Universidade Tecnológica Federal do Paraná
UTFPR - Campus Apucarana
Departamento Acadêmico de Matemática

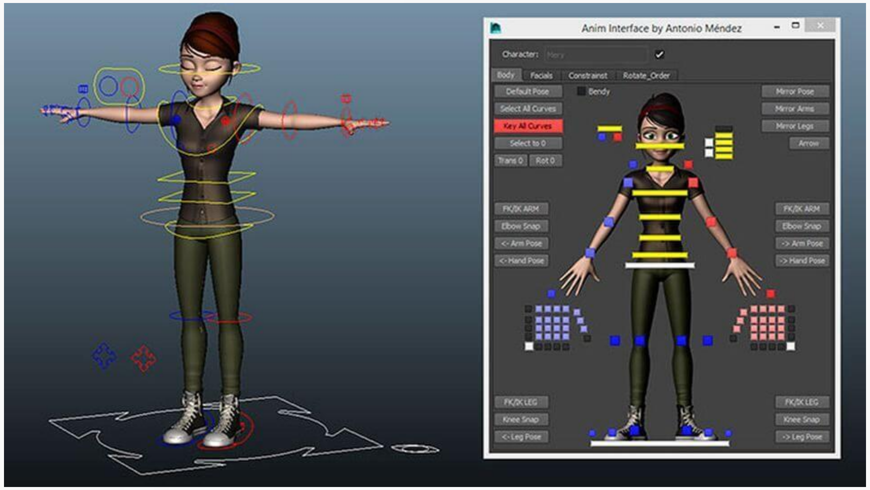
Atividade: Transformações geométricas

Disciplina: Álgebra Linear

Professor: Alisson C. Reinol

Introdução

- Um modelo 3D de um jogo ou de uma animação é formado por uma malha de pontos 3D.



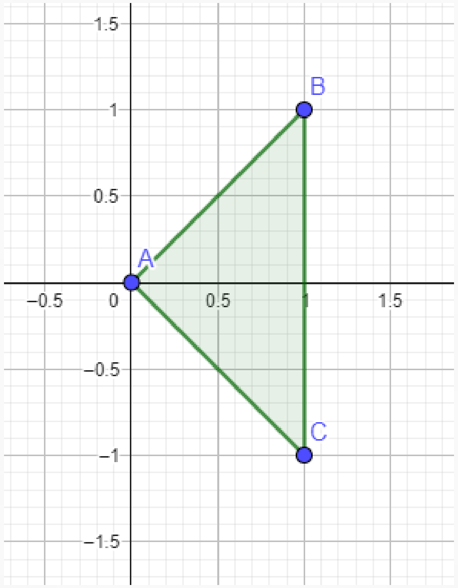
- Como fazer o objeto ficar animado: se movimentar, andar, girar, aumentar e diminuir de tamanho? Tudo isso pode ser feito utilizando transformações geométricas

- Um desenho no plano pode ser armazenado no computador como um conjunto de vértices. Os vértices podem então ser mostrados e conectados por retas para produzir o desenho.

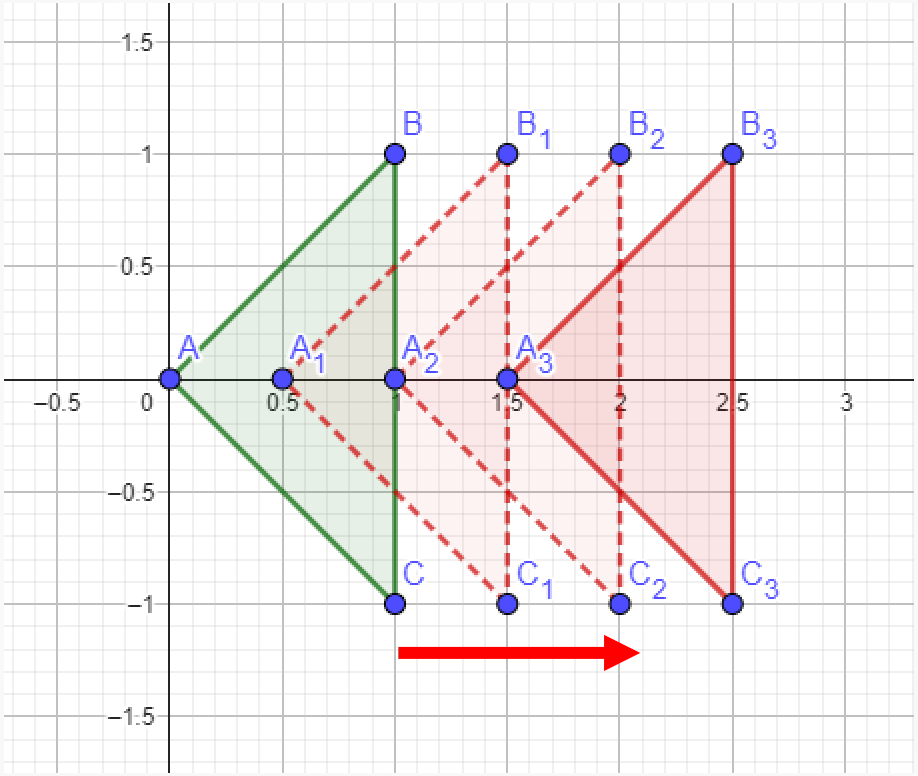
- Entretanto, em computação gráfica, é desejável efetuar todas as transformações através de multiplicações matriciais.

- Por exemplo, para gerar um triângulo com vértices $(0,0)$, $(1,1)$ e $(1,-1)$, armazenamos as coordenadas dos pontos como colunas de uma matriz:

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$



- Podemos transformar uma figura mudando a posição dos vértices e então redesenhando a figura. Vendo uma sucessão de tais figuras produzirá o efeito de uma animação



Transformações geométricas no plano

- As quatro transformações geométricas primárias usadas em gráficos computadorizados são as seguintes:

a) Dilatações e contrações

$$L(x, y) = \alpha\ (x, y)$$

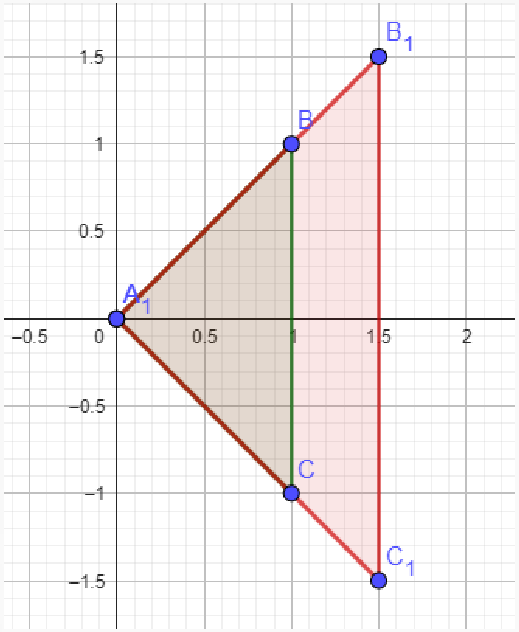
$\alpha > 1$: dilatação

$0 < \alpha < 1$: contração

O operador L é representado pela matriz: $\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}$

Exemplo: Dilatação do triângulo com vértices $(0,0)$, $(1,1)$ e $(1,-1)$ por um fator 1,5.

$L(x, y) = 1{,}5 \cdot (x, y)$



$L(0{,}0) = 1{,}5 \cdot (0{,}0) = (0{,}0)$

$L(1{,}1) = 1{,}5 \cdot (1{,}1) = (1{,}5; 1{,}5)$

$L(1, -1) = 1{,}5 \cdot (1, -1) = (1{,}5; -1{,}5)$

Vértices: $(0{,}0), (1{,}5; 1{,}5), (1{,}5; -1{,}5)$

b) Reflexões em relação a um eixo

$L_x(x, y) = (x, -y)$ - reflexão em relação ao eixo x

$L_y(x, y) = (-x, y)$ - reflexão em relação ao eixo y

$L_0(x, y) = (-x, -y)$ − reflexão em relação à origem

Matriz de L_x: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

Matriz de L_y : $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Matriz de L_0 : $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

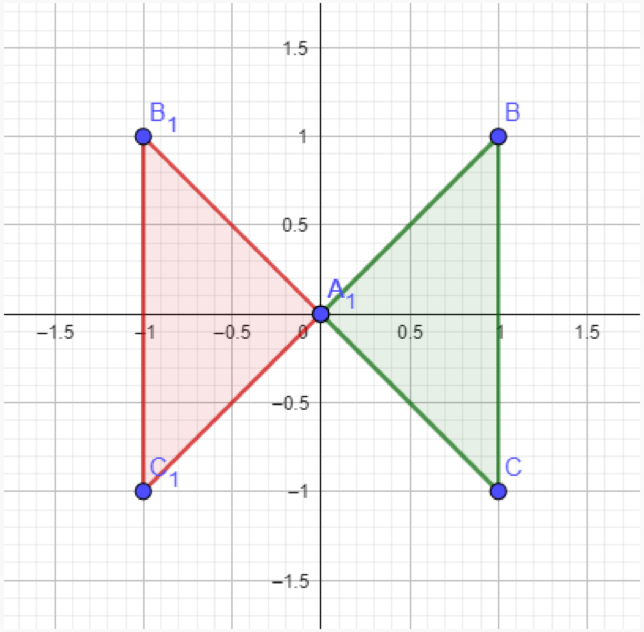
Exemplo: Reflexão do triângulo com vértices $(0{,}0)$, $(1{,}1)$ e $(1,-1)$ em relação ao eixo y.

$L_y(x,y) = (-x,y)$

$L_y(0{,}0) = (0{,}0)$

$L_y(1{,}1) = (-1{,}1)$

$L_y(1,-1) = (-1,-1)$



Vértices: $(0{,}0), (-1{,}1), (-1,-1)$

c) Rotações

Seja R a transformação que gira um vetor de um ângulo θ em relação à origem no sentido anti-horário. Então,

$$R(x,y) = (x \cdot \cos\theta - y \cdot \operatorname{sen}\theta\,, x \cdot \operatorname{sen}\theta + y \cdot \cos\theta)$$

Matriz de R: $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

R é uma transformação linear.

Exemplo: Rotacione o triângulo com vértices $(0,0)$, $(1,1)$ e $(1,-1)$ em $60°$ no sentido anti-horário.

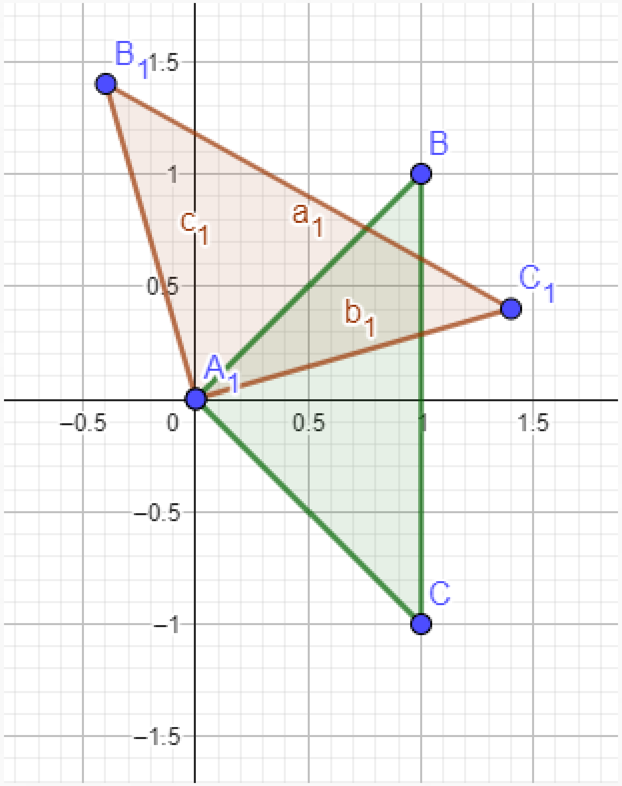
$$R(x,y) = (x \cdot \cos 60° - y \cdot \operatorname{sen} 60°\,, x \cdot \operatorname{sen} 60° + y \cdot \cos 60°) = \left(\frac{1}{2}\,x - \frac{\sqrt{3}}{2}\,y, \frac{\sqrt{3}}{2}\,x + \frac{1}{2}\,y\right)$$

$$R(0,0) = \left(\frac{1}{2} \cdot 0 - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 0, \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 0\right) = (0,0)$$

$$R(1,1) = \left(\frac{1}{2} \cdot 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 1, \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1\right) \approx (-0{,}37\,;1{,}37)$$

$$R(1,-1) = \left(\frac{1}{2} \cdot 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (-1), \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot (-1)\right) \approx$$

$$\approx (1{,}37\,;0{,}37)$$



Vértices: $(0,0)$, $(-0{,}37\,;1{,}37)$, $(1{,}37; 0{,}37)$

d) Translações

$$T(x,y) = (x+a, y+b)$$

Translação de a unidades para a direita (se $a > 0$) ou esquerda (se $a < 0$) e translação de b unidades para cima (se $b > 0$) ou para baixo (se $b < 0$).

Se $(a,b) \neq (0,0)$, então T não é uma transformação linear (*verifique!*)

Logo, T não pode ser representada por uma matriz 2×2. Uma forma de contornar este problema é utilizar *coordenadas homogêneas*.

$$(x,y) \leftrightarrow (x,y,1)$$

Matriz de T: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

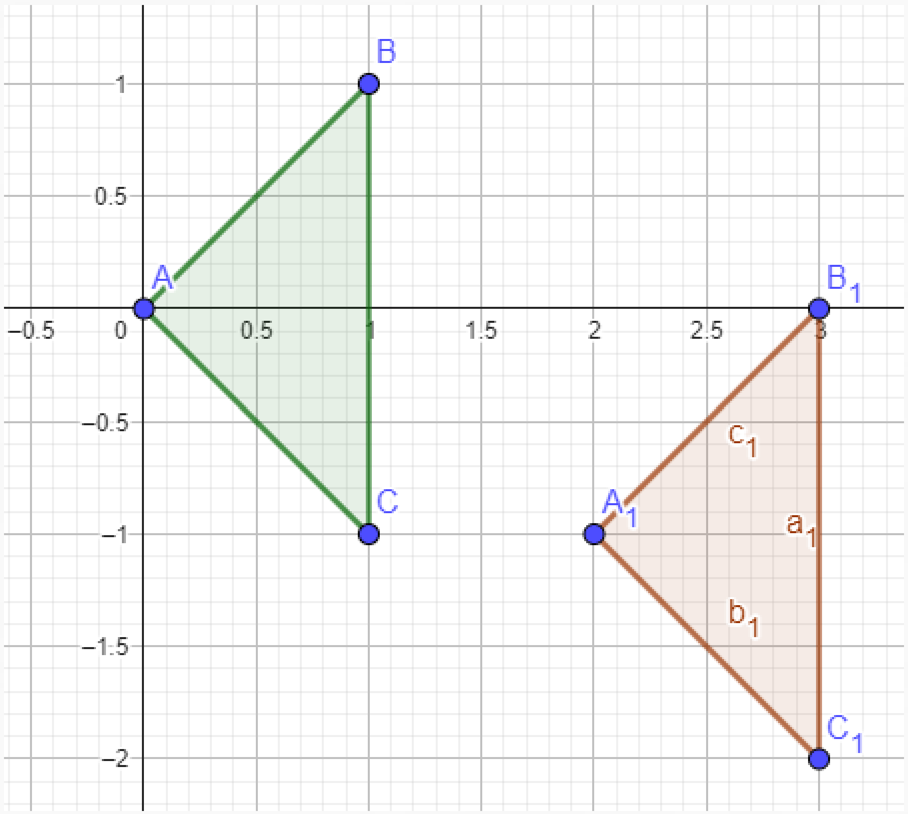
Exemplo: Desloque 2 unidades para a direita e 1 unidade para baixo o triângulo com vértices $(0,0)$, $(1,1)$ e $(1,-1)$.

$$T(x,y) = (x+2, y-1)$$

$$T(0,0) = (0+2, 0-1) = (2,-1)$$

$$T(1,1) = (1+2, 1-1) = (3,0)$$

$$T(1,-1) = (1+2, -1-1) = (3,-2)$$



Vértices: $(2,-1), (3,0), (3,-2)$