Mecánica

Tema 4. Introducción a la dinámica de la partícula

Ing. Eduardo Flores Rivas

Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional Autónoma de México

Semestre 2026-1

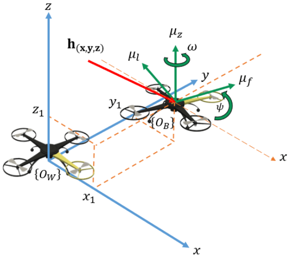
Contenido

Objetivo

El alumno aplicará las leyes de Newton en el análisis del movimiento de una partícula en el plano, donde intervienen las causas que modifican a dicho movimiento.

Dinámica

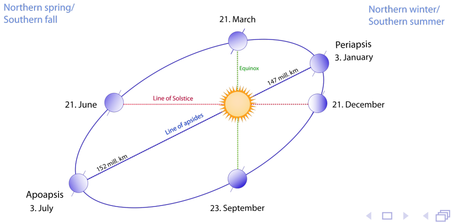
- **Estática:** Rama de la mecánica que estudia los cuerpos en reposo.
- **Dinámica:** Rama de la mecánica que estudia los cuerpos en movimiento.
  - **Cinemática:** Estudio de la geometría del movimiento. Relaciona el desplazamiento, la velocidad, la aceleración y el tiempo. No atiende a la causa del movimiento.
  - **Cinética:** Estudio de la relación que exite entre las fuerzas que actúan sobre un cuerpo, su masa y el movimiento del mismo. Permite predecir el movimiento ocasionado por una fuerza, o determinar las fuerzas necesarias para producir un movimiento.



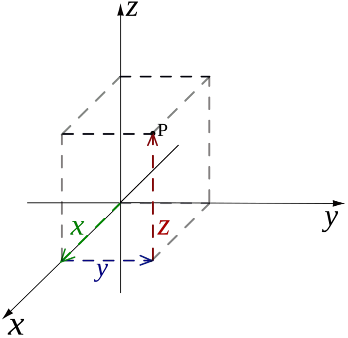
Trayectoria

Trayectoria: Es una línea imaginaria que describe el movimiento de una partícula. Algunas de las trayectorias más estudiadas son:

- Rectilíneo: se desplaza siguiendo una recta. Por ejemplo, un automóvil en una carretera recta.
- Circular: se desplaza siguiendo una circunferencia. Por ejemplo, las aspas de un ventilador.
- Parabólica: se desplaza siguiendo una parábola. Por ejemplo, un balón de fútbol americano al ser lanzado.
- Elíptico: se desplaza siguiendo un elipse. Por ejemplo, la órbita de un planeta.



Posición (P): Es la ubicación de un punto dado un sistema de referencia. Se mide en unidades de longitud respecto a un punto fijo llamado origen, y puede estar dada por una, dos o tres distancias si se trabaja en una recta, en el plano o en el espacio, respectivamente. Se define como un vector.



Cuando se conoce la posición de una partícula para cualquier valor de tiempo (t), se dice que se conoce la trayectoria, y se puede expresar como una función.

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}$$

Velocidad

La velocidad es la tasa de cambio en la posición respecto al paso del tiempo. Por ejemplo, si una partícula ocupa la posición P en un tiempo t, y la posición P' en un tiempo $t + \Delta t$, se puede obtener la posición final P' a partir de la suma de $r + \Delta r$

La velocidad promedio de una partícula en un intervalo Δt se define como:

$$v_{prom} = \frac{\Delta r}{\Delta t}[m/s]$$

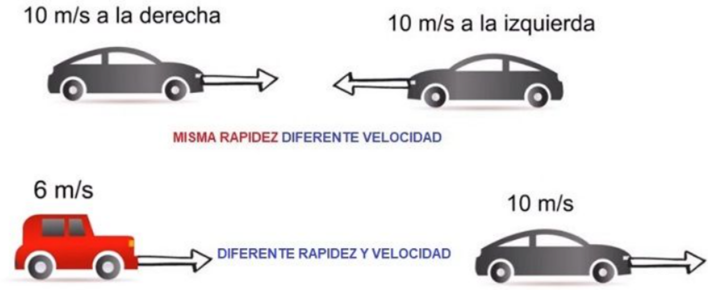
Por su parte, la velocidad instantánea de una partícula en un instante t, se obtiene a partir de la velocidad promedio cuando los intervalos Δt son extremadamente cortos, es decir, la derivada de la posición respecto al tiempo.

$$\vec{v}(t) = \frac{d}{dt}\vec{r}(t)$$

Rapidez

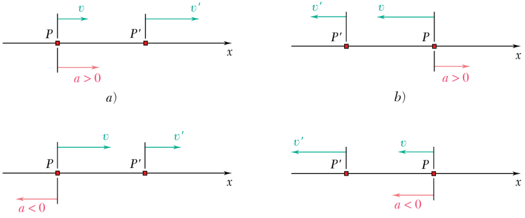
Debido a que la velocidad depende de la posición, también se trata como un vector. sin embargo, no siempre es necesario trabajar de forma vectorial, por lo que se acuñó el término rapidez como la magnitud del vector $\vec{v}$ para usarse en análisis escalares.

La rapidez es una magnitud escalar, por lo que no toma en cuenta la dirección del movimiento.



Aceleración

La aceleración es la tasa de cambio de la valocidad respecto al tiempo. Consdierando una velocidad v de la partícula en el tiempo t y su velocidad $v + \Delta v$ en el tiempo posterior $t + \Delta t$, entonces la aceleraicón promedio de la partícula en el intervalo Δt se define como: $a_{prom} = \frac{\Delta v}{\Delta t}[m/s^2]$



La aceleración instantánea de la partícula en el instante t, se obtiene de la aplicación del límite en la aceleración promedio para aplicar intervalos de tiempo extremadamente pequeños

$$\vec{a}(t) = \frac{d}{dt}\vec{v}(t) = \frac{d^2}{dt^2}\vec{r}(t)$$

Movimiento Rectilíneo Uniforme

Se dice que una partícula se encuentra en movimiento rectilíneo uniforme cuando esta se mueve siguiendo una línea recta y su aceleración es cero para todo valor de t.

En el MRU:

- Aceleración: $a(t) = 0$
- Velocidad: constante $v(t) = \frac{dx}{dt}$
- Posición:

$$\int_{x_0}^{x} dx = v \int_{0}^{t} dt$$

$$x - x_0 = vt$$

$$x(t) = x_0 + vt$$

Se dice que una partícula se encuentra en movimiento rectilíneo uniformemente acelerado cuando esta se mueve siguiendo una línea recta y su aceleración es constante para todo valor de t.
En el MRUA:

- Aceleración: Constante

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx/v} = v\frac{dv}{dx}$$

- Velocidad:

$$\int_{v_0}^{v} dv = a\int_{0}^{t} dt$$

$$v - v_0 = at$$

$$v(t) = v_0 + at$$

$$\int_{v_0}^{v} v dv = a\int_{x_0}^{x} dx$$

$$\frac{1}{2}(v^2 - {v_0}^2) = 2a(x - x_0)$$

$$v^2 = {v_0}^2 + 2a(x - x_0)$$

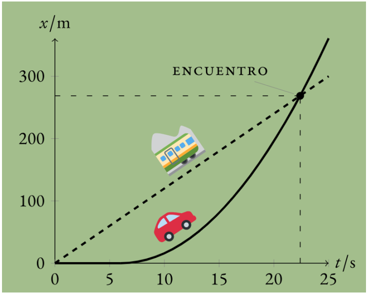
Movimiento Rectilíneo Uniformemente Acelerado

- Posición: De la ecuación de velocidad

$$\int_{x_0}^{x} dx = \int_0^t (v_0 + at)dt$$

$$x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

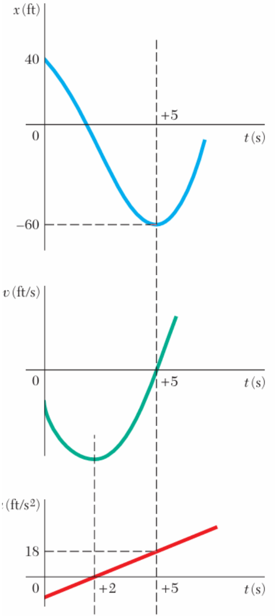


Ejercicio MRUA

La posición de una partícula que se mueve a lo largo de una línea recta está definida por la relación $x = t^3 - 6t^2 - 15t + 40$, donde x se expresa en pies y t en segundos. Determine

- el tiempo al cual la velocidad será cero
- la posición y la distancia recorrida por la partícula en ese tiempo
- la aceleración de la partícula en ese tiempo
- la distancia recorrida por la partícula desde t 4 s hasta t 6 s

Ejercicio MRUA



$$x(t) = t^3 - 6t^2 - 15t + 40$$

$$v(t) = 3t^2 - 12t - 15$$

$$a(t) = 6t - 12$$

Ejercicio 92: MRUA

Un ciclista parte del reposo y después de viajar a lo largo de una trayectoria recta una distancia de $20[m]$ alcanza una rapidez de $30[km/h]$. Determine su aceleración si ésta es constante. Calcule también cuánto le toma alcanzar la rapidez de $30[km/h]$.

Ejercicio 93: MRUA

Un automóvil parte del reposo y alcanza una rapidez de $80[ft/s]$ después de viajar $500[ft]$ a lo largo de un camino recto. Determine su aceleración constante y el tiempo de viaje.

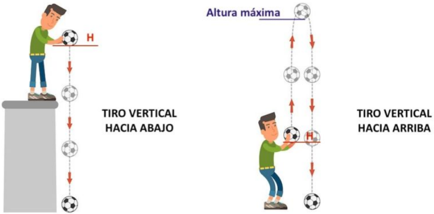
Ejercicio 94: MRUA

Viajando con rapidez inicial de $70[km/h]$, un automóvil acelera a $6000[km/h^2]$ a lo largo de un camino recto. ¿Cuánto tardará en alcanzar una rapidez de $120[km/h]$? ¿Qué distancia recorre el automóvil durante este tiempo?

MRUA: Caída libre y tiro vertical

Cuando un objeto se deja caer o se lanza en línea recta de forma vertical , ocurre lo que se conoce como tiro vertical, que es un tipo específico de MRUA donde la aceleración es la gravedad.
La diferencia fundamental entre ambos está en la dirección inicial del movimiento:

- Caída libre: el objeto parte desde el reposo y se desplaza hacia abajo (aceleración positiva y velocidad inicial cero)
- Tiro vertical: el objeto es lanzado con una velocidad inicial, puede ser lanzado hacia arriba o abajo.



Ejercicio 95: Tiro vertical

Una pelota de béisbol es lanzada hacia abajo desde una torre de 50 ft con una rapidez inicial de 18 ft/s. Determine la rapidez con que la pelota toca el suelo y el tiempo de viaje.

Ejercicio 96: Tiro vertical y caída libre

Una pelota A es liberada del reposo a una altura de 40 ft al mismo tiempo que una segunda pelota B es lanzada hacia arriba desde 5 ft con respecto al suelo. Si las pelotas pasan una frente a la otra a una altura de 20 ft, determine la rapidez con que la pelota B fue lanzada hacia arriba. Ver Figura 78.

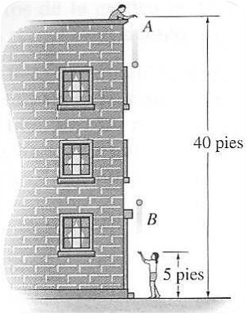


Figura 78

Tarea: Ejercicio 97

97. A una vagoneta se le prueban la aceleración y los frenos. En la primera prueba de aceleración en la calle, transcurrió un tiempo de 8.2 s para lograr un incremento de velocidad desde $10[km/h]$ hasta $100[km/h]$. En la prueba de frenos, la vagoneta recorrió una distancia de $44[m]$ durante el frenado desde $100[km/h]$ hasta cero. Si se suponen valores constantes para la aceleración y la desaceleración, determine:

a) la aceleración durante la primera prueba en la calle,

b) la desaceleración durante la prueba de frenos.

Tarea: Ejercicio 98

98. Un avión empieza su despegue en A con rapidez nula y una aceleración constante. Si se sabe que empieza a volar 30 s después en B y que la distancia AB es de 900 m, determine:

a) la aceleración a

b) la rapidez de despegue en B.

Tarea: Ejercicio 99

99. La aceleración de una partícula al moverse a lo largo de una línea recta está dada por $a = (2t - 1)[m/s^2]$, donde t está en segundos. Si $s = 1[m]$ y $v = 2[m/s]$ cuando $t = 0$, determine:
a) la velocidad
b) la posición de la partícula cuando $t = 6[s]$.

Vectores de posición, velocidad y aceleración

En coordenadas cartesianas, los vectores de posición, velocidad y aceleración de una partícula se indican como:

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

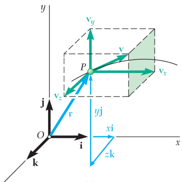
$$\vec{v} = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + \dot{z}\hat{k}$$

$$\vec{a} = \ddot{x}\hat{i} + \ddot{y}\hat{j} + \ddot{z}\hat{k}$$

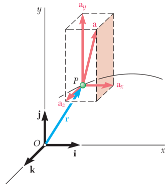
Las componentes escalares de la velocidad y la aceleración son

$$v_x = \dot{x} \qquad v_y = \dot{y} \qquad v_z = \dot{z}$$

$$a_x = \ddot{x} \qquad a_y = \ddot{y} \qquad a_z = \ddot{z}$$



(a)



(b)

Tiro parabólico

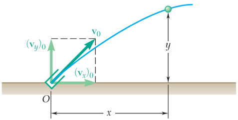
Es posible considerar el movimiento en las direcciones x, y, z de forma independiente. En el caso de un proyectil lanzado en el plano xy desde la coordenadas $P(x_0, y_0, z_0)$ con una velocidad inicial v_0, si se ingora la resistencia al aire, las aceleraciones están dadas por:

$$a_x = \ddot{x} = 0 \qquad a_y = \ddot{y} = -g \qquad a_z = \ddot{z} = 0$$

Al integrar dos veces:

$$v_x = \dot{x} = v_{0_x} \qquad v_y = \dot{y} = v_{0_y} - gt \qquad v_z = \dot{z} = 0$$

$$x = x_0 + v_{0_x} t \qquad y = y_0 + v_{0_y} t - \frac{1}{2} g t^2 \qquad z = z_0$$



El proyectil permanece en el plano xy, su movimiento horizontal es uniforme, su movimiento vertical es uniformemente acelerado

a. **Tiempo de vuelo**: Es el doble del tiempo necesario para alcanzar la altura máxima

$$v_y = 0 = v_{0_y} - gt$$

$$t_{1/2} = \frac{v_{0_y}}{g} = \frac{v_0 \sin(\theta)}{g}$$

$$t_{max} = \frac{2v_0}{g}\sin(\theta)$$

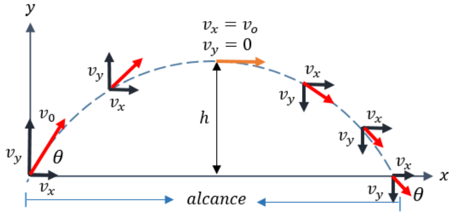
a. **Alcance máximo**: Máxima distancia horizontal que es capaz de recorrer el cuerpo.

$$R = v_{0_x} t_{max}$$

$$R = v_0 \cos(\theta) \frac{2v_0}{g}\sin(\theta)$$

$$R = \frac{{v_0}^2}{g}\sin(2\theta)$$

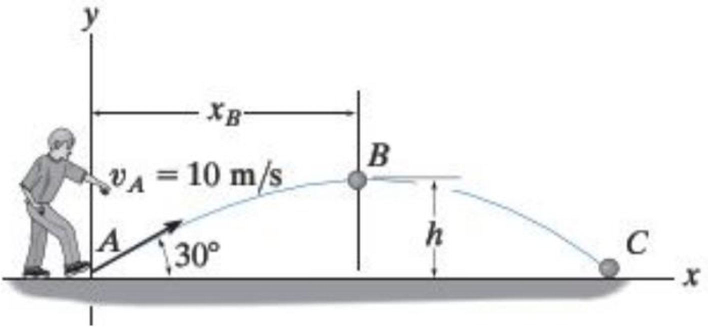
Solo si empieza y acaba en la misma altura



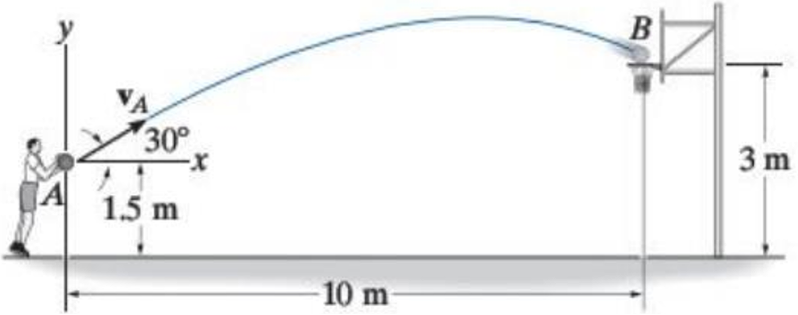
Ejercicios 100 y 101: Tiro Parabólico

100. La pelota es pateada desde el punto A con una velocidad inicial de $10[m/s]$. Determine la altura máxima h que alcanza.

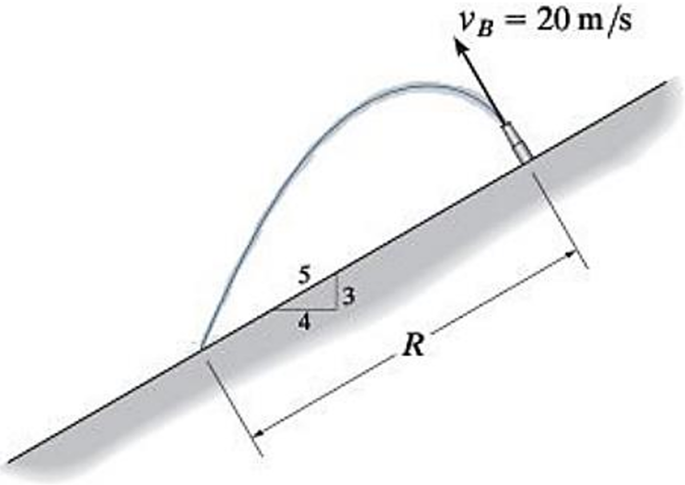
101. La pelota es pateada desde el punto A con la velocidad inicial de $10[m/s]$. Determine la distancia R y la rapidez con que la pelota golpea el suelo



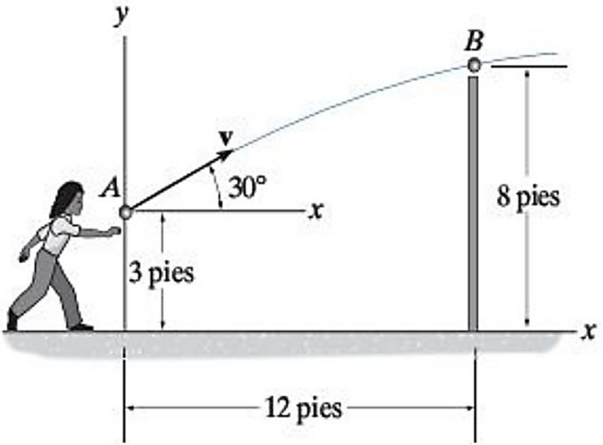
Determine la rapidez a que se debe lanzar el balón de basquetbol en A al ángulo de 30° de modo que llegue a la canasta en B



Se rocía agua a un ángulo de 90° desde la pendiente a 20 m/s. Determine la distancia R.

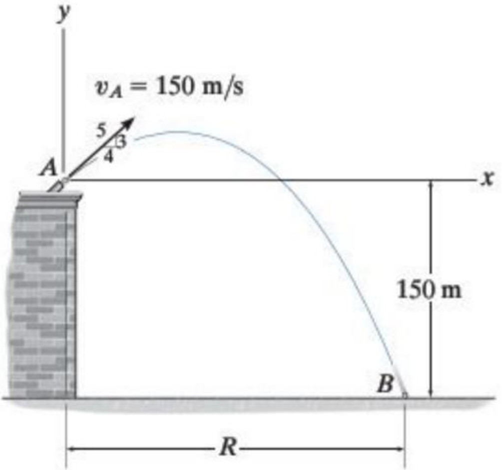


Se lanza una pelota desde A. Si se requiere salvar el muro en B, determine la magnitud mínima de su velocidad inicial v.



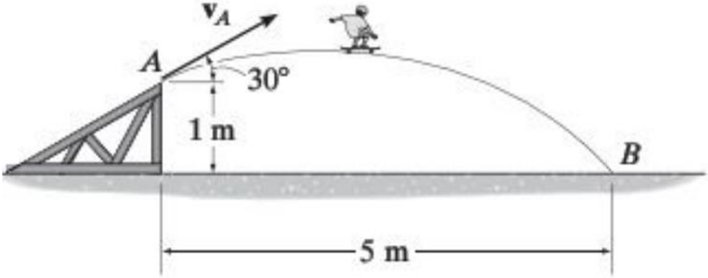
Tarea Ejercicio 105: Tiro Parabólico

Se dispara un proyectil con una velocidad inicial de $150[m/s]$ desde la azotea de un edificio. Determine la distancia R donde golpea el suelo en B.



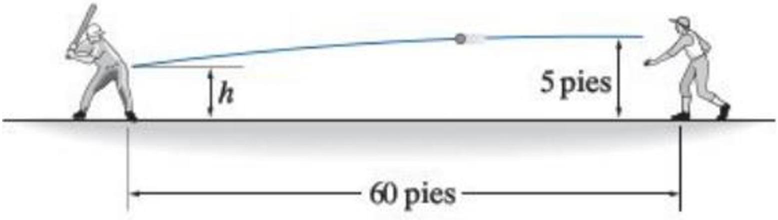
Ejercicio 106: Tiro Parabólico

El patinador deja la rampa en A con una velocidad inicial a un ángulo de 30°. Si golpea el suelo en B, determine la velocidad inicial y el tiempo de vuelo.



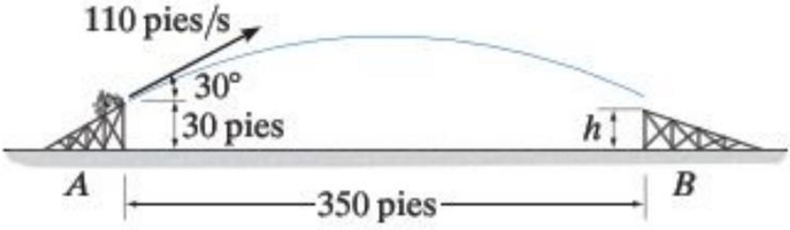
Ejercicio 107: Tiro Parabólico

El "pitcher" lanza la bola horizontalmente a una rapidez de 140 pies/s desde una altura de 5 pies. Si el bateador está a 60 pies del lanzador, determine el tiempo para que la bola llegue al bateador y la altura h a la cual pasa por él.



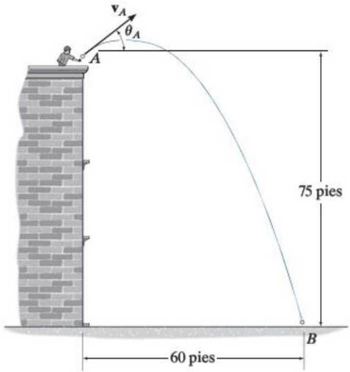
Tarea Ejercicio 108: Tiro Parabólico

Si el motociclista deja la rampa a 110 pies/s, determine la altura h que la rampa B debe tener de modo que la motocicleta aterrice a salvo.

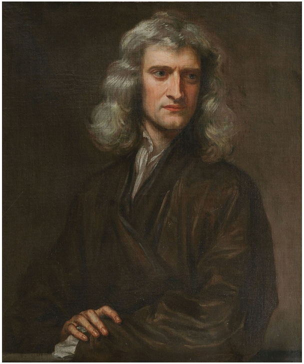


Tarea Ejercicio 109: Tiro Parabólico

Se lanza la pelota desde la azotea del edificio. Si golpea el suelo en B en 3 s, determine la velocidad inicial y el ángulo de inclinación al cual fue lanzada. También, determine la magnitud de la velocidad de la bola cuando golpea el suelo.



Cuando un cuerpo está acelerando, es decir, su velocidad se encuentra cambiando (magnitud o dirección), es necesario recurrir a la segunda ley de Newton, pues nos permite relacionar el movimiento de un cuerpo con las fuerzas que actúan sobre él.



Si la fuerza resultante que actúa sobre una partícula es distinta de cero, la partícula experimenta una aceleración proporcional a la magnitud de la resultante y en la misma dirección.

La masa de una partícula

Newton descubrió que, si se aplican fuerzas de distintas magnitudes y/o direcciones a una partícula, ésta se mueve en dirección de la fuerza y que las magnitudes de las aceleraciones producidas son propocionales a la fuerza aplicada.

$$\frac{F_1}{a_1} = \frac{F_2}{a_2} = ... = constante$$

El valor constante del conciente de la magntiud de la fuerza y la aceleración es una característica de la partícula, a la cual se llama masa y se denota con m.

Cuando sobre una partícula de masa m actúa una fuerza $\vec{F}$, se produce una aceleración $\vec{a}$, que satisface la relación:

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

F = ma

Ya que la masa es un escalar positivo, se mantiene siempre que los vectores $\vec{F}$ y $\vec{a}$ son propocionales y de la misma dirección.
Cuando la partícula es sometida a varias fuerzas, se debe consdierar la suma de fuerzas o la resultante.

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

Si la suma de fuerzas es cero, entonces la aceleración de la partícula es cero también, ya sea que el cuerpo se encuentre en reposo o que mantenga una velocidad lineal constante. Por lo que la primera ley de Newton es un caso particular de la segunda ley.

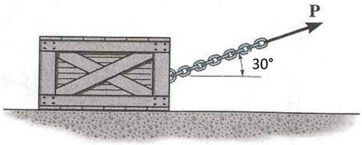
Ejercicios 110 - 113

110. Determine la aceleración de la caja de 5[kg] si es jalada por una fuerza P de 3[N] sobre una superficie lisa. La caja parte del reposo.

111. Si la caja de 5[kg] es jalada por una cadena con una fuerza de 10[N], determine el tiempo que tardará en recorrer 3[m], partiendo del reposo.

112. Calcule la rapidez, partiendo del reposo, que alcanzará la caja de 5[kg] en t=8[s] si se le aplica una fuerza de 20[N] sobre una superficie rugosa cuyo coeficiente de fricción cinética es 0.3

113. Determine la magnitud de la fuerza con la que debe ser jalada la caja, cuya masa es de 5[kg], si recorre 3[m] en 2[s] partiendo del reposo sobre una superficie rugosa, con la que tiene un coeficiente de fricción cinética de 1/4.



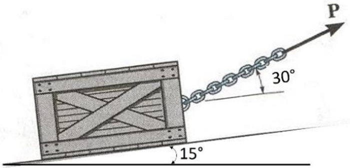
Tarea: Ejercicios 114 - 117

114. Determine la aceleración de la caja de 2[kg] si es jalada por una fuerza P de 3[N] sobre una superficie lisa. La caja parte del reposo.

115. Si la caja de 2[kg] es jalada por una cadena con una fuerza de 10[N], determine el tiempo que tardará en recorrer 3[m], partiendo del reposo.

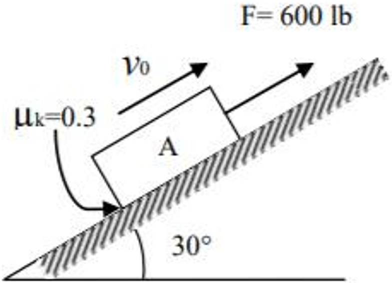
116. Calcule la rapidez, partiendo del reposo, que alcanzará la caja de 2[kg] en t=8[s] si se le aplica una fuerza de 20[N] sobre una superficie rugosa cuyo coeficiente de fricción cinética es 0.3

117. Determine la magnitud de la fuerza con la que debe ser jalada la caja, cuya masa es de 2[kg], si recorre 3[m] en 2[s] partiendo del reposo sobre una superficie rugosa, con la que tiene un coeficiente de fricción cinética de 1/4.



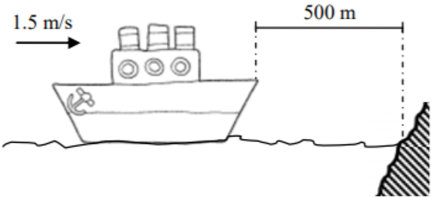
Ejercicio 118

El bloque A de 700[lb] de peso está sujeto a la acción de una fuerza de remolque $F = 600[lb]$ como se observa en la Figura. El coeficiente de fricción cinética entre el bloque y la superficie es 0,3. Si la velocidad inicial v_0 del bloque es $4[ft/s]$ cuando $t = 0$, determine la distancia que recorre hasta $t = 3[s]$ y la velocidad al final de ese intervalo.



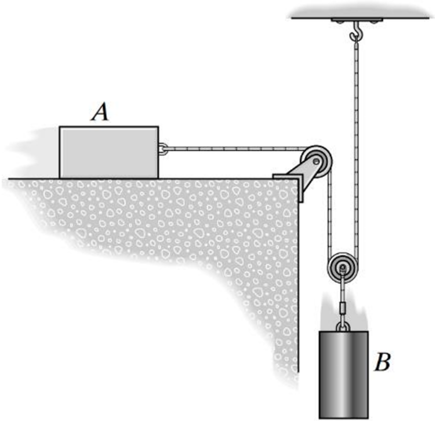
Ejercicio 119

Una embarcación de 36000[ton] que se dirige directamente hacia un arrecife viaja con una rapidez constante de 1,5[m/s]. Cuando se encuentra a 500[m] del arrecife, el capitán decide sólo invertir el sentido de los motores que producen una fuerza horizontal y constante de 80[kN] sobre el barco. Despreciando la resistencia del agua a su avance, determine si chocará con el arrecife y, si es así, ¿se hundirá la embarcación? Considere que el barco está diseñado para resistir impactos a una velocidad máxima de 0,5[m/s].



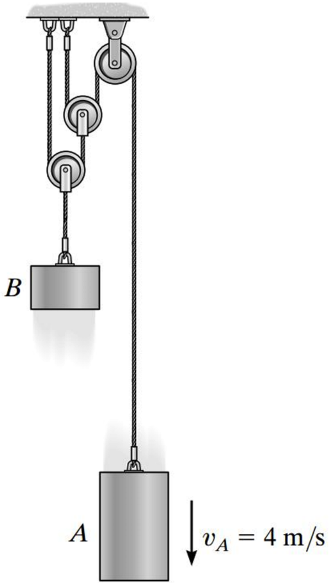
Ejercicio 120

El bloque A de $10[lb]$ se desplaza hacia la derecha $v_a = 2[m/s]$ en el instante mostrado. Si el coeficiente de fricción cinética es $\mu = 0{,}2$ entre la superficie y A, determine la velocidad de A cuando se ha desplazado $4[ft]$. El bloque B pesa $20[lb]$.



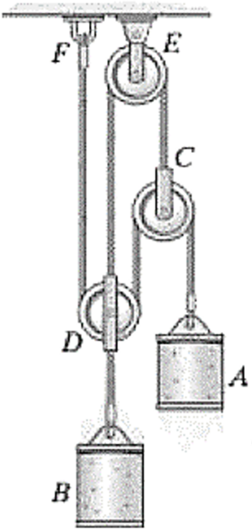
Ejercicio 121

Determine el peso del cuerpo B si en el arreglo de la Figura se observa que el cuerpo A de $10[N]$ desciende con una rapidez de $4[m/s]$ y $6[s]$ después alcanza una rapidez de $8[m/s]$.



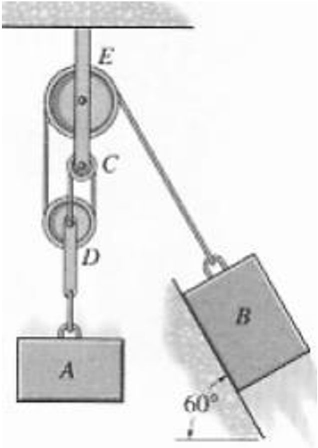
Tarea: Ejercicio 122

El sistema mostrado en la Figura parte del reposo. Determine la tensión de la cuerda F y la aceleración de los cuerpos A y B que pesan $5[N]$ y $10[N]$ respectivamente.



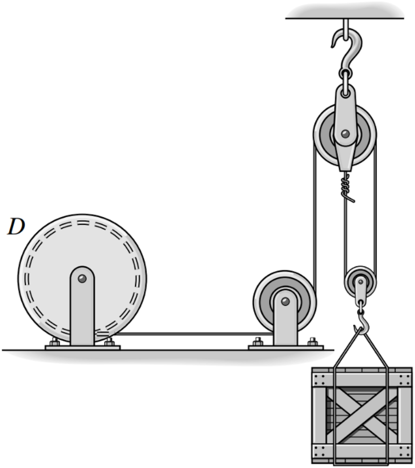
Ejercicio 123

Determine la masa en $[kg]$ requerida del bloque A de modo que cuando se le suelte desde el reposo mueva el bloque B de $5[kg]$ una distancia de $0{,}75[m]$ hacia arriba del plano inclinado en $t = 2[s]$.



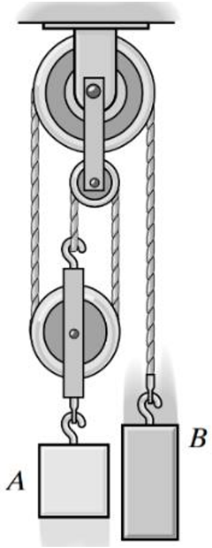
Tarea: Ejercicio 124

Determine la aceleración de la cuerda en D y la tensión de esa cuerda si la caja pesa $5[N]$, parte del reposo y desciende $30[cm]$ en $1[s]$.



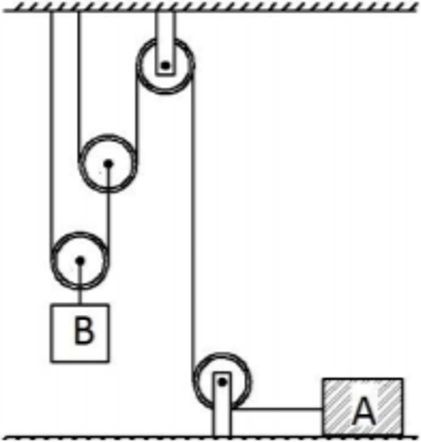
Tarea: Ejercicio 125

El ensamble se compone de dos bloques A y B, los cuales tienen masas de $20[kg]$ y $30[kg]$, respectivamente. Determine la distancia que B debe descender para que A alcance una rapidez de $3[m/s]$ a partir del punto de reposo.



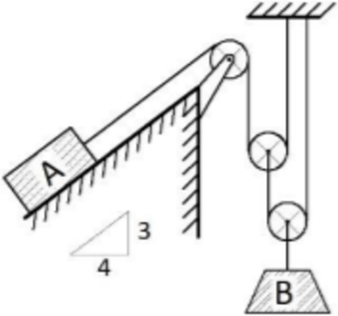
Ejercicio 126

El sistema formado por los cuerpos A y B, de $5[kg]$ y $10[kg]$ de masa, respectivamente, parte del reposo. Si el coeficiente de fricción cinética entre el cuerpo A y la superficie vale 0,2, determine la rapidez de A después de haber recorrido $1[m]$.



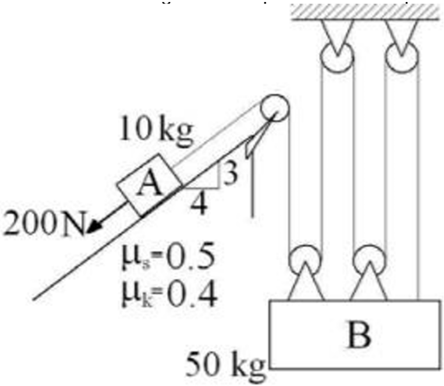
Ejercicio 127

Los cuerpos A y B de $100[kg]$ y $50[kg]$ de masa, respectivamente, e inicialmente en reposo, están conectados como se muestra en la Figura. Si los coeficientes de fricción estático y cinético entre el plano inclinado y el cuerpo A valen 0,3 y 0,2, determine la velocidad de A cuando B haya recorrido $0{,}5[m]$. Las masas de las poleas y de las cuerdas son despreciables.



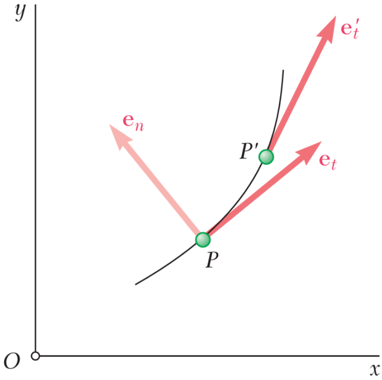
Ejercicio 128

El sistema de cuerpos de la Figura 100 se encuentra en reposo, con una $m_A = 10[kg]$, $m_B = 50[kg]$ y coeficientes de fricción estático y cinético de 0,5 y 0,4. Al cuerpo A se le aplica una fuerza de $200[N]$, como se muestra. Determine la velocidad de B $4[s]$ después de haber aplicado dicha fuerza.



Vector tangente

La velocidad de una partícula es un vector tangente a su trayectoria.
Considere una partícula se mueve a lo largo de una curva contenida en el plano de la figura, se puede asociar a la posición P de la partícula un vector unitario $\hat{e}_t$ tangente a la trayectoria y que apunta en dirección del movimiento; la siguiente posición P' se asocia con un vector $\hat{e}_t'$.



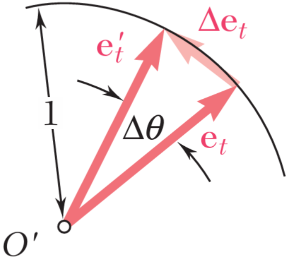
Vector normal

Si se dibujan ambos vectores desde el mismo origen O', se define el vector

$$\Delta \hat{e}_t = \hat{e}_t' - \hat{e}_t$$

Cuya magnitud es:

$$|\Delta \hat{e}_t| = 2\sin\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right)$$



Se define al vector normal a la trayectoria en la posición P como

$$\hat{e}_n = \lim_{\Delta\theta\to 0} \frac{\Delta e_t}{\Delta\theta} = \frac{de_t}{d\theta}$$

Y se trata de un vector unitario:

$$|\hat{e}_n| = \lim_{\Delta\theta\to 0} \frac{|\Delta e_t|}{\Delta\theta} = \lim_{\Delta\theta\to 0} \frac{2\sin\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right)}{\Delta\theta} = \lim_{\Delta\theta\to 0} \frac{\sin\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right)}{\frac{\Delta\theta}{2}} = 1$$

Demostración de $|\Delta \hat{\mathbf{e}}_t| = 2\sin\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right)$

1. Sean $\hat{\mathbf{e}}_t$ y $\hat{\mathbf{e}}'_t$ vectores unitarios separados por un ángulo $\Delta\theta$. Sin pérdida de generalidad, colocamos:

$$\hat{\mathbf{e}}_t = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \hat{\mathbf{e}}'_t = \begin{bmatrix} \cos(\Delta\theta) \\ \sin(\Delta\theta) \end{bmatrix}$$

La diferencia entre estos vectores es:

$$\Delta\hat{\mathbf{e}}_t = \hat{\mathbf{e}}'_t - \hat{\mathbf{e}}_t = \begin{bmatrix} \cos(\Delta\theta) - 1 \\ \sin(\Delta\theta) \end{bmatrix}$$

2. Norma del vector diferencia Calculamos la norma:

$$|\Delta\hat{\mathbf{e}}_t| = \sqrt{(\cos(\Delta\theta) - 1)^2 + \sin^2(\Delta\theta)}$$

Expandiendo:

$$|\Delta\hat{\mathbf{e}}_t| = \sqrt{1 - 2\cos(\Delta\theta) + \cos^2(\Delta\theta) + \sin^2(\Delta\theta)}$$

Demostración de $|\Delta \hat{\mathbf{e}}_t| = 2\sin\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right)$

Usando la identidad $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$:

$$|\Delta \hat{\mathbf{e}}_t| = \sqrt{2 - 2\cos(\Delta\theta)} = 2\sin\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right)$$

3. Identidad trigonométrica utilizada

$$1 - \cos(\theta) = 2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad |\Delta \hat{\mathbf{e}}_t| = \sqrt{2 - 2\cos(\Delta\theta)} = 2\sin\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right)$$

Demostración de $|\hat{\mathbf{e}}_n| = 1$

Demostración del límite usando el teorema de L'Hôpital

Se desea calcular el siguiente límite, que corresponde con el módulo del vector $\Delta\hat{\mathbf{e}}_n$:

$$|\hat{e}_n| = \lim_{\Delta\theta\to 0} \frac{\sin\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right)}{\frac{\Delta\theta}{2}}$$

Paso 1: Verificar la forma indeterminada Cuando $\Delta\theta \to 0$:

$$\sin\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right) \to 0 \quad \text{y} \quad \frac{\Delta\theta}{2} \to 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\sin\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right)}{\frac{\Delta\theta}{2}} \text{ tiene la forma } \frac{0}{0}$$

Paso 2: Aplicar el teorema de L'Hôpital El teorema de L'Hôpital establece que si:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0} \text{ o } \frac{\infty}{\infty} \quad \text{y} \quad \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ existe,}$$

entonces:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Demostración de $|\hat{\mathbf{e}}_n| = 1$

En nuestro caso:

- $f(\Delta\theta) = \sin(\frac{\Delta\theta}{2})$, entonces $f'(\Delta\theta) = \cos(\frac{\Delta\theta}{2})$
- $g(\Delta\theta) = \frac{\Delta\theta}{2}$, entonces $g'(\Delta\theta) = 1$

Aplicando L'Hôpital:

$$\lim_{\Delta\theta\to 0} \frac{\sin(\frac{\Delta\theta}{2})}{\Delta\theta} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(\frac{\Delta\theta}{2})}{1} = \cos(0) = 1$$

Resultado final:

$$|\hat{\mathbf{e}}_n| = \lim_{\Delta\theta\to 0} \frac{\sin(\frac{\Delta\theta}{2})}{\Delta\theta} = 1$$

Aceleraciónes normal y tagencial

Dado que la velocidad de una partícula es tangente a la trayectoria, se puede expresar como

$$\vec{v} = v\hat{e}_t$$

Al derivar respecto al tiempo, se obtiene la aceleración de la partícula:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\hat{e}_t + v\frac{d\hat{e}_t}{dt}$$

Por regla de la cadena:

$$\frac{d\hat{e}_t}{dt} = \frac{d\hat{e}_t}{d\theta}\frac{d\theta}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{v}{\rho}\hat{e}_n$$

Donde:

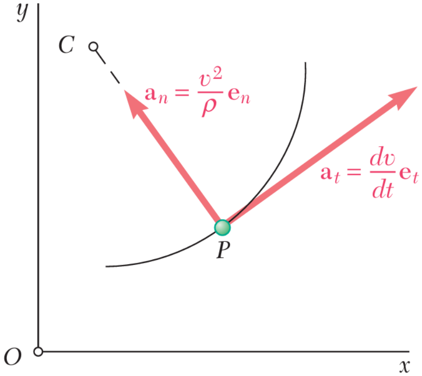
- $\frac{ds}{dt} = v$ rapidez de la partícula
- $\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{\rho}$ ρ radio de curvatura
- $\frac{d\hat{e}_t}{d\theta} = \hat{e}_n$ vector normal

Aceleraciónes normal y tagencial

Por lo que la aceleración se puede representar como:

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\hat{e}_t + \frac{v^2}{\rho}\hat{e}_n$$

$$\vec{a} = a_t\hat{e}_t + a_n\hat{e}_n$$



Donde:

- $a_t = \frac{dv}{dt}$: aceleración tangencial
- $a_n = \frac{v^2}{\rho}$: aceleración normal

Movimiento Circular

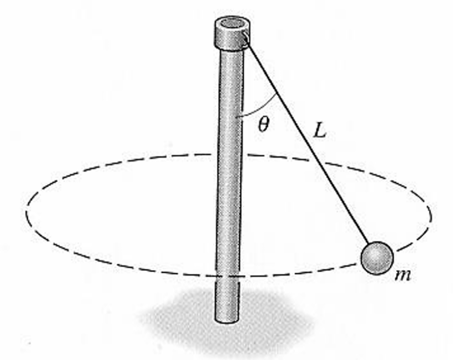
Una partícula se encuentra en movmiento circular cuando su trayectoria describe una circunferencia de radio ρ respecto a un punto fijo llamado centro.

¿Cómo analizar un movimiento circular?

1. Dibujar la curva en dos perfiles localizando el centro.
2. Dibujar desde el cuerpo (partícula) los ejes:
   - Normal ($\hat{e}_n$): hacia el centro de la curva
   - Tangencial ($\hat{e}_t$): en dirección de la velocidad
   - Binormal ($\hat{e}_b$): perpendicular a los dos anteriores.
3. Dibujar las fuerzas presentes (pesos, tensiones, etc.)

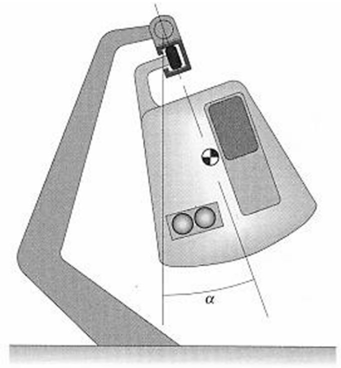
Ejercicio 129

El cuerpo de masa m gira alrededor del poste vertical en una trayectoria horizontal circular. Determine la magnitud de su velocidad en términos de θ y L.



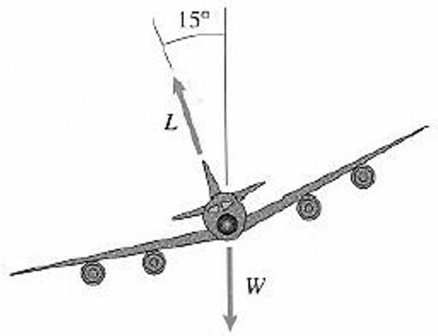
Ejercicio 130

Se va a diseñar un sistema de transporte por monorriel que viajará a $50[m/s]$. El ángulo α con que los vagones oscilarán respecto a la vertical al tomar una curva no debe ser mayor que $20°$. Si las curvas son circulares con radio R, ¿cuál es el mínimo valor admisible de R?



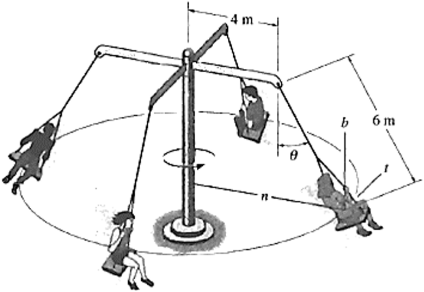
Ejercicio 131

Un avión con peso de 200[$kips$] efectúa un viraje a altitud constante y a velocidad constante de 600[ft/s]. El ángulo de inclinación es de 15° a) Determine la fuerza L de sustentación b) ¿Cuál es el radio de curvatura de la trayectoria del avión?



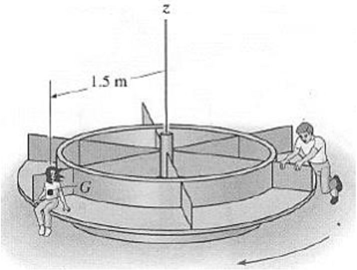
Ejercicio 132

Determine la rapidez constante de los pasajeros en el juego de un parque de diversiones si se observa que los cables de soporte están dirigidos a $\theta = 30°$ de la vertical. Cada silla, incluyendo su pasajero, tiene una masa de $80[kg]$.



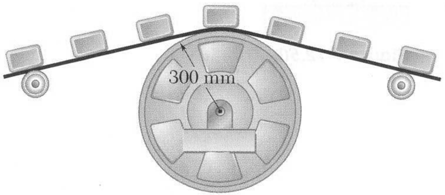
Ejercicio 133

Una niña con masa de 25 kg está sentada en el borde del carrusel de manera que su centro de masa G está a una distancia de 1.5 m del eje de rotación. Si el movimiento angular de la plataforma es incrementado lentamente, de manera que la componente tangencial de aceleración de la niña puede ser ignorada, determine la rapidez máxima que ella puede tener antes de empezar a resbalar hacia afuera del carrusel. El coeficiente de fricción estática entre la niña y el carrusel es de 0.3



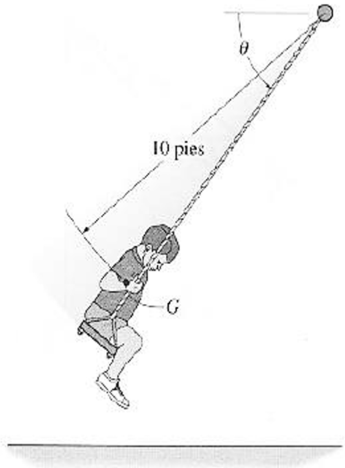
Ejercicio 134

Una serie de pequeños paquetes se traslada por medio de una banda transportadora delgada que pasa sobre la polea guía de 300 mm de radio. La banda inicia su movimiento desde el reposo en el tiempo t=0 y su velocidad se incrementa a una tasa constante de 150 mm/s2. Si el coeficiente de fricción estática entre los paquetes y la banda es de 0.75, determine el tiempo necesario para que el primer paquete resbale.



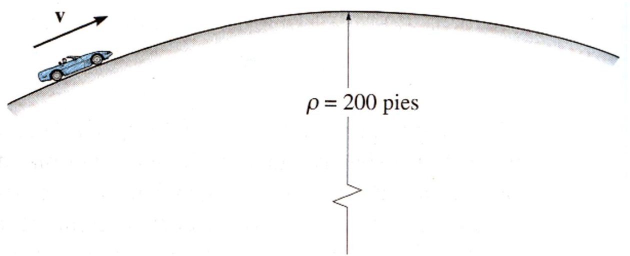
Ejercicio 135

En el instante $\theta = 60°$, el centro de masa G del niño tiene una rapidez "hacia abajo" $v = 15[ft/s]$. Determine la razón del incremento de su rapidez y la tensión en cada una de las dos cuerdas de soporte del c



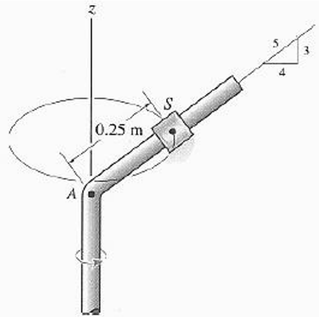
Ejercicio 136

Si la cresta de la colina tiene radio de curvatura $r = 200[ft]$, determine la rapidez máxima constante con la que el carro puede viajar sobre ella sin dejar la superficie del camino. Desprecie el tamaño del carro en los cálculos. El carro tiene un peso de $3,500[lb]$



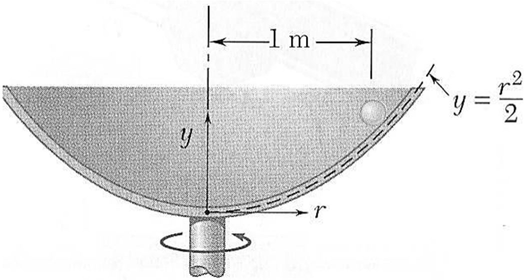
Ejercicio 137

El carrete S de 2[kg] (Figura 109)se ajusta con holgura en la barra inclinada cuyo coeficiente de fricción estática es 0,2. Si el carrete está ubicado a 0,25[m] de A, determine: a) la rapidez máxima constante que puede tener para que no resbale hacia arriba por la barra b) la rapidez mínima constante que puede tener para que no resbale hacia abajo por la barra



Ejercicio 138

Una esfera está en reposo respecto a un plato parabólico que gira a razón constante alrededor de un eje vertical. Si se ignora la fricción y sabiendo que r= 1 m, determine a) la velocidad v de la esfera, b) la magnitud de la fuerza normal ejercida por la esfera cuya masa es de 1 kg sobre la superficie inclinada del plato.



Contacto

Eduardo Flores Rivas
Ingeniero Mecatrónico
Facultad de Ingeniería, UNAM
eduardo.flores@ingenieria.unam.edu

Referencias

BEER, Ferdinand, JOHNSTON, Russell, MAZUREK, David
Mecánica vectorial para ingenieros, estática.
10a. edición. México. McGraw-Hill, 2013.

BEER, Ferdinand, JOHNSTON, Russell, CORNWELL, Phillip
Mecánica vectorial para ingenieros, dinámica.
10a. edición. México. McGraw-Hill, 2013.