Mecánica

Tema 6. Trabajo y energía de la partícula

Ing. Eduardo Flores Rivas

Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional Autónoma de México

Semestre 2026-1

Contenido

Objetivo

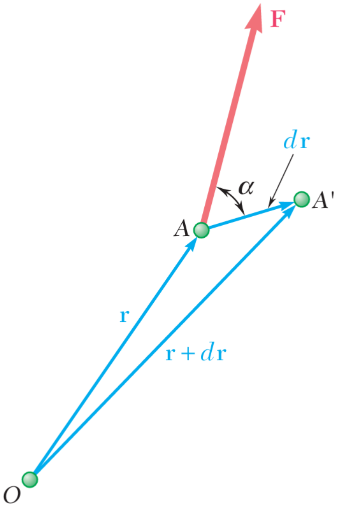
El alumno analizará el movimiento de la partícula a partir del método del trabajo y la energía, haciendo énfasis en la interpretación física y geométrica del concepto del trabajo de una fuerza.

Trabajo

Considerando una partícula que se mueve desde el punto A hasta el punto cercano A', si se denota como $\vec{r}$ al vector de posición que corresponde a A, entonces el vector de desplazamiento se denota $d\vec{r}$.

Si dicho desplazamiento fue provocado por una fuerza $\vec{F}$ que actúa sobre la partícula, entonces el trabajo de la fuerza asociado se define como el producto escalar de $\vec{F}$ y $d\vec{r}$

$$dU = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$



Trabajo

Por la defininción de producto escalar, se puede expresar también al trabajo de la fuerza $\vec{F}$ asociado al desplazamiento $d\vec{r}$ por sus magnitudes (F y ds) y el ángulo que forman (α).

$$dU = F \cos \alpha ds$$

Existen tres casos de interés particular respecto a las direcciones de los vectores.

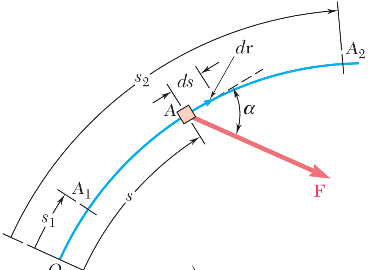
- Cuando $\vec{F}$ y $d\vec{r}$ tienen la misma dirección ($\alpha = 0°$): $dU = Fds$
- Cuando $\vec{F}$ y $d\vec{r}$ tienen direcciones opuestas ($\alpha = 180°$): $dU = -Fds$
- Cuando $\vec{F}$ y $d\vec{r}$ son perpendiculares ($\alpha = 90°$): $dU = 0$

El trabajo es una cantidad escalar, y sus unidades en el sistema internacional son los *joules* $1[J] = 1[N \cdot m]$.

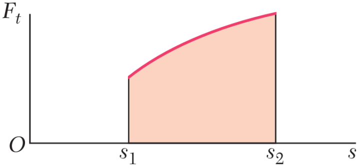
Trabajo en un desplazamiento finito

Al resolver la ecuación diferencial del trabajo es posible calcular el trabajo de una fuerza $\vec{F}$ durante un desplazamiento finito.

$$U_{1\to 2} = \int_{A_1}^{A_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$



a)



b)

O de forma equivalente, con las magnitudes de los vectores:

$$U_{1\to 2} = \int_{s_1}^{s_2} F \cos\alpha \cdot ds$$

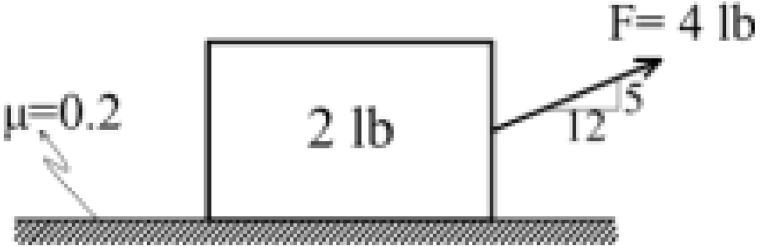
Donde s mide la distancia recorrida por la partícula a lo largo de la trayectoria.

Trabajo de varias fuerzas

Cuando variad fuerzas actúan sobre la partícula, es posible calcular el trabajo total de las fuerzas a partir de la suma algebráica del trabajo producido por cada fuerza.

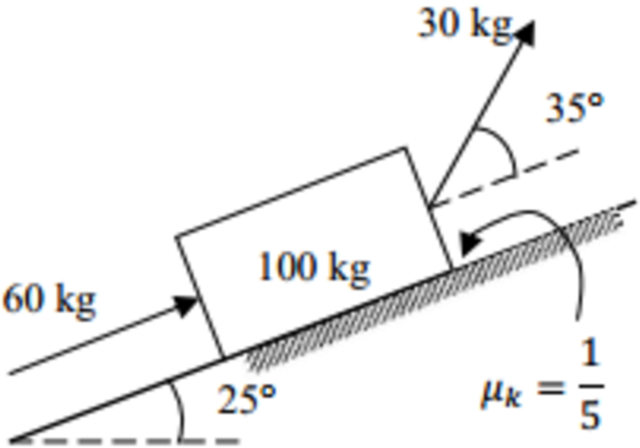
Se debe considerar que, dado que el trabajo es una cantidad escalar, el signo del trabajo realizado por una fuerza está determinado por la dirección de la fuerza respecto al desplazamiento.

Calcule el trabajo realizado por las fuerzas F, el peso, la normal y la fricción aplicadas al embalaje que se mueve tres pies hacia la derecha.



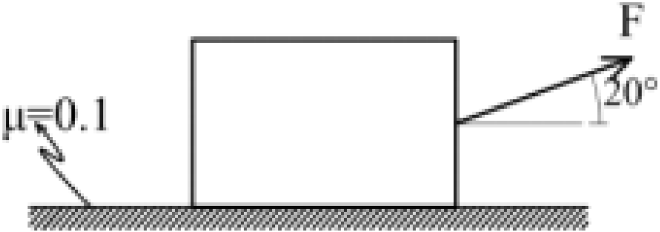
Ejercicio 140

Calcular el trabajo que realiza cada una de las fuerzas externas que actúa sobre el cuerpo si éste se desplaza $30[m]$ sobre el plano inclinado.



Tarea: Ejecicio 141

Determine la magnitud de la fuerza F que, al aplicarla a la caja, realice un trabajo de 8 Joules, si la caja se mueve a lo largo del plano horizontal tres metros hacia la derecha.



Energía cinética de una partícula

Considerando una partícula de masa m que se somete a una fuerza $\vec{F}$ y se mueve a lo largo de una trayectoria, se puede expresar la segunda ley de Newton en función de las componentes tangenciales de la fuerza y la aceleración:

$$F_t = ma_t = m\frac{dv}{dt}$$

Por la definición de la velocidad $(v = ds/dt)$ se obtiene

$$F_t = m\frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} = mv\frac{dv}{ds}$$

$$F_t ds = mv\, dv$$

Al resolver la ecuación diferencial en el intervalo desde A_1 (donde $s = s_1$ y $v = v_1$) hasta A_2 (donde $s = s_2$ y $v = v_2$).

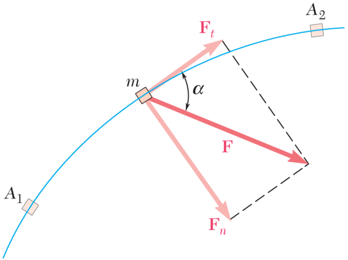
$$\int_{s_1}^{s_2} F_t ds = m\int_{v_1}^{v_2} v dv = \frac{1}{2}m{v_2}^2 - \frac{1}{2}m{v_1}^2$$

Energía cinética de una partícula

En la expresión obtenida

$$\int_{s_1}^{s_2} F_t ds = \frac{1}{2}m{v_2}^2 - \frac{1}{2}m{v_1}^2$$

El miembro de la izquierda representa el trabajo $U_{1\to 2}$ de la fuerza $\vec{F}$ sobre la partícula durante el desplazamiento desde A_1 hasta A_2.



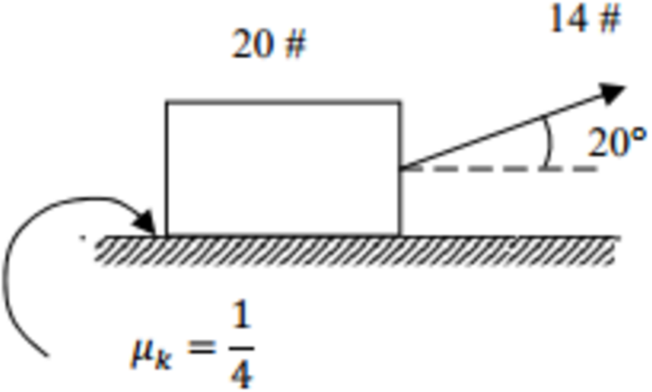
La energía cinética de una partícula está dada por $\frac{1}{2}mv^2$ y se denota mediante la letra T. De manera que el trabajo también puede expresarse como el cambio de la energía cinética de la partícula.

$$U_{1\to 2} = T_2 - T_1 = \Delta T$$

Otra forma de verlo es que la energía cinética de una partícula en A_2 es igual a la suma de la energía cinética en A_1 y el trabajo realizado por la fuerza $\vec{F}$ durante el desplazamiento.

Ejercicio 142

El cuerpo de la figura está originalmente en reposo y es arrastrado 100[*ft*] sobre el plano horizontal por la fuerza de 14[*lb*]. Al final de los 100[*ft*] cesa la acción de la fuerza. Determine la distancia adicional que recorrerá el cuerpo antes de detenerse.



Trabajo por la fuerza de gravedad

Considere un cuerpo de peso $\vec{W}$ que se mueve a lo largo de una trayectoria desde un punto A_1 de elevación y_1 hasta un punto A_2 de elevación y_2. El peso es la fuerza que la gravedad ejerce sobre el cuerpo y, cuando ocurre un cambio de altura, el peso efectúa un trabajo.

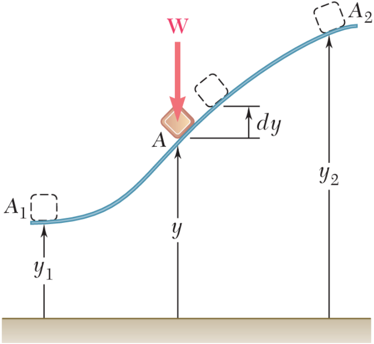
Estableciendo el eje y hacia arriba, y una fuerza $\vec{F} = \vec{W}\jmath$, entonces el trabajo efectuado es:

$$dU = -Wdy$$

$$U_{1\to 2} = -\int_{y_1}^{y_2} Wdy = -Wy_2 + Wy_1$$

$$U_{1\to 2} = -W(y_2 - y_1) = -W\Delta y$$

El trabajo es positivo cuando el centro de gravedad del cuerpo se desplaza hacia abajo.



Energía potencial de una partícula

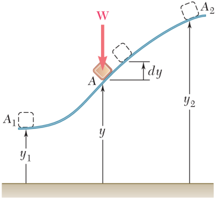
El trabajo de la partícula efectuado por la fuerza de gravedad (peso) $\vec{W}$ se obtiene de la diferencia de los valores de la función Wy,

$$U_{1\to 2} = Wy_1 - Wy_2$$

donde lo que consideramos que cambia es la altura y. Entonces el trabajo es independiente de la trayectoria. A esta función se le denomina energía potencial del cuerpo respecto a la fuerza de gravedad ($\vec{W}$) y se denota como V_g; entonces el trabajo en términos de la energía potencial está dado como

$$U_{1\to 2} = V_{g\,1} - V_{g\,2} = -\Delta V_g$$

Si la energía potencial aumenta ($V_{g\,1} < V_{g\,2}$), el trabajo es negativo. Esta energía se mide en las mismas unidades del trabajo, en el SI son los *joules* ([J]). Y el nivel de referencia (altura) utilizado para su medición puede ser elegida de manera arbitraria.



Ejercicio 143

Un cuerpo de $1000[lb]$ es subido por un plano inclinado 45° mediante una cuerda cuya tensión es constante y de $800[lb]$. Calcule la rapidez del cuerpo cuando haya subido $20[ft]$ sobre el plano, habiendo partido del reposo. Los coeficientes de fricción estática y cinética entre el cuerpo y el plano son $0{,}2$ y $0{,}1$, respectivamente.

Tarea: Ejercicio 144

Calcule la variación de energía cinética de un cuerpo que pesa $2[kg]$ y desciende $2[m]$ por un plano inclinado. El plano es liso y tiene una pendiente de $4/3$.

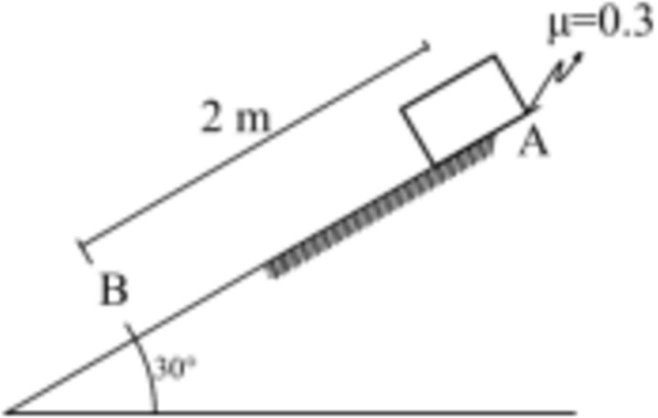
Ejercicio 145

Un cuerpo de $25[kg]$ desciende $3[m]$ sobre un plano inclinado 30°. E coeficiente de fricción cinética es de $1/3$ entre el cuerpo y el plano. Determine su rapidez lineal final, si originalmente era de $2[m/s]$.

Una caja se desliza hacia arriba de un plano inclinado 15°. El coeficiente de fricción cinética entre ellos es 0,18 y la distancia que la caja recorre antes de detenerse es de $12[m]$. ¿Con qué rapidez fue lanzada?

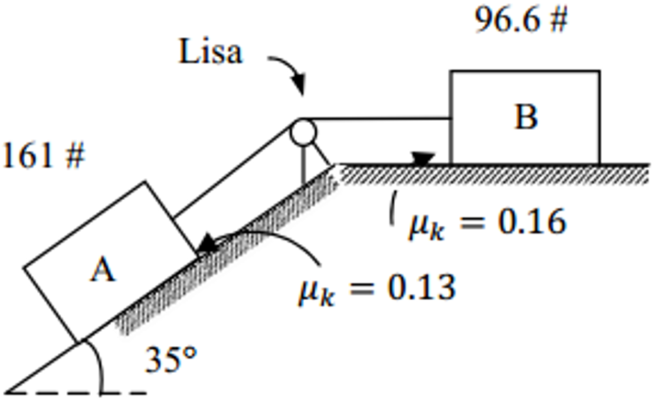
Ejercicio 147

Calcule la rapidez del cuerpo de la figura cuando pase por el punto B, si parte del reposo desde A.



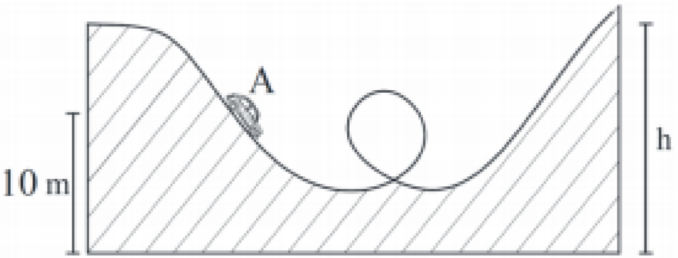
Ejercicio 148

Los cuerpos A y B están originalmente en reposo. Determine su rapidez cuando se hayan desplazado $5[ft]$.



Ejercicio 149

Determine la altura h máxima que alcanzará un carro sobre la montaña rusa de la figura, si al pasar por el punto A tiene una rapidez de 18[km/h]. Desprecie la fricción.



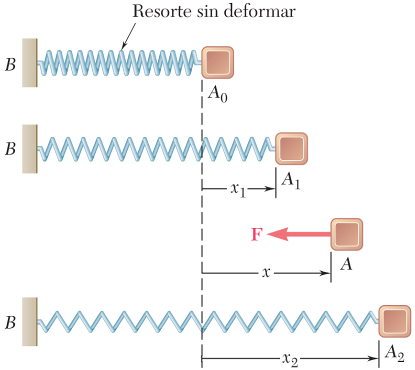
Trabajo por la fuerza de un resorte

Considere un cuerpo A unido a un punto fijo B por medio de un resorte y suponga que éste se encuentra en A_0 sin deformación.

La Ley de Hooke establece que la magnitud de la fuerza $\vec{F}$ ejercida por el resorte sobre el cuerpo A es proporcional a la deformación x del resorte medida a partir de la posición A_0.

$$F = kx$$

Donde k es la constante del resorte, expresada en $[N/m]$ para el SI o $[lb/in]$ en el sistema inglés.



Trabajo por la fuerza de un resorte

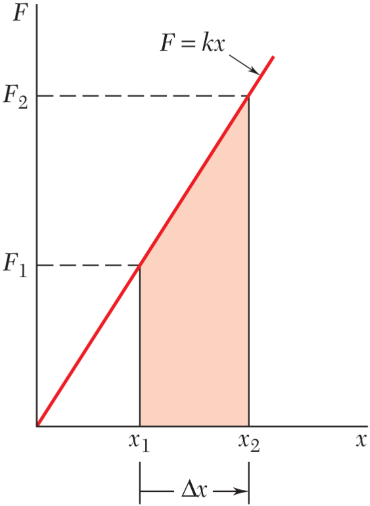
El trabajo realizado por la fuerza $\vec{F}$ del resorte durante un desplazamiento finito del cuerpo desde A_1 $(x = x_1)$ hasta A_2 $(x = x_2)$ se obtiene de

$$dU = -F dx = -kx\,dx$$

$$U_{1\to 2} = -\int_{x_1}^{x_2} kx\,dx$$

$$U_{1\to 2} = -\frac{1}{2}k{x_2}^2 + \frac{1}{2}k{x_1}^2$$

$$U_{1\to 2} = \frac{1}{2}k({x_1}^2 - {x_2}^2)$$



Energía potencial de un resorte

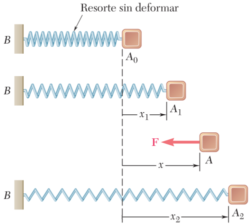
El trabajo de la fuerza $\vec{F}$ ejercida por el resorte sobre un cuerpo es

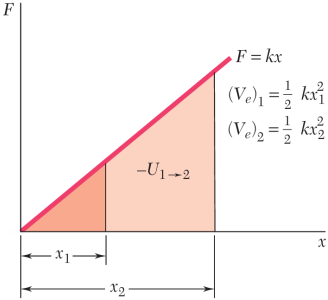
$$U_{1\to 2} = -\frac{1}{2}k{x_2}^2 + \frac{1}{2}k{x_1}^2$$

La función de la energía potencial respecto a la fuerza elástica es $\frac{1}{2}kx^2$ y se denota mediante V_e, por lo que el trabajo ejercido por la fuerza del resorte se expresa como:

$$U_{1\to 2} = -V_{e2} + V_{e1} = -\Delta V_e$$

Cuando $x_2 > x_1$ la energía potencial aumenta $(V_{e2} > V_{e1})$ y el trabajo es negativo.





Resumen

Tipo de energía	Función	Variables
Cinética	$T = \frac{1}{2}mv^2$	m: masa, v: velocidad
Potencial gravitatoria	$V_g = mgh$	m: masa, g: gravedad, h: altura
Potencial elástica	$V_e = \frac{1}{2}kx^2$	k: cons. del resorte, x: deformación

Expresión del trabajo

El trabajo total realizado desde el estado 1 hasta el estado 2 es igual al cambio en los distintos tipos de energía.

$$\sum U_{1\to 2} = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e$$

$$\sum U_{1\to 2} = (\frac{1}{2}m{v_2}^2 - \frac{1}{2}m{v_1}^2) + (mgy_2 - mgy_1) + (\frac{1}{2}k{x_2}^2 - \frac{1}{2}k{x_1}^2)$$

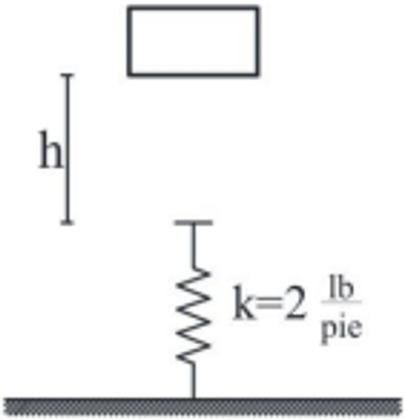
$$\sum U_{1\to 2} = \frac{1}{2}m({v_2}^2 - {v_1}^2) + mg(y_2 - y_1) + \frac{1}{2}k({x_2}^2 - {x_1}^2)$$

Ejercicio 150

Un cuerpo de 49[kg] de peso que se desliza sobre una superficie horizontal lisa con una rapidez de 20[m/s] choca con un resorte. Sabiendo que el resorte se deforma 9[cm] por cada 4[kg] de fuerza que se le aplican, ¿qué longitud se deformará por el choque?

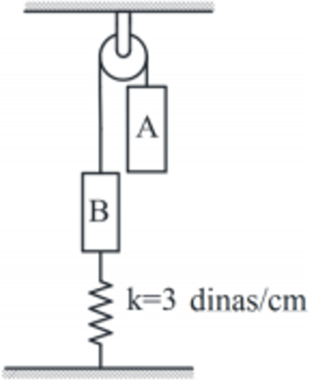
Ejercicio 151

Determine la máxima deformación del resorte si se deja caer un bloque de $2[lb]$ a una altura de $3[ft]$ sobre el resorte. Considere el resorte sin deformarse en el instante en que el bloque tiene contacto con él.



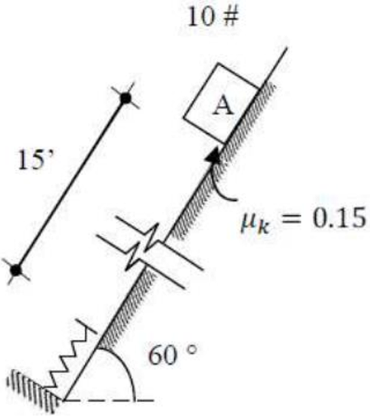
Ejercicio 152

Calcule la rapidez del cuerpo B, después de que el cuerpo A haya descendido 1 cm. Considere la masa del cuerpo A de $300[g]$ y de $100[g]$ la de B. El sistema parte del reposo con el resorte sin deformarse.



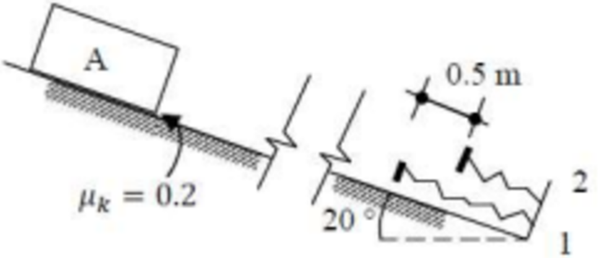
Tarea: Ejercicio 153

El cuerpo A de la figura se deja caer desde una distancia de 15[ft] del resorte. Si éste se deforma 2[in] por cada 9[lb] de fuerza, calcule la deformación máxima que sufrirá por la acción del cuerpo.



Ejercicio 154

El cuerpo A se suelta a 8[m] de distancia del resorte 1, sobre el plano inclinado 20º. Los coeficientes de fricción estática y cinética entre el cuerpo y el plano son 0,3 y 0,2, respectivamente. La constante de rigidez del resorte 1 es de 600[kg/m] y la del 2, de 300[kg/m]. Diga cuáles serán las deformaciones máximas de cada uno de ellos, si el cuerpo A pesa: a) 100[kg] b) 50[kg].

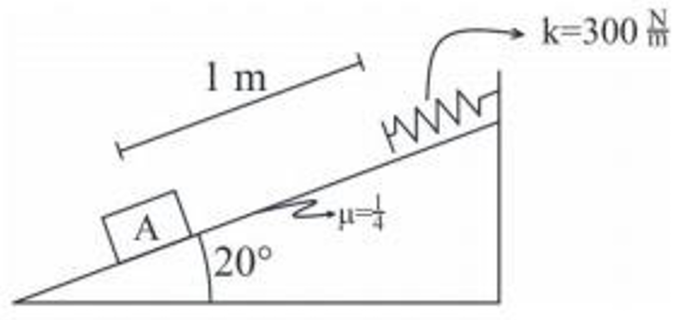


Ejercicio 155

Un cuerpo de $500[g]$ se desliza sobre un plano horizontal cuando choca con un resorte, produciéndole cierta deformación, y es entonces repelido en dirección contraria. Calcule la distancia que recorre desde que se separa del resorte hasta que se detiene. La rapidez del cuerpo en el momento del impacto es de $30[m/s]$, la constante de rigidez del resorte de $2000[dinas/cm]$ y $1/3$ el coeficiente de fricción cinética entre el cuerpo y la superficie.

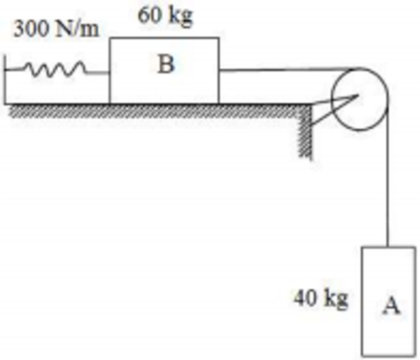
Ejercicio 156

Calcule la deformación del resorte, si el cuerpo A, de $25[kg]$ de masa, es lanzado con una rapidez inicial v_0 por el plano inclinado. El resorte se encuentra originalmente sin deformarse. Considere: a) $v_0 = 2{,}5[m/s]$; b) $v_0 = 4[m/s]$.



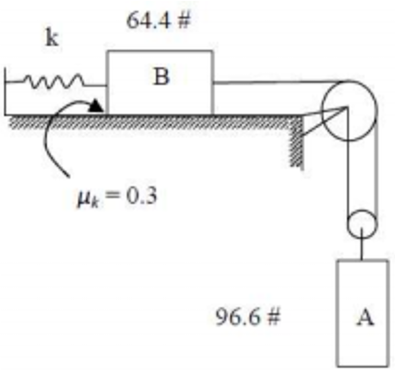
Ejercicio 157

Todos los cuerpos de la figura están originalmente en reposo y el resorte con su longitud natural. Diga cuál será el desplazamiento máximo del cuerpo A y la rapidez máxima de B, al permitirse el movimiento. Tanto la fricción como las masas de las poleas y de las cuerdas son despreciables.



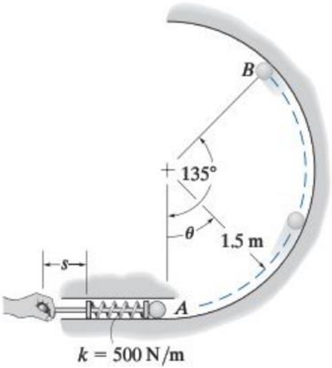
Tarea: Ejercicio 158

Calcule la máxima rapidez que alcanzará el cuerpo A y el máximo desplazamiento de B con los datos que se muestran en la figura. Inicialmente los cuerpos están en reposo y el resorte, cuya constante de rigidez es de $40[lb/ft]$, con su longitud natural.



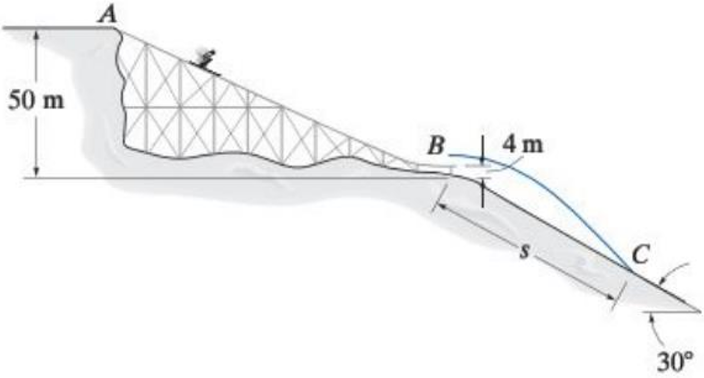
Ejercicio 159

La bola de $0{,}5[kg]$ cuyo tamaño no importa, se lanza hacia arriba de la rampa circular vertical lisa por medio de un émbolo de resorte. Éste mantiene el resorte comprimido $0{,}08[m]$ cuando $s = 0$. Determine qué distancia se debe jalar s y soltar de modo que la bola comience a perder el contacto con la rampa cuando $\theta = 135°$.



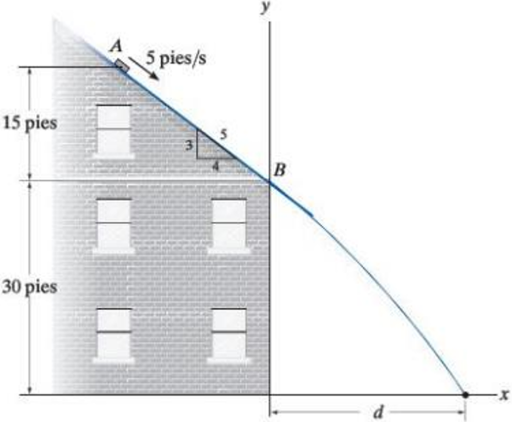
Tarea: Ejercicio 160

El esquiador parte del punto de reposo en A y desciende por la rampa. Si la fricción y la resistencia del aire pueden omitirse, determine su rapidez cuando llega a B. Además, determine la distancia s donde hace contacto con el cuelo en C, si salta cuando se desplaza horizontalmente en B.



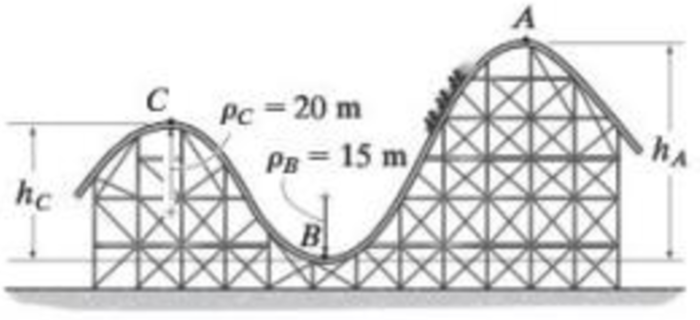
Ejercicio 161

El ladrillo de 2[lb] se desliza hacia abajo del techo de modo que cuando está en A su velocidad es de 5[ft/s]. Determine la rapidez del ladrillo justo antes de que deje la superficie en B, la distancia d de la pared hasta donde choca con el suelo y la rapidez a la cual golpea el suelo.



Tarea: Ejercicio 162

Si se va a diseñar la pista de modo que los pasajeros de la montaña rusa no experimenten una fuerza normal igual a cero o más de 5 veces su peso, determine las alturas limitantes h_A y h_C de modo que esto no ocurra. Se parte del reposo en A.



Contacto

Eduardo Flores Rivas
Ingeniero Mecatrónico
Facultad de Ingeniería, UNAM
eduardo.flores@ingenieria.unam.edu

Referencias

BEER, Ferdinand, JOHNSTON, Russell, MAZUREK, David
Mecánica vectorial para ingenieros, estática.
10a. edición. México. McGraw-Hill, 2013.

BEER, Ferdinand, JOHNSTON, Russell, CORNWELL, Phillip
Mecánica vectorial para ingenieros, dinámica.
10a. edición. México. McGraw-Hill, 2013.