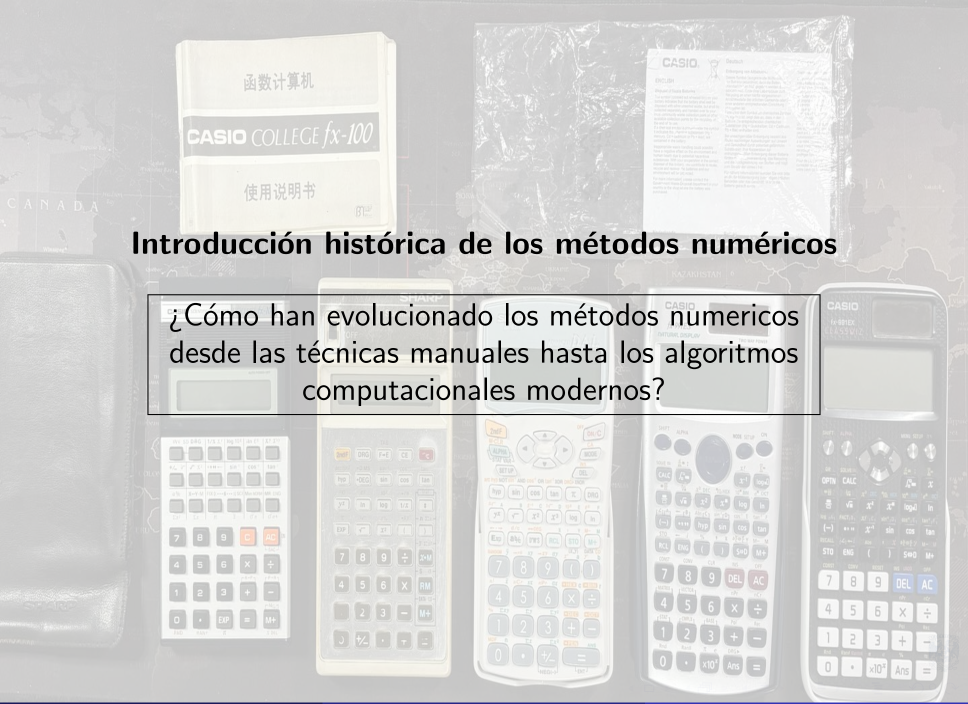
Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional Autónoma de México

Semestre 2026-2

Contenido

OBJETIVO

El estudiante describirá los diferentes tipos de errores que se presentan y las limitaciones de exactitud cuando se utiliza equipo de cómputo. Aplicará el concepto de polinomios de Taylor para aproximar funciones y medirá el error de la aproximación.



Introducción histórica de los métodos numéricos

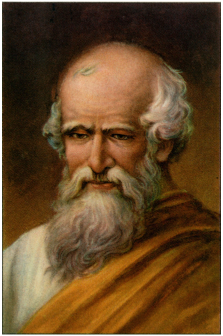
¿Cómo han evolucionado los métodos numericos desde las técnicas manuales hasta los algoritmos computacionales modernos?

Orígenes antiguos: Babilonios (2000 a.C.)

- Aproximación de $\sqrt{2}$: $1; 24, 51, 10$ en base 60
- Equivalente a 1.41421296... (error $\approx 6 \times 10^{-7}$)
- Métodos iterativos para raíces cuadradas

Arquímedes (287-212 a.C.)

- Método de exhaución para π
- Límites: $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$
- Precursor del cálculo integral



Matemáticos indios y árabes

- Brahmagupta (598-668): Método de **Newton** para raíces
- Al-Khwarizmi (780-850): Algoritmos algebraicos
- Etimología: *al-jabr* $\rightarrow$ álgebra

Orígenes antiguos: Chinos

Liu Hiu (225 - 295)

China antigua

- *Nueve capítulos del arte matemático*
- Método de eliminación **gaussiana** (siglo II a.C.)
- Sistema decimal posicional temprano

Newton (1643-1727) y Leibniz (1646-1716)

- Cálculo diferencial e integral
- Método de Newton-Raphson (1671)
- Serie de Taylor (publicada por Brook Taylor, 1715)

Desarrollo sistemático (siglos XVI-XIX)

Gauss (1777-1855)

- Eliminación gaussiana (redescubrimiento)
- Método de cuadratura gaussiana
- Mínimos cuadrados (1809)

Desarrollo sistemático (siglos XVI-XIX)

Legendre, Lagrange, Fourier

- Polinomios de Legendre para integración
- Interpolación de Lagrange (1795)
- Series de Fourier para EDP (1822)

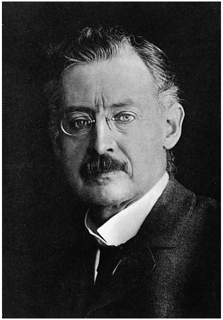
Herramientas de cálculo:

- Ábacos $\rightarrow$ Regla de cálculo (1632) $\rightarrow$ Calculadoras mecánicas
- Tablas matemáticas (logaritmos, funciones)

La era computacional (siglo XX)

Precursores (1900-1945)

- Runge-Kutta (1901) para EDO
- Métodos de diferencias finitas
- Calculadoras electromecánicas



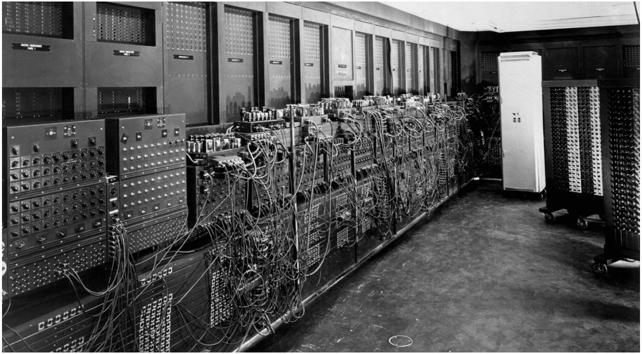
Carl Runge (1856 - 1927)

Martin W. Kutta (1867 - 1944)

La era computacional (siglo XX)

Primeras computadoras

- ENIAC (1946): Artillería balística
- Método de Montecarlo (Metropolis, 1949)
- Análisis de errores sistemático

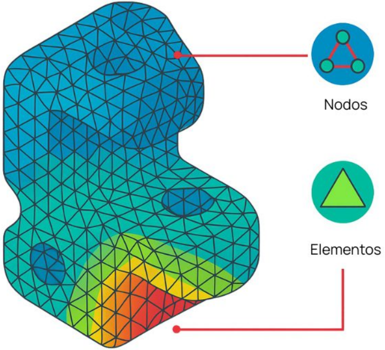


Electronic numerical integrator and computer

La era computacional (siglo XX)

Desarrollos

- Análisis numérico como disciplina (1947)
- Algoritmo simplex (Dantzig, 1947)
- Método de elementos finitos (Courant, 1943)
- FFT (Cooley-Tukey, 1965)



La era computacional (siglo XX)

Lenguajes científicos

- FORTRAN (1957): primer lenguaje de alto nivel
- MATLAB (1984): entorno interactivo
- Python/NumPy (1995-2006): código abierto

Ejercicio histórico: Método babilónico

Algoritmo (3000 años de antigüedad):

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{S}{x_n}\right)$$

donde S es el número cuya raíz se busca.

Ejecución manual para $S = 2$, $x_0 = 1$:

1. Primera iteración:
$$x_1 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2}{1}\right) = 1.5$$
2. Segunda iteración:
$$x_2 = \frac{1}{2}\left(1.5 + \frac{2}{1.5}\right) = \frac{1}{2}(1.5 + 1.3333) = 1.416666...$$
3. Tercera iteración:
$$x_3 = \frac{1}{2}\left(1.416666 + \frac{2}{1.416666}\right) \approx 1.4142156...$$
4. Error relativo porcentual: $\approx 1.5 \times 10^{-4}\,\%$

Impacto en la ingeniería: Casos históricos

Aeroespacial (1960s)

- Cálculo de trayectorias Apollo
- Integración numérica de EDO
- Precisión: error $< 1[km]$ en $384,400[km]$

Estructural

- Análisis de puentes y rascacielos
- Método de elementos finitos
- Optimización de materiales

Clima y medio ambiente

- Modelos de circulación atmosférica
- Diferencias finitas en 3D
- Predicción numérica del tiempo

Electrónica y comunicaciones

- Simulación de circuitos
- Procesamiento de señales
- Compresión de datos

Evolución de capacidades:

- 1940: 500 operaciones/segundo (ENIAC)
- 2020: 10^{18} operaciones/segundo (supercomputadoras)
- Incremento de 2×10^{15} en 80 años

Conclusiones: Importancia del contexto histórico

Lecciones

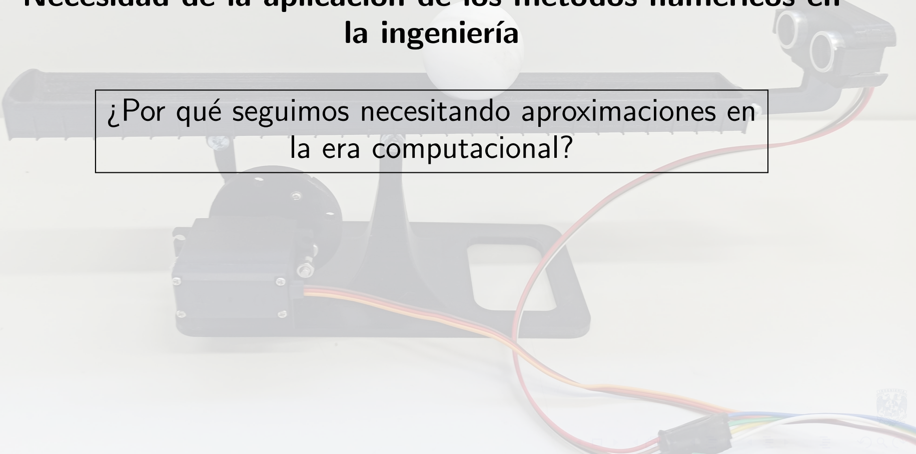
1. Los métodos numéricos evolucionan en respuesta a necesidades prácticas
2. Las ideas fundamentales suelen preceder a la tecnología para implementarlas
3. La comprensión histórica ayuda a:
   - Apreciar la elegancia de los métodos
   - Comprender limitaciones y supuestos
   - Anticipar desarrollos futuros

Perspectiva para el curso:

- Aprenderemos métodos que tienen siglos de desarrollo
- Implementaremos con tecnología del siglo XXI

Necesidad de la aplicación de los métodos numéricos en la ingeniería

¿Por qué seguimos necesitando aproximaciones en la era computacional?



Limitaciones de las soluciones analíticas exactas

Casos con solución analítica

- Ecuaciones algebraicas simples
- EDO lineales con coeficientes constantes
- Sistemas pequeños de ecuaciones lineales
- Integrales de funciones elementales

Ejemplos clásicos:

$$\frac{dy}{dx} + 2y = 0 \Rightarrow y = Ce^{-2x}$$

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$$

Realidad de la ingeniería

- No linealidades
- Condiciones de frontera complejas
- Dominios irregulares
- Propiedades variables en tiempo/espacio
- Acoplamientos múltiples de fenómenos

Ejemplo real:

- Ecuación de Navier-Stokes (fluidos)
- No tiene solución general analítica conocida

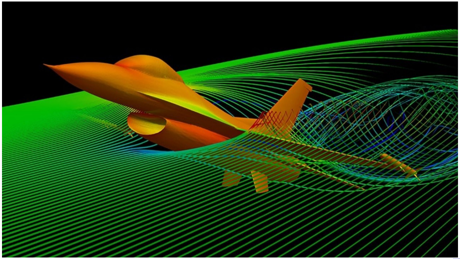
Problemas de ingeniería sin solución exacta

1. Dinámica de fluidos computacional (CFD)

Ecuación de Navier-Stokes:

$$\rho\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v}\right) = -\nabla p + \mu\nabla^2\mathbf{v} + \mathbf{f}$$

- **Aplicación:** Diseño aerodinámico de aviones
- **Solución:** Volúmenes finitos + supercomputación
- **Resultado:** Reducción de arrastre



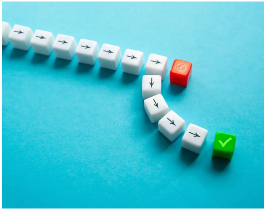
Ventajas estratégicas en ingeniería

Costo y tiempo

- **Prototipos virtuales:** Reducción de costos
- **Rápida iteración:** Probabilidad de éxito $\uparrow$
- **Optimización:** Encontrar mínimo local/global

Flexibilidad

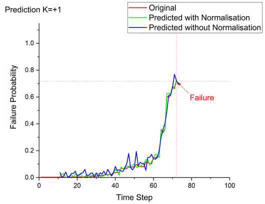
- **Parámetros variables:** Sensibilidad a cambios
- **Escenarios múltiples:** Análisis de "qué pasa si"
- **Escalabilidad:** De micro a macro escala



Ventajas estratégicas en ingeniería

Seguridad y confiabilidad

- **Condiciones extremas:** Pruebas sin riesgo
- **Validación:** Comparación con casos límite
- **Monitoreo:** Predicción de fallas



Integración multidisciplinaria

- **Acoplamiento:** Térmico-estructural-fluidodinámico
- **Procesos multiescala:** De átomos a estructuras
- **Ciclo de vida completo:** Diseño $\rightarrow$ Operación $\rightarrow$ Mantenimiento

Ejemplo: Péndulo simple vs. real

Problema: Determinar el período de oscilación

Péndulo simple (lineal)

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\theta = 0$$

Solución exacta
($L = 1[m],\ g = 9.81[m/s^2]$):

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \approx 2.006 \text{ s}$$

Simplificaciones:

- Ángulos pequeños ($\sin\theta \approx \theta$)
- Sin fricción
- Masa puntual

Péndulo real (no lineal)

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{c}{mL}\frac{d\theta}{dt} + \frac{g}{L}\sin\theta = 0$$

Solución numérica
(Runge-Kutta 4° orden):

θ_0 (grados)	T (s)
5	2.008
30	2.041
60	2.156
90	2.395

Conclusión: El período depende de la amplitud en sistemas reales.

Responsabilidad en la aplicación numérica

Principio

"La solución numérica no es la realidad, es un modelo aproximado"

Errores comunes a evitar:

- **Error de modelado:** Supuestos incorrectos
- **Error de discretización:** Malla muy gruesa
- **Error de convergencia:** Iteraciones insuficientes
- **Error de interpretación:** Confiar ciegamente en resultados

Verificación y validación (V&V):

1. **Verificación:** ¿Resolvimos bien las ecuaciones? (comparación con solución analítica del problema lineal)
2. **Validación:** ¿Resolvimos las ecuaciones correctas? (comparación con datos experimentales)

Criterio de aceptación ingenieril: Error $<$ Tolerancia

El rol del ingeniero moderno

Competencias necesarias

1. **Comprensión física:** Identificar fenómenos dominantes
2. **Habilidad matemática:** Formular el problema adecuadamente
3. **Conocimiento numérico:** Seleccionar el método apropiado
4. **Criterio ingenieril:** Interpretar resultados con escepticismo saludable
5. **Habilidad computacional:** Implementar eficientemente

Evolución del perfil profesional:

- **Pasado:** Cálculo manual + experiencia intuitiva
- **Presente:** Simulación numérica + validación experimental
- **¿Futuro?:** IA + métodos numéricos + realidad aumentada

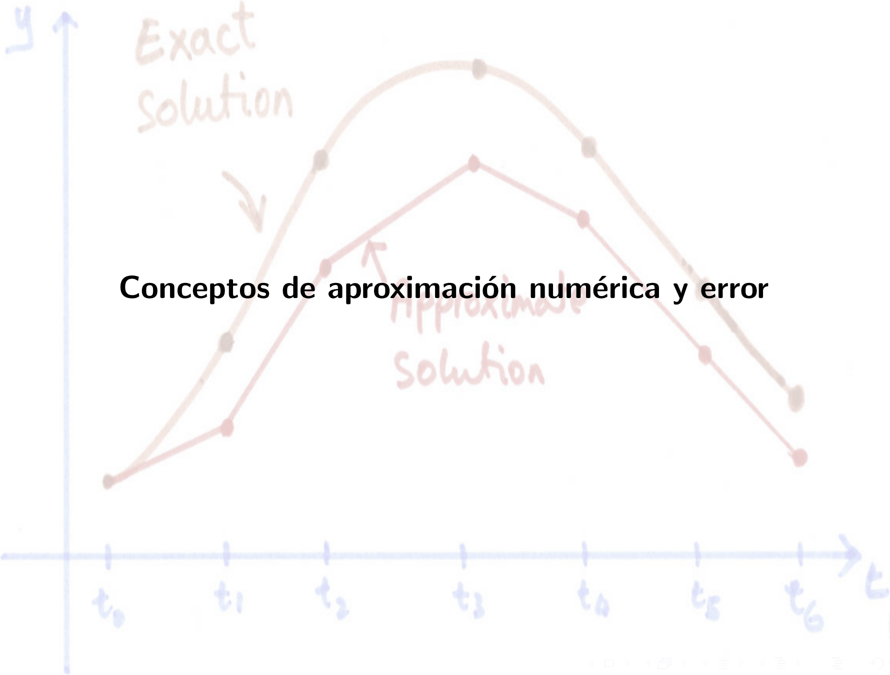
Tarea 1: Investigación de aplicaciones

Objetivo

Identificar una aplicación concreta de métodos numéricos en tu campo de ingeniería, reconociendo su importancia práctica.

Instrucciones:

1. **Selección del caso:** Elige un problema específico de tu especialidad que requiera métodos numéricos para su solución.
2. **Investigación:** Busca información sobre:
   - ¿Qué problema de ingeniería se resuelve?
   - ¿Qué método(s) numérico(s) se emplean?
   - ¿Por qué no puede resolverse analíticamente?
   - ¿Qué software/tools se utilizan en la industria?
3. **Entrega:** Documento escrito a mano (papel o tablet), entregado en la plataforma, máximo 2 páginas.



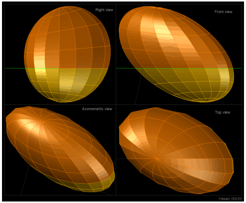
Conceptos de aproximación numérica y error

Definición

Una **aproximación numérica** es una representación simplificada de un valor exacto, obtenida mediante un proceso algorítmico finito, que busca mantener la mayor precisión posible dentro de restricciones computacionales y prácticas.

Características esenciales:

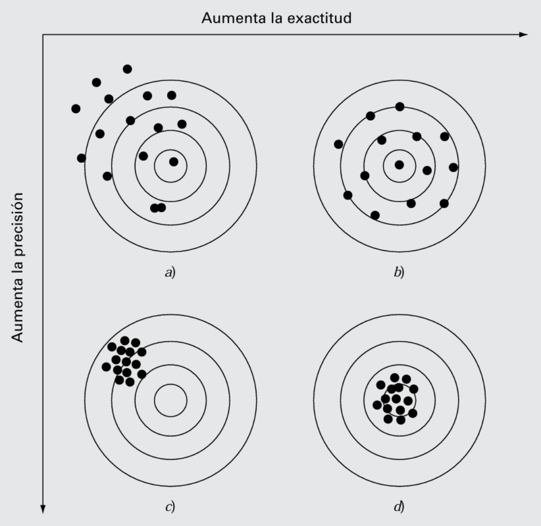
- **Finitud:** Se obtiene en número finito de pasos
- **Exactitud controlada:** Precisión cuantificable y ajustable
- **Computabilidad:** Implementable en equipos digitales
- **Eficiencia:** Balance entre precisión y costo computacional



T

Precisión y exactitud

Precisión: qué tan cerca está una medida de otra.
Exactitud: qué tan cerca está una medida del valor patrón.



Exactitud numérica

La exactitud de una solución depende de la exactitud de dos factores:

- Los datos proporcionados
- Los cálculos desarrollados

Cifra significativa: cifra diferente a cero que conforma un número; entre más a la izquierda se encuentre, más significativa es.

La solución solo puede ser tan exacta como el menos exacto de esos dos factores. En ingeniería, rara vez se conocen los datos con una exactitud mayor al 0.2 %; por lo que usaremos como criterio el registrar 4 cifras significativas para los números que empiecen por 1 y 3 cifras para los demás casos.

Por ejemplo, si los cálculos arrojan una fuerza de 32[N] deberá anotarse como 32.0[N] y una altura de 1.5[m] deberá anotarse como 1.500[m].

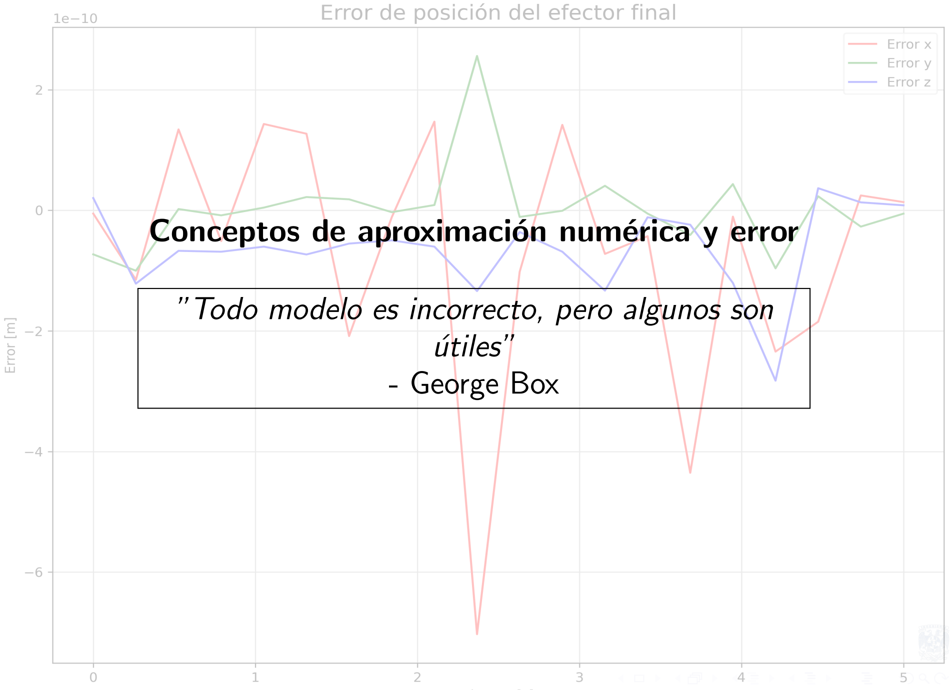
Redondeo simétrico

Complementando la exactitud numérica, se aplicará redondeo simétrico, que consiste en truncar el número de acuerdo al número de cifras significativas (3 o 4), redondeando la última cifra como se explica a continuación:

- **Hacia arriba**: si la cifra siguiente es 5, 6, 7, 8 o 9.
- **Hacia abajo**: si la cifra siguiente es 0, 1, 2, 3 o 4.

Por ejemplo:

- $123456789 \rightarrow 123500000$
- $5389.77 \rightarrow 5390$
- $3.1416 \rightarrow 3.14$
- $1.77 \rightarrow 1.770$



Conceptos de aproximación numérica y error

"Todo modelo es incorrecto, pero algunos son útiles"
- George Box

Error: Definición y tipos

Error numérico

La incertidumbre o error numérico es una medida del ajuste o cálculo de una magnitud con respecto al valor real o teórico que dicha magnitud tiene.

- **Errores computacionales**: Son errores que no se pueden evitar, pues surgen de las limitaciones de los sistemas computacionales.
  1. Error de redondeo
  2. Error de truncamiento
  3. Error de aproximación
- **Errores matemáticos**: Son errores que permiten medir qué tan cerca se encuentra un valor respecto a otro.
  1. Error absoluto
  2. Error relativo

Error de redondeo

Aparece cuando se redondean las cifras de un número para simplificar cálculos. Dada la existencia de números periódicos $(1/3)$ e irracionales (π), se vuelve necesario redondear. Resulta insignificante en un solo cálculo, pero se propaga a los cálculos siguientes.

Ejemplo: Propagación del error al calcular $\sin(\pi)$

Aproximación de π	**Dígitos**	$\sin(\pi_{\textbf{aprox}})$
π (valor exacto)	–	0
$\pi_1 = 3$	1	$\sin(3) = 0.1411200$
$\pi_2 = 3.14$	3	$\sin(3.14) = 0.0015927$
$\pi_3 = 3.1416$	5	$\sin(3.1416) = -7.3464 \times 10^{-6}$
$\pi_4 = 3.141592653589793$	16	1.2246×10^{-16}

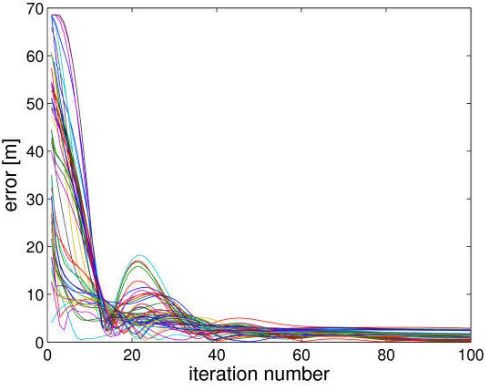
CONCURSO:

Decimales de π

π = 3,14159265358979323846...

¿Cuándo truncar el cálculo?

Se debe verificar el comportamiento del sistema a lo largo del tiempo, y establecer un criterio de detención, ya sea en forma de un número máximo de iteraciones o un mínimo cambio entre el paso actual y el anterior.



Error de aproximación: Realidad y modelo

Definición: Error que surge de la discrepancia entre un fenómeno real y su representación matemática abstracta. Es inevitable porque ningún modelo puede capturar perfectamente toda la complejidad de la realidad.

Principio

"Todos los modelos son incorrectos, pero algunos son útiles"

- George E.P. Box

Objetivo ingenieril: Desarrollar modelos que capturen las **características esenciales** para el caso de estudio específico, balanceando:

- **Fidelidad:** Capacidad de representar la realidad
- **Simplicidad:** Facilidad de análisis y solución
- **Costo computacional:** Recursos requeridos

Ejemplo: Tres niveles de modelado

Problema: Analizar el movimiento de una pelota de beísbol.

Característica	**Partícula**	**Rígido**	**Deformable**
Dimensiones consideradas	✗	✓	✓
Forma constante	✗	✓	✗
Permite rotación	✗	✓	✓
Distribución de masa relevante	✗	✓	✓
Permite deformación	✗	✗	✓
Análisis interno (esfuerzos)	✗	✗	✓

Selección del modelo: Criterios ingenieriles

Pregunta: ¿Qué nivel de detalle es necesario para la aplicación?

Caso de estudio	**Modelo**	**Justificación**
Trayectoria en vacío	Partícula	Aerodinámica despreciable
Lanzamiento con efecto	Cuerpo rígido	Rotación afecta trayectoria
Impacto con bate	Deformable	Deformación afecta rebote
Diseño del material	Microestructura	Propiedades materiales

Regla heurística: "Usar el modelo más simple que capture los fenómenos relevantes"

Costo computacional:

- Partícula: $O(1)$
- Cuerpo rígido: $O(n)$
- Deformable: $O(n^3)$

Paradoja del modelado:

- Modelos simples: Fáciles de resolver, menos precisos
- Modelos complejos: Difíciles de resolver, más precisos
- **Solución:** Métodos numéricos para modelos complejos

Error absoluto: Medida de la desviación

Definición

El **error absoluto** (E_a) es la magnitud de la diferencia entre un valor x_p, y otro x_a. Por lo general, se trata del valor patrón y un valor aproximado, pero también puede darse entre el valor actual y el valor anterior.

$$E_a = |x_p - x_a|$$

Características:

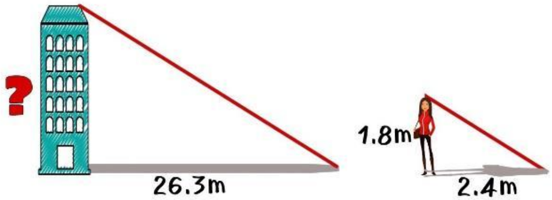
- **Unidades:** Iguales que las de la cantidad medida
- **Siempre positivo:** Se usa valor absoluto
- **Interpretación:** Qué tan lejos está la aproximación del valor real
- **Limitación:** No da perspectiva sobre la magnitud del valor

Ejemplo: Medición de longitud

- Valor patrón: $L_v = 1.000$ m
- Valor medido: $L_a = 0.995$ m
- Error absoluto: $E_a = |1.000 - 0.995| = 0.005 \text{ m} = 5 \text{ mm}$

Ejercicio: Error absoluto

Imagina que te solicitan medir un edificio, usando la sombra proyectada por la construcción y tu propia sombra, aproximas la altura del edificio.



- Si en los planos del edificio se dice que tiene una altura de 19.8[m], ¿cuál fue el error absoluto de la aproximación? ¿Resulta aceptable?
- Si ese error absoluto hubiera sido obtenido en el cálculo de la altura de una banca de 50[cm], ¿sería aceptable?

Error relativo: Medida normalizada de la precisión

Definición formal

El **error relativo** (E_r) es el error absoluto normalizado respecto a un valor, por lo general el patrón o el anterior cálculo:

$$E_r = \frac{|x_p - x_a|}{|x_p|} = \frac{E_a}{|x_p|}, \quad x_p \neq 0$$

Características:

- **Adimensional:** No tiene unidades
- **Perspectiva:** Proporciona significado al error absoluto
- **Rango:** $0 \leq E_r < \infty$ (idealmente cercano a 0)
- **Versátil:** Permite comparar errores en diferentes escalas

Ejemplo comparativo:

- **Caso A:** $x_p = 1000[m]$, $x_a = 999[m] \Rightarrow E_a = 1[m]$, $E_r = 0.001$
- **Caso B:** $x_p = 1[m]$, $x_a = 0[m] \Rightarrow E_a = 1[m]$, $E_r = 1$
- **Conclusión:** Mismo error absoluto, significados diferentes

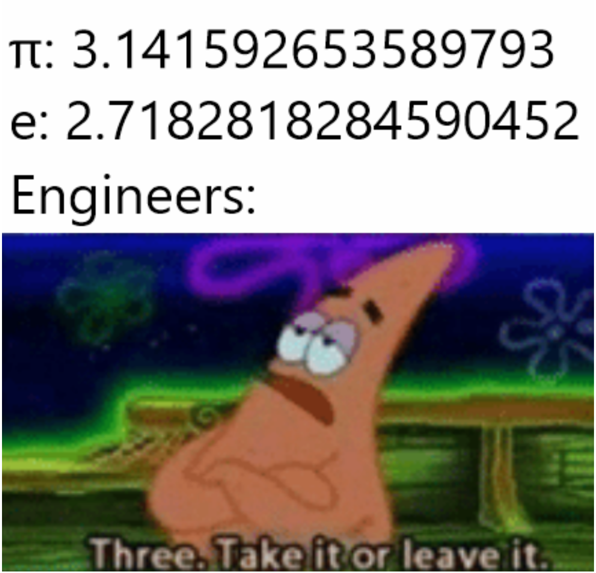
Error de precisión

Aparece cuando se corta un número, seleccionando cierto número de cifras. Por ejemplo, en computación, el tipo de una variable determina el tamaño de información que puede almacenar. Un `float` no puede alcanzar la misma precisión que un `double`, por lo que se debe truncar para usar menos decimales.

Ejemplo en Python: Representación de π con diferentes tipos de datos

Tipo de dato	**Bits**	**Precisión**	**Valor almacenado de π**
`int` (entero)	32 o 64	Enteros	3
`float` (simple)	32 bits	$\sim$7 decimales	3.1415927
`double` (doble)	64 bits	$\sim$15-16 decimales	3.141592653589793
`Decimal`	Arbitraria	Configurable	3.14159265358979323846...

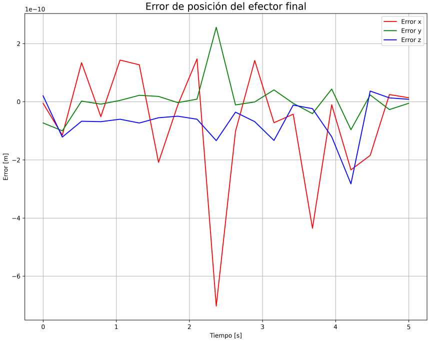
¿Te gustan las matemáticas?



La relatividad del error: Contexto y escala

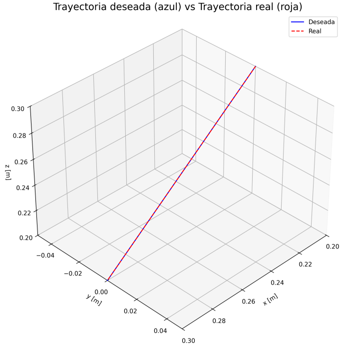
Problema: Un número aislado carece de significado. Solo podemos juzgar la magnitud de un error comparándolo con la escala del fenómeno estudiado.

Gráfica 1: Error de posición



- Error en cada coordenada (x, y, z)
- ¡Parece enorme en esta escala!

Gráfica 2: Trayectoria completa

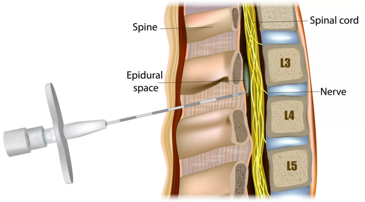


- Trayectorias real vs. deseada
- Prácticamente indistinguibles

Contexto anatómico: ¿Qué significa realmente este error?

Escalas relevantes en procedimiento epidural:

Estructura	Dimensión
Espacio interlaminar	4-6 mm
Espacio epidural posterior	3-5 mm
Ligamento amarillo	2-4 mm
Dura máter	0.3-0.5 mm
Diámetro aguja epidural	1.0-1.3 mm



Interpretación en contexto clínico:

Límites de error críticos

- Error $> 1[mm]$: Riesgo de punción dural
- Error $> 0.5[mm]$: Riesgo de parestesia
- Error $> 0.1[mm]$: Técnica no óptima
- Error $< 0.01[mm]$: Excelente precisión

Sistema robótico:

- Error máximo: $0.000000658[mm]$

Tres perspectivas para evaluar errores

1. Perspectiva absoluta
   - Sin contexto, solo es un número
   - **Peligro:** Puede llevar a conclusiones erróneas
2. Perspectiva relativa
   - Compara con escala del problema
   - Error relativo
   - **Interpretación:** ¿es suficiente precisión?
3. Perspectiva de tolerancia
   - Compara con límites aceptables
   - **Conclusión:** ¿se encuentra dentro de la tolerancia?

Regla de oro en análisis numérico

Nunca evalúes un error sin considerar: (1) La escala del problema, (2) Los requisitos de precisión, y (3) Las tolerancias prácticas.

Ejemplo: Paracaidista analítico

Un paracaidista como el de la figura experimenta una fuerza de atracción hacia la Tierra F_D y una fuerza hacia arriba debida a la resistencia del aire F_U. La fuerza neta está dada por

$$\sum F = F_D + F_U$$

Estableciendo el sistema de referencia positivo hacia abajo, se pueden expresar las fuerzas como $F_D = mg$ (donde m es la masa del paracaidista y g la aceleración debida a la gravedad) y $F_U = -cv$ (donde c es el coeficiente de arrastre y v es la rapidez de caída).

Ejemplo: Paracaidista analítico

Por la segunda ley de Newton

$$\sum F = ma \quad \rightarrow \quad a = \frac{\sum F}{m} = \frac{F_D + F_U}{m} = \frac{mg - cv}{m}$$

Usando la definición de la aceleración

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{c}{m}v$$

La solución de la EDO de primer orden es

$$v(t) = \frac{gm}{c} + (v_0 - \frac{gm}{c})e^{-\frac{c}{m}t}$$

Suponiendo que el paracaidista estaba en reposo al inicio ($v_0 = 0[m/s]$)

$$v(t) = \frac{gm}{c} - \frac{gm}{c}e^{-\frac{c}{m}t} = \frac{gm}{c}(1 - e^{-\frac{c}{m}t})$$

Ejercicio: Solución analítica del paracaidista

Usando el modelo del paracaidista en caída libre

$$v(t) = \frac{gm}{c}(1 - e^{-\frac{c}{m}t})$$

y los parámetros $m = 68.1[kg]$ y $c = 12.5[kg/s]$, calcular la velocidad terminal (velocidad máxima que alcanza).

Generar una tabla con las velocidades en el intervalo desde $t = 0[s]$ hasta $t = 12[s]$ y graficar los datos obtenidos.

Ejemplo: Paracaidista numérico

La ecuación $v(t) = \frac{gm}{c}(1 - e^{-\frac{c}{m}t})$ es la solución analítica que satisface con exactitud la EDO original, sin embargo, existen muchos modelos matemáticos que no pueden resolverse de manera exacta; en estos caso, la única alternativa es resolverlo numéricamente.

Supongamos que no somos capaces de resolver analíticamente la EDO, podemos utilizar la aproximación en diferencias finitas para aproximar la derivada

$$\frac{dv}{dt} \approx \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t_{i+1}) - v(t_i)}{t_{i+1} - t_i}$$

Así, el modelo aproximado estará dado por

$$\frac{v(t_{i+1}) - v(t_i)}{t_{i+1} - t_i} = g - \frac{c}{m}v(t_i)$$

Despejando la velocidad obtenemos en t_{i+1} obtenemos

$$v(t_{i+1}) = v(t_i) + [g - \frac{c}{m}v(t_i)](t_{i+1} - t_i)$$

Ejercicio: Solución numérica del paracaidista

Planteamiento: Para el modelo aproximado

$$v(t_{i+1}) = v(t_i) + [g - \frac{c}{m}v(t_i)](t_{i+1} - t_i)$$

y usando un tamaño de paso $t = 2[s]$, generar una tabla con las velocidades en el intervalo desde $t = 0[s]$ hasta $t = 12[s]$ y graficar los datos obtenidos. Comparar con los valores de la solución analítica.

Pregunta: ¿Cómo podríamos determinar el valor de la velocidad terminal?

Método numérico: Definición y características

Definición

Un **método numérico** es un procedimiento sistemático, finito y algorítmico diseñado para obtener soluciones aproximadas a problemas matemáticos que no admiten solución analítica exacta o cuya solución exacta es computacionalmente inaccesible.

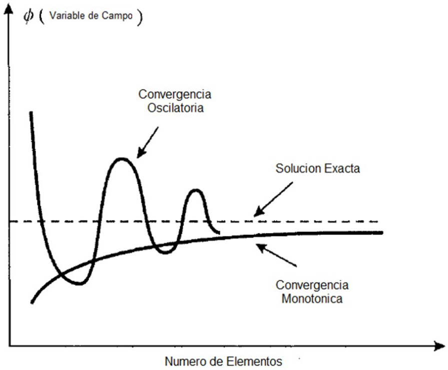
Componentes esenciales de un método numérico:

1. **Formulación:** obtención del problema computable
2. **Algoritmo:** Secuencia finita de operaciones elementales
3. **Criterio de parada:** Condición para terminar el proceso
4. **Estimación de error:** Compara la aproximación
5. **Análisis de convergencia:** Comportamiento asintótico
6. **Análisis de estabilidad:** Sensibilidad a perturbaciones
7. **Implementación:** Traducción a código ejecutable
8. **Validación:** Verificación con pruebas

Características deseadas del método numérico

Propiedades deseables:

- **Consistencia:** El método aproxima bien el problema original
- **Convergencia:** La solución aproximada tiende a la exacta
- **Estabilidad:** Pequeños errores no se amplifican
- **Eficiencia:** Bajo costo computacional
- **Robustez:** Funciona bien en diversos casos



Tipos de métodos numéricos: Iterativos

Métodos de aproximaciones sucesivas (iterativos):

- Generan una secuencia $\{x_n\}$ que converge a la solución
- **Características:**
  - Criterio de parada: $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$ o $n > N_{\text{máx}}$
  - Orden de convergencia: lineal, cuadrático, etc.
  - Requieren valor inicial x_0
- **Ejemplos:**
  - Bisección (convergencia lineal, $C = 0.5$)
  - Newton-Raphson (convergencia cuadrática)
  - Punto fijo (convergencia lineal)
  - Jacobi/Gauss-Seidel (sistemas lineales)
- **Aplicación:** Ecuaciones no lineales, sistemas lineales

Tipos de métodos numéricos: Incrementales

Métodos de paso a paso (incremental):

- Avanzan desde condiciones iniciales en pasos discretos
- **Características:**
  - Tamaño de paso h (fijo o adaptable)
  - Discretización del dominio
  - Propagación de solución
- **Ejemplos:**
  - Euler (explícito e implícito)
  - Runge-Kutta (2º, 4º orden)
  - Métodos multipaso (Adams-Bashforth)
  - Diferencias finitas para EDPs
- **Aplicación:** EDOs, EDPs, problemas de evolución

Estabilidad numérica

Definición

Un método numérico es **estable** si pequeños cambios en los datos de entrada o en los cálculos intermedios producen pequeños cambios en el resultado final.

El error no se amplifica sin control durante el proceso computacional.

Tipos de inestabilidad:

Inestabilidad inherente

- Problema mal condicionado
- Pequeños cambios en entrada $\Rightarrow$ grandes cambios en salida
- **Ejemplo:** Resolver $Ax = b$ con A casi singular

Inestabilidad algorítmica

- Método numérico inadecuado
- Errores de redondeo se acumulan
- **Ejemplo:** Restar números casi iguales

Convergencia

Definición

Un método numérico es **convergente** si la secuencia de aproximaciones $\{x_n\}$ generada tiende al valor exacto x^* cuando el parámetro de discretización (como el tamaño de paso h o el número de iteraciones n) tiende a su límite.

Formalización matemática:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x^* \quad \text{o} \quad \lim_{h\to 0} x_h = x^*$$

donde $|x_n - x^*| \to 0$ cuando $n \to \infty$.

Consideraciones

- **Convergencia lenta:** Si $\varepsilon_r^{(i)}$ decrece muy lentamente, considerar cambio de método
- **Oscilación:** Si $\varepsilon_r^{(i)}$ oscila, el método puede no converger

Criterios de convergencia

Los criterios de convergencia dependen del problema y del algoritmo empleado para su solución.

Métodos iterativos: Criterio basado en error relativo aproximado

$$\varepsilon_r^{(i)} = \left| \frac{x_i - x_{i-1}}{x_i} \right| \times 100\,\%, \quad x_i \neq 0$$

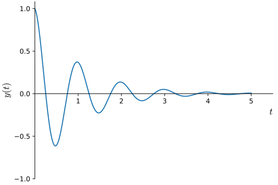
Criterio de parada:

$$\varepsilon_r^{(i)} < \varepsilon_{\text{tol}}$$

donde ε_{tol} es tolerancia predefinida (ej: 0.1 %, 0.001 %)

Alternativas comunes:

- Error absoluto: $|x_i - x_{i-1}| < \delta$
- Residual: $|f(x_i)| < \delta_f$
- Iteraciones máximas: $i > N_{\text{máx}}$
- Combinación: Cualquiera que se cumpla primero



Relación entre consistencia, estabilidad y convergencia

Teorema fundamental del análisis numérico (Lax):

Consistencia + Estabilidad $\Rightarrow$ Convergencia

1. **Consistencia:** El método aproxima bien el modelo

$$\text{Error de truncamiento local} \to 0 \quad \text{cuando} \quad h \to 0$$

2. **Estabilidad:** El error no crece sin control

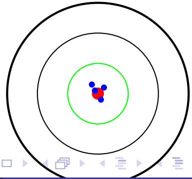
$$\|\text{Error total}\| \leq C \cdot \|\text{Error inicial}\|$$

3. **Convergencia:** La solución numérica tiende a la exacta

$$\|x_{\text{num}} - x_{\text{exacta}}\| \to 0 \quad \text{cuando} \quad h \to 0$$

Analogía con tiro al blanco:

- Consistente: Apunta al centro
- Estable: Agrupado
- Convergente: Da en el blanco



Serie de Taylor: Aproximación polinomial de funciones

Teorema de Taylor (Brook Taylor, 1715)

Sea $f(x)$ una función infinitamente derivable en un intervalo abierto que contiene al punto a. Entonces $f(x)$ puede expresarse como una serie de potencias centrada en a:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

donde $f^{(n)}(a)$ denota la n-ésima derivada de f evaluada en $x = a$.

Desarrollo de la serie:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots$$

Otras consideraciones

Serie de Maclaurin ($a = 0$):

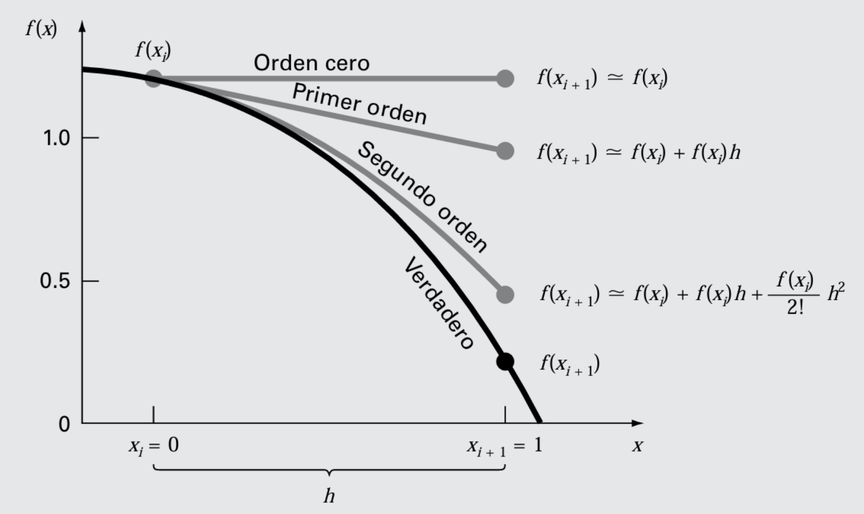
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$
- $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$
- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots$

Interpretación geométrica:

- $f(a)$: Aproximación constante
- $f(a) + f'(a)(x - a)$: Aproximación lineal (recta tangente)
- Términos superiores: Correcciones por curvatura
- Más términos $\Rightarrow$ mejor aproximación

Aproximaciones con Taylor



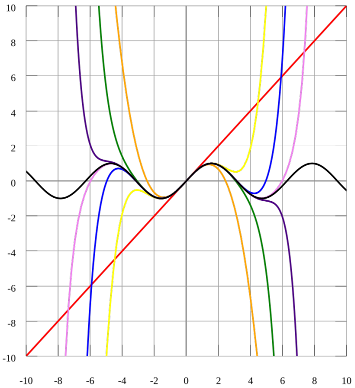
Polinomio de Taylor

Polinomio de Taylor de orden n

La aproximación polinomial de grado n para $f(x)$ alrededor de $x = a$:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

donde $P_n(x)$ aproxima $f(x)$ cerca de $x = a$.



Interpretación del residuo

Teorema de Taylor con Residuo

Si $f(x)$ es $(n+1)$ veces derivable en un intervalo que contiene a y x, entonces existe ξ entre a y x tal que:

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

donde el **residuo** (o error de truncamiento) en forma de Lagrange es:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

- $R_n(x)$ representa el error al aproximar $f(x)$ por $P_n(x)$
- ξ es un punto desconocido entre a y x
- El residuo depende de la $(n+1)$-ésima derivada de f

Cota teórica del error

Definición

La **cota teórica** del error es un límite superior garantizado para la magnitud del error de aproximación. No es una estimación precisa del error real, sino una garantía de que el error real **nunca excederá** este valor.

Formulación para el residuo de Taylor (forma de Lagrange):

$$|R_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|x-a|^{n+1}$$

donde:

- $R_n(x)$: Error real al usar polinomio de Taylor de orden n
- $M_{n+1} = \max\limits_{\xi \in [a,x]} |f^{(n+1)}(\xi)|$: Valor máximo de la $(n+1)$-ésima derivada en el intervalo
- a: Centro de la expansión
- x: Punto donde se evalúa la aproximación

Ejercicio: Aproximación de $e^{0.5}$ con Polinomios de Taylor

Objetivo: Aproximar $f(0.5)$ donde $f(x) = e^x$, usando polinomios de Taylor centrados en $a = 0$ (Maclaurin)

1. Calcular $P_0(0.5)$, $P_1(0.5)$, $P_2(0.5)$, $P_3(0.5)$
2. Para cada aproximación, calcular:
   - Error absoluto: $E_a = |e^{0.5} - P_n(0.5)|$
   - Error relativo: $E_r = E_a/e^{0.5}$
   - Error porcentual: $\varepsilon = E_r \times 100\,\%$
3. Calcular el residuo teórico $R_n(0.5)$ usando la fórmula de Lagrange
4. Comparar error real vs. cota teórica del residuo

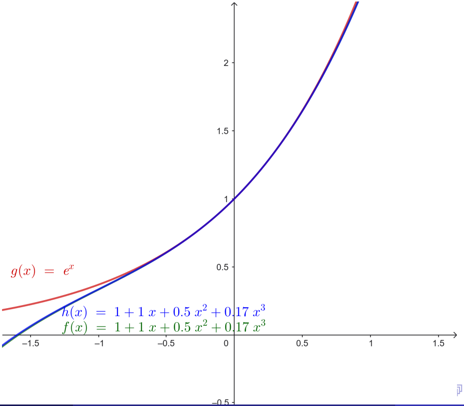
Resultados: e^x

Usando diferencias finitas

$$P_3(x) = 1.0 + 0.999999x + 0.499999x^2 + 0.168396x^3$$

Usando derivada analítica

$$P_3(x) = 1.0 + 1.0x + 0.5x^2 + 0.166666x^3$$



Objetivo: Aproximar $f(3.14)$ donde $f(x) = \sin(x)$, usando polinomios de Taylor centrados en $a = 0$ (Maclaurin)

1. Calcular $P_0(0.5)$, $P_1(0.5)$, $P_2(0.5)$, $P_3(0.5)$
2. Para cada aproximación, calcular:
   - Error absoluto: $E_a = |f(3.14) - P_n(0.5)|$
   - Error relativo: $E_r = E_a/f(3.14)$
   - Error porcentual: $\varepsilon = E_r \times 100\,\%$
3. Calcular el residuo teórico $R_n(3.14)$ usando la fórmula de Lagrange
4. Comparar error real vs. cota teórica del residuo

Contacto

Eduardo Flores Rivas
Ingeniero Mecatrónico
Facultad de Ingeniería, UNAM
eduardo.flores@ingenieria.unam.edu

Bibliografía obligatoria y recomendada

- BURDEN, Richard L., FAIRES, J. Douglas
  Análisis numérico.
  9a. edición. México. Cengage Learning, 2011.
- CHAPRA, Steven C., CANALE, Raymond P.
  Métodos numéricos para ingenieros.
  6a. edición. México. McGraw-Hill, 2011.
- GERALD, Curtis F., WHEATLEY, Patrick O.
  Análisis numérico con aplicaciones.
  6a. edición. México. Prentice Hall / Pearson Educación, 2000.