

# Ecuaciones Diferenciales

## Tema 1. Ecuaciones diferenciales de primer orden lineales y no lineales

Ing. Eduardo Flores Rivas

Facultad de Ingeniería  
Universidad Nacional Autónoma de México

Semestre 2026-1

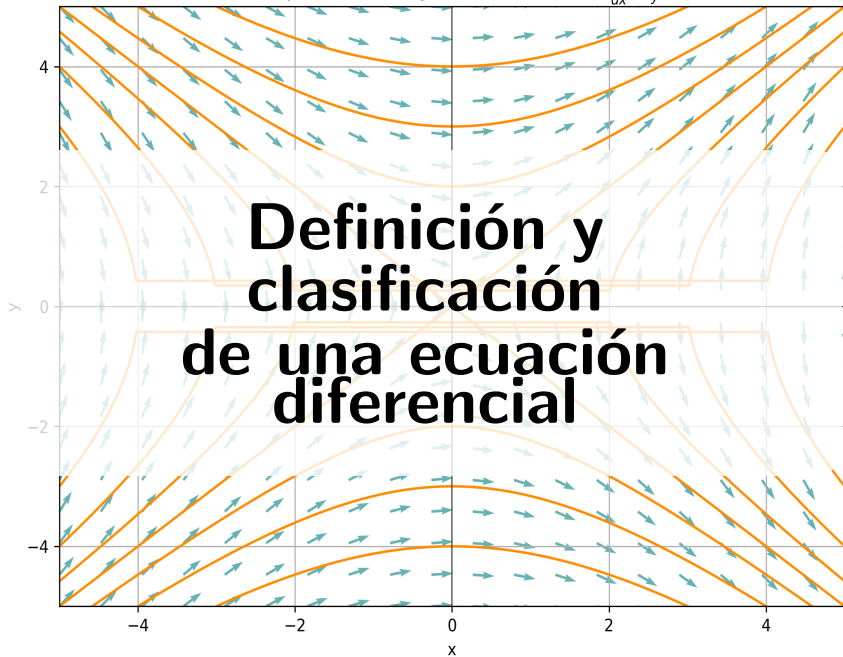


# Contenido

- 1 Definición y clasificación de una ecuación diferencial
- 2 Solución de una ecuación diferencial
- 3 Problemas con valores iniciales
- 4 Ecuaciones diferenciales de variables separables
- 5 EDO de funciones homogéneas
- 6 EDOs exactas y factor integrante
- 7 Contacto
- 8 Referencias



Campo direccional y curvas solución de  $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$



Considere la función  $y = e^{x^2}$ . Derivable en el intervalo  $(-\infty, \infty)$ . Y su derivada  $\frac{dy}{dx} = xe^{x^2}$ . Si solo se muestra la ecuación siguiente

$$\frac{dy}{dx} = xy$$

¿Cómo sabría cuál es la función que representa el símbolo  $y$ ? Ésta es una de las preguntas básicas que busca responder este curso.

## DEFINICIÓN: **Ecuación Diferencial** (ED)

*Una ecuación que contiene las derivadas de una o más funciones desconocidas (o variables dependientes) respecto a una o más variables independientes.*



# Clasificación de una ED: Tipo

Por **tipo**, se dividen en:

- ① **Ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO)**: involucran derivadas ordinarias de una o más funciones desconocidas respecto a una sola variable independiente. Ejemplos:

$$\frac{dy}{dx} + 5y = e^x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = 2x + y$$

En el último ejemplo, hay dos funciones dependientes ( $x(t)$  y  $y(t)$ ), pero solo una variable independiente ( $t$ ), por lo que sigue siendo una EDO.

- ② **Ecuaciones en derivadas parciales (EDP)**: contiene derivadas parciales de una o más funciones desconocidas que dependen de dos o más variables independientes. Ejemplos:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2 \frac{\partial u}{\partial t}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$$



# Clasificación de una ED: Orden

El **orden** de una ecuación diferencial es el orden de la derivada de mayor orden que aparece en la ecuación. Por ejemplo,  $\frac{d^2y}{dx^2} - 5 \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = 0$ , es una ecuación diferencial de **segundo orden**.

Según su **orden**, se clasifican en ED de:

❶ **Primer orden:**

$$\frac{dy}{dx} + y = \sin(x)$$

$$xy' - y = x^2$$

❷ **Segundo orden:**

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 2y = 0$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \cos(x)$$

❸ **Orden superior (mayor que dos):**

$$\frac{d^3y}{dx^3} - y = 0$$

$$x^2 \frac{d^4y}{dx^4} + y = \ln(x)$$



# Forma diferencial de una EDO de primer orden

Una ecuación diferencial ordinaria (EDO) de primer orden puede escribirse en su **forma diferencial**:

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$$

Esta forma es útil, ya que algunos métodos de solución requieren identificar las funciones  $M$  y  $N$  que componen la ecuación.

**EJERCICIO 1.** Obtener la forma diferencial de las siguientes EDO:

1

$$y + 4x \frac{dy}{dx} = x$$

2

$$6xy \frac{dy}{dx} + x^2 + y^2 = 0$$



# Forma normal de una EDO

Una ecuación diferencial ordinaria (EDO) de orden  $n$  puede expresarse como una función implícita en  $n + 2$  variables:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

Si es posible despejar la derivada de orden más alto, se obtiene la **forma normal** de la EDO:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

Por ejemplo, para EDOs de primer y segundo orden:

- **Primer orden**

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

$$\frac{dy}{dx} = -y$$

- **Segundo orden**

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = f(x, y, y')$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 16x$$





# Clasificación de una ED: Linealidad

Por su **linealidad**, las ecuaciones diferenciales se clasifican en:

- 1 **Lineales:** son aquellas en las que la variable dependiente  $y$  y sus derivadas aparecen únicamente en forma lineal. Es decir, la ecuación puede escribirse como:

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

## Características de una ED lineal:

- $y, y', \dots, y^{(n)}$  aparecen con exponente 1 (primer grado).
  - Los coeficientes  $a_0(x), a_1(x), \dots, a_n(x)$  son funciones de la variable independiente  $x$ .
  - No hay productos ni funciones no lineales de  $y$  o sus derivadas (por ejemplo:  $\sin(y)$ ,  $e^y$ ,  $y^2$ , etc.).
- 2 **No lineales:** toda ecuación que no cumple alguna de las condiciones anteriores.



## EJERCICIO 2. Clasificación de ecuaciones diferenciales

Clasifique las siguientes ecuaciones diferenciales indicando: tipo, orden y linealidad.

1

$$\frac{dy}{dx} + y = \sin(x)$$

5

$$\frac{dy}{dx} = e^y + x$$

2

$$\frac{d^2y}{dx^2} - y \frac{dy}{dx} = 0$$

6

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \cos(xy)$$

3

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

7

$$y'' + 3y' + 2y = 0$$

4

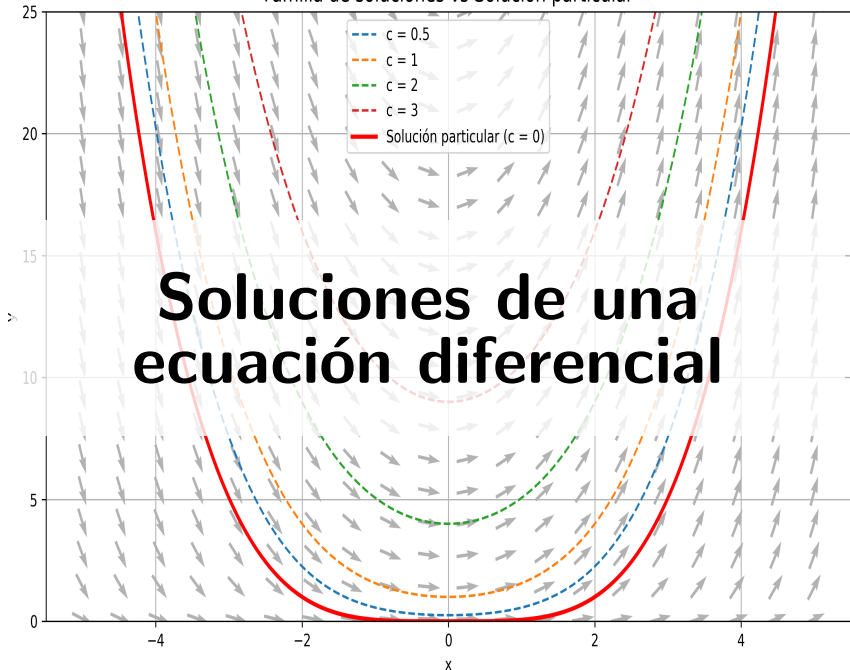
$$x^2 \frac{d^3y}{dx^3} + \ln(x) \frac{dy}{dx} = y$$

8

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y = x$$



Familia de soluciones vs Solución particular



# Solución de una ecuación diferencial

Uno de los objetivos del curso es proporcionar las herramientas para encontrar soluciones de EDO.

## DEFINICIÓN: **Solución de una EDO**

*Se llama solución de una ecuación diferencial ordinaria de orden  $n$  en un intervalo  $I$  a cualquier función  $\phi(x)$  definida en  $I$ , que posee al menos  $n$  derivadas continuas en dicho intervalo y que, al sustituirse en la EDO,*

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

*convierte la ecuación en una identidad, es decir, se satisface para todo  $x \in I$ .*

La solución de una EDO de orden  $n$  es una función  $\phi(x)$  tal que:

$$F(x, \phi(x), \phi'(x), \dots, \phi^{(n)}(x)) = 0, \quad \forall x \in I$$

Supondremos que  $\phi(x)$  es una función real, y se denotará como  $y(x)$ .



# Intervalo de definición y solución trivial

La solución de una EDO siempre debe estar acompañada del intervalo en el cual está definida. Este intervalo, denotado por  $I$ , recibe también los nombres de **intervalo de definición**, **intervalo de existencia**, **intervalo de validez** o **dominio de la solución**.

Puede tratarse de diferentes tipos de intervalos:

- **Abierto**  $(a, b)$ : no incluye los extremos.
- **Cerrado**  $[a, b]$ : incluye ambos extremos.
- **Mixto**: incluye solo uno de los extremos. Por ejemplo,  $[a, b)$  o  $(a, b]$ .
- **Infinito**: uno o ambos extremos son infinitos. Por ejemplo,  $[a, \infty)$  o  $(-\infty, \infty)$ .

## DEFINICIÓN: Solución trivial de una EDO

*Cuando la función  $\phi(x) = 0$  es solución de una EDO en el intervalo  $I$ , se le conoce como solución trivial.*



# Comprobación de una solución

Dada una ecuación diferencial, la forma más directa de verificar si una función es solución consiste en sustituir dicha función y sus derivadas en la ecuación original, y comprobar que la igualdad se satisface en su dominio.

**EJERCICIO 3.** Verificar que las funciones:

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad \text{y} \quad g(x) = 0$$

son soluciones de la ecuación diferencial:

$$x \frac{dy}{dx} + y = 0$$



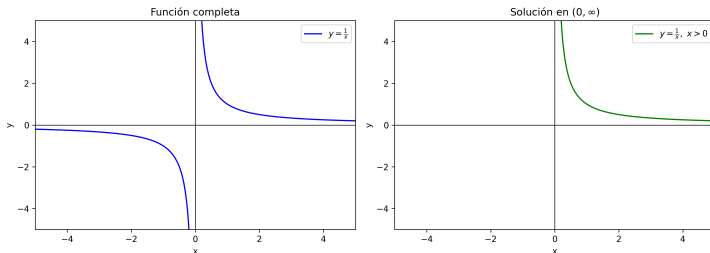
# Curva de solución

## DEFINICIÓN: **Curva de solución**

*Gráfica de la solución  $\phi$  de una EDO, es decir, de una función definida en un intervalo.*

Consideremos el dominio de la función  $y = \frac{1}{x}$  es  $\text{Dom}(y) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Por otro lado, podemos considerar a  $y = \frac{1}{x}$  como solución de la EDO  $xy' + y = 0$  únicamente en un intervalo en el que sea derivable, es decir, en cualquiera que no contenga al cero; por ejemplo:  $(-3, -1)$ ,  $(0, \infty)$ , etc.

Función vs solución



## EJERCICIO 4. Curva de solución

Considere la EDO

$$\frac{dy}{dx} = 2xy^2$$

Una solución de esta EDO es:

$$y = \frac{1}{4 - x^2}$$

- a) Verifique que la función es solución de la EDO.
- b) Sin graficar la función, encuentre el intervalo de definición máximo, denotado como  $I$ , sobre el que puede definirse como solución.





# Soluciones explícitas e implícitas

Una solución explícita es aquella en la que la variable dependiente está expresada en función de la variable independiente y constantes. Esta forma es la más sencilla de evaluar y derivar la solución.

Sin embargo, al resolver EDO, particularmente las de primer orden, será común llegar únicamente a expresiones  $G(x, y)$  que definen la función  $y = \phi(x)$  de manera implícita.

## DEFINICIÓN: **Solución implícita**

*Una relación  $G(x, y)$  es una solución implícita de una EDO en el intervalo  $I$  cuando existe al menos una función  $y = \phi(x)$  que satisface la relación y la EDO en  $I$ .*



## EJERCICIO 5. Solución implícita

Considere la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$$

Una solución implícita de esta EDO es:

$$x^2 + y^2 = 5$$

- a) Encuentre una solución explícita (despejando  $y$  en términos de  $x$  y 5).
- b) Verifique que esta solución explícita satisface la ecuación diferencial original.



# Familias de soluciones

En cálculo integral, al obtener una antiderivada o una integral indefinida, se añade una constante arbitraria de integración  $c$ . De forma análoga, al resolver una ecuación diferencial es necesario incluir constantes arbitrarias o parámetros.

Una ED de primer orden  $F(x, y, y') = 0$  tendrá en su solución una constante arbitraria  $c$ . Las posibles soluciones se representan por el conjunto

$$G(x, y, c) = 0,$$

llamado familia de soluciones uniparamétrica.

En general, las soluciones de una ED de orden  $n$ ,  $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ , forman una **familia de soluciones n-paramétrica**

$$G(x, y, c_1, c_2, \dots, c_n) = 0.$$

Por lo tanto, una ecuación diferencial puede tener infinitas soluciones asociadas a los valores de sus constantes.



# Solución particular

Cuando en la familia de soluciones n-paramétrica

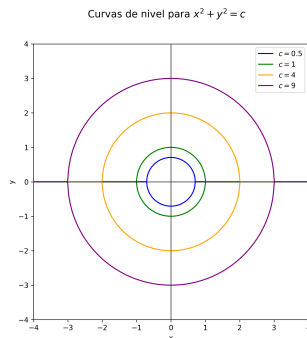
$$G(x, y, c_1, c_2, \dots, c_n) = 0$$

se sustituyen las constantes arbitrarias por valores específicos en  $\mathbb{R}$ , se obtiene una **solución particular**.

Por ejemplo, para la EDO de primer orden  $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$ , la familia de soluciones está dada por

$$x^2 + y^2 = c.$$

Aunque  $c$  puede ser cualquier número real, esta relación solo tiene sentido en los números reales si  $c \geq 0$ , por lo que no es válido seleccionar  $c < 0$ .



# Solución singular

Considere la EDO

$$\frac{dy}{dx} = x\sqrt{y}$$

cuya familia de soluciones uniparamétrica es

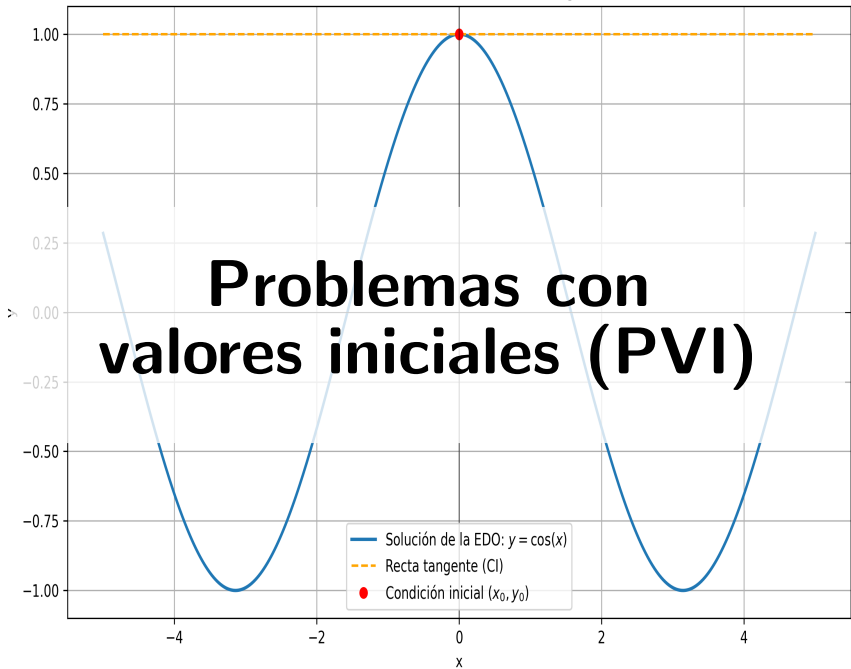
$$y = \left(\frac{1}{4}x^2 + c\right)^2, \quad c \geq 0.$$

Cuando  $c = 0$ , se obtiene la solución particular  $y = \frac{1}{16}x^4$ . Sin embargo, la solución trivial  $y = 0$  también satisface la EDO, y no puede obtenerse a partir de ningún valor de  $c$ .

**DEFINICIÓN: Solución singular**

*Solución de una ecuación diferencial que no proviene de una familia de soluciones  $n$ -paramétrica.*





# Problemas con valores iniciales (PVI)

Cuando se necesita una solución que satisfaga condiciones impuestas sobre  $y(x)$  o sus derivadas en un punto específico  $x_0$ , se dice que se tiene un **problema con valores iniciales**.

## DEFINICIÓN: Problema con valores iniciales

*Problema de resolver una ecuación diferencial ordinaria de orden  $n$  sujeta a  $n$  condiciones especificadas en el punto  $x_0$ .*

Resolver:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

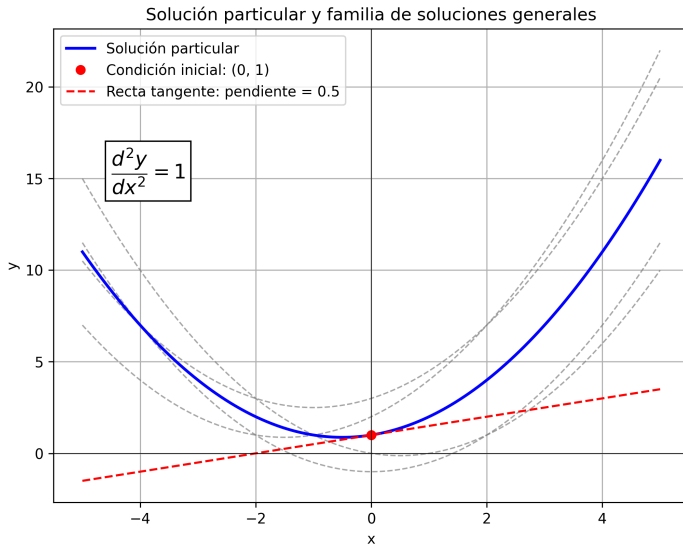
Sujeto a:

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

donde  $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$  son constantes reales arbitrarias. Los valores de  $y(x)$  y sus primeras  $n - 1$  derivadas en el punto  $x_0$  se conocen como **condiciones iniciales**.



# PVI en una EDO de segundo orden





## EJERCICIO 6. Solución particular con condiciones iniciales

Determine la solución particular de cada ecuación diferencial ordinaria (EDO), utilizando la solución general y las condiciones iniciales dadas. Además, determine el **intervalo más grande** en el que la solución particular es válida.

①  $y' - y = 0, \quad y = ce^x$

Condiciones iniciales:  $y(0) = 3, \quad y(1) = -2$

②  $y' + 2xy^2 = 0, \quad y = \frac{1}{x^2 + c^2}$

Condiciones iniciales:  $y(0) = -1, \quad y(16) = 0$

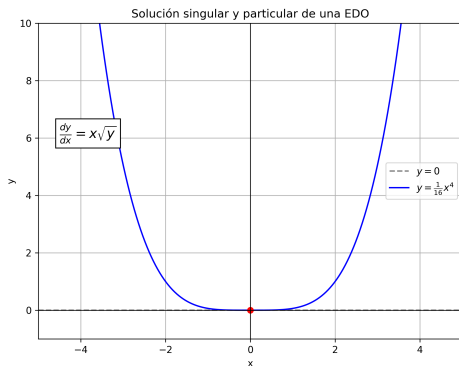
③  $x'' + 16x = 0, \quad x(t) = c_1 \cos(4t) + c_2 \sin(4t)$

Condiciones iniciales:  $x\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2, \quad x'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$



# Soluciones de un PVI

En un curso de ecuaciones diferenciales, es común suponer que toda ecuación tiene solución y que la solución de un problema con valores iniciales (PVI) es única. Sin embargo, en contextos ingenieriles, esto no siempre es cierto. **Un PVI puede tener más de una solución.** Por ejemplo:



$$\frac{dy}{dx} = x\sqrt{y}, \quad y(0) = 0$$

Solución particular:

$$y = \frac{1}{16}x^4$$

Solución singular (trivial):

$$y = 0$$

Ambas satisfacen la EDO  
y las CI



# Teorema de existencia y unicidad

Existen condiciones suficientes que garantizan la **existencia** y **unicidad** de la solución de un problema con valores iniciales (PVI) asociado a una ecuación diferencial ordinaria.

## TEOREMA: Existencia y unicidad de la solución a un PVI

*Sea  $R \subset \mathbb{R}^2$  una región rectangular definida por  $a \leq x \leq b$ ,  $c \leq y \leq d$ , que contiene al punto  $(x_0, y_0)$ .*

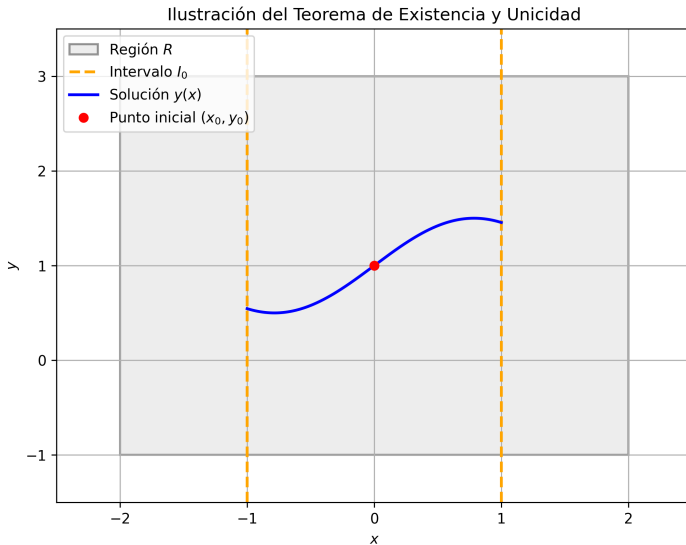
*Si las funciones  $f(x, y)$  y  $\frac{\partial f}{\partial y}$  son continuas en  $R$ , entonces existe un intervalo  $I_0 = (x_0 - h, x_0 + h) \subseteq [a, b]$ , con  $h > 0$ , y una única función  $y(x)$  definida sobre  $I_0$  que satisface la ecuación diferencial*

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0.$$

Son **condiciones suficientes, pero no necesarias**, por lo que si no se cumplen, podría darse cualquier caso: no existe la solución, existen varias soluciones, o existe solo una solución.



# Teorema de existencia y unicidad



# EJERCICIO 7. Comprobación de unicidad

Usando el teorema anterior, determine si las siguientes EDO de primer orden con condiciones iniciales poseen solución única en un intervalo que contenga  $x_0$ .

①  $y' - y = 0$

$$y = ce^x$$

Condición inicial:  $y(0) = 3$

②  $y' + 2xy^2 = 0$

$$y = \frac{1}{x^2 + c^2}$$

Condición inicial:  $y(0) = -1$



# Variables separables

Las más simples de todas las EDOs son aquellas de primer orden y variables separables.

## DEFINICIÓN: **Ecuación separable**

*Se dice que una EDO de primer orden es separable o de variables separables cuando se puede expresar en la forma:*

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y)$$

Por ejemplo, las EDOs siguientes

$$\frac{dy}{dx} = y^2 x e^{3x+4y} \quad y \quad \frac{dy}{dx} = y + \sin x$$

son separable y no separable, respectivamente.



# Solución por integración

El método de variables separables consiste en tomar la EDO de primer orden y variables separables  $\frac{dy}{dx} = g(x)h(y)$ . Y dividir ambos extremos de la ecuación entre la función  $h(y)$ , para obtener

$$p(y) \frac{dy}{dx} = g(x)$$

Donde  $p(y) = 1/h(y)$ . Recordando que se busca una función  $y = \phi(x)$ , entonces se sustituye e integran ambos lados respecto a  $x$

$$p(\phi(x))\phi'(x) = g(x)$$

$$\int p(\phi(x))\phi'(x)dx = \int g(x)dx$$

Ya que  $dy = \phi'(x)dx$ , se tiene que

$$\int p(y)dy = \int g(x)dx$$

$$H(y) = G(x) + c$$



## EJERCICIO 8. Solución de EDO separable

Resolver la EDO de primer orden

$$(1 + x)dy - y \, dx = 0$$





## EJERCICIO 9. PVI con ED separable

Resolver el problema de valores iniciales

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}, \quad y(4) = -3$$



# Pérdida de una solución

Considerando la EDO de primer orden separable

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y)$$

Al separar variables, se obtiene que

$$\frac{dy}{h(y)} = g(x) dx$$

Y cualquier valor  $y = r$  que haga que  $h(y) = 0$ , es decir, que sea raíz de  $h(y)$ , será una solución constante de la EDO, pero sería una solución singular porque no podría obtenerse de la familia de solución que brinda el procedimiento de separación de variables.



# EJERCICIO 10. Pérdida de una solución

Resolver la EDO

$$\frac{dy}{dx} = y^2 - 4$$

# EJERCICIO 11. PVI con solución implícita

Resolver la EDO

$$(e^{2y} - y) \cos x \frac{dy}{dx} = e^y \sin 2x$$



# Solución definida con una integral

En el caso de EDO separables, el método de solución habitual es la integración. En ocasiones, la solución a un problema con valores iniciales (PVI) se expresa como una integral definida.

Por ejemplo, para un PVI de la forma

$$\frac{dy}{dx} = g(x), \quad y(x_0) = y_0$$

si la integral indefinida

$$\int g(x) dx$$

no puede expresarse mediante funciones elementales, la mejor forma de describir la solución sobre un intervalo  $I$  es

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x g(t) dt$$



## EJERCICIO 12. PVI con función definida con integral

Resolver el PVI

$$\frac{dy}{dx} = e^{-x^2}, \quad y(3) = 5$$



# Funciones homogéneas

Una función  $f(x, y)$  se dice **homogénea de grado  $n$**  si cumple con

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y)$$

para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

**Ejemplo:**

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

$$f(tx, ty) = (tx)^2 + (ty)^2 = t^2x^2 + t^2y^2 = t^2(x^2 + y^2) = t^2f(x, y)$$

Por lo tanto, es homogénea de grado 2.

También es posible identificar funciones homogéneas por inspección, verificando que todos los términos que involucran variables  $x$  y  $y$  tengan el mismo grado (considerando a  $x$  y  $y$  como si fueran una misma variable).



## EJERCICIO 13. Funciones homogéneas

Determinar si las siguientes funciones

$$f(x, y)$$

son homogéneas y, en caso afirmativo, indicar el grado de homogeneidad.

$$f(x, y) = 3x^2y - x^3 \cos\left(\frac{y}{x}\right) - y^3$$

$$f(x, y) = \frac{x^3 + y^3}{(xy)^{3/2}}$$

$$f(x, y) = x^2y^2(x + y)$$

$$f(x, y) = e^{y+x^2/y}$$





# Solución de EDOs de 1er orden con funciones homogéneas

Se dice que una EDO de primer orden es de funciones homogéneas si, en su forma diferencial

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$$

Las funciones  $M(x, y)$  y  $N(x, y)$  son homogéneas del mismo grado. Es decir:

$$M(tx, ty) = t^n M(x, y) \quad y \quad N(tx, ty) = t^n N(x, y)$$

En este caso, se hace la sustitución de variable:

- $v = \frac{x}{y}$ , si  $M$  es más sencilla que  $N$ .

$$y = ux, \quad dy = u dx + x du$$

- $u = \frac{y}{x}$ , si  $N$  es más sencilla que  $M$ .

$$x = vy, \quad dx = v dy + y dv$$

Tras realizar la sustitución la EDO con funciones homogéneas se volverá separable.



## EJERCICIO 14. EDO con funciones homogéneas

Resolver la EDO

$$(x^2 + y^2)dx + (x^2 - xy)dy = 0$$



# Diferencial de una función de dos variables

Si  $z = f(x, y)$  es una función de dos variables con primeras derivadas parciales continuas en una región  $R$ , entonces su diferencial se calcula como:

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

Además, si  $f(x, y) = c$ , donde  $c$  es constante, se tiene que:

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = 0$$

Por lo tanto, toda la familia de curvas  $f(x, y) = c$  permite generar ecuaciones diferenciales. Por ejemplo, si

$$f(x, y) = x^2 - 5xy + y^3,$$

obtenemos la EDO:

$$(2x - 5y) dx + (-5x + 3y^2) dy = 0$$

La pregunta natural que surge es: **¿cómo podemos reconocer si una EDO proviene de la diferencial de una función  $f(x, y)$ ?**



# Ecuación diferencial exacta

No todas las EDO en forma diferencial

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$$

corresponden a la diferencial de una función  $f(x, y) = c$ . Por ello, se define la noción de ecuación diferencial exacta con base en el concepto de diferencial exacto.

## DEFINICIÓN: **Ecuación diferencial exacta**

*La expresión*

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy$$

*es una diferencial exacta en una región  $R$  del plano  $xy$  si corresponde a la diferencial de una función  $f(x, y)$  definida en  $R$ .*

*En tal caso, la ecuación de primer orden*

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$$

*se denomina **ecuación diferencial exacta**.*



# Criterio para una diferencial exacta

## TEOREMA: **Criterio para una diferencial exacta**

*Si  $M(x, y)$  y  $N(x, y)$  son funciones continuas y tienen derivadas parciales de primer orden continuas en una región rectangular  $R$ , definida por*

$$a < x < b, \quad c < y < d,$$

*entonces una condición necesaria y suficiente para que la expresión*

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy$$

*sea una diferencial exacta en  $R$ , es que*

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

*en todos los puntos de  $R$ .*



# Ejemplo de criterio de aceptación ED exacta

La ecuación

$$x^2 y^3 dx + x^3 y^2 dy = 0$$

es una diferencial exacta, ya que

$$d\left(\frac{1}{3}x^3 y^3\right) = x^2 y^3 dx + x^3 y^2 dy.$$

Las funciones  $M(x, y) = x^2 y^3$  y  $N(x, y) = x^3 y^2$  cumplen:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 3x^2 y^2 = \frac{\partial N}{\partial x}.$$



# Prueba de necesidad: Teorema de diferencial exacta

Suponiendo que  $M(x, y)$  y  $N(x, y)$  tienen primeras derivadas parciales continuas en todo el plano  $xy$ , y que la expresión  $M(x, y) dx + N(x, y) dy$  es exacta, entonces existe una función  $f(x, y)$  tal que

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

entonces

$$M(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad y \quad N(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}$$

Y se debe cumplir la igualdad de las parciales mixtas:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$



# Solución de EDO exactas

Una vez comprobado que una EDO

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$$

es exacta, el método de solución consiste en encontrar una función  $f(x, y)$  cuya diferencial sea dicha expresión y representa la solución implícita de la EDO.

Dado que  $\frac{\partial f}{\partial x} = M(x, y)$ , se puede determinar  $f(x, y)$  integrando parcialmente con respecto a  $x$ :

$$f(x, y) = \int M(x, y) dx + g(y),$$

donde  $g(y)$  es una función de  $y$  que actúa como constante de integración al considerar  $y$  constante.

El siguiente paso es derivar parcialmente respecto a  $y$ , y suponiendo que  $\frac{\partial f}{\partial y} = N(x, y)$ , se obtiene:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \int M(x, y) dx \right) + g'(y) = N(x, y)$$





# Solución de EDO exactas

La función  $g'(y)$  se obtiene a partir de la igualdad

$$g'(y) = N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \int M(x, y) dx \right).$$

Por lo tanto, basta con integrar respecto a  $y$  para sustituir en la expresión:

$$f(x, y) = \int M(x, y) dx + g(y).$$

Es importante señalar que el procedimiento anterior comenzó integrando  $M$  parcialmente respecto a  $x$ , pero también es posible comenzar con la suposición

$$\frac{\partial f}{\partial y} = N(x, y),$$

integrando  $N$  parcialmente respecto a  $y$  y luego derivando respecto a  $x$ . Así, se obtiene:

$$f(x, y) = \int N(x, y) dy + h(x), \quad h'(x) = M(x, y) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \int N(x, y) dy \right)$$



# EJERCICIO 15. EDO exacta

Resolver

$$2xy \, dx + (x^2 - 1) \, dy = 0$$



## EJERCICIO 16. EDO exacta

Resolver

$$(e^{2y} - y \cos xy) dx + (2xe^{2y} - x \cos xy + 2y) dy = 0$$



# EJERCICIO 17. PVI con EDO exacta

Resolver

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy^2 - \cos x \sin x}{y(1 - x^2)}, \quad y(0) = 2$$



# Factores integrantes

En algunas ocasiones, es posible encontrar una función  $\mu(x, y)$ , llamada **factor integrante**, tal que al multiplicar por ella una ecuación diferencial no exacta,

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0,$$

el resultado sea una ecuación diferencial exacta:

$$\mu(x, y) M(x, y) dx + \mu(x, y) N(x, y) dy = 0.$$

La pregunta fundamental es: ¿cómo determinar  $\mu(x, y)$ ?

Aunque existen diversos tipos de factores integrantes, uno de los más utilizados se obtiene aplicando el criterio de exactitud. Se requiere que se cumpla:

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu M) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu N),$$



# Factor integrante $\mu$

Para que la ecuación

$$\mu(x, y) M(x, y) dx + \mu(x, y) N(x, y) dy = 0$$

sea exacta, debe cumplirse:  $(\mu M)_y = (\mu N)_x$ , lo cual implica:

$$\mu M_y + \mu_y M = \mu N_x + \mu_x N,$$

$$\mu_x N - \mu_y M = \mu (M_y - N_x).$$

Esta es una ecuación en derivadas parciales (EDP). Como no contamos aún con las herramientas necesarias para resolverla en general, se hace la siguiente **suposición**:  $\mu$  depende de una sola variable.

Si  $\mu = \mu(x)$ , entonces  $\mu_y = 0$  y  $\mu_x = \frac{d\mu}{dx}$ . Sustituyendo:

$$\frac{d\mu}{dx} = \frac{M_y - N_x}{N} \mu.$$

Si el cociente  $\frac{M_y - N_x}{N}$  depende únicamente de  $x$ , se tiene una EDO lineal de primer orden en  $\mu(x)$ , resoluble por separación de variables. Si depende también de  $y$ , esta suposición no es válida y este factor no existe.



# Factor integrante $\mu$

Al separar variables en la ecuación

$$\frac{d\mu}{dx} = \frac{M_y - N_x}{N} \mu,$$

se obtiene:

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{M_y - N_x}{N} dx.$$

Integrando ambos lados:

$$\ln |\mu(x)| = \int \frac{M_y - N_x}{N} dx,$$

y despejando  $\mu(x)$ :

$$\mu(x) = e^{\int \frac{M_y - N_x}{N} dx}.$$

De manera análoga, si se supone que  $\mu = \mu(y)$ , entonces se obtiene:

$$\mu(y) = e^{\int \frac{N_x - M_y}{M} dy}.$$



# EJERCICIO 18. Factor integrante

Resolver la EDO

$$xy \, dx + (2x^2 + 3y^2 - 20) \, dy = 0$$





Eduardo Flores Rivas  
Ingeniero Mecatrónico  
Facultad de Ingeniería, UNAM  
[eduardo.flores@ingenieria.unam.edu](mailto:eduardo.flores@ingenieria.unam.edu)



ZILL, Dennis G.

*Ecuaciones diferenciales con problemas de valores en la frontera.*  
8a. edición. México. Cengage Learning, 2013.