**Indução completa.** A indução completa representa um método para demonstrações de teoremas que é muito semelhante à indução matemática vista acima. A indução completa é utilizada em teoremas do mesmo tipo, como $\forall n P(n)$ onde o domínio de discurso é um conjunto como $\{1,2,3,\ldots\}$. Consideramos dois passos, como na indução matemática.

(i) *Passo base.* Demonstrar que $P(n)$ é verdadeira para o menor inteiro do conjunto em questão; no exemplo aqui considerado devemos demonstrar que $P(1)$ é verdadeira.

(ii) *Passo de indução.* Supomos que $P(1), \ldots, P(k)$ é verdadeira para algum inteiro $k \geq 1$ e provamos, partindo desta hipótese, que $P(k+1)$ é verdadeira.

**Exemplo 6.1.6.** Mostre que se $n$ é um inteiro maior que 1 então $n$ se escreve como o produto de números primos (possivelmente de apenas um número primo).

Seja $P(n)$ a afirmação "$n$ é primo ou $n$ é produto de primos"

O domínio do teorema é $\{2, 3, 4, \ldots\}$.

1 Passo base. Para $n = 2$ temos que $P(2)$ é verdadeiro pois $n = 2$ é primo.

2 Passo de indução completa. Suponha que $P(2), \ldots, P(k)$ são verdadeiros. Devemos provar que $P(k+1)$ é verdadeiro. Temos duas possibilidades: $k+1$ é primo ou $k+1$ é composto.

Se $k+1$ é primo, então $P(k+1)$ é verdadeiro, ok.

Se $k+1$ é composto, então $k+1$ tem um divisor $a$ tal que $1 < a < k+1 \Leftrightarrow 2 \leq a \leq k$ e $k+1 = a \cdot b$, onde $b \in \mathbb{Z}$. Logo $2 \leq b \leq k$. Segue da hipótese de indução que $P(a)$ e $P(b)$ são verdadeiros, então $k+1 = ab$ é produto de primos. Segue que $P(k+1)$ é verdadeiro, como gostaríamos. $\blacksquare$ =)

# Recursão

A definição de um objeto é dita recursiva se ela utiliza o próprio objeto em sua definição.

Exemplo. Considere a função f(n) = 2n, para n inteiro e n>=0.

A definição f(n)=2n é direta, no sentido de que podemos calcular f(n) diretamente a partir do valor de n.

$$f(3) = 2 \cdot 3 = 6.$$

Por outro lado, podemos definir f(n) a partir do valor de f(n-1):

Temos $f(n) = 2n$, logo $f(n-1) = 2(n-1) = 2n-2$.

Segue que

$$f(n) = 2n-2 + 2 = f(n-1)+2.$$

Este é o passo recursivo da definição recursiva: $f(n) = f(n-1)+2$.

Note no entanto que, para calcular $f(4)$, temos

$$f(4) = f(3)+2 = f(2) + 2 + 2 = f(1) + 2 + 2 + 2$$
$$= f(0) + 2 + 2 + 2 + 2.$$

Precisamos definir ainda o passo base, que neste caso é $f(0) = 0$. Segue que $f(4) = f(0) + 8 = 0 + 8 \iff f(4) = 8$.

$f(4) = 2 \cdot 4$, ou $f(4) = f(3) + 2$

Mais precisamente, uma função $f$ definida recursivamente em um subconjunto do conjunto dos naturais é definida através de dois passos, semelhantes àqueles de uma demonstração por indução.

(i) *Passo base*, onde se especifica o valor da função $f$ no menor inteiro de seu domínio.

(i) *Passo recursivo*, onde se especifica o valor $f(n)$ a partir do valor da função em inteiros menores que $n$.

Dizemos que uma definição feita dessa maneira é uma *definição indutiva* ou uma *recursividade*.

Mais precisamente, uma função $f$ definida recursivamente em um subconjunto do conjunto dos naturais é definida através de dois passos, semelhantes àqueles de uma demonstração por indução.

(i) *Passo base*, onde se especifica o valor da função $f$ no menor inteiro de seu domínio.

(i) *Passo recursivo*, onde se especifica o valor $f(n)$ a partir do valor da função em inteiros menores que $n$.

Dizemos que uma definição feita dessa maneira é uma *definição indutiva* ou uma *recursividade*.

**Exemplo 6.2.1.** Considere a função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por $f(n) = 5n + 2$. $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$

Considere também a função g(n) = 5n + 8.

Função $f(n) = 5n+2$, $n \in \mathbb{N}$.

Passo recursivo: temos $f(n-1) = 5(n-1)+2 = 5n-3$, logo

$$f(n) = f(n-1) + 5, \quad \text{para } n \geq 1.$$

Passo base: para $n=0$ temos $f(0) = 2$.

Função $g(n) = 5n+8$, $n \in \mathbb{N}$.

Passo recursivo: temos $g(n-1) = 5(n-1)+8 = 5n+3$, logo

$$g(n) = g(n-1) + 5, \quad \text{para } n \geq 1.$$

Passo base: para $n=0$ temos $g(0) = 8$.

---

Definição de uma função recursiva em pseudocódigo.

```
def g(n):        # definição recursiva de g(n) = 5n+8.
    g(n) = g(n-1) + 5
```

$g(5) \longrightarrow g(5) = g(4) + 5$

$\hookrightarrow g(4) = g(3) + 5$

$\hookrightarrow g(3) = g(2) + 5$

$\hookrightarrow g(2) = g(1) + 5$

$\hookrightarrow g(1) = g(0) + 5$

Definição de uma função recursiva em pseudocódigo.

def $g(n)$:  # definição recursiva de $g(n) = 5n+8$, $n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$

if $n \geq 1$: $g(n) = g(n-1) + 5$

if $n = 0$: $g(n) = 8$

$g(5) \longrightarrow g(5) = g(4) + 5$

$\hookrightarrow g(4) = g(3) + 5$

$\hookrightarrow g(3) = g(2) + 5$

$\hookrightarrow g(2) = g(1) + 5$

$\hookrightarrow g(1) = g(0) + 5$

$g(0) = 8$.

$g(5) = 33 \leftarrow g(4) = 28 \leftarrow g(3) = 23 \leftarrow g(2) = 18 \leftarrow g(1) = 13 \hookleftarrow$

**Exemplo 6.2.2.** Dê uma definição recursiva de $a_n = x^n$, $n \geq 0$, onde $x \in \mathbb{Z}$ é dado e constante, por exemplo $x = 5$.

Função $f(n) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, com $x$ constante.

Passo recursivo: temos $f(n-1) = x^{n-1}$, logo

$$f(n) = f(n-1) \cdot x \quad , \quad \text{para } n \geqslant 1.$$

Passo base: para $n=0$ temos $f(0) = 1$.

**Exercício 6.2.4.** Dê uma definição recursiva para $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot 2 \cdot 1$, $n \geq 1$.

Função $f(n) = n!$, $n \in \mathbb{N}$.

① $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1$

$\Rightarrow 4! = 3! \cdot 4$

Passo recursivo: temos $f(n-1) \overset{①}{=} (n-1)!$,

$$f(n) = f(n-1) \cdot n \quad , \quad \text{para } n \geqslant 2.$$

Passo base: para $n=1$ temos $f(1) = 1$.

---

Definição de uma função fatorial em pseudocódigo.

```
def g(n):          # definição recursiva de g(n) = n!, n ∈ {1,2,3,...}.
    if n>=2: g(n) = g(n-1) · n
    if n = 1 : g(n) = 1
```

**Sequência de Fibonacci.** Possivelmente a definição recursiva mais famosa da matemática é a da *sequência de Fibonacci*, definida da seguinte maneira:

$$f_0 = 0, \quad f_1 = 1 \quad \text{e} \quad f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \quad \text{para } n \geq 2.$$

https://www.youtube.com/watch?v=XjOUoLfoLo8

$f_0 = 0$ $\qquad f_2 = f_1 + f_0 = 1 + 0 = 1$ $\qquad f_4 = 2 + 1 = 3$

$f_1 = 1$ $\qquad f_3 = f_2 + f_1 = 1 + 1 = 2$ $\qquad f_5 = 3 + 2 = 5.$

Considerando a razão

$\frac{f_2}{f_1} = \frac{1}{1} = 1 \qquad \frac{f_3}{f_2} = \frac{2}{1} = 2 \qquad \frac{f_4}{f_3} = \frac{3}{2} = 1{,}5 \qquad \frac{f_5}{f_4} = \frac{5}{3} = 1{,}666\ldots$

É possível provar que $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618.$

**Exemplo 6.2.5.** Seja $f_n, n \geq 0$, a sequência de Fibonacci. Prove que, para $\boxed{n \geq 5}$, (*)

$$f_n = 3f_{n-2} - f_{n-4}.$$

$f_0 = 0, \; f_1 = 1$

$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}.$

Demonstramos o teorema por indução completa.

Os primeiros termos da sequência são

$f_0 = 0, \quad f_1 = 1, \quad f_2 = 1 + 0 = 1, \quad f_3 = 1 + 1 = 2, \quad f_4 = 2 + 1 = 3,$

$f_5 = 3 + 2 = 5, \quad f_6 = 5 + 3 = 8, \quad f_7 = 8 + 5 = 13.$

① Passo base.

Para $n=5$ temos $f_5 = 3f_3 - f_1 = 3\cdot 2 - 1 = 5$

Para $n=6$ temos $f_6 = 3f_4 - f_2 = 3\cdot 3 - 1 = 8$,

ok!

② Passo de indução. Suponha que o teorema é válido para $n = 5, 6, \ldots, k$, onde $k \geq 8$.

Para $n = k$, por exemplo, temos $f_k = 3f_{k-2} - f_{k-4}$.

Devemos provar que o teorema vale para $n = k+1$, isto é,

$$f_{k+1} = 3f_{k+1-2} - f_{k+1-4} \Longleftrightarrow f_{k+1} = 3f_{k-1} - f_{k-3}.$$

Temos da definição de sequência de Fibonacci que

$$f_{k+1} = f_k + f_{k-1},$$

onde, pela hipótese de indução temos

$$f_k = 3f_{k-2} - f_{k-4} \quad e \quad f_{k-1} = 3f_{k-3} - f_{k-5}$$

logo

$$f_{k+1} = f_k + f_{k-1} = 3f_{k-2} - f_{k-4} + 3f_{k-3} - f_{k-5} =$$

$$= 3(f_{k-2} + f_{k-3}) - (f_{k-4} + f_{k-5})$$

$$= 3f_{k-1} - f_{k-3},$$

$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$

$n = k-1: \quad f_{k-1} = f_{k-2} + f_{k-3}$

como gostaríamos ■

**Exemplo 6.2.6.** Em uma universidade dois alunos, João e José, muito amigos um do outro, resolvem dar uma festa. Eles decidem que eles próprios, João e José, estão convidados e, além disso, está convidado qualquer aluno da universidade que faz alguma disciplina com algum convidado da festa. Podemos descrever a ideia de João e José como uma definição recursiva: o conjunto $A$ de alunos convidados à festa é definido da seguinte maneira.

Definição recursiva do conjunto A de convidados da festa de João e José.

Passo base: João e José estão convidados, ou seja, João e José pertencem a A.

Passo recursivo: se x faz disciplina com um convidado y da festa, então x está convidado para a festa.

**Exemplo 6.2.7.** Considere o conjunto $S$ de números inteiros definido da seguinte maneira.

Passo base: $3 \in S$.

Passo recursivo: se $x, y \in S$, então $x + y \in S$.

Temos $3 \in S$.

Se $x = 3$ e $y = 3$, então $x + y = 6 \in S$.

Se $x = 3$ e $y = 6$, então $x + y = 9 \in S$.

Se $x = 3$ e $y = 9$, então $x + y = 12 \in S$.

É possível provar que $S = \{3, 6, 9, 12, \ldots\} = \{n = 3k : k \in \mathbb{N} \text{ e } k \geq 1\}$

A combinatória enumerativa se concentra na contagem do número de objetos satisfazendo uma certa propriedade, quando estes objetos apresentam característica discretas ou combinatórias.

**Princípio Multiplicativo da Contagem**

Suponha que uma decisão $\mathcal{D}$ possa ser dividida como a tomada de duas decisões $\mathcal{D}_1$ e $\mathcal{D}_2$ em sequência. Se há $x$ maneiras de tomar a decisão $\mathcal{D}_1$ e $y$ maneiras de tomar a decisão $\mathcal{D}_2$, então existem $xy$ maneiras de tomar a decisão $\mathcal{D}$.

**Exercício 7.1.1.** Amanda deseja fazer um pedido de uma salada e um prato principal em um restaurante. Para a salada o restaurante oferece as opções salada Caesar e salada oriental e para o prato principal há três opções: filé de frango grelhado, lasanha ao quatro queijos e panqueca de ricota. De quantas maneiras Amanda pode fazer seu pedido no restaurante?

**Exercício 7.1.2.** Ao se cadastrar em uma página de internet, o usuário deve criar uma senha de 4 caracteres numéricos. Determine quantas senhas diferentes podem ser criadas nesta página.

**Exercício 7.1.3.** Uma universidade decidiu criar etiquetas de patrimônio para seus itens contendo uma letra do alfabeto latino (26 letras) e dois números inteiros entre 0 e 9. Quantas etiquetas diferentes podem ser fabricadas?

**Exercício 7.1.4.** Quantas sequências de 8 bits de comprimento existem?

**Exercício 7.1.5.** Sejam $A$ um conjunto com 3 elementos e $B$ um conjunto com 4 elementos.

(i) Quantas funções $f\colon A \to B$ existem?

(ii) Quantas funções injetoras $f\colon A \to B$ existem?

**Exercício 7.1.6.** Sejam $A$ um conjunto com $n$ elementos. Quantos subconjuntos $A$ possui?

**Princípio Aditivo da Contagem**

Suponha que uma decisão $\mathcal{D}$ possa ser tomada de $x$ formas diferentes em um conjunto $D_1$ ou de $y$ formas diferentes em um conjunto $D_2$, onde $D_1$ e $D_2$ são conjuntos com interseção vazia. Então existem $x + y$ maneiras de tomar a decisão $\mathcal{D}$.

**Exercício 7.1.7.** Suponha que o Diretório Central de Estudantes (DCE) de uma universidade deva escolher um aluno de Engenharia para integrar uma comissão. Sabendo que a universidade possui cursos de Engenharia Ambiental e de Alimentos, e que esses cursos possuem respectivamente 242 e 290 alunos, determine quantas escolhas diferentes o DCE desta universidade pode fazer para este aluno.

**Exercício 7.1.8.** Um aluno de Matemática Discreta deve escolher um exercício para resolver em sala no quadro negro valendo 1,0 ponto extra em sua primeira prova. Este aluno pode escolher um dos exercícios das quatro listas foram passadas até aquele momento. Sabendo que as listas possuem respectivamente $12, 9, 18$ e $17$ exercícios, determine de quantas maneiras o aluno pode fazer a escolha do exercício.

Alguns problemas de contagem não podem ser resolvidos como uma aplicação direta de apenas um dos princípios básicos apresentados: eles requerem uma combinação mais elaborada de ambos. É necessário ter em mente as técnicas a seguir.

- Quando as decisões possíveis podem ser caracterizadas como aquelas em um conjunto $D$ mas excluindo aquelas de um subconjunto $A \subseteq D$. Neste caso o número de decisões possíveis é dado por $|D| - |A|$; veja o Exercício 7.1.9.

**Exercício 7.1.9.** Em um sistema computacional cada usuário deve ter uma senha de 6 caracteres alfanuméricos, onde um caracter alfanumérico utiliza uma das 26 letras do alfabeto latino ou um dos 10 dígitos numéricos. Mais ainda, cada senha deve conter pelo menos um dígito numérico. Quantas senhas diferentes são possíveis neste sistema?

- Quando as decisões possíveis podem ser caracterizadas como a união daquelas em conjuntos $D_1, D_2$ disjuntos, fornecendo um número $|D_1| + |D_2|$ de decisões, mas a contagem de elementos de $D_1$ e $D_2$ é feita usando o princípio multiplicativo e/ou usando o item acima; veja o Exercício 7.1.10.

**Exercício 7.1.10.** Resolva o Exercício 7.1.9 no caso em que a senha do sistema computacional deve ter de 6 a 8 caracteres alfanuméricos.

**Exercício 7.1.11.** Quantos são os números pares com três dígitos distintos?

**Princípio da Inclusão-Exclusão**

Suponha que uma decisão $\mathcal{D}$ possa ser tomada de $x$ formas diferentes em um conjunto $D_1$ ou de $y$ formas diferentes em um conjunto $D_2$, onde $D_1$ e $D_2$ são conjuntos com interseção não-vazia. Suponha que $|D_1 \cap D_2| = z$. Então o número de maneiras de tomar a decisão $\mathcal{D}$ é $x + y - z$.

**Exercício 7.1.12.** Quantos cadeias de bits de extensão oito começam com um bit 1 ou terminam com dois bits 00?