

Mecánica

Tema 4. Introducción a la dinámica de la partícula

Ing. Eduardo Flores Rivas

Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional Autónoma de México

Semestre 2025-2



Contenido

- 1 Objetivo
- 2 Elementos básicos de la cinemática
- 3 Movimiento Rectilíneo
- 4 Tiro Parabólico
- 5 Segunda Ley de Newton
- 6 Componentes tangencial y normal
- 7 Contacto
- 8 Referencias

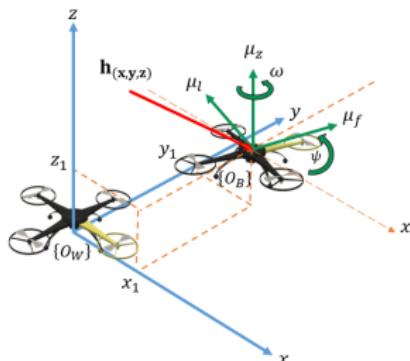


Objetivo

El alumno aplicará las leyes de Newton en el análisis del movimiento de una partícula en el plano, donde intervienen las causas que modifican a dicho movimiento.

Dinámica

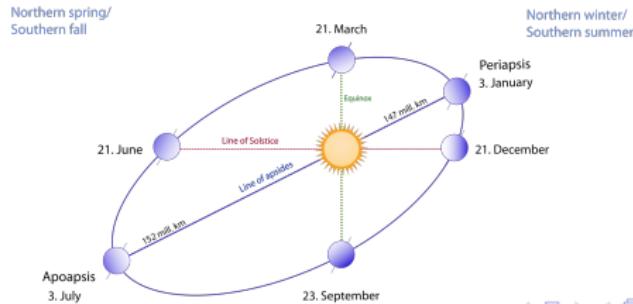
- **Estática:** Rama de la mecánica que estudia los cuerpos en reposo.
- **Dinámica:** Rama de la mecánica que estudia los cuerpos en movimiento.
 - **Cinemática:** Estudio de la geometría del movimiento. Relaciona el desplazamiento, la velocidad, la aceleración y el tiempo. No atiende a la causa del movimiento.
 - **Cinética:** Estudio de la relación que existe entre las fuerzas que actúan sobre un cuerpo, su masa y el movimiento del mismo. Permite predecir el movimiento ocasionado por una fuerza, o determinar las fuerzas necesarias para producir un movimiento.



Trayectoria

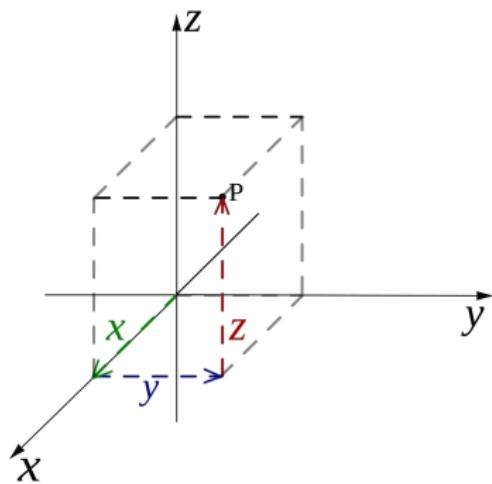
Trayectoria: Es una línea imaginaria que describe el movimiento de una partícula. Algunas de las trayectorias más estudiadas son:

- Rectilíneo: se desplaza siguiendo una recta. Por ejemplo, un automóvil en una carretera recta.
- Circular: se desplaza siguiendo una circunferencia. Por ejemplo, las aspas de un ventilador.
- Parabólica: se desplaza siguiendo una parábola. Por ejemplo, un balón de fútbol americano al ser lanzado.
- Elíptico: se desplaza siguiendo un elipse. Por ejemplo, la órbita de un planeta.



Posición

Posición (P): Es la ubicación de un punto dado un sistema de referencia. Se mide en unidades de longitud respecto a un punto fijo llamado origen, y puede estar dada por una, dos o tres distancias si se trabaja en una recta, en el plano o en el espacio, respectivamente. Se define como un vector.



Cuando se conoce la posición de una partícula para cualquier valor de tiempo (t), se dice que se conoce la trayectoria, y se puede expresar como una función.

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}$$

Velocidad

La velocidad es la tasa de cambio en la posición respecto al paso del tiempo. Por ejemplo, si una partícula ocupa la posición P en un tiempo t , y la posición P' en un tiempo $t + \Delta t$, se puede obtener la posición final P' a partir de la suma de $r + \Delta r$

La velocidad promedio de una partícula en un intervalo Δt se define como:

$$v_{\text{prom}} = \frac{\Delta r}{\Delta t} [\text{m/s}]$$

Por su parte, la velocidad instantánea de una partícula en un instante t , se obtiene a partir de la velocidad promedio cuando los intervalos Δt son extremadamente cortos, es decir, la derivada de la posición respecto al tiempo.

$$\vec{v}(t) = \frac{d}{dt} \vec{r}(t)$$

Rapidez

Debido a que la velocidad depende de la posición, también se trata como un vector. sin embargo, no siempre es necesario trabajar de forma vectorial, por lo que se acuñó el término rapidez como la magnitud del vector \vec{v} para usarse en análisis escalares.

La rapidez es una magnitud escalar, por lo que no toma en cuenta la dirección del movimiento.

10 m/s a la derecha



10 m/s a la izquierda



MISMA RAPIDEZ DIFERENTE VELOCIDAD

6 m/s



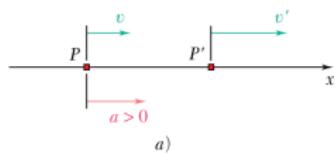
DIFERENTE RAPIDEZ Y VELOCIDAD

10 m/s

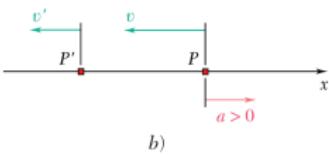


Aceleración

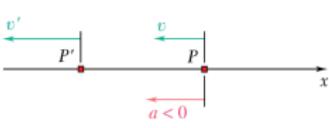
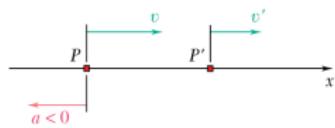
La aceleración es la tasa de cambio de la velocidad respecto al tiempo. Considerando una velocidad v de la partícula en el tiempo t y su velocidad $v + \Delta v$ en el tiempo posterior $t + \Delta t$, entonces la aceleración promedio de la partícula en el intervalo Δt se define como: $a_{prom} = \frac{\Delta v}{\Delta t} [m/s^2]$



a)



b)



La aceleración instantánea de la partícula en el instante t , se obtiene de la aplicación del límite en la aceleración promedio para aplicar intervalos de tiempo extremadamente pequeños

$$\vec{a}(t) = \frac{d}{dt} \vec{v}(t) = \frac{d^2}{dt^2} \vec{r}(t)$$



Movimiento Rectilíneo Uniforme

Se dice que una partícula se encuentra en movimiento rectilíneo uniforme cuando esta se mueve siguiendo una línea recta y su aceleración es cero para todo valor de t .

En el MRU:

- Aceleración: $a(t) = 0$
- Velocidad: constante $v(t) = \frac{dx}{dt}$
- Posición:

$$\int_{x_0}^x dx = v \int_0^t dt$$

$$x - x_0 = vt$$

$$x(t) = x_0 + vt$$



Movimiento Rectilíneo Uniformemente Acelerado

Se dice que una partícula se encuentra en movimiento rectilíneo uniformemente acelerado cuando esta se mueve siguiendo una línea recta y su aceleración es constante para todo valor de t .

En el MRUA:

- Aceleración: Constante

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx/v} = v \frac{dv}{dx}$$

- Velocidad:

$$\int_{v_0}^v dv = a \int_0^t dt$$

$$v - v_0 = at$$

$$v(t) = v_0 + at$$

$$\int_{v_0}^v v dv = a \int_{x_0}^x dx$$

$$\frac{1}{2}(v^2 - v_0^2) = 2a(x - x_0)$$

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$$



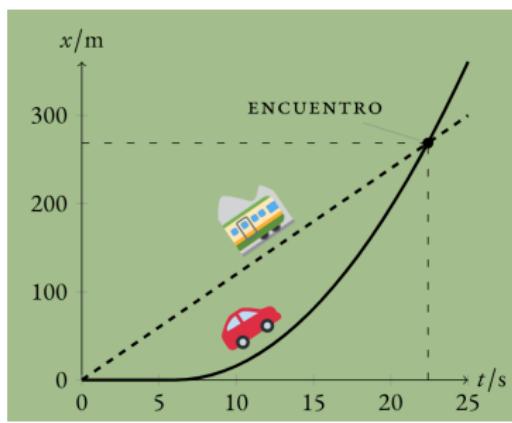
Movimiento Rectilíneo Uniformemente Acelerado

- Posición: De la ecuación de velocidad

$$\int_{x_0}^x dx = \int_0^t (v_0 + at) dt$$

$$x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$



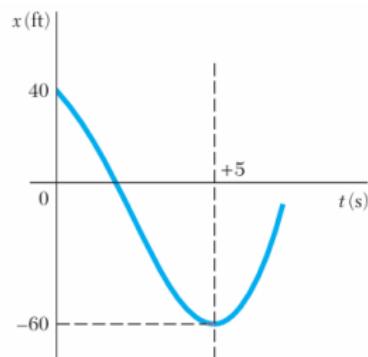
Ejercicio MRUA

La posición de una partícula que se mueve a lo largo de una línea recta está definida por la relación $x = t^3 - 6t^2 - 15t + 40$, donde x se expresa en pies y t en segundos. Determine

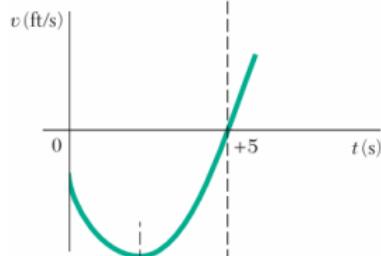
- el tiempo al cual la velocidad será cero
- la posición y la distancia recorrida por la partícula en ese tiempo
- la aceleración de la partícula en ese tiempo
- la distancia recorrida por la partícula desde $t = 4$ s hasta $t = 6$ s



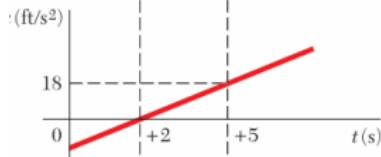
Ejercicio MRUA



$$x(t) = t^3 - 6t^2 - 15t + 40$$



$$v(t) = 3t^2 - 12t - 15$$



$$a(t) = 6t - 12$$



Ejercicio 92: MRUA

Un ciclista parte del reposo y después de viajar a lo largo de una trayectoria recta una distancia de $20[m]$ alcanza una rapidez de $30[km/h]$. Determine su aceleración si ésta es constante. Calcule también cuánto le toma alcanzar la rapidez de $30[km/h]$.



Ejercicio 93: MRUA

Un automóvil parte del reposo y alcanza una rapidez de $80[ft/s]$ después de viajar $500[ft]$ a lo largo de un camino recto. Determine su aceleración constante y el tiempo de viaje.



Ejercicio 94: MRUA

Viajando con rapidez inicial de $70[\text{km}/\text{h}]$, un automóvil acelera a $6000[\text{km}/\text{h}^2]$ a lo largo de un camino recto. ¿Cuánto tardará en alcanzar una rapidez de $120[\text{km}/\text{h}]$? ¿Qué distancia recorre el automóvil durante este tiempo?

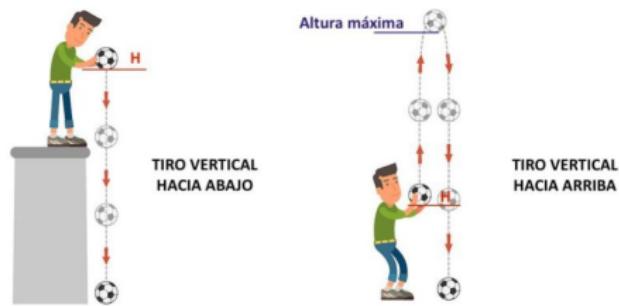


MRUA: Caída libre y tiro vertical

Cuando un objeto se deja caer o se lanza en línea recta de forma vertical, ocurre lo que se conoce como tiro vertical, que es un tipo específico de MRUA donde la aceleración es la gravedad.

La diferencia fundamental entre ambos está en la dirección inicial del movimiento:

- Caída libre: el objeto parte desde el reposo y se desplaza hacia abajo (aceleración positiva y velocidad inicial cero)
- Tiro vertical: el objeto es lanzado con una velocidad inicial, puede ser lanzado hacia arriba o abajo.



Ejercicio 95: Tiro vertical

Una pelota de béisbol es lanzada hacia abajo desde una torre de 50 ft con una rapidez inicial de 18 ft/s. Determine la rapidez con que la pelota toca el suelo y el tiempo de viaje.



Ejercicio 96: Tiro vertical y caída libre

Una pelota A es liberada del reposo a una altura de 40 ft al mismo tiempo que una segunda pelota B es lanzada hacia arriba desde 5 ft con respecto al suelo. Si las pelotas pasan una frente a la otra a una altura de 20 ft, determine la rapidez con que la pelota B fue lanzada hacia arriba. Ver Figura 78.

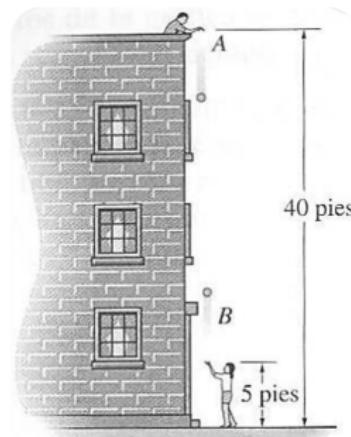


Figura 78

Tarea: Ejercicio 97

97. A una vagoneta se le prueban la aceleración y los frenos. En la primera prueba de aceleración en la calle, transcurrió un tiempo de 8.2 s para lograr un incremento de velocidad desde $10[\text{km}/\text{h}]$ hasta $100[\text{km}/\text{h}]$. En la prueba de frenos, la vagoneta recorrió una distancia de $44[\text{m}]$ durante el frenado desde $100[\text{km}/\text{h}]$ hasta cero. Si se suponen valores constantes para la aceleración y la desaceleración, determine:
- la aceleración durante la primera prueba en la calle,
 - la desaceleración durante la prueba de frenos.



Tarea: Ejercicio 98

98. Un avión empieza su despegue en A con rapidez nula y una aceleración constante. Si se sabe que empieza a volar 30 s después en B y que la distancia AB es de 900 m, determine:

- a) la aceleración a
- b) la rapidez de despegue en B.

Tarea: Ejercicio 99

99. La aceleración de una partícula al moverse a lo largo de una línea recta está dada por $a = (2t - 1)[m/s^2]$, donde t está en segundos. Si $s = 1[m]$

y $v = 2[m/s]$ cuando $t = 0$, determine:

- la velocidad
- la posición de la partícula cuando $t = 6[s]$.



Vectores de posición, velocidad y aceleración

En coordenadas cartesianas, los vectores de posición, velocidad y aceleración de una partícula se indican como:

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

$$\vec{v} = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + \dot{z}\hat{k}$$

$$\vec{a} = \ddot{x}\hat{i} + \ddot{y}\hat{j} + \ddot{z}\hat{k}$$

Las componentes escalares de la velocidad y la aceleración son

$$v_x = \dot{x}$$

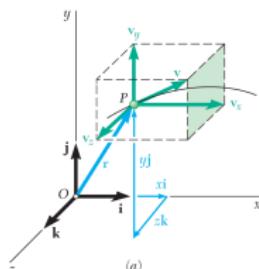
$$v_y = \dot{y}$$

$$v_z = \dot{z}$$

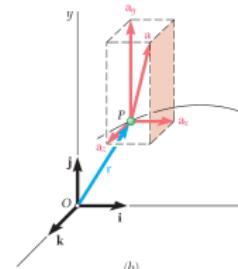
$$a_x = \ddot{x}$$

$$a_y = \ddot{y}$$

$$a_z = \ddot{z}$$



(a)



(b)



Tiro parabólico

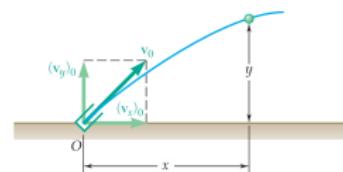
Es posible considerar el movimiento en las direcciones x, y, z de forma independiente. En el caso de un proyectil lanzado en el plano xy desde la coordenadas $P(x_0, y_0, z_0)$ con una velocidad inicial v_0 , si se ignora la resistencia al aire, las aceleraciones están dadas por:

$$a_x = \ddot{x} = 0 \quad a_y = \ddot{y} = -g \quad a_z = \ddot{z} = 0$$

Al integrar dos veces:

$$v_x = \dot{x} = v_{0x} \quad v_y = \dot{y} = v_{0y} - gt \quad v_z = \dot{z} = 0$$

$$x = x_0 + v_{0x} t \quad y = y_0 + v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2 \quad z = z_0$$



El proyectil permanece en el plano xy , su movimiento horizontal es uniforme, su movimiento vertical es uniformemente acelerado

Tiempo de vuelo y alcance máximo

a. **Tiempo de vuelo:** Es el doble del tiempo necesario para alcanzar la altura máxima

$$v_y = 0 = v_{0y} - gt$$

$$t_{1/2} = \frac{v_{0y}}{g} = \frac{v_0 \sin(\theta)}{g}$$

$$t_{max} = \frac{2v_0}{g} \sin(\theta)$$

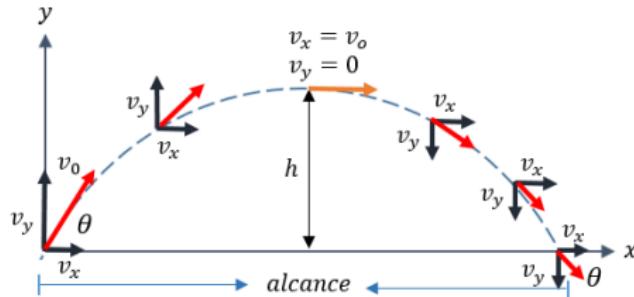
a. **Alcance máximo:** Máxima distancia horizontal que es capaz de recorrer el cuerpo.

$$R = v_{0x} t_{max}$$

$$R = v_0 \cos(\theta) \frac{2v_0}{g} \sin(\theta)$$

$$R = \frac{v_0^2}{g} \sin(2\theta)$$

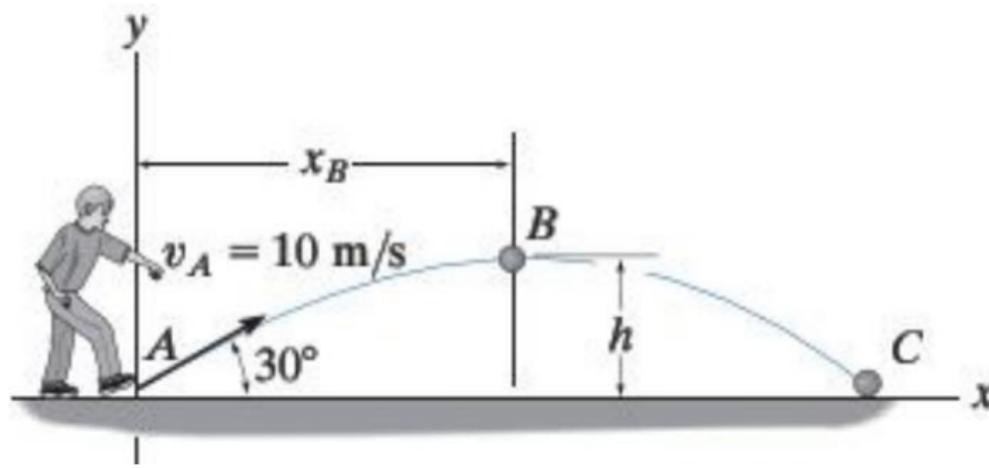
Solo si empieza y acaba en la misma altura



Ejercicios 100 y 101: Tiro Parabólico

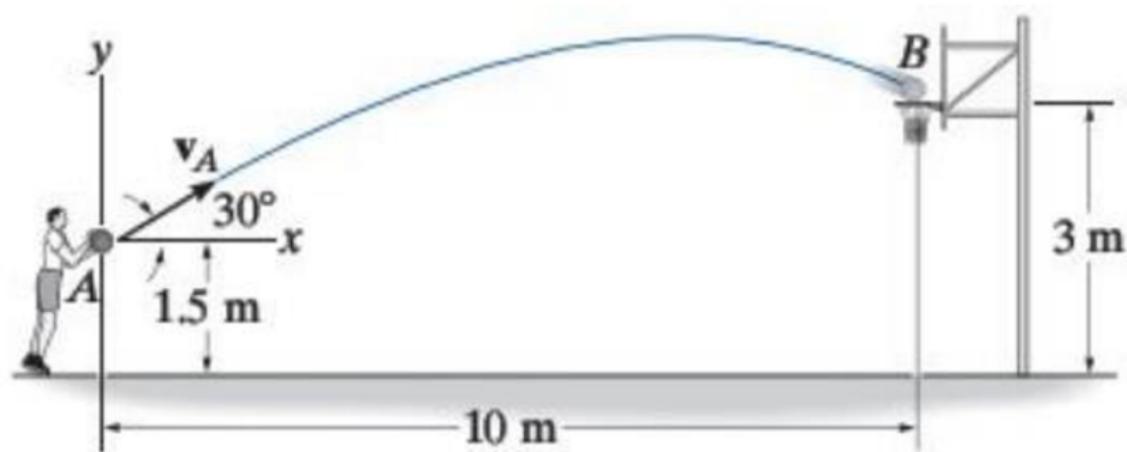
100. La pelota es pateada desde el punto A con una velocidad inicial de $10[m/s]$. Determine la altura máxima h que alcanza.

101. La pelota es pateada desde el punto A con la velocidad inicial de $10[m/s]$. Determine la distancia R y la rapidez con que la pelota golpea el suelo



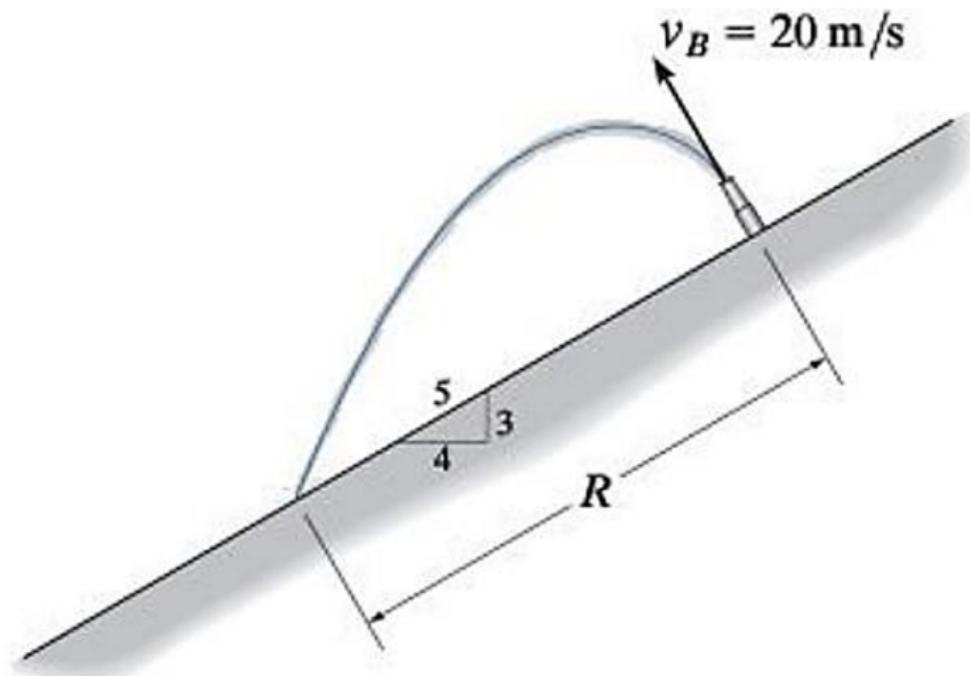
Ejercicio 102: Tiro Parabólico

Determine la rapidez a que se debe lanzar el balón de basquetbol en A al ángulo de 30° de modo que llegue a la canasta en B



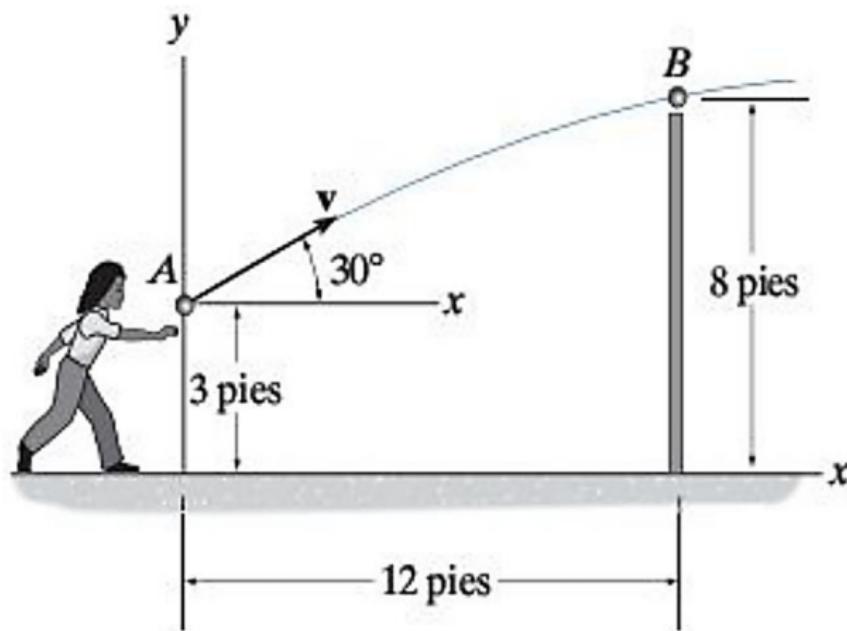
Ejercicio 103: Tiro Parabólico

Se rocía agua a un ángulo de 90° desde la pendiente a 20 m/s. Determine la distancia R.



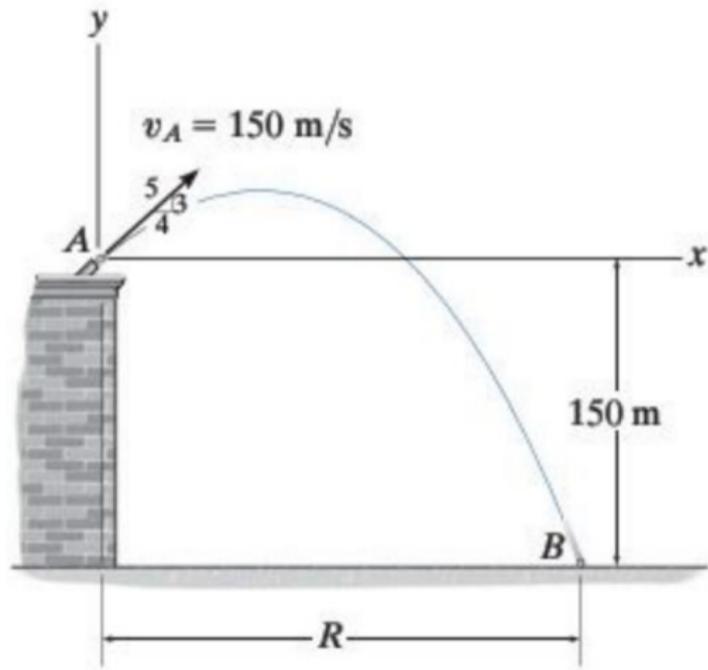
Ejercicio 104: Tiro Parabólico

Se lanza una pelota desde A. Si se requiere salvar el muro en B, determine la magnitud mínima de su velocidad inicial v .



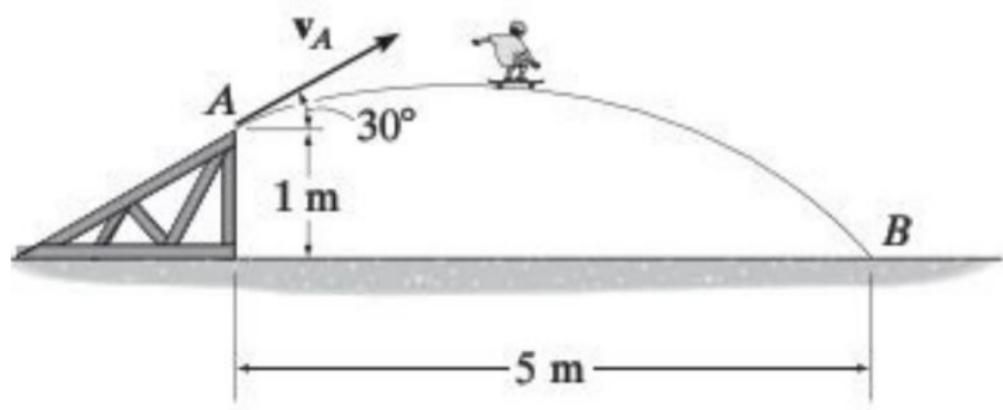
Tarea Ejercicio 105: Tiro Parabólico

Se dispara un proyectil con una velocidad inicial de $150[m/s]$ desde la azotea de un edificio. Determine la distancia R donde golpea el suelo en B.



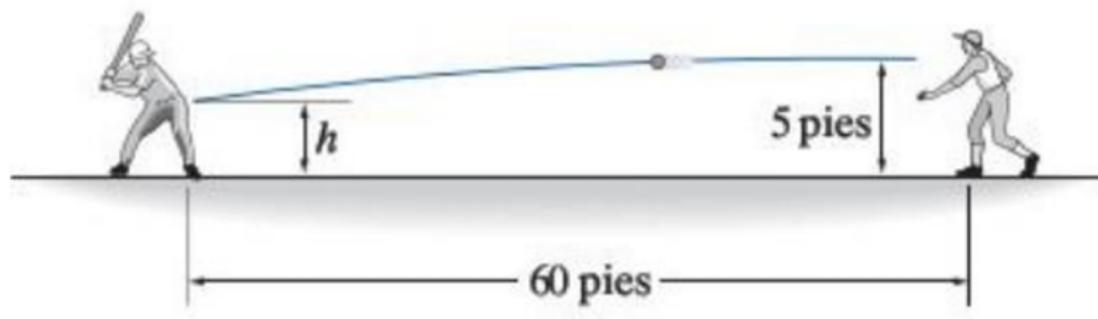
Ejercicio 106: Tiro Parabólico

El patinador deja la rampa en A con una velocidad inicial a un ángulo de 30° . Si golpea el suelo en B, determine la velocidad inicial y el tiempo de vuelo.



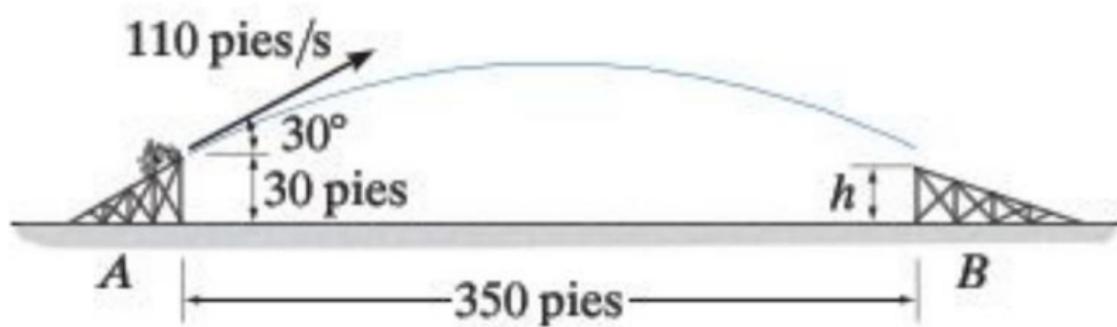
Ejercicio 107: Tiro Parabólico

El “pitcher” lanza la bola horizontalmente a una rapidez de 140 pies/s desde una altura de 5 pies. Si el bateador está a 60 pies del lanzador, determine el tiempo para que la bola llegue al bateador y la altura h a la cual pasa por él.



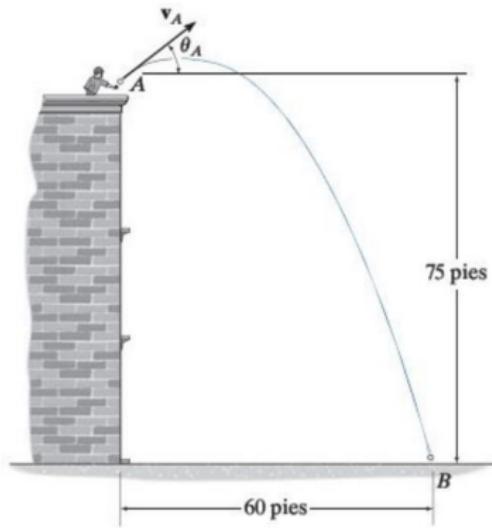
Tarea Ejercicio 108: Tiro Parabólico

Si el motociclista deja la rampa A a 110 pies/s, determine la altura h que la rampa B debe tener de modo que la motocicleta aterrice a salvo.



Tarea Ejercicio 109: Tiro Parabólico

Se lanza la pelota desde la azotea del edificio. Si golpea el suelo en B en 3 s, determine la velocidad inicial y el ángulo de inclinación al cual fue lanzada. También, determine la magnitud de la velocidad de la bola cuando golpea el suelo.



Segunda Ley de Newton

Cuando un cuerpo está acelerando, es decir, su velocidad se encuentra cambiando (magnitud o dirección), es necesario recurrir a la segunda ley de Newton, pues nos permite relacionar el movimiento de un cuerpo con las fuerzas que actúan sobre él.



Si la fuerza resultante que actúa sobre una partícula es distinta de cero, la partícula experimenta una aceleración proporcional a la magnitud de la resultante y en la misma dirección.

La masa de una partícula

Newton descubrió que, si se aplican fuerzas de distintas magnitudes y/o direcciones a una partícula, ésta se mueve en dirección de la fuerza y que las magnitudes de las aceleraciones producidas son proporcionales a la fuerza aplicada.

$$\frac{F_1}{a_1} = \frac{F_2}{a_2} = \dots = \text{constante}$$

El valor constante del cociente de la magnitud de la fuerza y la aceleración es una característica de la partícula, a la cual se llama masa y se denota con m .

Cuando sobre una partícula de masa m actúa una fuerza \vec{F} , se produce una aceleración \vec{a} , que satisface la relación:

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

Ya que la masa es un escalar positivo, se mantiene siempre que los vectores \vec{F} y \vec{a} son proporcionales y de la misma dirección.

Cuando la partícula es sometida a varias fuerzas, se debe considerar la suma de fuerzas o la resultante.

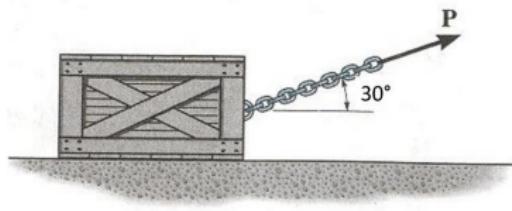
$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

Si la suma de fuerzas es cero, entonces la aceleración de la partícula es cero también, ya sea que el cuerpo se encuentre en reposo o que mantenga una velocidad lineal constante. Por lo que la primera ley de Newton es un caso particular de la segunda ley.



Ejercicios 110 - 113

110. Determine la aceleración de la caja de $5[\text{kg}]$ si es jalada por una fuerza P de $3[\text{N}]$ sobre una superficie lisa. La caja parte del reposo.
111. Si la caja de $5[\text{kg}]$ es jalada por una cadena con una fuerza de $10[\text{N}]$, determine el tiempo que tardará en recorrer $3[\text{m}]$, partiendo del reposo.
112. Calcule la rapidez, partiendo del reposo, que alcanzará la caja de $5[\text{kg}]$ en $t=8[\text{s}]$ si se le aplica una fuerza de $20[\text{N}]$ sobre una superficie rugosa cuyo coeficiente de fricción cinética es 0.3
113. Determine la magnitud de la fuerza con la que debe ser jalada la caja, cuya masa es de $5[\text{kg}]$, si recorre $3[\text{m}]$ en $2[\text{s}]$ partiendo del reposo sobre una superficie rugosa, con la que tiene un coeficiente de fricción cinética de $1/4$.



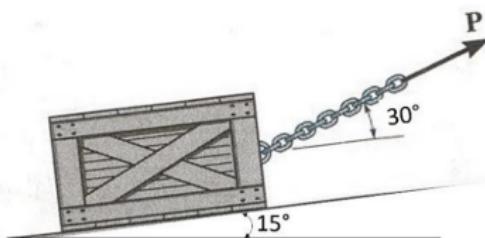
Tarea; Ejercicios 114 - 117

114. Determine la aceleración de la caja de 2[kg] si es jalada por una fuerza P de 3[N] sobre una superficie lisa. La caja parte del reposo.

115. Si la caja de 2[kg] es jalada por una cadena con una fuerza de 10[N], determine el tiempo que tardará en recorrer 3[m], partiendo del reposo.

116. Calcule la rapidez, partiendo del reposo, que alcanzará la caja de 2[kg] en $t=8[s]$ si se le aplica una fuerza de 20[N] sobre una superficie rugosa cuyo coeficiente de fricción cinética es 0.3

117. Determine la magnitud de la fuerza con la que debe ser jalada la caja, cuya masa es de 2[kg], si recorre 3[m] en 2[s] partiendo del reposo sobre una superficie rugosa, con la que tiene un coeficiente de fricción cinética de 1/4.



Componentes tangencial y normal

La velocidad de una partícula es un vector tangente a su trayectoria. Considere una partícula se mueve a lo largo de una curva contenida en el plano de la figura, se puede asociar a la posición P de la partícula un vector unitario \hat{e}_t tangente a la trayectoria y que apunta en dirección del movimiento; la siguiente posición P' se asocia con un vector \hat{e}'_t .



Contacto

Eduardo Flores Rivas
Ingeniero Mecatrónico
Facultad de Ingeniería, UNAM
eduardo.flores@ingenieria.unam.edu



Referencias

-  BEER, Ferdinand, JOHNSTON, Russell, MAZUREK, David
Mecánica vectorial para ingenieros, estática.
10a. edición. México. McGraw-Hill, 2013.
-  BEER, Ferdinand, JOHNSTON, Russell, CORNWELL, Phillip
Mecánica vectorial para ingenieros, dinámica.
10a. edición. México. McGraw-Hill, 2013.

