Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
UTFPR - Campus Apucarana
Departamento Acadêmico de Matemática - DAMAT-AP

Curso: Engenharia de Computação / Engenharia Civil / Engenharia Elétrica
Disciplina: Álgebra Linear (2024-2)
Professor: Alisson C. Reinol

Lista de Exercícios 1

- Espaços vetoriais

1) Mostre que o conjunto $\mathbb{R}^3$ munido das operações usuais de adição de vetores e multiplicação de um vetor por um escalar é um espaço vetorial.

2) Mostre que o conjunto $M(2,2)$ munido das operações usuais de adição de matrizes e multiplicação de uma matriz por um escalar é um espaço vetorial.

Nos exercícios 3 a 12, verifique se W é subespaço vetorial de V.

3) $V = \mathbb{R}^2, \quad W = \{(x,y)\,/\,y = -x\}$

4) $V = \mathbb{R}^2, \quad W = \{(x,y)\,/\,x + 3y = 0\}$

5) $V = \mathbb{R}^3, \quad W = \{(x,y,z)\,/\,x = 4y \text{ e } z = 0\}$

6) $V = \mathbb{R}^3, \quad W = \{(x,y,z)\,/\,z = 2x - y\}$

7) $V = \mathbb{R}^3, \quad W = \{(x,y,z)\,/\,x = z^2\}$

8) $V = \mathbb{R}^3, \quad W = \{(x,y,z)\,/\,y = x + 2 \text{ e } z = 0\}$

9) $V = \mathbb{R}^3, \quad W = \{(x,y,z)\,/\,x = 0 \text{ e } y = |z|\}$

10) $V = \mathbb{R}^3, \quad W = \{(x,y,z)\,/\,x \geq 0\}$

11) $V = M(2,2), \quad W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} / \, c = a + b \text{ e } d = 0 \right\}$

12) $V = M(2,2), \quad W = \left\{ \begin{bmatrix} a & a+b \\ a-b & b \end{bmatrix} / \, a, b \in \mathbb{R} \right\}$

13) Considere os vetores $u = (2,-3,2)$ e $v = (-1,2,4)$ em $\mathbb{R}^3$.

a) Escreva o vetor $w = (7,-11,2)$ como combinação linear de u e v.

b) Para que valor de k o vetor $(-8,14,k)$ é combinação linear de u e v?

14) No espaço vetorial $M(2,2)$ considere $v_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $v_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. Escreva $v = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ como combinação linear de v_1, v_2 e v_3.

15) Mostre que os vetores $v_1 = (2,1)$ e $v_2 = (1,1)$ geram o $\mathbb{R}^2$.

16) Mostre que os vetores $v_1 = (1,1,1)$, $v_2 = (0,1,1)$ e $v_3 = (0,0,1)$ geram o $\mathbb{R}^3$.

Nos exercícios 17 a 26, verifique se o subconjunto A do espaço vetorial V é LI ou LD.

17) $V = \mathbb{R}^2, \quad A = \{(1,3),(2,6)\}$

18) $V = \mathbb{R}^2, \quad A = \{(2,-1),(3,5)\}$

19) $V = \mathbb{R}^2, \quad A = \{(1,0),(-1,1),(3,5)\}$

20) $V = \mathbb{R}^3, \quad A = \{(2,-1,3)\}$

21) $V = \mathbb{R}^3, \quad A = \{(1,-1,1),(-1,1,1)\}$

22) $V = \mathbb{R}^3, \quad A = \{(2,1,3),(0,0,0),(1,5,2)\}$

23) $V = \mathbb{R}^3, \quad A = \{(1,-1,-2),(2,1,1),(-1,0,3)\}$

24) $V = \mathbb{R}^3, \quad A = \{(2,-1,0),(-1,3,0),(3,5,0)\}$

25) $V = \mathbb{R}^3, \quad A = \{(1,2,-1),(1,0,0),(0,1,2),(3,-1,2)\}$

26) $V = \mathbb{R}^4, \quad A = \{(2,1,0,0),(1,0,2,1),(-1,2,0,-1)\}$

27) Determine o valor de k para que o conjunto $\{(-1,0,2),(1,1,1),(k,-2,0)\}$ seja LI.

28) Determine o valor de k para que o conjunto $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ k & 0 \end{bmatrix} \right\}$ seja LD.

29) Sejam v_1, v_2 e v_3 vetores de um espaço vetorial V, com $v_3 = 2v_1 - v_2$. Mostre que v_1, v_2 e v_3 são LD.

30) Mostre que se os vetores u, v e w são LI, então $u+v$, $u+w$ e $v+w$ também são LI.

Nos exercícios 31 a 38, verifique se o conjunto B é uma base do espaço vetorial V.

31) $V = \mathbb{R}^2, \quad B = \{(1,2),(-1,3)\}$

32) $V = \mathbb{R}^2, \quad B = \{(3,-6),(-4,8)\}$

33) $V = \mathbb{R}^2, \quad B = \{(0,0),(2,3)\}$

34) $V = \mathbb{R}^3, \quad B = \{(1,0,1),(0,-1,2),(-2,1,-4)\}$

35) $V = \mathbb{R}^3, \quad B = \{(1,1,-1),(2,-1,0),(3,2,0)\}$

36) $V = \mathbb{R}^3, \quad B = \{(2,1,-1),(-1,0,1),(0,0,1)\}$

37) $V = \mathbb{R}^3, \quad B = \{(1,2,3),(4,1,2)\}$

38) $V = \mathbb{R}^3, \quad B = \{(0,-1,2),(2,1,3),(-1,0,1),(4,-1,-2)\}$

39) Para que valores de k o conjunto $B = \{(1,k),(k,4)\}$ é base do $\mathbb{R}^2$?

40) Mostre que o conjunto $B = \{(0,1,1),(1,1,0),(1,2,1)\}$ não é base do $\mathbb{R}^3$.

Nos exercícios 41 a 46, determine a dimensão e uma base para o subespaço vetorial W.

41) $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, y = 3x\}$

42) $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, y = 5x \text{ e } z = 0\}$

43) $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x = 3y \text{ e } z = -y\}$

44) $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, 2x - y + 3z = 0\}$

45) $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M(2,2) \,/\, b = a + c \text{ e } d = c \right\}$

46) $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M(2,2) \,/\, a + d = b + c \right\}$

Nos exercícios 47 a 50, determine o vetor coordenada de $v = (6,2)$ em relação à base B do $\mathbb{R}^2$.

47) $B = \{(1,0),(0,1)\}$

48) $B = \{(0,1),(1,0)\}$

49) $B = \{(1,2),(2,1)\}$

50) $B = \{(3,0),(0,2)\}$

51) Sejam $A = \{(1,0),(0,1)\}$, $B = \{(-1,1),(1,1)\}$ e $C = \{(2,0),(0,2)\}$ bases do $\mathbb{R}^2$.

a) Calcule as matrizes de mudança de base M_A^B, M_B^A e M_C^A.

b) Escreva as coordenadas do vetor $v = (3,-2)$ em relação às bases A, B e C.

c) As coordenadas de um vetor u em relação à base B são dadas por $u_B = (4,0)$. Obtenha as coordenadas de u em relação às bases A e C.

52) Sejam $A = \{(1,0),(0,2)\}$, $B = \{(-1,0),(1,1)\}$ e $C = \{(-1,-1),(0,-1)\}$ bases do $\mathbb{R}^2$. Obtenha as matrizes de mudança de base M_A^B, M_B^C e M_A^C.

Gabarito

São subespaços vetoriais: 3), 4), 5), 6), 11), 12)

Não são subespaços vetoriais: 7), 8), 9), 10)

13-a) $w = 3u - v$ b) $k = 12$ 14) $v = 4v_1 + 3v_2 - 2v_3$

São LI: 18), 20), 21), 23), 26)

São LD: 17), 19), 22), 24), 25)

27) $k \neq -3$ 28) $k = 3$

São bases: 31), 35), 36)

Não são bases: 32), 33), 34), 37), 38)

39) $k \neq \pm 2$

41) $\dim W = 2$, $\{(1,3,0),(0,0,1)\}$

42) $\dim W = 1$, $\{(1,5,0)\}$

43) $\dim W = 1$, $\{(3,1,-1)\}$

44) $\dim W = 2$, $\{(1,2,0),(0,3,1)\}$

45) $\dim W = 2$, $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$

46) $\dim W = 3$, $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$

47) $v_B = (6,2)$ 48) $v_B = (2,6)$ 49) $v_B = \left(-\dfrac{2}{3}, \dfrac{10}{3}\right)$ 50) $v_B = (2,1)$

51-a) $M_A^B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $M_B^A = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$, $M_C^A = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$

b) $v_A = (3,-2)$, $v_B = \left(-\dfrac{5}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$, $v_C = \left(\dfrac{3}{2}, -1\right)$

c) $u_A = (-4,4)$, $u_C = (-2,2)$

52) $M_A^B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$, $M_B^C = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$, $M_A^C = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$