Ecuaciones Diferenciales

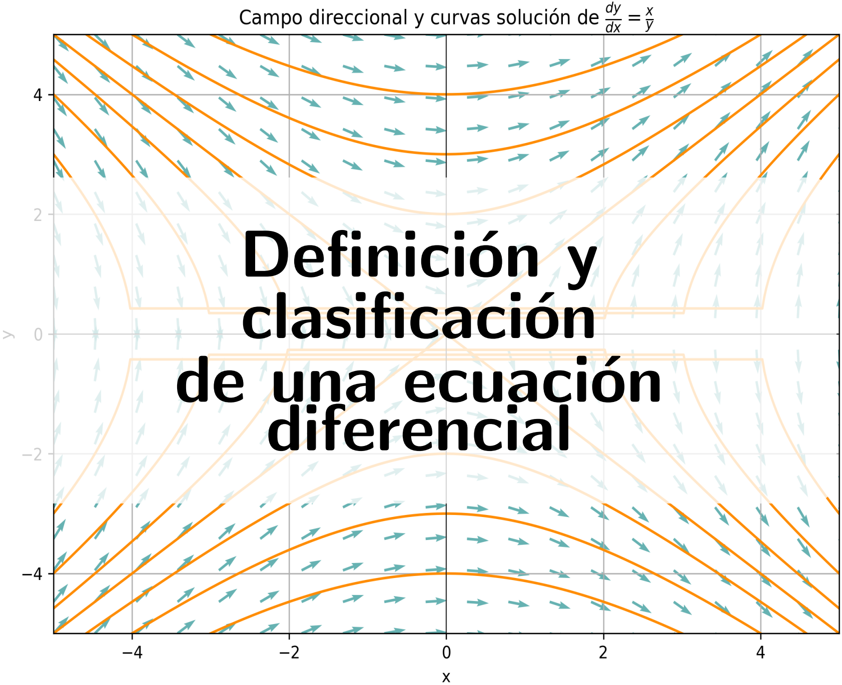
Tema 1. Ecuaciones diferenciales de primer orden lineales y no lineales

Ing. Eduardo Flores Rivas

Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional Autónoma de México

Semestre 2026-1

Contenido



Definición y clasificación de una ecuación diferencial

Ecuación diferencial

Considere la función $y = e^{x^2}$. Derivable en el intervalo $(-\infty, \infty)$. Y su derivada $\frac{dy}{dx} = 2xe^{x^2}$. Si solo se muestra la ecuación siguiente

$$\frac{dy}{dx} = 2xy$$

¿Cómo sabría cuál es la función que representa el símbolo y? Ésta es una de las preguntas básicas que busca responder este curso.

DEFINICIÓN: **Ecuación Diferencial** (ED)

> *Una ecuación que contiene las derivadas de una o más funciones desconocidas (o variables dependientes) respecto a una o más variables independientes.*

Clasificación de una ED: Tipo

Por **tipo**, se dividen en:

1. **Ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO)**: involucran derivadas ordinarias de una o más funciones desconocidas respecto a una sola variable independiente. Ejemplos:

$$\frac{dy}{dx} + 5y = e^x \qquad \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = 0 \qquad \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = 2x + y$$

   En el último ejemplo, hay dos funciones dependientes ($x(t)$ y $y(t)$), pero solo una variable independiente (t), por lo que sigue siendo una EDO.

2. **Ecuaciones en derivadas parciales (EDP)**: contiene derivadas parciales de una o más funciones desconocidas que dependen de dos o más variables independientes. Ejemplos:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2\frac{\partial u}{\partial t} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

Clasificación de una ED: Orden

El **orden** de una ecuación diferencial es el orden de la derivada de mayor orden que aparece en la ecuación. Por ejemplo, $\frac{d^2y}{dx^2} - 5\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = 0$, es una ecuación diferencial de **segundo orden**.

Según su **orden**, se clasifican en ED de:

1. **Primer orden:**

$$\frac{dy}{dx} + y = \sin(x) \qquad\qquad xy' - y = x^2$$

2. **Segundo orden:**

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 2y = 0 \qquad\qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \cos(x)$$

3. **Orden superior (mayor que dos):**

$$\frac{d^3y}{dx^3} - y = 0 \qquad\qquad x^2\frac{d^4y}{dx^4} + y = \ln(x)$$

Forma diferencial de una EDO de primer orden

Una ecuación diferencial ordinaria (EDO) de primer orden puede escribirse en su **forma diferencial**:

$$M(x,\ y)\ dx + N(x,\ y)\ dy = 0$$

Esta forma es útil, ya que algunos métodos de solución requieren identificar las funciones M y N que componen la ecuación.

EJERCICIO 1. Obtener la forma diferencial de las siguientes EDO:

1. $$y + 4x\frac{dy}{dx} = x$$
2. $$6xy\frac{dy}{dx} + x^2 + y^2 = 0$$

Forma normal de una EDO

Una ecuación diferencial ordinaria (EDO) de orden n puede expresarse como una función implícita en $n+2$ variables:

$$F(x,\ y,\ y',\ y'',\cdots,\ y^{(n)}) = 0$$

Si es posible despejar la derivada de orden más alto, se obtiene la **forma normal** de la EDO:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f(x,\ y,\ y',\cdots,\ y^{(n-1)})$$

Por ejemplo, para EDOs de primer y segundo orden:

- **Primer orden**
$$\frac{dy}{dx} = f(x,\ y) \qquad\qquad \frac{dy}{dx} = -y$$
- **Segundo orden**
$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x,\ y,\ y') \qquad\qquad \frac{d^2y}{dx^2} = 16x$$

Clasificación de una ED: Linealidad

Por su **linealidad**, las ecuaciones diferenciales se clasifican en:

1. **Lineales**: son aquellas en las que la variable dependiente y y sus derivadas aparecen únicamente en forma lineal. Es decir, la ecuación puede escribirse como:

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

   Características de una ED lineal:

   - $y,\ y', \ldots,\ y^{(n)}$ aparecen con exponente 1 (primer grado).
   - Los coeficientes $a_0(x),\ a_1(x), \ldots,\ a_n(x)$ son funciones de la variable independiente x.
   - No hay productos ni funciones no lineales de y o sus derivadas (por ejemplo: $\sin(y),\ e^y,\ y^2$, etc.).

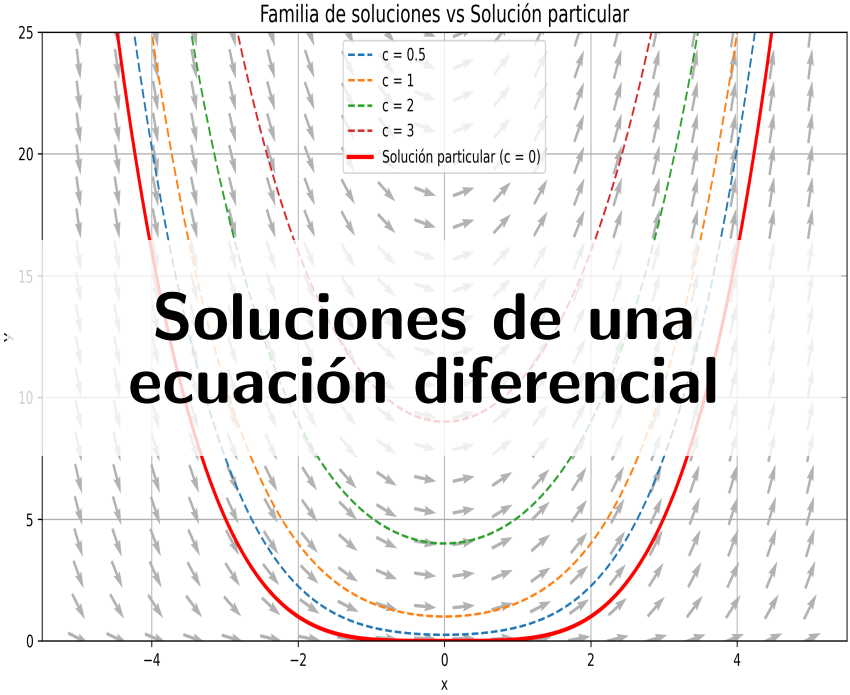
2. **No lineales**: toda ecuación que no cumple alguna de las condiciones anteriores.

EJERCICIO 2. Clasificación de ecuaciones diferenciales

Clasifique las siguientes ecuaciones diferenciales indicando: tipo, orden y linealidad.

1. $$\frac{dy}{dx} + y = \sin(x)$$
2. $$\frac{d^2y}{dx^2} - y\frac{dy}{dx} = 0$$
3. $$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$
4. $$x^2\frac{d^3y}{dx^3} + \ln(x)\frac{dy}{dx} = y$$
5. $$\frac{dy}{dx} = e^y + x$$
6. $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \cos(xy)$$
7. $$y'' + 3y' + 2y = 0$$
8. $$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y = x$$

Soluciones de una ecuación diferencial



Solución de una ecuación diferencial

Uno de los objetivos del curso es proporcionar las herramientas para encontrar soluciones de EDO.

DEFINICIÓN: **Solución de una EDO**

Se llama solución de una ecuación diferencial ordinaria de orden n en un intervalo I a cualquier función $\phi(x)$ definida en I, que posee al menos n derivadas continuas en dicho intervalo y que, al sustituirse en la EDO,

$$F(x,\ y,\ y',\ \ldots,\ y^{(n)}) = 0,$$

convierte la ecuación en una identidad, es decir, se satisface para todo $x \in \mathrm{I}$.

La solución de una EDO de orden n es una función $\phi(x)$ tal que:

$$F\big(x,\ \phi(x),\ \phi'(x),\ \ldots,\ \phi^{(n)}(x)\big) = 0, \quad \forall x \in \mathrm{I}$$

Supondremos que $\phi(x)$ es una función real, y se denotará como $y(x)$.

Intervalo de definición y solución trivial

La solución de una EDO siempre debe estar acompañada del intervalo en el cual está definida. Este intervalo, denotado por I, recibe también los nombres de **intervalo de definición**, **intervalo de existencia**, **intervalo de validez** o **dominio de la solución**.

Puede tratarse de diferentes tipos de intervalos:

- **Abierto** (a, b): no incluye los extremos.
- **Cerrado** $[a, b]$: incluye ambos extremos.
- **Mixto**: incluye solo uno de los extremos. Por ejemplo, $[a, b)$ o $(a, b]$.
- **Infinito**: uno o ambos extremos son infinitos. Por ejemplo, $[a, \infty)$ o $(-\infty, \infty)$.

DEFINICIÓN: **Solución trivial de una EDO**

Cuando la función $\phi(x) = 0$ es solución de una EDO en el intervalo I, se le conoce como solución trivial.

Dada una ecuación diferencial, la forma más directa de verificar si una función es solución consiste en sustituir dicha función y sus derivadas en la ecuación original, y comprobar que la igualdad se satisface en su dominio.

EJERCICIO 3. Verificar que las funciones:

$$f(x) = \frac{1}{x} \qquad \text{y} \qquad g(x) = 0$$

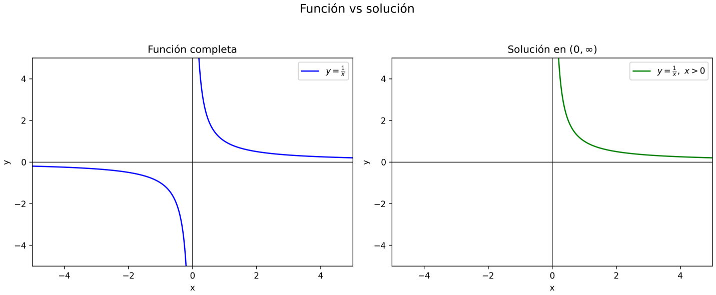
son soluciones de la ecuación diferencial:

$$x\frac{dy}{dx} + y = 0$$

DEFINICIÓN: **Curva de solución**

Gráfica de la solución ϕ de una EDO, es decir, de una función definida en un intervalo.

Consideremos el dominio de la función $y = \frac{1}{x}$ es $\text{Dom}\,(y) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Por otro lado, podemos considerar a $y = \frac{1}{x}$ como solución de la EDO $xy' + y = 0$ únicamente en un intervalo en el que sea derivable, es decir, en cualquiera que no contenga al cero; por ejemplo: $(-3, -1)$, $(0,\ \infty)$, etc.



EJERCICIO 4. Curva de solución

Considere la EDO

$$\frac{dy}{dx} = 2xy^2$$

Una solución de esta EDO es:

$$y = \frac{1}{4 - x^2}$$

a) Verifique que la función es solución de la EDO.

b) Sin graficar la función, encuentre el intervalo de definición máximo, denotado como I, sobre el que puede definirse como solución.

Soluciones explícitas e implícitas

Una solución explícita es aquella en la que la variable dependiente está expresada en función de la variable independiente y constantes. Esta forma es la más sencilla de evaluar y derivar la solución.

Sin embargo, al resolver EDO, particularmente las de primer orden, será común llegar únicamente a expresiones $G(x,\ y)$ que definen la función $y = \phi(x)$ de manera implícita.

DEFINICIÓN: **Solución implícita**

> *Una relación $G(x,\ y)$ es una solución implícita de una EDO en el intervalo I cuando existe al menos una función $y = \phi(x)$ que satisface la relación y la EDO en I.*

EJERCICIO 5. Solución implícita

Considere la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

Una solución implícita de esta EDO es:

$$x^2 + y^2 = 5$$

a) Encuentre una solución explícita (despejando y en términos de x y 5).
b) Verifique que esta solución explícita satisface la ecuación diferencial original.

Familias de soluciones

En cálculo integral, al obtener una antiderivada o una integral indefinida, se añade una constante arbitraria de integración c. De forma análoga, al resolver una ecuación diferencial es necesario incluir constantes arbitrarias o parámetros.

Una ED de primer orden $F(x, y, y') = 0$ tendrá en su solución una constante arbitraria c. Las posibles soluciones se representan por el conjunto

$$G(x, y, c) = 0,$$

llamado familia de soluciones uniparamétrica.

En general, las soluciones de una ED de orden n, $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$, forman una **familia de soluciones n-paramétrica**

$$G(x, y, c_1, c_2, \dots, c_n) = 0.$$

Por lo tanto, una ecuación diferencial puede tener infinitas soluciones asociadas a los valores de sus constantes.

Cuando en la familia de soluciones n-paramétrica

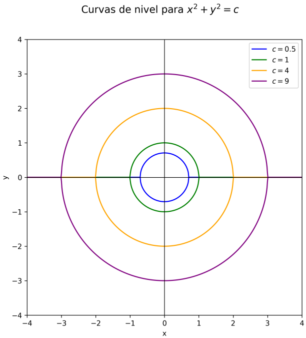
$$G(x, y, c_1, c_2, \ldots, c_n) = 0$$

se sustituyen las constantes arbitrarias por valores específicos en $\mathbb{R}$, se obtiene una **solución particular**.

Por ejemplo, para la EDO de primer orden $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$, la familia de soluciones está dada por

$$x^2 + y^2 = c.$$

Aunque c puede ser cualquier número real, esta relación solo tiene sentido en los números reales si $c \geq 0$, por lo que no es válido seleccionar $c < 0$.



Solución singular

Considere la EDO

$$\frac{dy}{dx} = x\sqrt{y}$$

cuya familia de soluciones uniparamétrica es

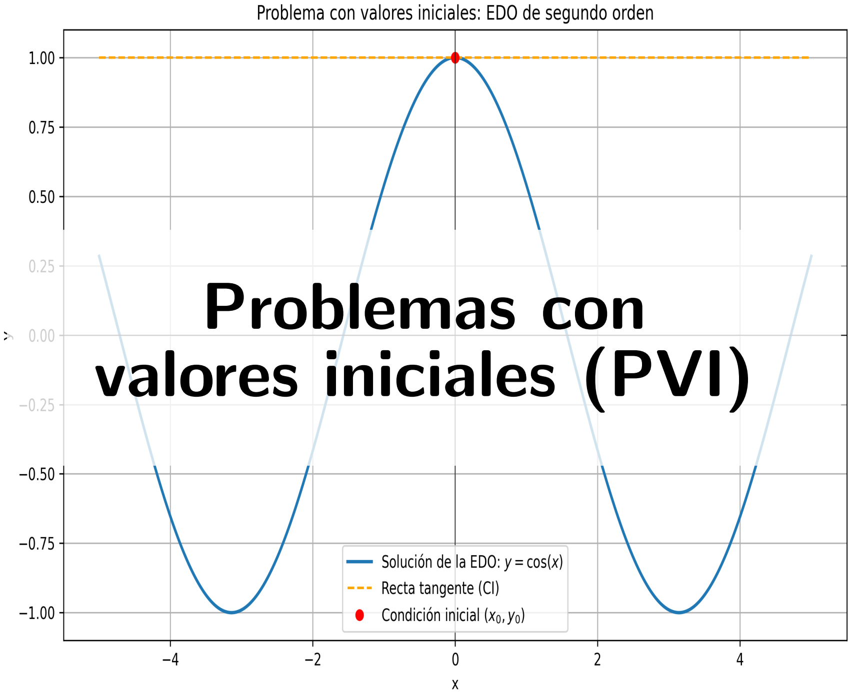
$$y = \left(\frac{1}{4}x^2 + c\right)^2, \quad c \geq 0.$$

Cuando $c = 0$, se obtiene la solución particular $y = \frac{1}{16}x^4$. Sin embargo, la solución trivial $y = 0$ también satisface la EDO, y no puede obtenerse a partir de ningún valor de c.

DEFINICIÓN: **Solución singular**

Solución de una ecuación diferencial que no proviene de una familia de soluciones n-paramétrica.

Problemas con valores iniciales (PVI)



Problemas con valores iniciales (PVI)

Cuando se necesita una solución que satisfaga condiciones impuestas sobre $y(x)$ o sus derivadas en un punto específico x_0, se dice que se tiene un **problema con valores iniciales**.

DEFINICIÓN: **Problema con valores iniciales**

Problema de resolver una ecuación diferencial ordinaria de orden n sujeta a n condiciones especificadas en el punto x_0.

Resolver:

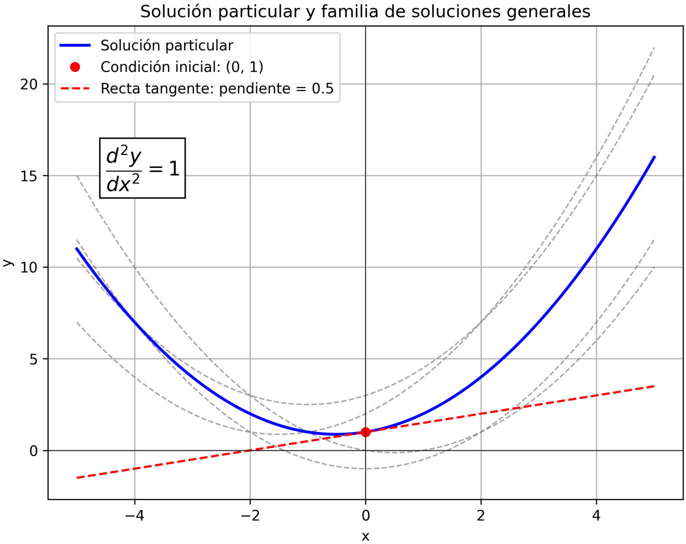
$$\frac{d^n y}{dx^n} = f(x,\ y,\ y',\ \ldots,\ y^{(n-1)})$$

Sujeto a:

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

donde $y_0,\ y_1,\ \ldots,\ y_{n-1}$ son constantes reales arbitrarias. Los valores de $y(x)$ y sus primeras $n-1$ derivadas en el punto x_0 se conocen como **condiciones iniciales**.

PVI en una EDO de segundo orden



EJERCICIO 6. Solución particular con condiciones iniciales

Determine la solución particular de cada ecuación diferencial ordinaria (EDO), utilizando la solución general y las condiciones iniciales dadas. Además, determine el **intervalo más grande** en el que la solución particular es válida.

1. $y' - y = 0, \quad y = ce^x$

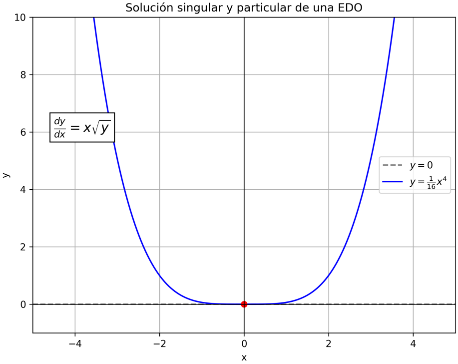
   Condiciones iniciales: $y(0) = 3, \quad y(1) = -2$
2. $y' + 2xy^2 = 0, \quad y = \frac{1}{x^2+c^2}$

   Condiciones iniciales: $y(0) = -1, \quad y(16) = 0$
3. $x'' + 16x = 0, \quad x(t) = c_1 \cos(4t) + c_2 \sin(4t)$

   Condiciones iniciales: $x\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2, \quad x'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

Soluciones de un PVI

En un curso de ecuaciones diferenciales, es común suponer que toda ecuación tiene solución y que la solución de un problema con valores iniciales (PVI) es única. Sin embargo, en contextos ingenieriles, esto no siempre es cierto. **Un PVI puede tener más de una solución.** Por ejemplo:



$$\frac{dy}{dx} = x\sqrt{y}, \quad y(0) = 0$$

Solución particular:
$y = \frac{1}{16}x^4$

Solución singular (trivial):
$y = 0$

Ambas satisfacen la EDO y las CI

Teorema de existencia y unicidad

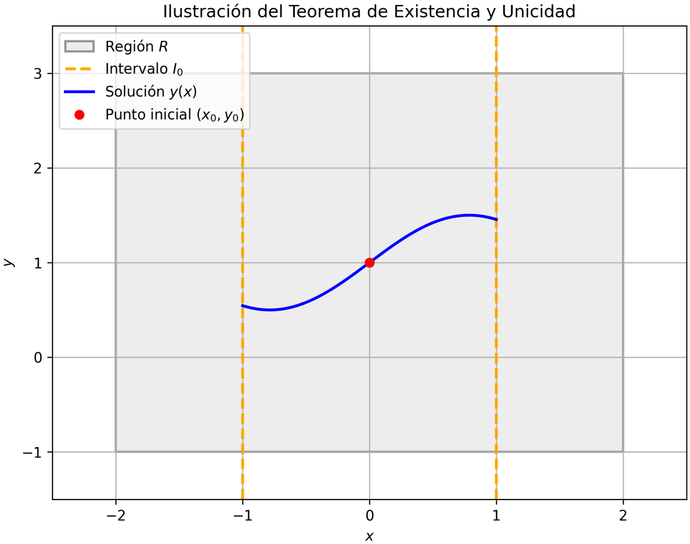
Existen condiciones suficientes que garantizan la **existencia** y **unicidad** de la solución de un problema con valores iniciales (PVI) asociado a una ecuación diferencial ordinaria.

TEOREMA: **Existencia y unicidad de la solución a un PVI**

> *Sea $R \subset \mathbb{R}^2$ una región rectangular definida por $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$, que contiene al punto (x_0, y_0).*
>
> *Si las funciones $f(x, y)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ son continuas en R, entonces existe un intervalo $I_0 = (x_0 - h,\ x_0 + h) \subseteq [a, b]$, con $h > 0$, y una única función $y(x)$ definida sobre I_0 que satisface la ecuación diferencial*
>
> $$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0.$$

Son **condiciones suficientes, pero no necesarias**, por lo que si no se cumplen, podría darse cualquier caso: no existe la solución, existen varias soluciones, o existe solo una solución.

Teorema de existencia y unicidad



EJERCICIO 7. Comprobación de unicidad

Usando el teorema anterior, determine si las siguientes EDO de primer orden con condiciones iniciales poseen solución única en un intervalo que contenga x_0.

1. $y' - y = 0$

$$y = ce^x$$

   Condición inicial: $y(0) = 3$

2. $y' + 2xy^2 = 0$

$$y = \frac{1}{x^2 + c^2}$$

   Condición inicial: $y(0) = -1$

Las más simples de todas las EDOs son aquellas de primer orden y variables separables.

DEFINICIÓN: **Ecuación separable**

> *Se dice que una EDO de primer orden es separable o de variables separables cuando se puede expresar en la forma:*

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y)$$

Por ejemplo, las EDOs siguientes

$$\frac{dy}{dx} = y^2xe^{3x+4y} \quad \text{y} \quad \frac{dy}{dx} = y + \sin x$$

son separable y no separable, respectivamente.

Solución por integración

El método de variables separables consiste en tomar la EDO de primer orden y variables separables $\frac{dy}{dx} = g(x)h(y)$. Y dividir ambos extremos de la ecuación entre la función $h(y)$, para obtener

$$p(y)\frac{dy}{dx} = g(x)$$

Donde $p(y) = 1/h(y)$. Recordando que se busca una función $y = \phi(x)$, entonces se sustituye e integran ambos lados respecto a x

$$p(\phi(x))\phi'(x) = g(x)$$

$$\int p(\phi(x))\phi'(x)dx = \int g(x)dx$$

Ya que $dy = \phi'(x)dx$, se tiene que

$$\int p(y)dy = \int g(x)dx$$

$$H(y) = G(x) + c$$

EJERCICIO 8. Solución de EDO separable

Resolver la EDO de primer orden

$$(1 + x)dy - y \ dx = 0$$

EJERCICIO 9. PVI con ED separable

Resolver el problema de valores iniciales

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}, \quad y(4) = -3$$

Pérdida de una solución

Considerando la EDO de primer orden separable

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y)$$

Al separar variables, se obtiene que

$$\frac{dy}{h(y)} = g(x)\ dx$$

Y cualquier valor $y = r$ que haga que $h(y) = 0$, es decir, que sea raíz de $h(y)$, será una solución constante de la EDO, pero sería una solución singular porque no podría obtenerse de la familia de solución que brinda el procedimiento de separación de variables.

EJERCICIO 10. Pérdida de una solución

Resolver la EDO

$$\frac{dy}{dx} = y^2 - 4$$

EJERCICIO 11. PVI con solución implícita

Resolver la EDO

$$(e^{2y} - y)\cos x \frac{dy}{dx} = e^{y} \sin 2x$$

Solución definida con una integral

En el caso de EDO separables, el método de solución habitual es la integración. En ocasiones, la solución a un problema con valores iniciales (PVI) se expresa como una integral definida.
Por ejemplo, para un PVI de la forma

$$\frac{dy}{dx} = g(x), \quad y(x_0) = y_0$$

si la integral indefinida

$$\int g(x)\, dx$$

no puede expresarse mediante funciones elementales, la mejor forma de describir la solución sobre un intervalo I es

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} g(t)\, dt$$

EJERCICIO 12. PVI con función definida con integral

Resolver el PVI

$$\frac{dy}{dx} = e^{-x^2}, \quad y(3) = 5$$

Funciones homogéneas

Una función $f(x,\ y)$ se dice **homogénea de grado** n si cumple con

$$f(tx,\ ty) = t^n f(x,\ y)$$

para todo $t \in \mathbb{R}$.

Ejemplo:

$$f(x,\ y) = x^2 + y^2$$

$$f(tx,\ ty) = (tx)^2 + (ty)^2 = t^2x^2 + t^2y^2 = t^2(x^2 + y^2) = t^2 f(x,\ y)$$

Por lo tanto, es homogénea de grado 2.

También es posible identificar funciones homogéneas por inspección, verificando que todos los términos que involucran variables x y y tengan el mismo grado (considerando a x y y como si fueran una misma variable).

EJERCICIO 13. Funciones homogéneas

Determinar si las siguientes funciones

$$f(x, y)$$

son homogéneas y, en caso afirmativo, indicar el grado de homogeneidad.

$$f(x, y) = 3x^2y - x^3 \cos\left(\frac{y}{x}\right) - y^3$$

$$f(x, y) = \frac{x^3 + y^3}{(xy)^{3/2}}$$

$$f(x, y) = x^2y^2(x + y)$$

$$f(x, y) = e^{y + x^2/y}$$

Solución de EDOs de 1er orden con funciones homogéneas

Se dice que una EDO de primer orden es de funciones homogéneas si, en su forma diferencial

$$M(x,\ y)\ dx + N(x,\ y)\ dy = 0$$

Las funciones $M(x,\ y)$ y $N(x,\ y)$ son homogéneas del mismo grado. Es decir:

$$M(tx,\ ty) = t^n M(x,\ y) \quad \text{y} \quad N(tx,\ ty) = t^n N(x,\ y)$$

En este caso, se hace la sustitución de variable:

- $v = \frac{x}{y}$, si M es más sencilla que N.

$$y = ux,\ dy = u\ dx + x\ du$$

- $u = \frac{y}{x}$, si N es más sencilla que M.

$$x = vy, \quad dx = v\ dy + y\ dv$$

Tras realizar la sustitución la EDO con funciones homogéneas se volverá separable.

EJERCICIO 14. EDO con funciones homogéneas

Resolver la EDO

$$(x^2 + y^2)dx + (x^2 - xy)dy = 0$$

Diferencial de una función de dos variables

Si $z = f(x,\ y)$ es una función de dos variables con primeras derivadas parciales continuas en una región R, entonces su diferencial se calcula como:

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

Además, si $f(x,\ y) = c$, donde c es constante, se tiene que:

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0$$

Por lo tanto, toda la familia de curvas $f(x,\ y) = c$ permite generar ecuaciones diferenciales. Por ejemplo, si

$$f(x,\ y) = x^2 - 5xy + y^3,$$

obtenemos la EDO:

$$(2x - 5y)\, dx + (-5x + 3y^2)\, dy = 0$$

La pregunta natural que surge es: **¿cómo podemos reconocer si una EDO proviene de la diferencial de una función $f(x,\ y)$?**

Ecuación diferencial exacta

No todas las EDO en forma diferencial

$$M(x,\ y)\,dx + N(x,\ y)\,dy = 0$$

corresponden a la diferencial de una función $f(x,\ y) = c$. Por ello, se define la noción de ecuación diferencial exacta con base en el concepto de diferencial exacto.

DEFINICIÓN: **Ecuación diferencial exacta**

La expresión

$$M(x,\ y)\,dx + N(x,\ y)\,dy$$

es una diferencial exacta en una región R del plano xy si corresponde a la diferencial de una función $f(x,\ y)$ definida en R.
En tal caso, la ecuación de primer orden

$$M(x,\ y)\,dx + N(x,\ y)\,dy = 0$$

se denomina **ecuación diferencial exacta**.

Criterio para una diferencial exacta

TEOREMA: **Criterio para una diferencial exacta**

Si $M(x,\ y)$ y $N(x,\ y)$ son funciones continuas y tienen derivadas parciales de primer orden continuas en una región rectangular R, definida por

$$a < x < b, \quad c < y < d,$$

entonces una condición necesaria y suficiente para que la expresión

$$M(x,\ y)\,dx + N(x,\ y)\,dy$$

sea una diferencial exacta en R, es que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

en todos los puntos de R.

Ejemplo de criterio de aceptación ED exacta

La ecuación

$$x^2y^3\,dx + x^3y^2\,dy = 0$$

es una diferencial exacta, ya que

$$d\left(\frac{1}{3}x^3y^3\right) = x^2y^3\,dx + x^3y^2\,dy.$$

Las funciones $M(x,y) = x^2y^3$ y $N(x,y) = x^3y^2$ cumplen:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 3x^2y^2 = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Prueba de necesidad: Teorema de diferencial exacta

Suponiendo que $M(x,\ y)$ y $N(x,\ y)$ tienen primeras derivadas parciales continuas en todo el plano xy, y que la expresión $M(x,\ y)\,dx + N(x,\ y)\,dy$ es exacta, entonces existe una función $f(x,\ y)$ tal que

$$M(x,\ y)\,dx + N(x,\ y)\,dy = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

entonces

$$M(x,\ y) = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \text{y} \quad N(x,\ y) = \frac{\partial f}{\partial y}$$

Y se debe cumplir la igualdad de las parciales mixtas:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Solución de EDO exactas

Una vez comprobado que una EDO

$$M(x,\ y)\,dx + N(x,\ y)\,dy = 0$$

es exacta, el método de solución consiste en encontrar una función $f(x,\ y)$ cuya diferencial sea dicha expresión y representa la solución implícita de la EDO.

Dado que $\frac{\partial f}{\partial x} = M(x,\ y)$, se puede determinar $f(x,\ y)$ integrando parcialmente con respecto a x:

$$f(x,\ y) = \int M(x,\ y)\,dx + g(y),$$

donde $g(y)$ es una función de y que actúa como constante de integración al considerar y constante.

El siguiente paso es derivar parcialmente respecto a y, y suponiendo que $\frac{\partial f}{\partial y} = N(x,\ y)$, se obtiene:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,\ y)\,dx\right) + g'(y) = N(x,\ y)$$

Solución de EDO exactas

La función $g'(y)$ se obtiene a partir de la igualdad

$$g'(y) = N(x,\ y) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,\ y)\, dx\right).$$

Por lo tanto, basta con integrar respecto a y para sustituir en la expresión:

$$f(x,\ y) = \int M(x,\ y)\, dx + g(y).$$

Es importante señalar que el procedimiento anterior comenzó integrando M parcialmente respecto a x, pero también es posible comenzar con la suposición

$$\frac{\partial f}{\partial y} = N(x,\ y),$$

integrando N parcialmente respecto a y y luego derivando respecto a x. Así, se obtiene:

$$f(x,\ y) = \int N(x,\ y)\, dy + h(x), \quad h'(x) = M(x,\ y) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\int N(x,\ y)\, dy\right)$$

EJERCICIO 15. EDO exacta

Resolver

$$2xy\,dx + (x^2 - 1)\,dy = 0$$

EJERCICIO 16. EDO exacta

Resolver

$$\left(e^{2y} - y\ \cos xy\right) dx + \left(2xe^{2y} - x\ \cos xy + 2y\right) dy = 0$$

EJERCICIO 17. PVI con EDO exacta

Resolver

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy^2 - \cos x \sin x}{y(1 - x^2)}, \quad y(0) = 2$$

Factores integrantes

En algunas ocasiones, es posible encontrar una función $\mu(x,\ y)$, llamada **factor integrante**, tal que al multiplicar por ella una ecuación diferencial no exacta,

$$M(x,\ y)\,dx + N(x,\ y)\,dy = 0,$$

el resultado sea una ecuación diferencial exacta:

$$\mu(x,\ y)\,M(x,\ y)\,dx + \mu(x,\ y)\,N(x,\ y)\,dy = 0.$$

La pregunta fundamental es: ¿cómo determinar $\mu(x,\ y)$?
Aunque existen diversos tipos de factores integrantes, uno de los más utilizados se obtiene aplicando el criterio de exactitud. Se requiere que se cumpla:

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu M) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu N),$$

Factor integrante μ

Para que la ecuación

$$\mu(x,\ y)\, M(x,\ y)\, dx + \mu(x,\ y)\, N(x,\ y)\, dy = 0$$

sea exacta, debe cumplirse: $(\mu M)_y = (\mu N)_x$, lo cual implica:

$$\mu\, M_y + \mu_y\, M = \mu\, N_x + \mu_x\, N,$$

$$\mu_x\, N - \mu_y\, M = \mu\, (M_y - N_x).$$

Esta es una ecuación en derivadas parciales (EDP). Como no contamos aún con las herramientas necesarias para resolverla en general, se hace la siguiente **suposición**: μ depende de una sola variable.

Si $\mu = \mu(x)$, entonces $\mu_y = 0$ y $\mu_x = \frac{d\mu}{dx}$. Sustituyendo:

$$\frac{d\mu}{dx} = \frac{M_y - N_x}{N}\, \mu.$$

Si el cociente $\frac{M_y - N_x}{N}$ depende únicamente de x, se tiene una EDO lineal de primer orden en $\mu(x)$, resoluble por separación de variables. Si depende también de y, esta suposición no es válida y este factor no existe.

Factor integrante μ

Al separar variables en la ecuación

$$\frac{d\mu}{dx} = \frac{M_y - N_x}{N}\mu,$$

se obtiene:

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{M_y - N_x}{N}\,dx.$$

Integrando ambos lados:

$$\ln|\mu(x)| = \int \frac{M_y - N_x}{N}\,dx,$$

y despejando $\mu(x)$:

$$\mu(x) = e^{\int \frac{M_y - N_x}{N}\,dx}.$$

De manera análoga, si se supone que $\mu = \mu(y)$, entonces se obtiene:

$$\mu(y) = e^{\int \frac{N_x - M_y}{M}\,dy}.$$

EJERCICIO 18. Factor integrante

Resolver la EDO

$$xy\,dx + (2x^2 + 3y^2 - 20)\,dy = 0$$

Contacto

Eduardo Flores Rivas
Ingeniero Mecatrónico
Facultad de Ingeniería, UNAM
eduardo.flores@ingenieria.unam.edu

Referencias

ZILL, Dennis G.
Ecuaciones diferenciales con problemas de valores en la frontera.
8a. edición. México. Cengage Learning, 2013.