# Ecuaciones Diferenciales

## Tema 3. Transformada de Laplace y sistemas de ecuaciones diferenciales lineales

Ing. Eduardo Flores Rivas

Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional Autónoma de México

Semestre 2026-1

# Contenido

# Objetivo del Tema

**Objetivo**: El alumno aplicará la transformada de Laplace en la resolución de ecuaciones y sistemas de ecuaciones diferenciales lineales.

# Transformada integral

Una transformación es una operación que transforma una función en otra, por ejemplo, la integración y la derivación. Además, estas dos tienen la propiedad de linealidad, es decir, cumplen con:

$$\int [\alpha f(x) + \beta g(x)]dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx$$

## Transformada integral

Una integral definida

$$\int_a^b K(s,\ t)f(t)dt$$

transforma la función $f(t)$ en una función $F(s)$. Además, si se define $f(t)$ para $t \geq 0$, la integral impropia con el intervalo $[0,\ \infty)$ se calcula con el límite

$$\int_0^\infty K(s,\ t)f(t)dt = \lim_{b\to\infty} \int_0^b K(s,\ t)f(t)dt$$

Si el límite existe, entonces la integral es **convergente**; si no, la integral es **divergente**.

# Definición de la Transformada de Laplace

En una transformada integral, la función $K(s,\ t)$ se llama **kernel** o **núcleo** de la transformada. Cuando $K(s,\ t) = e^{-st}$, se obtiene una transformada importante:

### Definición

Sea $f(t)$ una función definida para $t \geq 0$, entonces se dice que

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt, \quad s \in \mathbb{C}$$

es la **transformada de Laplace** de $f(t)$ siempre que la integral converja.

Se llamó así en honor del matemático y astrónomo francés **Pierre-Simon Marquis de Laplace** (1749 - 1827). Por convención, se usa una letra minúscula para la función que se transforma y su correspondiente mayúscula para la función transformada, por ejemplo:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$$

# Ejemplo: Transformada por definición

Obtener

$$\mathcal{L}\{1\}$$

## Solución

$$\mathcal{L}\{1\} = \int_0^\infty e^{-st}(1)\,dt = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-st}\,dt$$

$$\mathcal{L}\{1\} = \lim_{b\to\infty}\frac{-e^{-st}}{s}\Big|_0^b = \lim_{b\to\infty}[\frac{-e^{-sb}}{s} + \frac{1}{s}]$$

Para $s > 0$, $-e^{-sb} \to 0$ conforme $b \to \infty$, por lo que

$$\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}$$

Si $s < 0$, la integral diverge.

# Ejercicio: Transformada por definición

Obtener por la definición de la transformada de Laplace

1. $$\mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s^2}$$
2. $$\mathcal{L}\{e^{-3t}\} = \frac{1}{s+3}$$
3. $$\mathcal{L}\{e^{5t}\} = \frac{1}{s-5}$$
4. $$\mathcal{L}\{\sin(2t)\} = \frac{2}{s^2+4}$$

# Linealidad de la Transformada de Laplace

## Operador lineal

Siempre que existan ambas transformadas de Laplace ($\mathcal{L}\{f(t)\}$ y $\mathcal{L}\{g(t)\}$), la transformada es lineal:

$$\mathcal{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha\mathcal{L}\{f(t)\} + \beta\mathcal{L}\{g(t)\}$$

Dados los resultados de las transformadas anteriores, calcular:

1. $$\mathcal{L}\{1 + 5t\}$$

2. $$\mathcal{L}\{4e^{5t} - 10\sin(2t)\}$$

3. $$\mathcal{L}\{20e^{-3t} + 7t - 9\}$$

# Transformadas de Laplace de funciones básicas

| **Función** $f(t)$ | **Transformada** $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ |
|---|---|
| $1$ | $\dfrac{1}{s}$ |
| $t^n \ (n = 1, 2, 3, \dots)$ | $\dfrac{n!}{s^{n+1}}$ |
| $e^{at}$ | $\dfrac{1}{s-a}$ |
| $\sin(kt)$ | $\dfrac{k}{s^2+k^2}$ |
| $\cos(kt)$ | $\dfrac{s}{s^2+k^2}$ |
| $\sinh(kt)$ | $\dfrac{k}{s^2-k^2}$ |
| $\cosh(kt)$ | $\dfrac{s}{s^2-k^2}$ |

# Condiciones suficientes para la existencia de $\mathcal{L}$

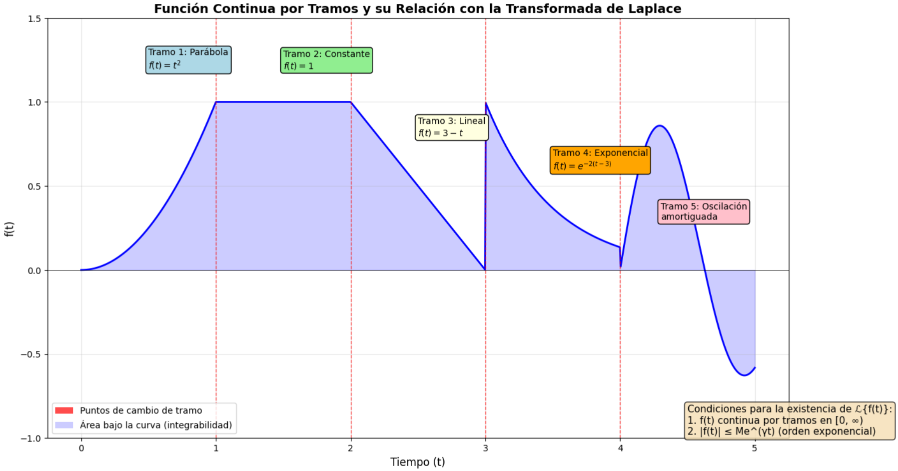
No todas las funciones $f(t)$ tienen transformada de Laplace, las condiciones suficientes que garantizan la existencia de $\mathcal{L}\{\alpha f(t)\}$ son que $f(t)$:

- Sea continua a tramos sobre $[0,\ \infty)$.
- Sea de orden exponencial para $t > T$

## Función continua a tramos

La función $f(t)$ es continua a tramos sobre $[0,\ \infty)$ si hay un número finito de puntos $t_k,\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n(t_{k-1} < t_k)$ en los que $f$ tiene discontinuidades finitas y es continua en cada intervalo abierto $(t_{k-1} < t_k)$.

# Función continua a tramos



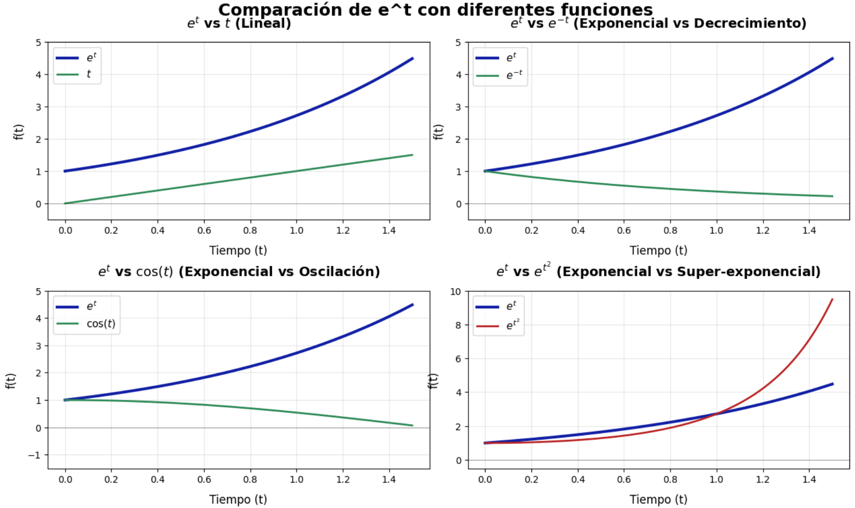
# Función de orden exponencial

## Orden exponencial

Se dice que $f(t)$ es de orden exponencial $c$ si existen constantes $c,\ M > 0$ y $T > 0$ tales que $|f(t)| \leq Me^{ct}$ para toda $t > T$.

La idea es que $f(t)$ no debe crecer más rápido que la función exponencial $Me^{ct}$ en el intervalo $(T, \infty)$

Las funciones $t$, $e^{-t}$ y $\cos(t)$ son de orden exponencial porque para $c = 1$, $M = 1$, $T = 0 < t$, se tiene que $|t| \leq e^t$, $|e^{-t}| \leq e^t$ y $|\cos(t)| \leq e^t$



# Transformada inversa de Laplace

Si la función $F(s)$ representa la transformada de Laplace de $f(t)$, entonces la transformada inversa de Laplace es

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$$

## Operador lineal

Al igual que la transformada de Laplace, la transformada inversa de Laplace es un operador lineal, por lo que se cumple que, para las constantes $\alpha$ y $\beta$

$$\mathcal{L}^{-1}\{\alpha F(s) + \beta G(s)\} = \alpha \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} + \beta \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}$$

donde $F(s)$ y $G(s)$ son las transformadas de algunas funciones $f(t)$ y $g(t)$, respectivamente.

# Transformadas inversas de Laplace de funciones básicas

| **Transformada** $F(s)$ | **Inversa** $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$ |
|---|---|
| $\dfrac{1}{s}$ | $1$ |
| $\dfrac{n!}{s^{n+1}}$ | $t^n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$ |
| $\dfrac{1}{s-a}$ | $e^{at}$ |
| $\dfrac{k}{s^2+k^2}$ | $\sin(kt)$ |
| $\dfrac{s}{s^2+k^2}$ | $\cos(kt)$ |
| $\dfrac{k}{s^2-k^2}$ | $\sinh(kt)$ |
| $\dfrac{s}{s^2-k^2}$ | $\cosh(kt)$ |

# Ejercicio: Transformada inversa de Laplace

Evaluar las siguientes transformadas inversas:

1. $$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s^5}\}$$

2. $$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s^2+7}\}$$

3. $$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{-2s+6}{s^2+4}\}$$

4. $$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{s^2+6s+9}{(s-1)(s-2)(s+4)}\}$$

# Descomposición en Fracciones Parciales

Las fracciones parciales permiten descomponer funciones racionales complejas en términos simples.

## Caso 1: Factores Lineales No Repetidos

$$\frac{P(x)}{(ax+b)(cx+d)\cdots(ex+f)} = \frac{A}{ax+b} + \frac{B}{cx+d} + \cdots + \frac{C}{ex+f}$$

- $P(x)$: Polinomio de grado menor y $A, B, C$: Constantes a determinar

## Caso 2: Factores Lineales Repetidos

$$\frac{P(x)}{(ax+b)^k} = \frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(ax+b)^k}$$

- $k$: Multiplicidad del factor

# Descomposición en Fracciones Parciales

## Caso 3: Factores Cuadráticos Irreducibles

$$\frac{P(x)}{(ax^2+bx+c)^m} = \frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c} + \frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2} + \cdots$$

- $ax^2+bx+c$: Irreducible $(b^2-4ac<0)$
- Numeradores lineales

## Nota Importante

Si $\deg(P(x)) \geq \deg(Q(x))$ (fracción impropia), se debe realizar la división polinomial primero:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

donde $\deg(R(x)) < \deg(Q(x))$.

# No unicidad de la transformada inversa de Laplace

## Teorema de Lerch

Si $f_1(t)$ y $f_2(t)$ son funciones seccionalmente continuas y de orden exponencial ($|f(t)| \leq Me^{ct}$), y

$$\mathcal{L}\{f_1(t)\} = \mathcal{L}\{f_2(t)\} = F(s) \quad \text{para } \mathrm{Re}(s) > c,$$

entonces:

$$f_1(t) = f_2(t) \quad \text{en todo punto de continuidad.}$$

## ¿Dónde aparece la no unicidad?

Cuando las funciones difieren en conjuntos de medida cero (puntos aislados o conjuntos discretos). Sin embargo, para fines prácticos:

- Las integrales no detectan estas diferencias
- Las soluciones de EDOs son equivalentes
- Se consideran *esencialmente iguales*

# Ejemplo: No unicidad en puntos aislados

## Función continua

$$f_1(t) = 1 \quad \forall t \geq 0$$

$$\mathcal{L}\{f_1\} = \frac{1}{s}$$

Continua en todo punto

## Función modificada en t=1

$$f_2(t) = \begin{cases} 1 & t \neq 1 \\ 0 & t = 1 \end{cases}$$

$$\mathcal{L}\{f_2\} = \frac{1}{s}$$

Discontinua solo en $t = 1$

## Conclusión

$$\mathcal{L}\{f_1\} = \mathcal{L}\{f_2\} = \frac{1}{s}$$

pero $f_1(1) = 1 \neq 0 = f_2(1)$.

La diferencia en un punto aislado no afecta la transformada.

# Transformada de una derivada

Ya que se desea usar la transformada de Laplace para la solución de ED, es necesario conocer cuál es el valor de la transformada de una derivada.
Por ejemplo, si $f'$ es continua para $t \geq 0$, al integrar por partes se obtiene que:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f'(t)dt = e^{-st} f(t)|_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt$$

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = -f(0) + s\mathcal{L}\{f(t)\}$$

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0)$$

Ya que $e^{-st} f(t) \to 0$ conforme $t \to \infty$. De forma similar, para la segunda derivada:

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f''(t)dt = e^{-st} f'(t)|_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} e^{-st} f'(t)dt$$

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = -f'(0) + s\mathcal{L}\{f'(t)\} = -f'(0) + s[sF(s) - f(0)]$$

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2 F(s) - sf(0) - f'(0)$$

# Transformada de una derivada

De la misma manera se puede demostrar que

$$\mathcal{L}\{f'''(t)\} = s^3F(s) - s^2f(0) - sf'(0) - f''(0)$$

La naturaleza recursiva de la transformada de Laplace de una derivada nos permite enunciar el siguiente teorema.

**TEOREMA: Transformada de una derivada**

Si $f,\ f',\ f'', \dots,\ f^{(n-1)}$ son continuas sobre $[0,\ \infty)$ y son de orden exponencial y si $f^{(n)(t)}$ es continua por tramos sobre $[0,\ \infty)$, entonces la transformada de Laplace de la enésima derivada es:

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - f^{n-1}(0)\}$$

donde $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$

# Ejemplos: Transformada de una derivada

**Instrucciones**: Calcule la transformada de Laplace para cada derivada, aplicando las condiciones iniciales dadas.

**Fórmula general para derivada de orden $n$**

$$\mathcal{L}\{y^{(n)}(t)\} = s^n Y(s) - s^{n-1}y(0) - s^{n-2}y'(0) - \cdots - y^{(n-1)}(0)$$

1. Para $y(t)$ con $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 4$:

$$\mathcal{L}\{y'''(t)\} = s^3 Y(s) - s^2(1) - s(0) - 4 = s^3 Y(s) - s^2 - 4$$

2. Para $y(t)$ con $y(0) = a$, $y'(0) = b$, $y''(0) = c$
3. Para $y(t)$ con $y(0) = 5$, $y'(0) = -2$, $y''(0) = 1$, $y'''(0) = 0$
4. Para $y(t)$ con $y(0) = y_0$, $y'(0) = y_1$, $y''(0) = y_2$, $y'''(0) = y_3$

# Solución de EDO lineales con la TL

Con las herramientas anteriores, queda por sentado que la transformada de Laplace representa una herramienta valiosa para la solución de PVI (con $t = 0$) en EDOs lineales con coeficientes constantes.

Estas EDOs representan una combinación lineal de $y(t)$ y sus derivadas $y',\ y'', \ldots,\ y^{(n)}$ de la forma:

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_0 y = g(t)$$

con condiciones iniciales

$$y(0) = y_0,\ y'(0) = y_1,\ \cdots,\ y^{(n-1)}(0) = y_{n-1}$$

Al aplicar la transformada de Laplace

$$a_n \mathcal{L}\{\frac{d^n y}{dt^n}\} + a_{n-1} \mathcal{L}\{\frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}}\} + \cdots + a_0 \mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{g(t)\}$$

# Solución de EDO lineales con la TL

Con el teorema de la transformada de una derivada, la ecuación anterior

$$a_n\mathcal{L}\{\frac{d^ny}{dt^n}\} + a_{n-1}\mathcal{L}\{\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}\} + \cdots + a_0\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{g(t)\}$$

se convierte en

$$a_n[s^nY(s) - s^{n-1}y(0) - \cdots - y^{(n-1)}(0)] +$$

$$+a_{n-1}[s^{n-1}Y(s) - s^{n-2}y(0) - \cdots - y^{(n-2)}(0)] + \cdots + a_0Y(s) = G(s)$$

donde $\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s)$ y $\mathcal{L}\{g(t)\} = G(s)$.

**¿Por qué es útil este método?**

La transformada de Laplace convierte una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes en una ecuación algebraica en el dominio de $s$.

# Procedimiento para resolución de PVI con TL

Se sugiere el siguiente procedimiento para la solución a problemas de valores iniciales de EDOs lineales con coeficientes constantes:

1. **Preparar la ecuación**: Ordene la ecuación de forma que se muestre como una combinación lineal de $y(t)$ y sus derivadas $y', \ y'', \dots, \ y^{(n)}$

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_0 y = g(t)$$

2. **Transformada de Laplace**: Aplique la transformada de Laplace para obtener una ecuación algebraico en el dominio $s$.

$$\mathcal{L}\left\{ a_n y^{(n)} + \cdots + a_0 y \right\} = \mathcal{L}\{g(t)\}$$

3. **Obtener Y(s)**: Despeje $Y(s)$ con operaciones algebraicas.
4. **Transformada inversa**: Aplique la transformada inversa de Laplace para obtener la solución en el dominio del tiempo.

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$$

# Ejercicio: Solución de un PVI de primer orden

Usar la transformada de Laplace para resolver el siguiente PVI

$$\frac{dy}{dx} + 3y = 13 \sin 2t, \quad y(0) = 6$$

# Ejercicio: Solución de un PVI de segundo orden

Usar la transformada de Laplace para resolver el siguiente PVI

$$y'' - 3y' + 2y = e^{-4t}, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 5$$

# Ejercicio: Solución de un PVI de segundo orden

Usar la transformada inversa de Laplace siguiente:

$$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}\} = e^{at}\cos bt$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{b}{(s-a)^2+b^2}\} = e^{at}\sin bt$$

para resolver los siguiente PVIs

$$y' + y = e^{-3t}\cos 2t, \quad y(0) = 0$$

$$y'' - 2y' + 5y = 0, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 3$$

# Traslación en el eje s

El cálculo de una transformada de Laplace de un múltiplo exponencial de una función $f$

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\}$$

se puede calcular a través de trasladar o desplazar la transformada desde $s$ hasta $s-a$.

## Primer teorema de traslación

Si $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ y $a$ es cualquier número real, entonces

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\}|_{s\to s-a} = F(s)|_{s\to s-a} = F(s-a)$$

## Demostración

Por definición

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st}e^{at}f(t)dt = \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t}f(t)dt = F(s-a)$$

# Ejemplos: Primer teorema de traslación

Usar el primer teorema de traslación

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a)$$

para calcular las siguientes transformadas de Laplace:

1. $$\mathcal{L}\{e^{5t}t^3\}$$

2. $$\mathcal{L}\{e^{-2t}\cos 4t\}$$

# Forma inversa del primer teorema de traslación

Es posible utilizar el primer teorema de forma inversa para encontrar transformadas inversas de Laplace de forma más sencilla. Basta con seguir el proceso en sentido contrario:

**Primer teorema de traslación: Inverso**

Si $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$ y $a$ es cualquier número real, entonces

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s-a)\} = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)|_{s\to s-a}\} = e^{at}\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = e^{at}f(t)$$

**EJERCICIO**: Encontrar las transformadas inversas de Laplace siguientes:

1. $$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{2s+5}{(s-3)^2}\}$$

2. $$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{s/2+5/3}{s^2+4s+6}\}$$

# Ejercicio: PVI con primer teorema de traslación

Resolver

$$y'' + 4y' + 6y = 1 + e^{-t}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

# Ejercicio: PVI con primer teorema de traslación

Resolver

$$y'' - 6y' + 9y = t^2 e^{3t}, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 17$$

# Función escalón unitario

En ingeniería es común encontrar sistemas *activados* o *desactivados*, como si se tratara de un interruptor eléctrico. Resulta conveniente definir una función que sea 0 hasta un cierto tiempo $t = a$ y desde entonces sea 1.

La función escalón unitario o **función de Heaviside**, llamada así en honor al inglés Oliver Heaviside, cumple con estos requerimientos.

## Función escalón unitario

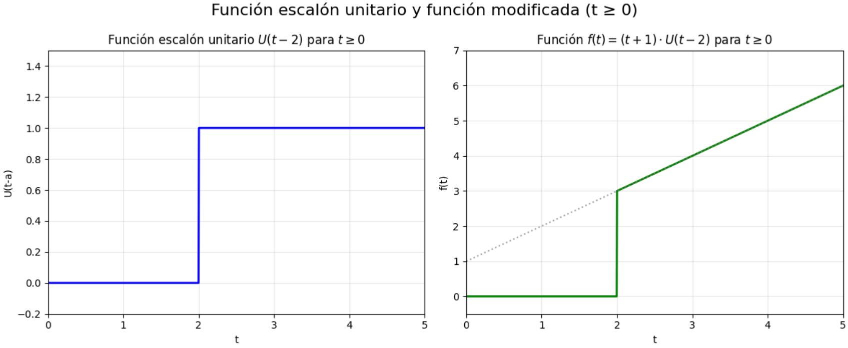
La función escalón unitario $\mathcal{U}(t-a)$ se define como

$$\mathcal{U}(t-a) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < a \\ 1, & t \geq a \end{cases}$$

**Nota:** solo se define $\mathcal{U}(t-a)$ solo para el eje $t$ no negativo ($t \geq 0$), porque solo nos importa en el estudio de la transformada de Laplace. En un sentido amplio: $\mathcal{U}(t-a) = 0 \quad \forall\ t < a$.

# Gráfica de escalón unitario

Cuando una función definida para $t \geq 0$ se multiplica por la función Heaviside $\mathcal{U}(t-a)$, lo que ocurre es que la función se vuelve cero para $t < a$.




$$f(t) = (t+1) \cdot \mathcal{U}(t-2) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 2 \\ t+1, & t \geq 2 \end{cases}$$

# Funciones a tramos con Heaviside

Una función a tramos puede definirse usando la función escalón unitario, de forma general:

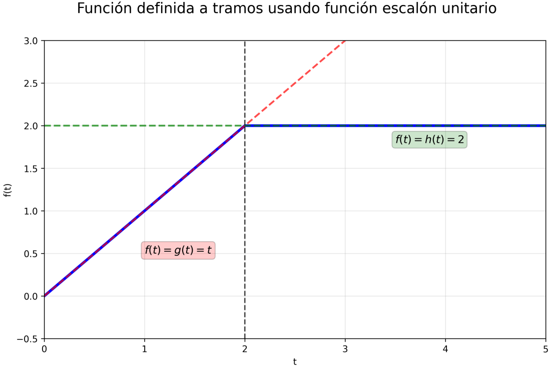
$$f(t) = g(t) - g(t) \cdot \mathcal{U}(t-a) + h(t) \cdot \mathcal{U}(t-a) = \begin{cases} g(t), & 0 \leq t < a \\ h(t), & t \geq a \end{cases}$$

Por ejemplo, con

$$a = 2$$

$$g(t) = t$$

$$h(t) = 2$$



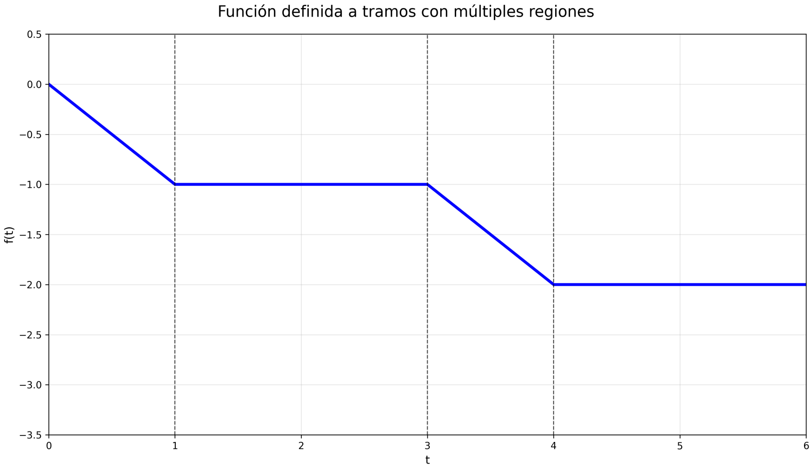
# Ejercicio: Función a tramos con escalón unitario

Representar la función $f(t)$ definida a tramos usando el escalón unitario.

$$f(t) = \begin{cases} t^2, & 0 \leq t < 2 \\ 4, & 2 \leq t < 4 \\ -t+8, & 4 \leq t < 8 \\ 0, & t \geq 8 \end{cases}$$

# Ejercicio: Función a tramos con escalón unitario

Representar la función $f(t)$ mostrada en la gráfica usando el escalón unitario.



# Traslación sobre el eje t

La transformada inversa de Laplace de un múltiplo exponencial de una función $F$

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\}$$

es la función $f$ trasladada a lo largo del eje $t$.

### Segundo teorema de traslación

Si $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ y $a > 0$, entonces

$$\mathcal{L}\{f(t-a)\,\mathcal{U}(t-a)\} = e^{-as}F(s)$$

### Forma inversa

Si $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ y $a > 0$, entonces

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\} = f(t-a)\,\mathcal{U}(t-a)$$

# Demostración segundo teorema de traslación

Por la adición de integrales en intervalos

$$\mathcal{L}\{f(t-a)\,\mathcal{U}(t-a)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t-a)\,\mathcal{U}(t-a)dt$$

se puede escribir como:

$$= \int_0^{a} e^{-st} f(t-a)\,\mathcal{U}(t-a)dt + \int_a^{\infty} e^{-st} f(t-a)\,\mathcal{U}(t-a)dt$$

Ya que $\mathcal{U}(t-a) = 0$ para $0 \leq t < a$ y $\mathcal{U}(t-a) = 1$ para $t \geq a$, entonces:

$$\mathcal{L}\{f(t-a)\,\mathcal{U}(t-a)\} = \int_a^{\infty} e^{-st} f(t-a)dt$$

Con el cambio de variable $v = t - a$ (por tanto $t = v + a$ y $dt = dv$):

$$= \int_0^{\infty} e^{-s(v+a)} f(v)dv = e^{-as} \int_0^{\infty} e^{-sv} f(v)dv$$

Como $v$ es una **variable muda de integración**, se tiene que:

$$\mathcal{L}\{f(t-a)\,\mathcal{U}(t-a)\} = e^{-as}\mathcal{L}\{f(t)\}$$

# Transformada del escalón unitario

Aplicando el segundo teorema de traslación con $f(t) = 1$ entonces

$$f(t-a) = 1 \qquad \rightarrow \qquad \mathcal{L}\{f(t-a)\} = \mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}$$

$$\mathcal{L}\{f(t-a)\,\mathcal{U}(t-a)\} = e^{-as}F(s)$$

$$\mathcal{L}\{\mathcal{U}(t-a)\} = \frac{e^{-as}}{s}$$

**Ejercicio**

Calcular la transformada de la función

$$f(t) = 2 - 3\mathcal{U}(t-2) + \mathcal{U}(t-3)$$

# Ejercicio: Transformada inversa con el segundo teorema

Encontrar las siguientes transformadas inversas de Laplace.

$$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s-4}e^{-2s}\}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{s}{s-4}e^{-\pi s/2}\}$$

# Segundo teorema de traslación: Forma alternativa

Cuando se desea obtener la transformada de Laplace del producto de una función $g(x)$ y el escalón unitario $\mathcal{U}(t-a)$, muchas veces $g(x)$ no tendrá la forma necesaria para el desplazamiento $f(t-a)$, lo que requiere hacer una modificación a la función para aplicar el segundo teorema de traslación.

Por ejemplo, si se desea calcular

$$\mathcal{L}\{t^2\,\mathcal{U}(t-2)$$

es posible llevar a $g(t)$ hacia la forma $f(t-2)$, por ejemplo con

$$t^2 = (t-2)^2 + 4(t-2) + 4$$

Entonces se tiene

$$\mathcal{L}\{(t-2)^2\,\mathcal{U}(t-2) + 4(t-2)\,\mathcal{U}(t-2) + 4\,\mathcal{U}(t-2)\}$$

Sin embargo, esto no parece muy útil porque requiere un desarrollo algebráico específico.

# Forma alternativa

Con el objetivo de poder emplear cualquier $g(x)$ y la sustitución $u = t - a$, se desarrolla de la siguiente manera:

$$\mathcal{L}\{g(t)\,\mathcal{U}(t-a)\} = \int_a^\infty e^{-st} g(t)dt = \int_a^\infty e^{-s(u+a)} g(u+a)du$$

Visto de otra forma

$$\mathcal{L}\{g(t)\,\mathcal{U}(t-a)\} = e^{-as}\mathcal{L}\{g(t+a)\}$$

## Ejercicio

Calcular la transformada de la función

$$\cos t\,\mathcal{U}(t-\pi)$$

# Ejercicio: Problema con valores iniciales

Resolver

$$y' + y = f(t), \qquad y(0) = 5$$

con

$$f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < \pi \\ 3\cos t, & t \geq \pi \end{cases}$$

# Derivada de una transformada

**Teorema: Derivada de transformada**

Si $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ y $n = 1, 2, 3, \ldots,$ entonces

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \, \frac{d^n}{ds^n} F(s)$$

**Demostración**

Suponiendo que $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ existe, y que es posible intercambiar de orden la derivada y la integral

$$\frac{d}{ds} F(s) = \frac{d}{ds} \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt = \int_0^\infty \frac{\delta}{\delta s} [e^{-stf(t)}] dt = -\int_0^\infty e^{-st} t f(t) dt$$

es decir

$$\mathcal{L}\{tf(t)\} = -\frac{d}{ds} \mathcal{L}\{f(t)\}$$

## Definición de convolución

La **convolución** de dos funciones $f(t)$ y $g(t)$ continuas a tramos en un intervalo $[0,\infty)$ se define como:

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau$$

Ejemplo: Calcular

$$\mathcal{L}\{e^t * sen(t)\}$$

# Teorema de convolución

Sabemos que, para dos funciones $f$ y $g$,

$$\mathcal{L}\{f+g\} = \mathcal{L}\{f\} + \mathcal{L}\{g\}$$

sin embargo, esto no es verdad para el producto $f \cdot g$.

Del ejemplo anterior, observamos que la transformada de producto generalizado $f * g$ sí es el producto de las transformadas de $f$ y $g$.

## Teorema de convolución

Sean $f$ y $g$ dos funciones continuas a tramos sobre $[0, \infty)$ y de orden exponencial, entonces:

$$\mathcal{L}\{f * g\} = \mathcal{L}\{f\} \cdot \mathcal{L}\{g\} = F(s) \cdot G(s)$$

De manera equivalente: $\mathcal{L}^{-1}\{F(s) \cdot G(s)\} = (f * g)(t)$

# Demostración del teorema de convolución

Procediendo con $f$ y $g$

$$F(s)G(s) = (\int_0^\infty e^{-s\tau} f(\tau)d\tau)(\int_0^\infty e^{-s\beta} g(\beta)d\beta)$$
$$= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-s(\tau+\beta)} f(\tau)g(\beta)\ d\tau d\beta$$
$$= \int_0^\infty f(\tau)d\tau \int_0^\infty e^{-s(\tau+\beta)} g(\beta)d\beta$$

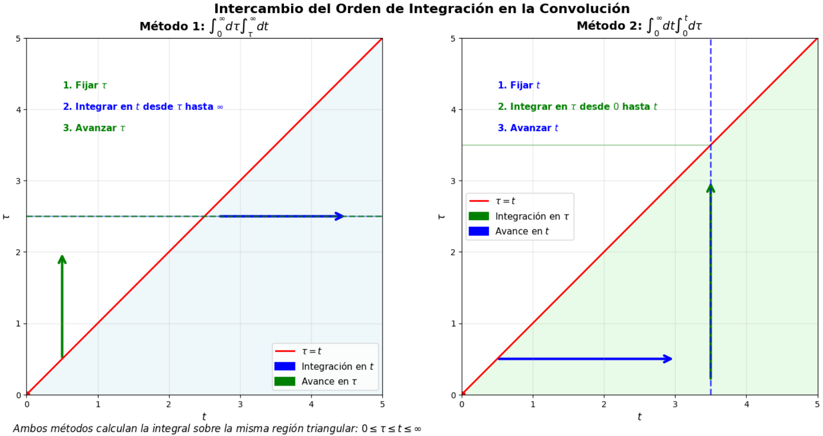
Con $t = \tau + \beta$ y $dt = d\beta$

$$F(s)G(s) = \int_0^\infty f(\tau)d\tau \int_\tau^\infty e^{-st} g(t-\tau)dt$$

Intercambiando el orden de integración

$$F(s)G(s) = \int_0^\infty e^{-st} dt \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau = \mathcal{L}\{f * g\}$$

# Gráfica de cambio de orden de integración



# Propiedades e importancia de la convolución

Propiedades algebraicas

- **Conmutativa**: $f * g = g * f$
- **Asociativa**: $f * (g * h) = (f * g) * h$
- **Distributiva**: $f * (g + h) = f * g + f * h$
- **Elemento neutro**: $f * \delta(t) = f(t)$ (delta de Dirac)

## Importancia práctica

- Permite calcular transformadas inversas de productos
- Fundamental para resolver EDOs no homogéneas complejas

## Aplicaciones

- Sistemas lineales invariantes en el tiempo
- Procesamiento de señales
- Teoría de control

# Ejemplo de convolución en transformada inversa

Calcular $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+1)}\right\}$ usando la definición de convolución:

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau$$

Solución

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+1)}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{s^2+1}\right\} \\
&= 1 * \sin t = \int_0^t 1\cdot\sin(t-\tau)\,d\tau \\
&= [\cos(t-\tau)]_0^t \\
&= 1 - \cos t
\end{aligned}$$

Encontrar la transformada inversa de Laplace de las siguientes funciones usando la convolución de funciones.

- $$F(s) = \frac{1}{s^2 + as}$$
- $$F(s) = \frac{1}{s^3 + s^2}$$
- $$F(s) = \frac{1}{s^4 + 5s + 4}$$
- $$F(s) = \frac{s}{s^3 + as^2 + \omega^2 s + a\omega^2}$$
- $$F(s) = \frac{1}{s^3 - bs^2}$$

# Solución de ejercicios de convolución

- $$F(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s+a} \quad \Rightarrow \quad f(t) = 1 * e^{-at} = \frac{1 - e^{-at}}{a}$$

- $$F(s) = \frac{1}{s^2(s+1)} \quad \Rightarrow \quad f(t) = t * e^{-t} = t - 1 + e^{-t}$$

- $$F(s) = \frac{1}{s^2+1} \cdot \frac{1}{s^2+4} \quad \Rightarrow \quad f(t) = \sin t * \sin(2t) = \frac{2}{3}\sin t - \frac{1}{3}\sin(2t)$$

- $$F(s) = \frac{1}{s+a} \cdot \frac{s}{s^2+\omega^2} \quad \Rightarrow \quad f(t) = e^{-at} * \cos(\omega t)$$

- $$F(s) = \frac{1}{s^2} \cdot \frac{1}{s-b} \quad \Rightarrow \quad f(t) = t * e^{bt} = \frac{e^{bt} - 1 - bt}{b^2}$$

**Ventaja**

La convolución evita el uso de fracciones parciales.

# Transformada de una integral

Cuando $g(t) = 1$ y $\mathcal{L}\{g(t)\} = G(s) = 1/s$, se puede obtener la transformada de una integral con el teorema de convolución

$$\mathcal{L}\{\int_0^t f(\tau)d\tau\} = \frac{F(s)}{s}$$

o de forma inversa

$$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{F(s)}{s}\} = \int_0^t f(\tau)d\tau$$

Lo que permite calcular transformadas inversas ahorrando el uso de fracciones parciales.

$$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s^2+as}\} = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s(s+a)}\} = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1/(s+a)}{s}\} = \int_0^t e^{-a\tau}d\tau$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s^2+as}\} = [-\frac{e^{-a\tau}}{a}]_0^t = -\frac{e^{-at}-1}{a} = \frac{1-e^{-at}}{a}$$

# Ejercicios: Ecuaciones integrales e integrodiferenciales

Resolver las ecuaciones

1.
$$f(t) + \int_0^t (t-\tau) f(\tau) d\tau = t$$

2.
$$y'(t) = 1 - sen(t) - \int_0^t y(\tau) d\tau, \quad y(0) = 0$$

# Función rampa unitaria

En ingeniería de control y sistemas, la función rampa representa señales que crecen linealmente con el tiempo, como la posición de un objeto en movimiento uniforme.

## Función rampa unitaria

La función rampa unitaria $r(t-a)$ se define como

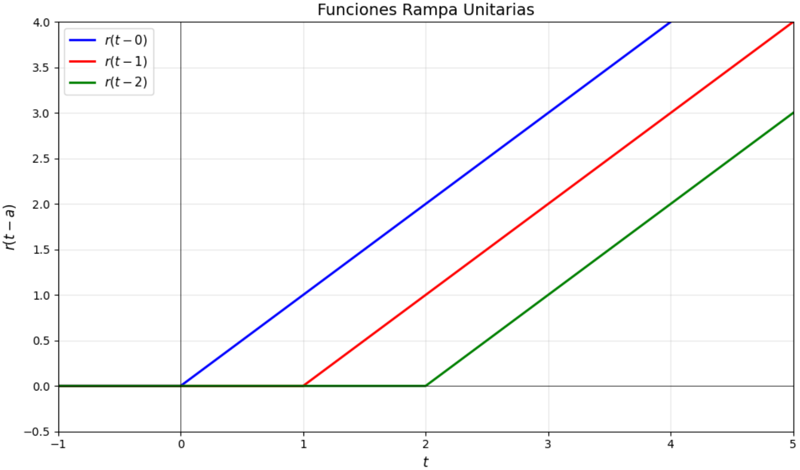
$$r(t-a) = t \cdot \mathcal{U}(t-a) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < a \\ t-a, & t \geq a \end{cases}$$

## Transformada de Laplace

$$\mathcal{L}\{r(t-a)\} = \mathcal{L}\{(t-a)\mathcal{U}(t-a)\} = \frac{e^{-as}}{s^2}$$

# Gráfica de la función rampa unitaria

La función rampa unitaria representa un crecimiento lineal a partir del tiempo $t = a$. Es fundamental en el análisis de sistemas de control para evaluar el seguimiento de señales de referencia.



# Función impulso unitario (Delta de Dirac)

En sistemas físicos, a veces necesitamos modelar fuerzas o señales de muy corta duración pero gran intensidad, como un golpe instantáneo.

## Definición formal

$$\delta(t-a) = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{\epsilon}\left[\mathcal{U}(t-a) - \mathcal{U}(t-a-\epsilon)\right]$$

## Definición intuitiva

La función impulso unitario $\delta(t-a)$ representa un pulso infinitamente alto y infinitamente angosto en $t=a$, con área total igual a 1:

$$\delta(t-a) = \begin{cases} \infty, & t = a \\ 0, & t \neq a \end{cases} \quad \text{con} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-a)dt = 1$$

# Propiedades del impulso unitario y su transformada

## Transformada de Laplace

$$\mathcal{L}\{\delta(t-a)\} = e^{-as}$$

Si $a = 0$, entonces

$$\mathcal{L}\{\delta(t-a)\} = 1$$

## Relación con escalón

$$\frac{d}{dt}\mathcal{U}(t-a) = \delta(t-a)$$

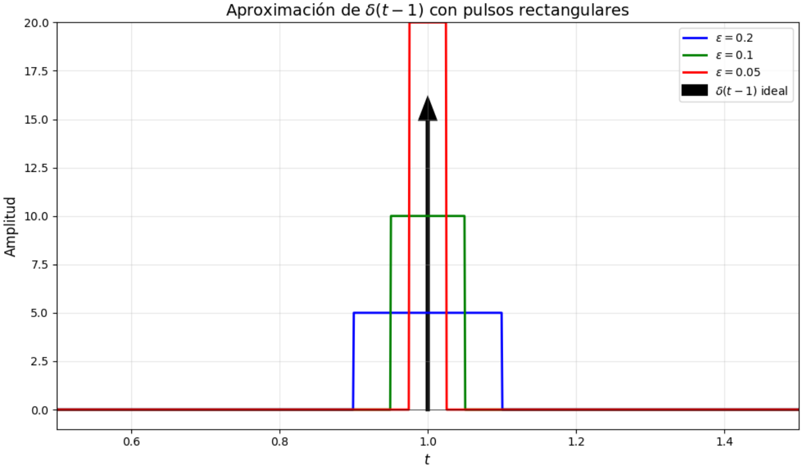
**Interpretación física**

El impulso unitario modela:

- Fuerzas instantáneas (martillazos, choques)
- Cargas concentradas en un punto
- Perturbaciones breves en sistemas

# Gráfica y aplicación del impulso unitario

Aunque $\delta(t-a)$ es una función generalizada (distribución), se puede visualizar como el límite de pulsos rectangulares cada vez más angostos y altos.



# Ejercicio: PVI con Delta de Dirac

Resolver el PVI

$$y'' + y = 4\delta(t - 2\pi), \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 0$$

# Transformada de una función periódica

Un función es periódica cuando se repite cada cierto tiempo, esto es para un periodo $T > 0$

$$f(t+T) = f(t)$$

**Teorema: Transformada de una función periódica**

Si $f(t)$ es continua a tramos sobre $^0, \infty)$, de orden exponencial y periódica con periodo $T$, entonces

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1-e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} f(t) dt$$

# Problema con Valores en la Frontera

## Definición formal

Dada una EDO de orden $n$:

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_0(x)y = g(x)$$

con **condiciones de frontera**:

$$y(x_1) = y_1,\ y(x_2) = y_2,\ \ldots,\ y(x_n) = y_n$$

donde $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son puntos distintos del intervalo $I$.

## Interpretación geométrica

La solución $y(x)$ debe satisfacer la EDO en $I$ y **pasar por los puntos** $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$.

# Comparación PVI y PVF

- **Problema de Valor Inicial (PVI)**: Condiciones en un *mismo punto*

$$y(x_0) = y_0,\; y'(x_0) = y_1,\; \ldots,\; y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

- **Problema con Valores en la Frontera (PVF)**: Condiciones en *diferentes puntos*

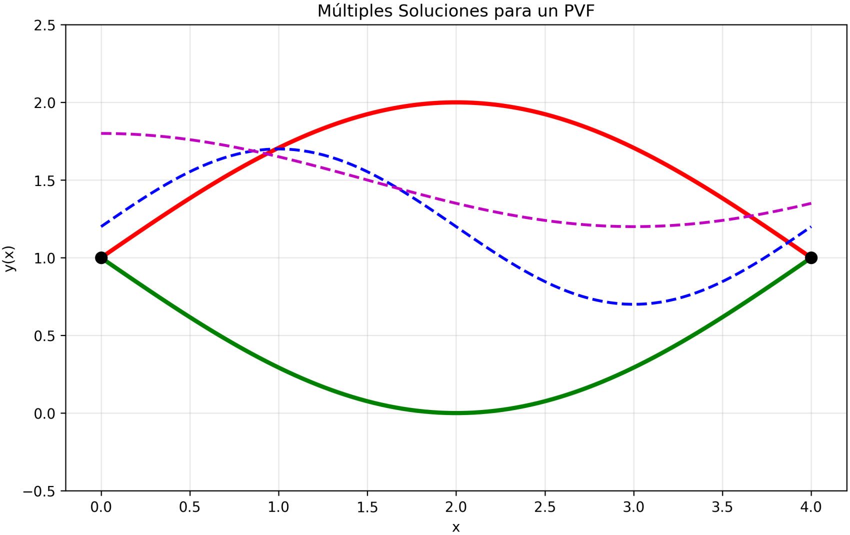
$$y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta$$

## Ejemplos en ingeniería

- **Civil**: Deflexión de una viga con apoyos en ambos extremos
- **Mecánica**: Temperatura en una barra con extremos a temperatura fija
- **Eléctrica**: Potencial eléctrico entre dos placas conductoras

# Curvas de solución de un PVF

Un PVF puede tener muchas, una o ninguna solución.



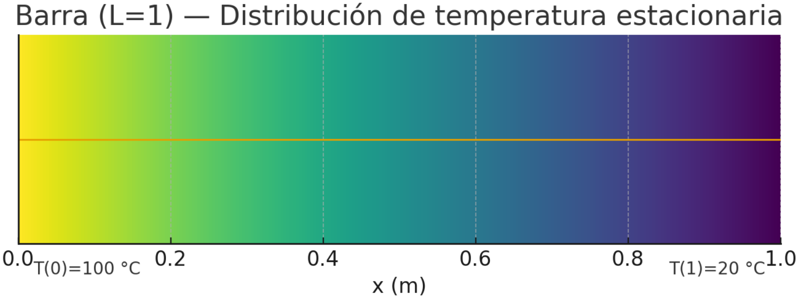
# Ejercicio PVF: Distribución de temperatura

Una barra de longitud $L = 1$ tiene sus extremos mantenidos a temperaturas fijas. Hallar la distribución de temperatura estacionaria usando la ecuación

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = 0, \quad 0 < x < 1$$

y las condiciones en la frontera

$$T(0) = 100[^\circ C], \quad T(1) = 20[^\circ C]$$



# Ejercicio PVF: Vibración en cuerda

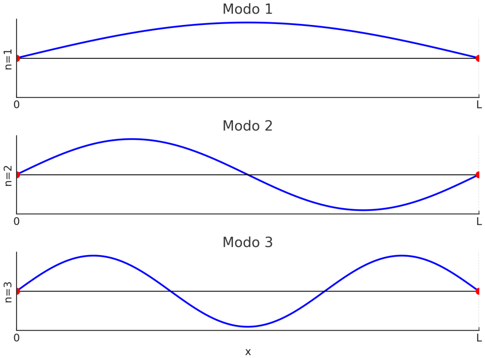
Encontrar las frecuencias naturales de vibración de una cuerda fija en ambos extremos.

$$y'' + \lambda y = 0, \quad 0 < x < L$$

Con las condiciones frontera

$$y(0) = 0, \quad y(L) = 0$$

Considera un análisis para $\lambda < 0$, $\lambda = 0$ y $\lambda > 0$.



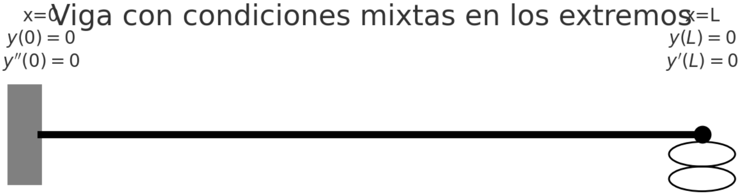
# Ejercicio PVF: Deflexión en una viga

Determinar la deflexión de una viga con condiciones mixtas en los extremos.

$$\frac{d^4y}{dx^4} = 0, \quad 0 < x < L$$

y las condiciones en la frontera

$$y(0) = 0, \quad y''(0) = 0, \quad y(L) = 0, \quad y'(L) = 0$$



# Sistemas lineales

Un sistema de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden se puede representar en su forma normal como

$$
\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + f_1(t)\\
\frac{dx_2}{dt} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + f_2(t)\\
&\vdots\\
\frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + f_n(t)
\end{aligned}
$$

A esto se le conoce como sistema de primer orden o sistema lineal. Suponemos que los coeficientes $a_{ij}$ y las funciones $f_i$ son continuas sobre un intervalo común $I$.

Además, cuando las funciones $f_i(t) = 0$ para $i = 1, 2, \ldots, n$, se dice que el sistema lineal es **homogéneo**. En caso contrario, es **no homogéneo**.

# Forma matricial de un sistema lineal

Se definen las siguientes matrices

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$$

Entonces el sistema de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden se puede escribir como

$$\mathbf{X}' = \mathbf{AX} + \mathbf{F}$$

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$$

Si el sistema es homogéneo, entonces

$$\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$$

# Ejemplos de sistemas lineales en forma matricial

Para el sistema lineal

$$\frac{dx}{dt} = 3x + 4y, \quad \frac{dy}{dt} = 5x - 7y$$

Con el vector

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

Su representación matricial es

$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & -7 \end{pmatrix} \mathbf{X}$$

# Ejemplos de sistemas lineales en forma matricial

Para el sistema lineal

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= 6x + y + z + t\\ \frac{dy}{dt} &= 8x + 7y - z + 10t\\ \frac{dz}{dt} &= 2x + 9y - z + 6t\end{aligned}$$

Con el vector

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x(t)\\ y(t)\\ z(t)\end{pmatrix}$$

Su representación matricial es

$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 1\\ 8 & 7 & -1\\ 2 & 9 & -1\end{pmatrix}\mathbf{X} + \begin{pmatrix} t\\ 10t\\ 6t\end{pmatrix}$$

# Vector solución

Un sistema de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden tiene como solución un conjunto de funciones $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ a las que agrupamos en la matriz columna

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

a la que llamaremos **vector solución** sobre un intervalo $I$.

# Problema con valores iniciales

Se puede extender el concepto de un PVI a los sistemas lineales de primer orden.

Sea $t_0$ contenido en el intervalo de solución $I$ y los vectores

$$\mathbf{X}(t_0) = \begin{pmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \\ \vdots \\ x_n(t_0) \end{pmatrix} \quad y \quad \mathbf{X}_0 = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix}$$

donde $\gamma_i, \ i = 1, 2, \ldots, n$ son constantes dadas. Entonces el problema con valores iniciales consiste en resolver

$$\mathbf{X}' = \mathbf{AX} + \mathbf{F}$$

sujeto a $\mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0$

# EDO de orden $n$ a un sistema de $n$ EDOs de 1er orden

El objetivo es convertir una EDO lineal de orden $n$:

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)y' + a_0(t)y = g(t)$$

a un sistema de $n$ ecuaciones diferenciales de primer orden.

## Procedimiento de transformación

1. Definimos $n$ nuevas variables: $x_1 = y, \quad x_2 = y', \quad \cdots, \quad x_n = y^{(n-1)}$
2. A partir de las definiciones obtenemos las n ecuaciones:

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1}' = x_n \\ x_n' = -a_0(t)x_1 - a_1(t)x_2 - \cdots - a_{n-1}(t)x_n + g(t) \end{cases}$$

# Ejemplo: Transformación de EDO de 3er orden

## EDO de tercer orden

Obtener el sistema equivalente de primer orden de esta ecuación

$$y''' - 2y'' + y' - 2y = e^t$$

Definiendo las variables

$$\begin{cases} x_1 = y \\ x_2 = y' \\ x_3 = y'' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1(0) = 1 \\ x_2(0) = 0 \\ x_3(0) = -1 \end{cases}$$

El sistema equivalente es

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = x_3 \\ x_3' = 2x_1 - x_2 + 2x_3 + e^t \end{cases}$$

# Solución de sistemas lineales con T. de Laplace

La transformada de Laplace convierte un **sistema de EDOs** en un **sistema de ecuaciones algebraicas** en el dominio $s$, facilitando la resolución cuando se conocen las condiciones iniciales.

## Procedimiento sistemático

1. **Aplicar** $\mathcal{L}$ a cada ecuación del sistema
2. **Resolver el sistema algebraico** para $X_1(s), X_2(s), \ldots, X_n(s)$
3. **Aplicar** $\mathcal{L}^{-1}$ a cada $X_i(s)$ para obtener $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$

## Es ideal para

- Sistemas lineales con coeficientes constantes
- Condiciones iniciales conocidas
- Sistemas de cualquier dimensión

# Ejemplo: Solución de sistema lineal mediante Laplace

Retomando el ejemplo anterior (transformación de EDO de 3er orden a un sistema de 3 ED de primer orden):

**1. Aplicando Laplace al sistema**

Para el sistema:

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = x_3 \\ x_3' = 2x_1 - x_2 + 2x_3 + e^t \end{cases}$$

Aplicamos $\mathcal{L}$:

$$\begin{cases} sX_1(s) - x_1(0) = X_2(s) \\ sX_2(s) - x_2(0) = X_3(s) \\ sX_3(s) - x_3(0) = 2X_1(s) - X_2(s) + 2X_3(s) + \frac{1}{s-1} \end{cases}$$

**2. Sustituir condiciones iniciales**

Con $x_1(0) = 1, x_2(0) = 0, x_3(0) = -1$:

$$\begin{cases} sX_1(s) - 1 = X_2(s) \\ sX_2(s) - 0 = X_3(s) \\ sX_3(s) + 1 = 2X_1(s) - X_2(s) + 2X_3(s) + \frac{1}{s-1} \end{cases}$$

Reordenando

$$\begin{cases} sX_1(s) - X_2(s) = 1 \\ sX_2(s) - X_3(s) = 0 \\ -2X_1(s) + X_2(s) + (s-2)X_3(s) = -1 + \frac{1}{s-1} \end{cases}$$

En forma matricial

$$\begin{pmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ -2 & 1 & s-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \\ X_3(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 - \frac{1}{s-1} \end{pmatrix}$$

# Ejemplo: Solución de sistema lineal mediante Laplace

**3. Aplicar método de Cramer**

Sistema: $A\mathbf{X}(s) = \mathbf{b}(s)$ con

$$A = \begin{pmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ -2 & 1 & s-2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}(s) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 - \frac{1}{s-1} \end{pmatrix}$$

## Determinante del sistema

$$\Delta = \det(A) = s \begin{vmatrix} s & -1 \\ 1 & s-2 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -2 & s-2 \end{vmatrix} + 0$$

$$\Delta = s[s(s-2)+1] + [0-2] = s(s^2 - 2s + 1) - 2$$

$$\Delta = s(s-1)^2 - 2 = s^3 - 2s^2 + s - 2$$

# Ejemplo: Solución de sistema lineal mediante Laplace

**Matriz** $A_1$: Reemplazar columna 1 por $\mathbf{b}(s)$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ -1 - \frac{1}{s-1} & 1 & s-2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Delta_1 = \det(A_1) &= 1 \begin{vmatrix} s & -1 \\ 1 & s-2 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 - \frac{1}{s-1} & s-2 \end{vmatrix} + 0 \\ &= [s(s-2)+1] + [0 + (-1 - \frac{1}{s-1})(-1)] \\ &= (s^2 - 2s + 1) + (1 + \frac{1}{s-1}) \\ &= (s-1)^2 + 1 + \frac{1}{s-1} \end{aligned}$$

$$X_1(s) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{(s-1)^2 + 1 + \frac{1}{s-1}}{s^3 - 2s^2 + s - 2}$$

# Ejemplo: Solución de sistema lineal mediante Laplace

**Matriz** $A_2$: Reemplazar columna 2 por $\mathbf{b}(s)$

$$A_2 = \begin{pmatrix} s & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -2 & -1-\frac{1}{s-1} & s-2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Delta_2 = \det(A_2) &= s \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1-\frac{1}{s-1} & s-2 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -2 & s-2 \end{vmatrix} + 0 \\ &= s[0-(1+\frac{1}{s-1})] - 1[0-2] \\ &= -s(1+\frac{1}{s-1}) + 2 = -s - \frac{s}{s-1} + 2 \end{aligned}$$

$$X_2(s) = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{2-s-\frac{s}{s-1}}{s^3-2s^2+s-2}$$

**Nota**: $X_3(s)$ se puede obtener de $X_2(s)$ usando $X_3(s) = sX_2(s)$

**4. Simplificar expresiones**

Para $X_1(s)$:

$$X_1(s) = \frac{(s-1)^2 + 1 + \frac{1}{s-1}}{s^3 - 2s^2 + s - 2} = \frac{s^2 - 2s + 2 + \frac{1}{s-1}}{(s-2)(s^2+1)}$$
$$= \frac{\frac{9s}{10} - \frac{7}{10}}{s^2+1} - \frac{1}{2(s-1)} + \frac{3}{5(s-2)}$$

Para $X_2(s)$:

$$X_2(s) = \frac{2 - s - \frac{s}{s-1}}{s^3 - 2s^2 + s - 2} = \frac{2 - s - \frac{s}{s-1}}{(s-2)(s^2+1)}$$
$$= \frac{1}{2(s-1)} - \frac{\frac{s}{10} + \frac{7}{10}}{s^2+1} - \frac{2}{5(s-2)}$$

# Ejemplo: Solución de sistema lineal mediante Laplace

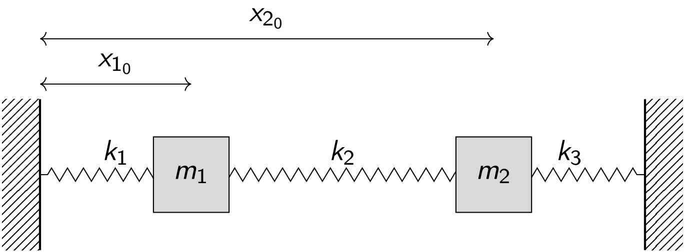
Para $X_3(s)$:

$$X_3(s) = \frac{2s - s^2 - \frac{s^2}{s-1}}{s^3 - 2s^2 + s - 2} = \frac{2s - s^2 - \frac{s^2}{s-1}}{(s-2)(s^2+1)}$$
$$= \frac{1}{2(s-1)} - \frac{\frac{7s}{10} - \frac{1}{10}}{s^2+1} - \frac{4}{5(s-2)}$$

**5. Aplicar la transformada inversa de Laplace**

$$x_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X_1(s)\} = \frac{3}{5}e^{2t} - \frac{1}{2}e^{t} + \frac{9}{10}\cos(t) - \frac{7}{10}\sin(t)$$
$$x_2(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X_2(s)\} = -\frac{2}{5}e^{2t} + \frac{1}{2}e^{t} - \frac{1}{10}\cos(t) - \frac{7}{10}\sin(t)$$
$$x_3(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X_3(s)\} = -\frac{4}{5}e^{2t} + \frac{1}{2}e^{t} - \frac{7}{10}\cos(t) + \frac{1}{10}\sin(t)$$

# Sistema Masa-Resorte Acoplado




## Interpretación de variables

- $x_1$: Desplazamiento de la masa 1 (desde su posición inicial $x_{1_0}$)
- $x_2$: Desplazamiento de la masa 2 (desde su posición inicial $x_{2_0}$)
- $x_3 = x_1'$: Velocidad de la masa 1
- $x_4 = x_2'$: Velocidad de la masa 2
- Constantes: $k_1 = 2$, $k_2 = 1$ y $k_3 = 2$, masas $m_1 = 1$ y $m_2 = 1$

# Deducción de las Ecuaciones del Movimiento

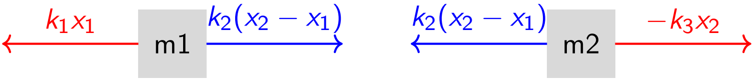
Suponiendo que la elongación natural de los resortes está en $x_1 = 0$ y $x_2 = 0$, y asumiendo positivo hacia la derecha.

**Fuerzas sobre masa 1**

- Resorte izquierdo: $F_1 = -k_1 x_1 = -2x_1$
- Resorte central: $F_2 = +k_2(x_2 - x_1) = +(x_2 - x_1)$
- Fuerza neta: $F_{\text{net1}} = -2x_1 + (x_2 - x_1) = -3x_1 + x_2$

**Fuerzas sobre masa 2**

- Resorte central: $F_3 = -k_2(x_2 - x_1) = -(x_2 - x_1)$
- Resorte derecho: $F_4 = -k_3 x_2 = -2x_2$
- Fuerza neta: $F_{\text{net2}} = -(x_2 - x_1) - 2x_2 = x_1 - 3x_2$



# De Fuerzas a Ecuaciones Diferenciales

Segunda ley de Newton

$$\sum F = m \cdot a = m \cdot x''$$

Para $m_1 = 1$

$$\begin{aligned}\sum F &= -3x_1 + x_2\\ m_1 x_1'' &= -3x_1 + x_2\\ x_1'' &= -3x_1 + x_2 = x_3'\end{aligned}$$

Para $m_2 = 1$

$$\begin{aligned}\sum F_2 &= x_1 - 3x_2\\ m_2 x_2'' &= x_1 - 3x_2\\ x_2'' &= x_1 - 3x_2 = x_4'\end{aligned}$$

# Ejercicio 1: Sistema Masa-Resorte Acoplado

## Sistema físico

Dos masas acopladas por resortes:

$$\begin{cases} x_1' = x_3 \\ x_3' = -3x_1 + x_2 \\ x_2' = x_4 \\ x_4' = x_1 - 3x_2 \end{cases}$$

donde:

- $x_1, x_2$: desplazamiento de las masas
- $x_3, x_4$: velocidades de las masas

## Condiciones iniciales

$$x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = 1, \quad x_3(0) = 0, \quad x_4(0) = 0$$

# Ejercicio 2: Circuito RLC con Dos Mallas

## Sistema eléctrico

Corrientes en un circuito acoplado:

$$\begin{cases} i_1' = -2i_1 + i_2 + e^{-t} \\ i_2' = i_1 - 3i_2 + 2 \end{cases}$$

donde:

- $i_1, i_2$: corrientes en las mallas
- Fuentes: $e^{-t}$ (exponencial decreciente) y fuente constante

## Condiciones iniciales

$$i_1(0) = 0, \quad i_2(0) = 1$$

# Ejemplo 3: Modelo de cambio climático

La temperatura media global $T(t)$ satisface:

$$\frac{d^3T}{dt^3} + k_1\frac{d^2T}{dt^2} + k_2\frac{dT}{dt} + k_3T = F(t)$$

donde:

- $T(t)$: Anomalía de temperatura $[^\circ C]$ respecto a referencia
- $F(t)$: Forzamiento radiactivo (emisiones de $CO_2$, etc.)
- $k_1, k_2, k_3$: Parámetros del sistema climático

Resolver

$$T'''(t) + \frac{3}{2}T''(t) + \frac{4}{5}T'(t) + \frac{1}{5}T(t) = \frac{1}{2}(1 - e^{-\frac{1}{10}t})$$

Para las condiciones iniciales:

- $T(0) = 0{,}6[^\circ C]$ (temperatura en año 2000)
- $T'(0) = 0{,}02[^\circ C/\text{año}]$ (tasa de calentamiento)
- $T''(0) = 0{,}001[^\circ C/\text{año}^2]$ (aceleración del calentamiento)

# Contacto

Eduardo Flores Rivas
Ingeniero Mecatrónico
Facultad de Ingeniería, UNAM
eduardo.flores@ingenieria.unam.edu

# Bibliografía obligatoria y recomendada


ZILL, Dennis, WRIGHT, Warren
*Ecuaciones diferenciales con problemas con valores en la frontera*.
8a. edición. México. Cengage Learning, 2015.

CARMONA, Isabel, FILIO, Ernesto
*Ecuaciones diferenciales*.
5a. edición. México. Pearson-Addison-Wesley, 2011.

NAGLE, Kent, SAFF, Edward, SNIDER, Arthur
*Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera*.
4a. edición. México. Pearson-Addison-Wesley, 2005.

ZILL, Dennis
*Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado*.
10a. edición. México. Cengage Learning, 2015.

ZILL, Dennis, WRIGHT, Warren
*Matemáticas avanzadas para ingeniería*.
4a. edición. México. McGraw-Hill, 2012.