Ecuaciones Diferenciales

Tema 2. Ecuaciones diferenciales lineales de orden superior

Ing. Eduardo Flores Rivas

Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional Autónoma de México

Semestre 2026-1

Contenido

Ecuación diferencial lineal de orden n

Una **ecuación diferencial lineal de orden** n tiene la forma general:

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x),$$

donde:

- $a_n(x), \ldots, a_0(x)$: Coeficientes (funciones de x o constantes).
- $\frac{d^n y}{dx^n}, \ldots \frac{dy}{dx}$: Derivadas de y respecto a x.

Además de que, si $g(x) = 0$, se trata de una ecuación homogénea

Ejemplo. Identificar el orden y coeficientes de:

$$y''' - 2xy'' + \sin(x)y = e^x.$$

Problema de valores iniciales de orden n

Un problema de valores iniciales de orden n consiste en resolver una **ecuación diferencial lineal de orden** n

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x),$$

Sujeta a las condiciones

$$y(x_0) = y_0,\ \ y'(x_0) = y_1, \cdots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

La solución es una función definida en un intervalo I, que contiene x_0, y satisface la EDO lineal y las n condiciones.

TEOREMA: **Existencia de una solución única**

Sean $a_n(x), \ldots, a_0(x)$ y $g(x)$ continuas en un intervalo I en el que $a_n(x) \neq 0$ para toda x. Si $x = x_0$ es cualquier punto del intervalo, existe una solución $y(x)$ en dicho intervalo I para el PVI representado por EDO lineal de orden n sujeta a las n condiciones.

Operador diferencial

El **operador diferencial** D simplifica la notación de derivadas:

$$D \equiv \frac{d}{dx}, \quad D^2 \equiv \frac{d^2}{dx^2}, \quad \cdots, \quad D^k \equiv \frac{d^k}{dx^k}.$$

Se le llama operador porque transforma una función diferenciable en otra
Ejemplos:

- $Dy = y'$.
- $D^2y - 3Dy + 2y = 0$ equivale a $y'' - 3y' + 2y = 0$.
- $D(\cos(4x)) = -4\sin(4x)$

Ejercicio. Reescribir usando D:

$$\frac{d^3y}{dx^3} + 4\frac{dy}{dx} = \cos(x).$$

Polinomios diferenciales

Un **polinomio diferencial de orden** n se define como:

$$L = a_n(x)D^n + a_{n-1}(x)D^{n-1} + \cdots + a_1(x)D + a_0(x)$$

El operador D es lineal, ya que cumple con las propiedades de:

- Superposición (aditividad):

$$D(u(x) + v(x)) = Du(x) + Dv(x)$$

- Homogeneidad (multiplicación escalar):

$$D(\alpha u(x)) = \alpha Du(x)$$

Lo mismo aplica para L:

$$L(\alpha u(x) + \beta v(x)) = \alpha Lu(x) + \beta Lv(x)$$

Ejercicio: Representar la ED $y'' + 5y' + 6y = 5x - 3$ con el operador diferencial D y especificar su polinomio diferencial L.

Igualdad entre Polinomios Diferenciales

Dos polinomios diferenciales L_1 y L_2 son **iguales** si:

- Tienen el mismo grado.
- Sus coeficientes correspondientes son iguales.

Ejemplo: Verificar la igualdad de los polinomios

$$L_1 = D^2 + 3D + 2 \quad \text{y} \quad L_2 = (D+1)(D+2)$$

Operaciones clave:

- **Suma**: $(L_1 + L_2)(y) = L_1(y) + L_2(y)$.
- **Composición**: $(L_1 \circ L_2)(y) = L_1(L_2(y))$.

Ejercicio. Dados $L_1 = D - 1$ y $L_2 = D + 2$, calcular $L_1 \circ L_2$. **Solución**:

$$(L_1 \circ L_2)(y) = ((D+2) - 1)y = Dy + y$$

EDO Lineal Homogénea de Coeficientes Constantes

Una ecuación diferencial lineal de orden n es **homogénea** si cumple con la forma:

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0,$$

mientras que la ecuación

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x),$$

donde $g(x) \neq 0$, es **no homogénea**.
Con el objetivo de resolver una EDO lineal no homogénea, debemos resolver primero su ecuación homogénea asociada.

Nota: En este contexto, la palabra homogénea se refiere a la ED lineal, distinto a las ecuaciones de coeficientes homogéneos estudiadas antes.

Principio de Superposición

Teorema

Si $y_1, y_2, \ldots, y_k$ son soluciones de una EDO lineal homogénea $L(y) = 0$, entonces:

$$\boxed{y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_k y_k(x)}$$

también es solución, para cualquier $c_i \in \mathbb{R}$.

Interpretación física:

- En sistemas lineales, la respuesta total es la suma de respuestas individuales.
- Aplicable en: circuitos eléctricos, vibraciones mecánicas, etc.

Ejemplo rápido

Si $y_1 = e^{2x}$ y $y_2 = e^{-3x}$ resuelven $y'' + y' - 6y = 0$, entonces:

$$y = 5e^{2x} - 2e^{-3x} \quad \text{también es solución.}$$

Demostración del Principio de Superposición

Hipótesis:

- $L(y) = 0$ es una EDO lineal homogénea.
- $y_1(x), y_2(x), \dots, y_k(x)$ son soluciones en I.

Tesis: $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_k y_k(x)$ también es solución.

Paso 1: Aplicar L a la combinación lineal:

$$L(y) = L(c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_k y_k)$$

Paso 2: Por linealidad de L:

$$L(y) = c_1 L(y_1) + c_2 L(y_2) + \cdots + c_k L(y_k)$$

Paso 3: Como cada y_i es solución ($L(y_i) = 0$):

$$L(y) = c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 + \cdots + c_k \cdot 0 = 0 \qquad \square$$

Soluciones de una ED lineal homogénea

Para toda ED lineal homogénea se cumple que:

1. La combinación lineal de sus soluciones, es una solución.
2. La función $y = 0$ es una solución (llamada solución trivial).

Ejemplo: La ecuación lineal homogénea

$$x^3 y''' - 2xy' + 4y = 0$$

tiene por soluciones $y_1 = x^2$ y $y_2 = x^2 \ln(x)$.
Comprobar que su combinación lineal

$$y = 2x^2 + x^2 \ln(x)$$

y que $y = 0$ son soluciones de la ED.

Dependencia e Independencia Lineal

Contexto en EDOs lineales: Para construir la solución general de una EDO lineal homogénea de orden n, se requiere un conjunto de n soluciones **linealmente independientes**.

Definición: Un conjunto de funciones $\{y_1(x), \ldots, y_n(x)\}$ es:

- **Linealmente dependiente (LD)** en I si existen constantes $c_1, \ldots, c_n$ (no todas cero) tales que:

$$\boxed{c_1 y_1(x) + \cdots + c_n y_n(x) = 0 \text{ en } I}$$

- **Linealmente independiente (LI)** si la única solución es $c_1 = \cdots = c_n = 0$.

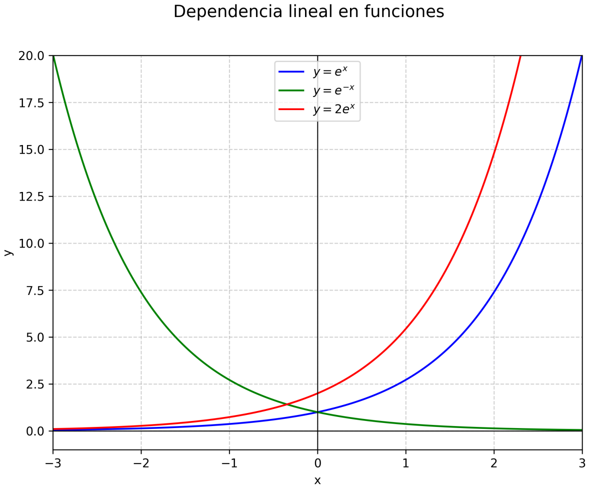
Implicación práctica:

- LD: Al menos una solución es redundante.
- LI: Cada solución aporta información única al sistema.

Ejemplo 1 de dependencia lineal

Las funciones
$y_1 = e^x$, $y_2 = e^{-x}$ son LI.
$y_1 = e^x$, $y_3 = 2e^x$ son LD.

Si el cociente de dos funciones $f_1(x)/f_2(x)$ es constante en un intervalo, $f_1(x)$ y $f_2(x)$ son linealmente dependientes.



Ejemplo 2 de dependencia lineal

El conjunto de funciones

$$f_1(x) = \cos^2(x), \quad f_2(x) = sen^2(x), \quad f_3(x) = sec^2(x), \quad f_4(x) = tan^2(x)$$

Son linealmente dependientes en el intervalo $(-\pi/2,\ \pi/2)$.
Observe que, de las expresiones trigonométricas siguientes:

$$cos^2x + sen^2x = 1$$

$$1 + tan^2x = sec^2x \quad \rightarrow \quad tan^2x - sec^2x = -1$$

se puede obtener su combinación lineal

$$1 + (-1) = 0$$

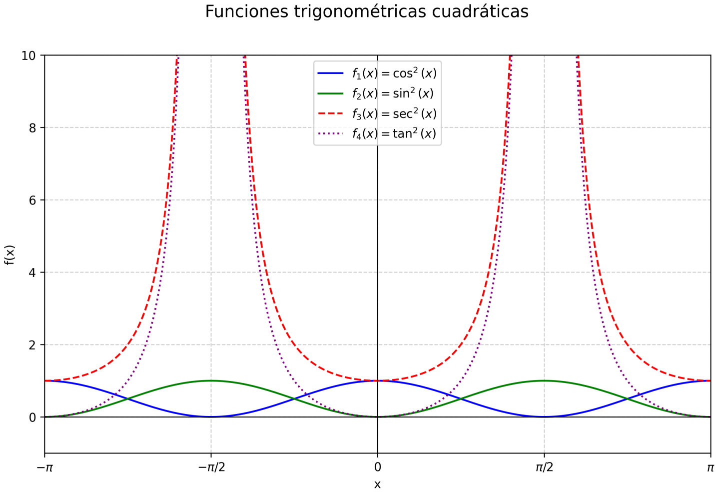
$$cos^2x + sen^2x + tan^2x - sec^2x = 0$$

$$c_1 cos^2x + c_2 sen^2x + c_3 tan^2x + c_4 sec^2x = 0$$

Con $c_1 = c_2 = c_3 = 1,\ c_4 = -1$

Comparación gráfica de funciones trigonométricas cuadradas

$$c_1 cos^2 x + c_2 sen^2 x + c_3 tan^2 x + c_4 sec^2 x = 0$$



Ejemplo 3 de dependencia lineal

Un conjunto de funciones $\{y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)\}$ es linealmente dependiente en un intervalo si al menos una de las funciones puede expresarse como una combinación lineal de las otras.

El conjunto

$$f_1(x) = \sqrt{x} + 5, \quad f_2(x) = \sqrt{x} + 5x, \quad f_3(x) = x - 1, \quad f_4(x) = x^2$$

es LD porque f_2 puede expresarse como una combinación de f_1, f_3 y f_4.

$$f_2(x) = 1f_1(x) + 5f_3(x) + 0f_4(x)$$

$$f_2(x) = 1(\sqrt{x} + 5) + 5(x - 1) + 0$$

$$f_2(x) = \sqrt{x} + 5x$$

Wronskiano: Definición y Cálculo

Motivación

Determinar independencia lineal directamente puede ser complejo. El Wronskiano proporciona un **método sistemático** para verificarlo.

Definición formal: Dadas n funciones diferenciables, su Wronskiano es:

$$W(y_1, \ldots, y_n)(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

Ejemplo cálculo

Para $y_1 = e^{2x}$, $y_2 = e^{-3x}$:

$$W(e^{2x}, e^{-3x}) = \begin{vmatrix} e^{2x} & e^{-3x} \\ 2e^{2x} & -3e^{-3x} \end{vmatrix} = -5e^{-x} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{LI}$$

Teorema del Wronskiano para EDOs Lineales

Criterio del Wronskiano

Sea $L(y) = 0$ una EDO lineal homogénea de orden n con soluciones $y_1, \ldots, y_n$ en I. Entonces:

- $W(y_1, \ldots, y_n)(x) \neq 0$ para algún $x \in I \implies$ LI en todo I.
- $W(y_1, \ldots, y_n)(x) = 0$ para algún $x \in I \implies$ LD en todo I.

Consideraciones

- El teorema solo es **conclusivo** si las funciones son soluciones de una EDO lineal homogénea.
- Para funciones arbitrarias, $W = 0$ no siempre implica dependencia lineal.

Ejemplo: Las funciones $y_1 = x^3$ y $y_2 = |x^3|$ son linealmente independientes en $\mathbb{R}$, pero su Wronskiano es cero en $x = 0$.

Conjunto Fundamental de Soluciones

Definición

Un conjunto $\{y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)\}$ de n soluciones de una EDO lineal homogénea de orden n en I es un **conjunto fundamental** si:

$$W(y_1, y_2, \ldots, y_n)(x) \neq 0 \quad \text{para algún } x \in I$$

Teorema: La solución general de la EDO puede expresarse como:

$$y_h(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \cdots + C_n y_n(x)$$

donde C_i son constantes arbitrarias.

Ejemplo

Para $y'' + y = 0$:

- Conjunto fundamental: $\{\cos x, \sin x\}$
- Solución general: $y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$

Reducción de Orden para EDOs Lineales de 2° Orden

Forma general

Una EDO lineal homogénea de segundo orden:

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

tiene solución general:

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

donde $\{y_1, y_2\}$ son soluciones LI en I.

Si dos funciones $y_1,\ y_2$ son LI, entonces su cociente y_2/y_1 no es constante.

$$y_2(x)/y_1(x) = u(x) \quad \rightarrow \quad y_2(x) = u(x)y_1(x)$$

La idea del método es, una vez conocida y_1, sustituir la ecuación anterior en la EDO de segundo orden para encontrar la función $u(x)$ que nos permita calcular y_2.

Ejemplo de Reducción de Orden

Paso 1: Dada la EDO $y'' - y = 0$ y solución conocida $y_1 = e^x$

Paso 2: Proponer $y_2 = u(x)e^x$ y calcular derivadas:

$$y_2' = (u' + u)e^x$$
$$y_2'' = (u'' + 2u' + u)e^x$$

Paso 3: Sustituir en la EDO y simplificar:

$$(u'' + 2u' + u) - u = 0 \Rightarrow u'' + 2u' = 0$$

Paso 4: Sustituir $w = u'$ para obtener la EDO de primer orden y resolverla

$$w' + 2w = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{dw}{w} = -2dx \quad \rightarrow \quad w = c_1 e^{-2x}$$

Paso 5: Devolver la sustitución $w = u'$ y calcular $y_2 = u(x)y_1$

$$u = -\frac{1}{2}c_1 e^{-2x} + c_2 \quad \rightarrow \quad y_2 = -\frac{c_1}{2}e^{-x} + c_2 e^x$$

Con $c_1 = -2,\ c_2 = 0$: $y_2 = e^{-x}$

Caso general

La forma estándar de la EDO lineal homogénea de segundo orden se obtiene al dividir la ecuación entre $a_2(x)$:

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

Teorema de Reducción de Orden

Si $y_1(x)$ es solución conocida no trivial, entonces una segunda solución LI es:

$$y_2(x) = y_1(x) \int \frac{e^{-\int P(x)dx}}{y_1^2(x)} dx$$

Método de solución de una ED lineal homogénea

Para la solución de una ecuación con la forma

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

se recomienda:

1. **Proponer una solución exponencial**: $y = e^{rx} \Rightarrow y^{(k)} = r^k e^{rx}$
2. **Sustituir la solución propuesta y sus derivadas en la EDO**:
$$a_n r^n e^{rx} + a_{n-1} r^{n-1} e^{rx} + \cdots + a_1 r e^{rx} + a_0 e^{rx} = 0$$
3. **Obtener ecuación característica** (factorizando la función exponencial):
$$(a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \cdots + a_1 r + a_0) e^{rx} = 0$$
$$a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \cdots + a_1 r + a_0 = 0$$
4. **Calcular raíces de la ecuación característica** $r_1,\ r_2, \ldots,\ r_{n-1},\ r_n$
5. **Escribir la solución general de la EDO** (según el tipo de raíces encontradas).

Caso 1: Raíces Reales Diferentes

Si la ecuación auxiliar tiene n raíces reales distintas $(r_1,\ r_2, \ldots,\ r_{n-1},\ r_n)$, la solución general es:

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + \cdots + C_{n-1} e^{r_{n-1} x} + C_n e^{r_n x}$$

Ejemplo:
Resolver la EDO

$$y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$$

Tiene como ecuación auxiliar

$$r^3 - 6r^2 + 11r - 6 = 0$$

Cuyas raíces son: $r = 1, 2, 3$. Por lo que su solución general es:

$$y(x) = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x} + C_3 e^{3x}.$$

Caso 2: Raíces Reales Repetidas

Si r es una raíz de multiplicidad m (aparece m veces), se generan m soluciones linealmente independientes:

$$e^{rx},\ xe^{rx},\ x^2e^{rx},\ \ldots,\ x^{m-1}e^{rx}.$$

Ejemplo: Resolver la EDO

$$y'' - 4y' + 4y = 0$$

Tiene como ecuación auxiliar

$$r^2 - 4r + 4 = 0$$

Con raíz repetida $r = 2$. Por lo que su solución general es:

$$y(x) = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x}.$$

Caso 3: Raíces Complejas Conjugadas

Si aparecen raíces complejas conjugadas $r = \alpha \pm i\beta$, las soluciones reales son:

$$e^{\alpha x} \cos(\beta x) \quad \text{y} \quad e^{\alpha x} \sin(\beta x).$$

Ejemplo: Resolver la EDO

$$y'' + 4y' + 13y = 0$$

Tiene como ecuación auxiliar:

$$r^2 + 4r + 13 = 0$$

Con raíces complejas $r = -2 \pm 3i$.
Por lo que la solución general de la EDO es:

$$y(x) = e^{-2x} \left(C_1 \cos(3x) + C_2 \sin(3x) \right).$$

Nota: Para raíces complejas repetidas $r = \alpha \pm i\beta$ con multiplicidad m, se multiplican por x^k ($k = 0, \ldots, m-1$).

Solución General de EDOs No Homogéneas

Estructura Fundamental

Para una EDO lineal no homogénea de orden n:

$$L(y) = a_n(x)y^{(n)} + \cdots + a_0(x)y = g(x) \quad \text{con } g(x) \neq 0$$

la solución general es: $\boxed{y(x) = y_h(x) + y_p(x)}$

Solución Complementaria (y_h)

Resuelve la ecuación homogénea asociada: $L(y) = 0$

Forma general:

$$y_h(x) = c_1 y_1(x) + \cdots + c_n y_n(x)$$

donde $y_1, \ldots, y_n$ son soluciones LI.

Solución Particular (y_p)

Satisface la ecuación completa:

$$L(y_p) = g(x)$$

Se obtiene por:

- Coeficientes indeterminados
- Variación de parámetros

Método de Coeficientes Indeterminados

Idea fundamental del método:
Proponer una solución particular y_p con forma análoga al término no homogéneo $g(x)$, ajustando coeficientes por sustitución.

Casos Aplicables

- Polinomios:
  $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$
- Exponenciales: $e^{\alpha x}$
- Trigonométricas:
  $\sin(\beta x), \cos(\beta x)$
- Combinaciones:
  $P_n(x) e^{\alpha x} \sin(\beta x)$

Donde n es un entero no negativo, α y β son números reales.

Casos No Aplicables

- Funciones trascendentales:
  - $\ln x$
  - $\tan x$
- Singularidades:
  - x^{-k} $(k > 0)$
- Trigonométricas inversas:
  - $\arcsin x$
  - $\arctan x$

Etcétera.

Procedimiento de Coeficientes Indeterminados

Algoritmo de Solución

1. **Identificar** y_h: Resolver primero $L(y) = 0$
2. **Proponer** y_p según $g(x)$:
   - Forma análoga a $g(x)$
   - Ajustar si hay solapamiento con y_h: multiplicar por x^k (k multiplicidad)
3. **Sustituir** y_p y sus derivadas en $L(y) = g(x)$
4. **Determinar coeficientes** igualando términos
5. **Construir solución general**: $y = y_h + y_p$

Ejemplo: $y'' - y = 2e^x$

Paso 1: $y_h = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$ (contiene e^x con $k = 1$)
Paso 2: Proponer $y_p = Axe^x$ (ajuste por x^1)
Paso 3: $y_p' = Ae^x(x+1)$, $y_p'' = Ae^x(x+2)$
Paso 4: $Ae^x(x + 2 - x) = 2e^x \Rightarrow 2A = 2$
Solución: $\boxed{y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + xe^x}$

Tabla Estándar: Soluciones Particulares para y_p

Tipo de función	**Forma de $g(x)$**	**Propuesta de y_p**
Constante	a	A
Polinomio de grado n	$a_n x^n + \cdots + a_0$	$A_n x^n + \cdots + A_0$
Exponencial	$e^{\alpha x}$	$Ae^{\alpha x}$
Seno	$\sin(\beta x)$	$A\sin(\beta x) + B\cos(\beta x)$
Coseno	$\cos(\beta x)$	$A\sin(\beta x) + B\cos(\beta x)$
Combinación seno/coseno	$\sin(\beta x) + \cos(\beta x)$	$A\sin(\beta x) + B\cos(\beta x)$
Exponencial-seno	$e^{\alpha x}\sin(\beta x)$	$e^{\alpha x}[A\sin(\beta x) + B\cos(\beta x)]$
Exponencial-coseno	$e^{\alpha x}\cos(\beta x)$	$e^{\alpha x}[A\sin(\beta x) + B\cos(\beta x)]$
Combinación completa	$e^{\alpha x}(\sin(\beta x) + \cos(\beta x))$	$e^{\alpha x}[A\sin(\beta x) + B\cos(\beta x)]$
Polinomio-exponencial	$P_n(x)e^{\alpha x}$	$Q_n(x)e^{\alpha x}$

Recordando: Operador Diferencial Polinomial

Definición

Un operador diferencial de orden n con coeficientes constantes:

$$L(D) = a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \cdots + a_1 D + a_0$$

donde $D = \frac{d}{dx}$ y $D^k = \frac{d^k}{dx^k}$.

Propiedad: Factorización de operadores

Los operadores de coeficientes constantes son conmutativos.

Si una EDO lineal tiene como polinomio característico factorizable

$$a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \cdots + a_1 r + a_0 = 0$$

con $r_1,\ r_2, \ldots,\ r_n$ raíces, entonces el operador diferencial L puede representarse como

$$L = (D - r_1)(D - r_2) \ldots (D - r_{n-1})(D - r_n)$$

Operador Anulador de una Función

Definición

Un operador diferencial lineal de coeficientes constantes $A(D)$ es anulador de una función derivable $f(x)$ si:

$$A(f(x)) = 0$$

Propiedades

- **No unicidad**: Múltiples operadores pueden anular la misma función
- Anulador mínimo: El de orden mínimo es el más útil
- **Linealidad**: Si $L(y_1) = 0$ y $L(y_2) = 0$, entonces:

$$L(c_1 y_1 + c_2 y_2) = 0$$

- **Conmutabilidad**: Si $L_1(y_1) = 0,\ L_2(y_2)$, y $L_1(y_2) \neq 0,\ L_2(y_1) \neq 0$, entonces

$$L_1 L_2 = L_2 L_1 \quad \text{y} \quad L_1 L_2(c_1 y_1 + c_2 y_2) = 0$$

Tabla de Anuladores para Funciones Comunes

Función $g(x)$	**Anulador** $A(D)$
$e^{\alpha x}$	$(D-\alpha)$
x^n	D^{n+1}
$\sin(\beta x)$ o $\cos(\beta x)$	$(D^2+\beta^2)$
$e^{\alpha x}\sin(\beta x)$ o $e^{\alpha x}\cos(\beta x)$	$[(D-\alpha)^2+\beta^2]$
$x^n e^{\alpha x}$	$(D-\alpha)^{n+1}$
$x^k e^{\alpha x}\sin(\beta x)$ o $x^k e^{\alpha x}\cos(\beta x)$	$[(D-\alpha)^2+\beta^2]^{k+1}$

Regla de Composición

Para combinaciones lineales, usar el producto de anuladores individuales

Fundamento del Método de Anuladores

Para EDOs lineales no homogéneas con coeficientes constantes:

$$L(D)y = g(x)$$

donde $g(x)$ es combinación de funciones: polinomiales, exponenciales ($e^{\alpha x}$), y/o trigonométricas ($\sin \beta x$, $\cos \beta x$).

Existe un operador $A(D)$ que anula $g(x)$ al aplicarse a ambos lados:

$$A(D)L(D)y = A(D)g(x) = 0$$

Se obtiene una nueva EDO, cuya solución contiene:

- Solución homogénea y_h de $L(D)y = 0$
- Solución particular y_p de $L(D)y = g(x)$

Resumen

$$\boxed{\begin{array}{l} L(D)y = g(x) \xrightarrow{A(D)} A(D)L(D)y = 0 \\ \Rightarrow \text{Forma general de } y \Rightarrow \text{Filtrar } y_p \end{array}}$$

Método de Solución con Anuladores

Para resolver una EDO lineal no homogénea de coeficientes constantes $L(D)y = g(x)$ con $g(x)$ polinomial, exponencial ($e^{\alpha x}$), y/o trigonométrica ($\sin \beta x$, $\cos \beta x$), se recomienda:

Algoritmo

1. Identificar la ecuación homogénea asociada $L(D)y = 0$ y obtener su solución y_h
2. Encontrar anulador $A(D)$ para $g(x)$
3. Aplicar a ambos lados: $A(D)L(D)y = 0$
4. Resolver la EDO homogénea de orden superior (obtener y_A)
5. Eliminar de y_A los términos repetidos con y_h para generar la propuesta de solución particular y_p
6. Sustituir y_p y sus derivadas en la EDO original
7. Determinar coeficientes para la solución particular y_p

Ejemplo de Operador Anulador

Resolver $y'' - y = e^{2x}$

1. Ecuación homogénea asociada:

$$y'' - y = 0 \quad \rightarrow (D^2 - 1)y = 0 \quad \rightarrow y_h = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x}$$

2. Operador anulador de $g(X)$

$$g(x) = e^{2x} \rightarrow A(D) = (D - 2)$$

3. Aplicar el anulador $(D - 2)(D^2 - 1)y = 0$
4. Resolver la EDO homogénea anulada: $y_A = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} + c_3 e^{2x}$
5. Eliminar los términos LD $y_p = Ae^{2x}$
6. Sustituir y_p y sus derivadas

$$y_p'' = 4Ae^{2x} \quad \rightarrow 4Ae^{2x} - Ae^{2x} = e^{2x}$$

7. Determinar el coeficiente de y_p: $3Ae^{2x} = e^{2x} \quad \rightarrow A = \frac{1}{3}$

La solución de la EDO es:

$$y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} + \frac{1}{3} e^{2x}$$

Método de Variación de Parámetros: Contexto Histórico

Limitaciones del Método de Coeficientes indeterminados

- Solo para EDOs con **coeficientes constantes**
- Restringido a $g(x)$ polinomial/exponencial/trigonométrica

Contribución de Lagrange (1774)

- Generalización para **EDOs lineales de cualquier tipo**
- Permite **cualquier función continua** $g(x)$
- Idea fundamental: *"Variar las constantes"* $c_k \to u_k(x)$

Esencia del Método

Si $y_h = c_1 y_1(x) + \cdots + c_n y_n(x)$, entonces:

$$y_p = u_1(x) y_1(x) + \cdots + u_n(x) y_n(x)$$

donde $u_k(x),\ k = 1, 2, \ldots, n$ se determinan resolviendo un sistema de ecuaciones formado por la combinación de u_k' y las derivadas de $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Caso de Interés: EDO Lineal de Primer Orden

Forma estándar

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x)$$

con $P(x)$ y $f(x)$ continuas en un intervalo I.

Solución homogénea asociada

Sea $y_1(x)$ solución conocida de: $y_1' + P(x)y_1 = 0$
Solución general homogénea:

$$y_h(x) = c_1 y_1(x)$$

Propuesta de solución particular

Aplicando variación de parámetros:

$$y_p(x) = u_1(x)y_1(x)$$

donde $u_1(x)$ reemplaza a la constante c_1.

1. Derivamos y_p: $y_p' = u_1'(x)y_1(x) + u_1(x)y_1'(x)$
2. Sustituimos en la EDO original:

$$\underbrace{u_1'y_1 + u_1y_1'}_{\frac{d}{dx}[u_1y_1]} + P(x)u_1y_1 = f(x)$$

Como y_1 satisface la ecuación homogénea ($y_1' + P(x)y_1 = 0$):

$$u_1(y_1' + P(x)y_1) + y_1u_1' = f(x) \implies y_1u_1' = f(x)$$

Solución final

$$u_1(x) = \int \frac{f(x)}{y_1(x)}dx \quad \Rightarrow \quad y_p(x) = y_1(x)\int \frac{f(x)}{y_1(x)}dx$$

Forma estándar

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$$

con $P(x)$, $Q(x)$ y $f(x)$ continuas en I.

Solución homogénea conocida

Sean $y_1(x)$ y $y_2(x)$ soluciones LI de: $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ con Wronskiano $W(y_1, y_2) \neq 0$.

Propuesta de solución particular

$$y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)$$

Derivando: $y_p' = u_1'y_1 + u_1y_1' + u_2'y_2 + u_2y_2'$ Imponemos condición:
$u_1'y_1 + u_2'y_2 = 0$ (Condición de Lagrange)

De la derivada segunda y sustitución en la EDO:

$$\begin{cases} u_1' y_1 + u_2' y_2 = 0 \\ u_1' y_1' + u_2' y_2' = f(x) \end{cases}$$

Solución del sistema

Usando el Wronskiano $W = y_1 y_2' - y_2 y_1'$, e integrando

$$u_1 = -\int \frac{W_1}{W} dx = -\int \frac{y_2 f(x)}{W} dx, \quad u_2 = \int \frac{W_2}{W} dx = \int \frac{y_1 f(x)}{W} dx$$

Donde:

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}, \quad W_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y_2' \end{vmatrix}, \quad W_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f(x) \end{vmatrix}$$

Método de Variación de Parámetros

1. Asegurarse de que la EDO esté en su forma estándar (el coeficiente del término de mayor orden es 1).

$$y^{(n)} + P(x)y^{(n-1)} + \cdots + Q(x)y = f(x)$$

2. Resolver la EDO homogénea y obtener $y_h = c_1 y_1 + \cdots + c_n y_n$
3. Calcular el Wronskiano W de las funciones $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, y_n$

$$W(y_1, \ldots, y_n)(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} \neq 0$$

4. Proponer la solución particular como variación de las constantes: $y_p = u_1(x)y_1 + \cdots + u_n(x)y_n$

Condiciones

El método requiere que $P_k(x)$ y $f(x)$ sean continuas en el intervalo de solución, y que $W \neq 0$.

Método de Variación de Parámetros

5. Plantear el sistema de n ecuaciones para u_i':

$$\begin{cases} u_1'y_1 + \cdots + u_n'y_n = 0 \\ u_1'y_1' + \cdots + u_n'y_n' = 0 \\ \vdots \\ u_1'y_1^{(n-1)} + \cdots + u_n'y_n^{(n-1)} = f(x) \end{cases}$$

6. Resolver el sistema de ecuaciones por regla de Cramer e integrar

$$u_k{}' = \frac{W_k}{W} \quad \rightarrow \quad u_k = \int \frac{W_k}{W}dx$$

Donde:

- W es el Wronskiano de $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, y_n$
- W_k es el determinante obtenido de reemplazar la columna k de W por la columna del lado derecho del sistema de ecuaciones (formado por $0,\ 0, \ldots,\ f(x)$).

Ejemplo: Variación de Parámetros para EDO de 3er Orden

Resolver:

$$2y''' - 4y'' - 2y' + 4y = 2e^{3x}$$

1. **Forma estándar**:

$$y''' - 2y'' - y' + 2y = e^{3x}$$

2. **Solución homogénea**:

$$r^3 - 2r^2 - r + 2 = 0 \Rightarrow r = -1, 1, 2$$

$$y_h = C_1 e^{-x} + C_2 e^{x} + C_3 e^{2x}$$

3. **Wronskiano**:

$$W = \begin{vmatrix} e^{-x} & e^{x} & e^{2x} \\ -e^{-x} & e^{x} & 2e^{2x} \\ e^{-x} & e^{x} & 4e^{2x} \end{vmatrix} = 6e^{2x} \neq 0$$

4. **Propuesta de solución particular**:

$$y_p = u_1 e^{-x} + u_2 e^{x} + u_3 e^{2x} = 0$$

Ejemplo (Continuación)

5. **Sistema para** u_k':

$$\begin{cases} u_1'e^{-x} + u_2'e^{x} + u_3'e^{2x} = 0 \\ -u_1'e^{-x} + u_2'e^{x} + 2u_3'e^{2x} = 0 \\ u_1'e^{-x} + u_2'e^{x} + 4u_3'e^{2x} = e^{3x} \end{cases}$$

6. **Resolver por Cramer**:

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & e^{x} & e^{2x} \\ 0 & e^{x} & 2e^{2x} \\ e^{3x} & e^{x} & 4e^{2x} \end{vmatrix} = e^{6x}, \quad u_1' = \frac{W_1}{W} = \frac{e^{4x}}{6}, \quad u_1 = \frac{1}{24}e^{4x}$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} e^{-x} & 0 & e^{2x} \\ -e^{-x} & 0 & 2e^{2x} \\ e^{-x} & e^{3x} & 4e^{2x} \end{vmatrix} = -3e^{4x}, \quad u_2' = \frac{W_2}{W} = -\frac{e^{2x}}{2}, \quad u_2 = -\frac{1}{4}e^{2x}$$

$$W_3 = \begin{vmatrix} e^{-x} & e^{x} & 0 \\ -e^{-x} & e^{x} & 0 \\ e^{-x} & e^{x} & e^{3x} \end{vmatrix} = 2e^{3x}, \quad u_3' = \frac{W_3}{W} = \frac{e^{x}}{3}, \quad u_3 = \frac{1}{3}e^{x}$$

Solución particular:

$$y_p = u_1 e^{-x} + u_2 e^{x} + u_3 e^{2x}$$

$$y_p = \frac{e^{4x}}{24} e^{-x} - \frac{e^{2x}}{4} e^{x} + \frac{e^{x}}{3} e^{2x}$$

$$y_p = \frac{1}{24} e^{3x} - \frac{1}{4} e^{3x} + \frac{1}{3} e^{3x} = \frac{1}{8} e^{3x}$$

Solución general:

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{x} + c_3 e^{2x} + \frac{1}{8} e^{3x}$$

Contacto

Eduardo Flores Rivas
Ingeniero Mecatrónico
Facultad de Ingeniería, UNAM
eduardo.flores@ingenieria.unam.edu

Referencias

ZILL, Dennis G.
Ecuaciones diferenciales con problemas de valores en la frontera.
8a. edición. México. Cengage Learning, 2013.