Álgebra Lineal

ITAM

Clase 5 Curso Propedéutico

2016/06/13

Determinantes

Continuamos con la interpretación geométrica y definición oficial:

Si $A \in R_{n\times n}$:

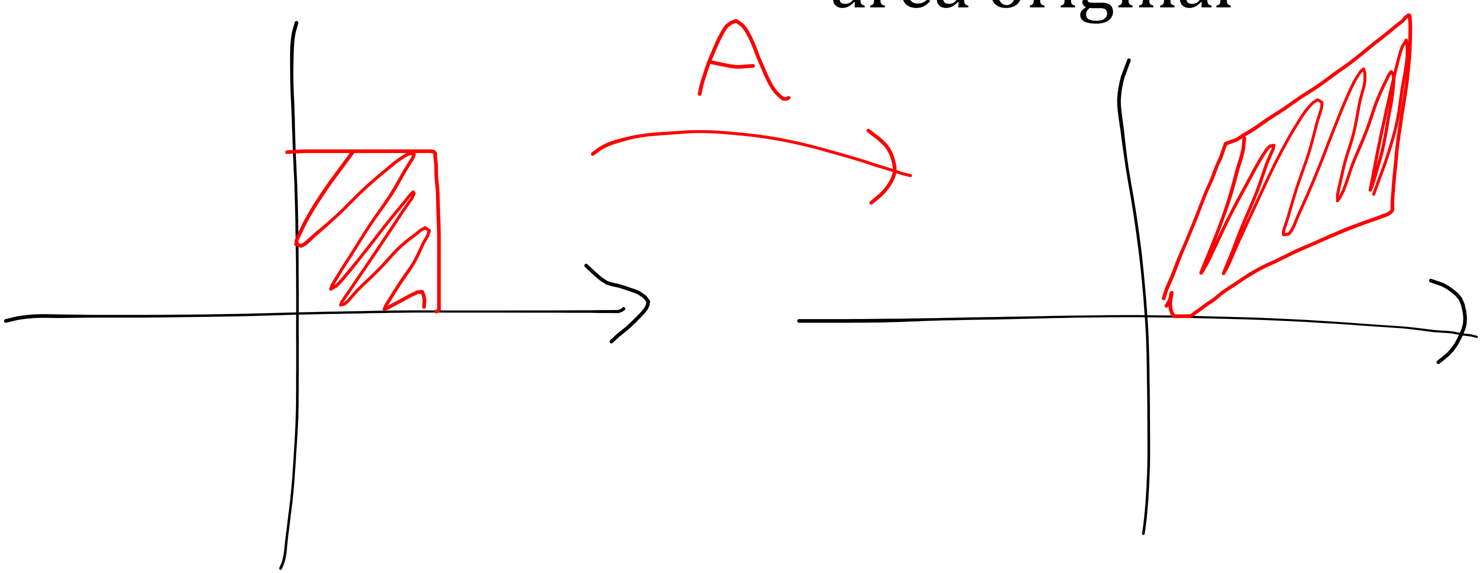
$$\det(A) = \sum_{\sigma \in Perm(1,\ldots,n)} sgn(\sigma) \prod_{i=1}^{n} A_{i,\sigma(i)}$$

(no se espanten todavía)

Interpretación Geométrica

- Nos gustaría llegar a que el determinante es la distorsión del volumen/área tras aplicar la transformación

$$\det(A) = \frac{\text{nueva área}}{\text{área original}}$$



- Una observación: los volúmenes pueden ser negativos!! (*si se cambia la "orientación" de los ejes*)

- *Ej*: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$\det(A) = -1$

- Primero veamos que pasa si la matriz es diagonal

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix}$$

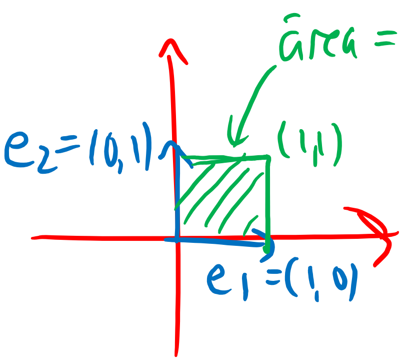
- La formula del determinante se reduce a

$$\det(D) = \prod d_i = d_1 \times \cdots \times d_n$$

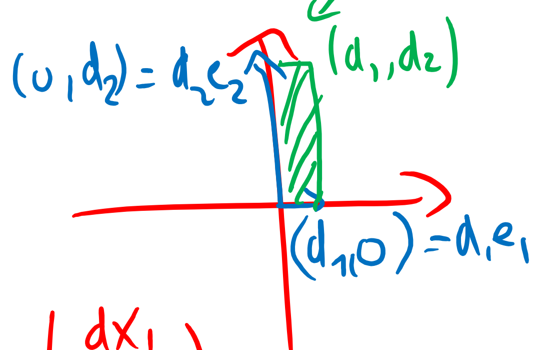
- En este caso es fácil ver que el determinante es el cambio en el volumen.

Si algún $d_i = 0 \Rightarrow \det(D) = 0$

área $= d d_2 = \det(D)$



$x \longmapsto Dx$



$$\begin{bmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 x_1 \\ \vdots \\ d_n x_n \end{pmatrix}$$

Determinantes e invertibilidad

- Una matriz A es invertible si y solo si $\det(A) \neq 0$.

- Las matrices invertibles se llaman también **no singulares.**

Propiedades determinantes

- $\det(AB) = \det(A) * \det(B)$

$$\det(A) = \frac{\text{Área}(A(E))}{\text{Área}(E)}$$

$$\det(B) = \frac{\text{Área}(B(F))}{\text{Área}(F)}$$

$$\det(AB) = \frac{\text{Área}(A(B(F)))}{\text{Área}(F)} = \frac{\text{Área}(A(B(F)))}{\text{Área}(B(F))} \cdot \frac{\text{Área}(B(F))}{\text{Área}(F)} = \det(A)\det(B)$$

- $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$

$$AA^{-1} = I \qquad \det(A)\det(A^{-1}) = \det(AA^{-1})$$

$$\det(I) = 1$$

- $\det(A^{\top}) = \det(A)$

Se cumple para el caso diagonal

pues D diagonal $\Longrightarrow D^{T} = D$

Créanme que es suficiente

Matrices Ortogonales

- En álgebra lineal nos gusta trabajar con matrices "bonitas". Las más bonitas suelen ser o diagonales u ortogonales.
- Una matriz ortogonal tiene TODAS sus columnas ortonormales =(ortogonal + vectores de norma uno)

$A = [A^1 | \cdots | A^n]$ $\quad \langle A^i, A^j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$ $\quad$ ej: $\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$ $\quad \left\langle \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \right\rangle = 0$

- Las matrices ortogonales son sus propias inversas! si transpuesta I_n

$$A^T A = \begin{bmatrix} A^1 \\ \hline \vdots \\ \hline A^n \end{bmatrix} [A^1 | \cdots | A^n] = \begin{bmatrix} & \vdots & \\ \cdots & \langle A^i, A^j \rangle & \\ & \vdots & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}$$

$AA^T = I_n$

Geometría de las matrices ortogonales

- Las matrices ortogonales preservan la norma de los vectores.

$$\left.\begin{aligned} \det(A) &= \det(A^T) \\ \det(A) &= \frac{1}{\det(A^{-1})} \end{aligned}\right\} \Rightarrow (\det(A))^2 = 1$$

$$\det(A) = \pm 1$$

- Más aún, ¡preservan volúmenes!

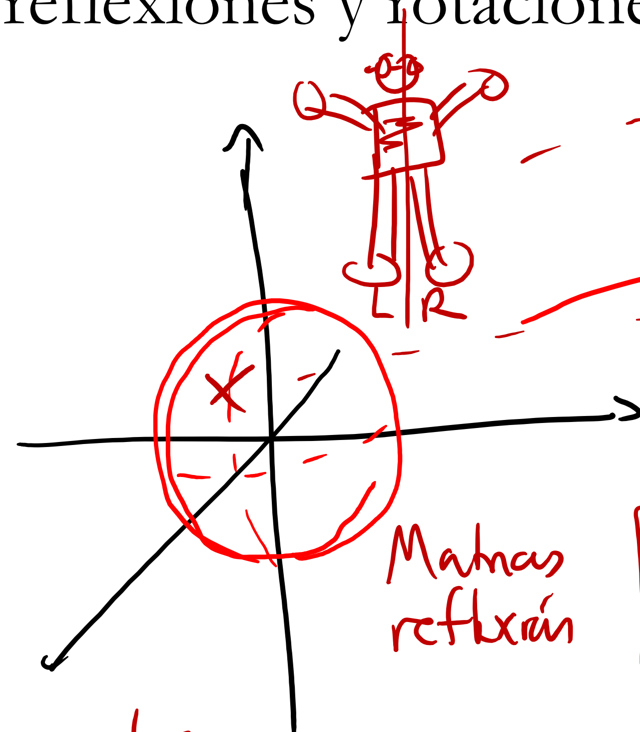
$A^j = A e_j$

Si todos A_j tienen $\|A_j\| = 1 \Rightarrow$ todos ~~los vectores~~ canónicos preservan su longitud!

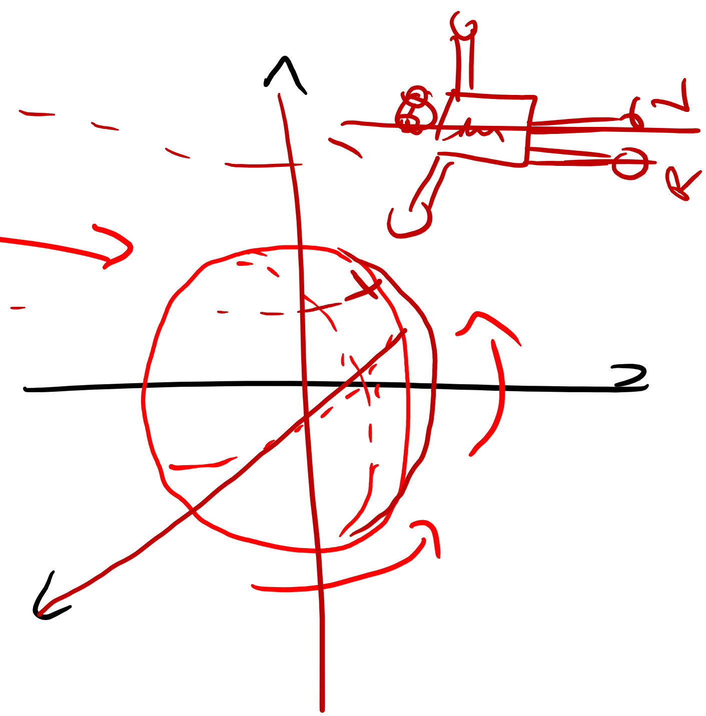
$\langle A^i, A^j \rangle = \|A^i\| \|A^j\| \cos(\angle(A^i, A^j)) = \cos(\angle(A^i, A^j))$

$\langle A^i, A^j \rangle = 0 \Rightarrow \angle(A^i, A^j) = \pi/2 \Rightarrow$ se preserva el ángulo entre canónicos

- Todas las matrices ortogonales están hechas de reflexiones y rotaciones

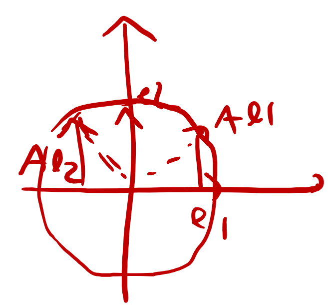


Matrices reflexión $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$



Ejemplos

Matrices de rotación en $\mathbb{R}^2$ $A = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$



Por fin... La SVD!

DESCOMPOSICIÓN EN VALORES SINGULARES

Dada $A \in R_{m\times n}$, existe una descomposición de la forma:

$A = U\Sigma V^T$

con :

U matriz ortogonal de $m \times m$

V matriz ortogonal de $n \times n$

Σ una matriz de $m \times n$ "casi" diagonal salvo por el excedente de dimensiones y con diagonal $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_{\min(m,n)} \geq 0$

Σ

$m > n$

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \sigma_n \\ \hline 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$m < n$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} \sigma_1 & \ddots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \sigma_n & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right]$$

DESCOMPOSICIÓN EN VALORES SINGULARES

Dada $A \in R_{m \times n}$, existe una descomposición de la forma:

$A = U\Sigma V^T$

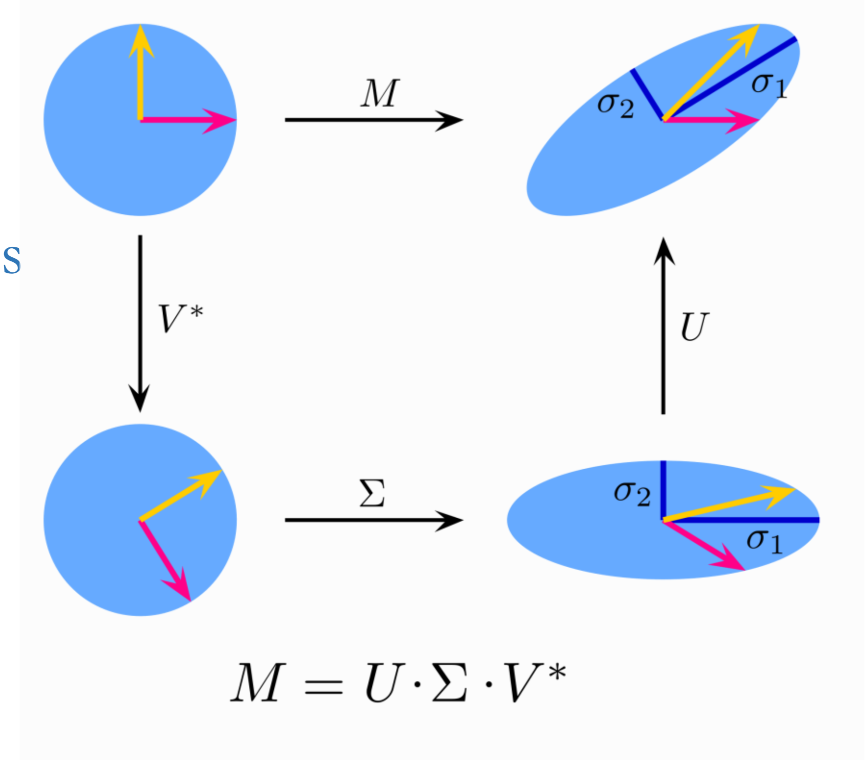
con :

U matriz ortogonal de $m \times m$

V matriz ortogonal de $n \times n$

Σ una matriz de $m \times n$ "casi" diagonal salvo por el excedente de dimensiones y con diagonal $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_{\min(m,n)} \geq 0$

Esencialmente dice que toda transformación lineal es una rotación + redimensión de los ejes canónicos + rotación.



- Para poder dar una historia “constructiva” de cómo se obtienen los vectores u_i y v_i quisiera esperarme un poco más.
- Vamos a dejarlo para después (prometo regresar en una o dos clases una vez que hayamos visto dos conceptos importantísimos que usaremos todo el resto del curso).

  1. Eigenvectores y Eigenvalores
  2. Cálculo diferencial y optimización con Matrices