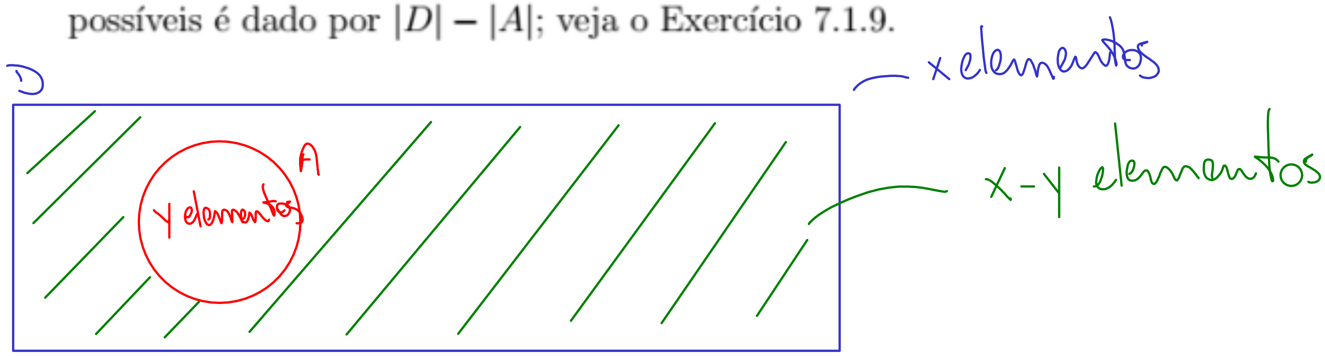
Alguns problemas de contagem não podem ser resolvidos como uma aplicação direta de apenas um dos princípios básicos apresentados: eles requerem uma combinação mais elaborada de ambos. É necessário ter em mente as técnicas a seguir.

- Quando as decisões possíveis podem ser caracterizadas como aquelas em um conjunto D mas excluindo aquelas de um subconjunto $A \subseteq D$. Neste caso o número de decisões possíveis é dado por $|D| - |A|$; veja o Exercício 7.1.9.

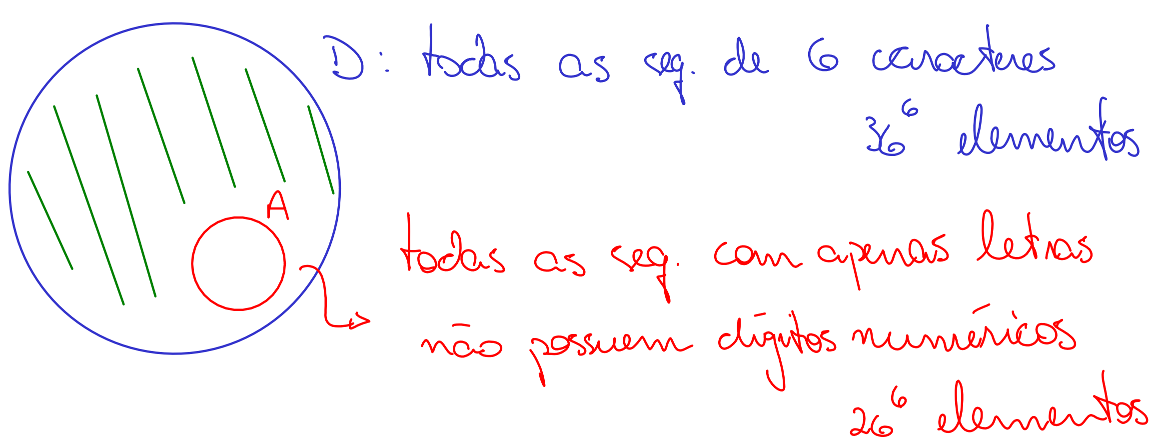


Exercício 7.1.9. Em um sistema computacional cada usuário deve ter uma senha de 6 caracteres alfanuméricos, onde um caracter alfanumérico utiliza uma das 26 letras do alfabeto latino ou um dos 10 dígitos numéricos. Mais ainda, cada senha deve conter pelo menos um dígito numérico. Quantas senhas diferentes são possíveis neste sistema?

Seja P6 o conjunto de senhas de 6 caracteres conforme pedido no enunciado.

Seja D o conjunto de senhas de seis caracteres sem nenhuma restrição é descrito pela escolha dos 6 caracteres, onde cada um deles tem 26+10=36 possibilidades. Segue que D possui 36^6 elementos.

Seja A o conjunto de senhas que não possui nenhum dígito numérico. O total destas senhas é descrito pela escolha dos 6 caracteres, onde cada um deles pode ser apenas uma letra. O total de elementos do conjunto A é, portanto, de 26^6 elementos.



O número de elementos de P6 é portanto 36^6 - 26^6 = 1.867.866.560.

- Quando as decisões possíveis podem ser caracterizadas como a união daquelas em conjuntos D_1, D_2 disjuntos, fornecendo um número $|D_1| + |D_2|$ de decisões, mas a contagem de elementos de D_1 e D_2 é feita usando o princípio multiplicativo e/ou usando o item acima; veja o Exercício 7.1.10.

Exercício 7.1.10. Resolva o Exercício 7.1.9 no caso em que a senha do sistema computacional deve ter de 6 a 8 caracteres alfanuméricos.

As senhas descritas no enunciado com 6 caracteres definem o conjunto P6 do exercício anterior, que possui $36^6 - 26^6$ elementos.

Analogamente, as senhas com 7 e 8 caracteres com a mesma propriedade totalizam, respetivamente, $36^7 - 26^7$ e $36^8 - 26^8$ elementos.

O total de senhas de 6 a 8 caracteres com essa propriedade é dado pelo número de elementos na união dos conjuntos P6, P7 e P8, que possuem interseção vazia:

$(36^6 - 26^6) + (36^7 - 26^7) + (36^8 - 26^8)$.

Exercício 7.1.11. Quantos são os números pares com três dígitos distintos?

Para k = 0, 2, 4, 6, 8, seja Pk o conjunto de números pares de três dígitos distintos que termina com o dígito k. Um tal número par pode ser descrito pelo processo de decisão de cada um dos seus três dígitos.

No caso do conjunto P0, temos já o último dígito definido e igual a zero. Restam 9 opções para o dígito da centena e 8 opções para o dígito das dezenas, já que dois dígitos já foram usados e não podem ser escolhidos aqui. Logo P0 possui 9*8 = 72 elementos.

$\underline{9}\quad \underline{8}\quad \underline{1}$ → dígito 0

$\underline{8}\quad \underline{8}\quad \underline{1}$ → dígito 2

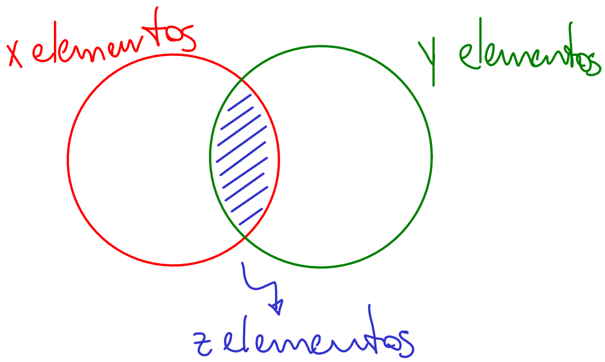
No caso do conjunto P2, temos o último dígito já definido e igual a dois. Para o dígito das centenas não temos a opção do número zero, logo temos apenas 8 opções. Para o algarismo da dezena temos a opção do dígito zero e não temos como opção os dois dígitos já usados, logo P2 possui 8*8 = 64 elementos.

A contagem do número de elementos dos conjuntos P4, P6 e P8 é a mesma do conjunto P2, logo eles possuem 64 elementos também. Segue o total de números pares com três dígitos distintos é

72 + 64 + 64 + 64 + 64 = 328.

Princípio da Inclusão-Exclusão

Suponha que uma decisão $\mathcal{D}$ possa ser tomada de x formas diferentes em um conjunto D_1 ou de y formas diferentes em um conjunto D_2, onde D_1 e D_2 são conjuntos com interseção não-vazia. Suponha que $|D_1 \cap D_2| = z$. Então o número de maneiras de tomar a decisão $\mathcal{D}$ é $x + y - z$.



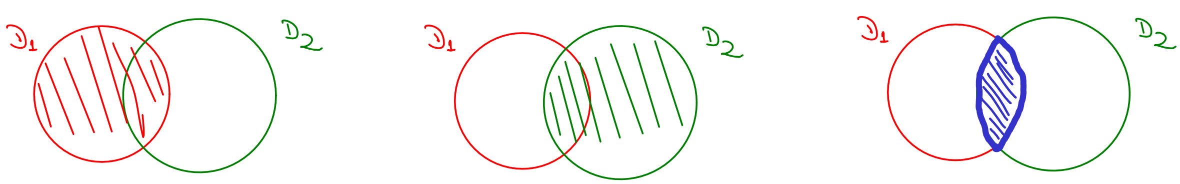
união com $x+y-z$ elementos

Exercício 7.1.12. Quantos cadeias de bits de extensão oito começam com um bit 1 ou terminam com dois bits 00?

Sejam:
- D1 o conjunto de cadeias de oito bits que começam com o bit 1.
- D2 o conjunto de cadeias de oito bits que terminam com dois bits zero: 00.

O conjunto de cadeias de bits do enunciado pode ser descrito como a união destes conjuntos.

Princípio da Inclusão-Exclusão: $|D_1 \cup D_2| = |D_1| + |D_2| - |D_1 \cap D_2|$



O número de elementos do conjunto D1 é descrito pelo número de opções na escolha de cada um dos sete últimos dígitos, que totaliza 2^7 = 128 elementos.

As cadeias de oito bits do conjunto D2, analogamente, são descritas pela escolha dois seis primeiros dígitos da cadeia. Logo D2 possui 2^6 = 64 elementos.

O número de elementos da interseção é dado pelo número de opções para a escolha dos cinco dígitos intermediários: do segundo ao antepenúltimo dígito.
Essa interseção possui 2^5=32 elementos.

Segue o número de cadeias de oito bits do enunciado é 128 + 64 - 32 = 160.

Permutações, Arranjos e Combinações

Teorema 7.1.15. Seja n um inteiro positivo e seja $P(n)$ o número de maneiras distintas que podemos organizar n objetos em uma fila ordenada. Então,

$$P(n) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1. \quad = n!$$

Note que no enunciado acima a ordem em que os objetos são escolhidos importa.

A expressão acima é obtida pelo princípio multiplicativo, considerando que temos n possibilidades para a primeira posição da fila e, uma vez escolhido esse elemento, temos n-1 possibilidades para o segundo elemento da fila.

Exercício 7.1.16. De quantas maneiras possíveis podemos embaralhar um baralho de 52 cartas?

O número de maneiras possíveis de embaralhar esse baralho é o número de permutações das 52 cartas: P(52) = 52!.

Exercício 7.1.17 (i) Quantos são os anagramas da palavra "COBRA"?
(ii) Quantos são os anagramas da palavra "COBRA" que começam por vogal?

O número de anagramas da palavra COBRA coincide com o número de permutações de 5 elementos, que é P(5) = 5! = 120.

Se o anagrama deve começar com vogal, temos 2 opções para a primeira letra do anagrama. Para as demais posições temos 4, 3, 2 e 1 opções, logo o total de tais anagramas é 2*4! = 48.

Exercício 7.1.18 Quantos são os anagramas da palavra "CASA"?

O número de permutações de quatro elementos é P(4) = 24. No entanto, temos duas letras A que são idênticas na composição dos anagramas.

Se representarmos, a título de argumentação, as quatro letras como C, A1, S e A2, observamos que para cada uma das 24 permutações temos dois anagramas idênticos, por exemplo

A1 A2 C S
e
A2 A1 C S.

A1 A2 C S

A A C S

A2 A1 C S

Segue que o número de anagramas é dado por 24/2 = 12.

Exercício 7.1.19 Quantos são os anagramas da palavra "SUCESSO"?

Exercício!

7! permutações → $S_1 S_2 S_3$

3 letras S

Exercício 7.1.20. A final da prova de atletismo de 100m rasos das Olimpíadas de 2016 no Rio de Janeiro foi disputada por oito atletas. Quantos pódios possíveis de 3 atletas podiam ser compostos por estes atletas?

Podemos compor um pódio com os atletas com três decisões: a escolha de um atleta para cada uma das posições do pódio.

- Para a primeira poosição temos 8 possibilidades.
- Para a segunda posição temos 7 possibilidades.
- Para a terceira posição temos 6 possibilidades.

Segue que o número total de pódios possíveis é 8*7*6 = 336.

Em alguns problemas de combinatória devemos analisar filas ordenadas de r objetos selecionados a partir de um conjunto com n objetos, onde $n \geq 1$ e $1 \leq r \leq n$; tais filas são chamadas de *arranjos* ou r-*permutações*. Por exemplo: a final da prova de atletismo de 100m rasos das Olimpíadas de 2016 no Rio de Janeiro foi disputada por oito atletas. O pódio composto pelos atletas classificados em primeiro, segundo e terceiro lugar na prova representa uma fila ordenada de 3 objetos (atletas) a partir de um conjunto com 8 objetos (atletas).

Teorema 7.1.19. Sejam n,r inteiros positivos tais que $1 \leq r \leq n$. Seja $P(n,r)$ o número de r-permutações de um conjunto com n elementos. Então,

$$P(n,r) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-r+1). = \frac{n!}{(n-r)!}$$

r-permutações de n elementos também são chamadas de arranjos de n elementos r a r.

A expressão acima também pode ser obtida pelo princípio multiplicativo.

Exercício 7.1.20. A final da prova de atletismo de 100m rasos das Olimpíadas de 2016 no Rio de Janeiro foi disputada por oito atletas. Quantos pódios possíveis de 3 atletas podiam ser compostos por estes atletas?

O número de pódios possíveis pode ser contado como o número de 3-permutações de 8 elementos, ou seja, o número de arranjogs 3 a 3 de 8 elementos:

$$P(8,3) = \frac{8!}{5!} = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336.$$

Outro problema recorrente em combinatória consiste em enumerar de quantas maneiras podemos selecionar um *subconjunto* de r elementos de um conjunto de n elementos, isto é, uma coleção *não-ordenada* de r objetos. Tal situação se apresenta quando desejamos formar uma comissão de 2 alunos em uma turma de graduação com 5 alunos; esta comissão é uma coleção não-ordenada de alunos, isto é, não existe distinção entre os integrantes da comissão. Tal subconjunto é chamado de uma *r-combinação*.

Teorema 7.1.21. Sejam n,r inteiros positivos tais que $1 \leq r \leq n$. Seja $C(n,r)$ o número de r-combinações de um conjunto com n elementos. Então,

$$C(n,r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

Contagem do número de conjuntos de r elementos escolhidos de um universo com n elementos possíveis.

Exercício 7.1.22. Em um jogo de buraco um jogador recebe 11 cartas inicialmente; este conjunto de cartas é chamado de uma "mão". Quantas "mãos" de 11 cartas podem ser retiradas de um baralho de 52 cartas?

O número de mãos de 11 cartas que podem ser formadas com um baralho de 52 cartas é o número de combinações de 52 elementos 11 a 11:

$$C(52, 11) = \frac{52!}{11!(52-11)!} = \frac{52!}{11!\,41!}$$

$\underset{1^{a}\text{ carta}}{\underline{52}}$ $\underset{2^{a}\text{ carta}}{\underline{51}}$ ... $\underset{11^{a}\text{ carta}}{\underline{42}}$ $\underset{12^{a}\text{ carta}}{\underline{41}}$ $\underset{13^{a}\text{ carta}}{\underline{40}}$ ... $\underset{52^{a}\text{ carta}}{\underline{1}}$

11! ordenações: não importa

41! ordenações: não importa

52! formas de embaralhar

Exercício 7.1.23. Uma empresa possui 8 funcionários: 5 homens e 3 mulheres. Quantas comissões podem ser nesta empresa formadas com 2 homens e 2 mulheres?

O número de escolhas possíveis de 2 homens de um total de 5 homens para a comissão pode ser contado com combinações, já que a ordem deles não importa: é simplesmente um conjunto de 2 homens para a comissão:

$$C(5,2) = \frac{5!}{2!\,3!} = \frac{5.4.3!}{2!\,3!} = \frac{20}{2} = 10.$$

Analogamente, o número de escolhas possíveis de 2 mulheres do total de 3 mulheres é

$$C(3,2) = \frac{3!}{2!\,1!} = \frac{6}{2} = 3.$$

A montagem da comissão pode ser interpretada como a tomada de duas decisões em sequência:
- D1 a escolha dos 2 homens da comissão;
- D2 a escolha das 2 mulheres da comissão.

Segue do princípio multiplicativo que temos um total de 10*3 = 30 comissões possíveis neste cenário.