Teoria e Aplicação de Grafos

Roteiro da aula:

- **Emparelhamentos (*Matchings*)**
- **Exemplos de problemas envolvendo emparelhamentos**
- **Emparelhamentos Máximos**
- **Emparelhamentos Perfeitos**

Emparelhamentos

Seja o seguinte problema:

Considere a tabela, onde 9 pessoas enviaram currículos para preencher 7 vagas de emprego em uma escola. As qualificações dos candidatos permitem que eles possam preencher, às vezes, mais de uma vaga. Monte um grafo com os candidatos (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) sendo vértices de um lado, e as vagas (L, S, T, M, E, B, F) sendo vértices de outro. Coloque arestas entre os candidatos e vagas que ele pode preencher. É possível preencher todas as vagas com esses candidatos?

Emparelhamentos

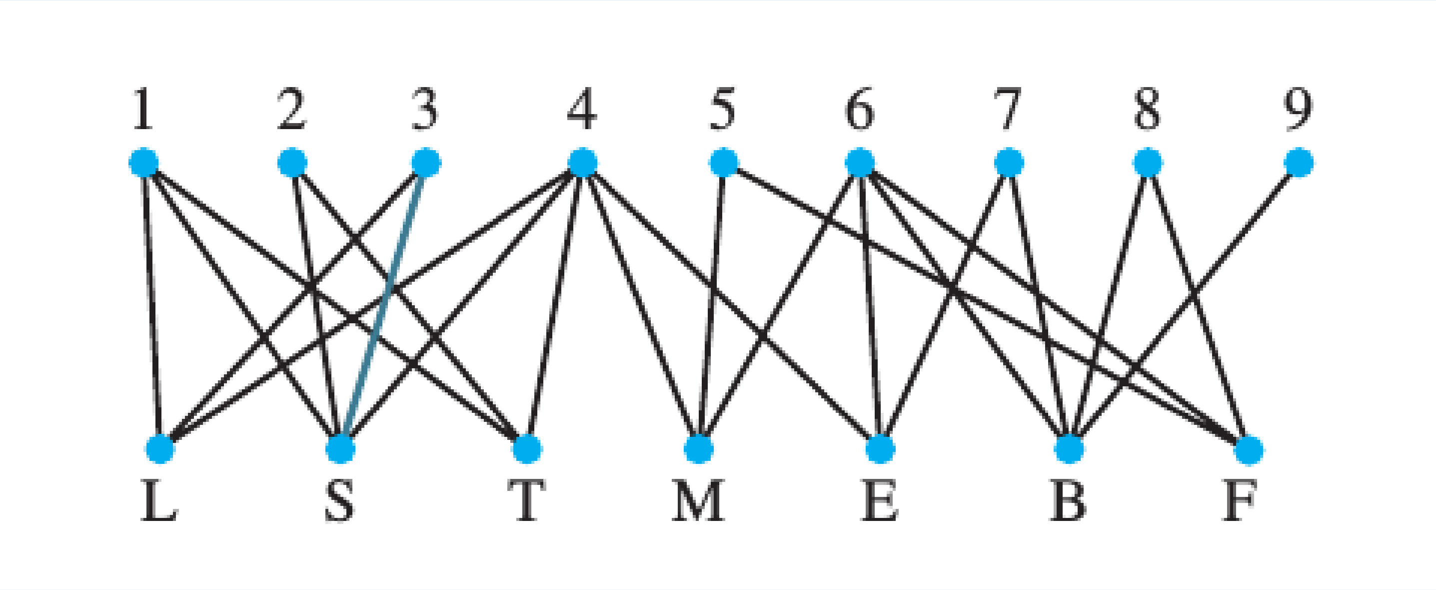
Seja o seguinte problema:

Job \ Applicant	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Assistant librarian	x		x	x					
Second grade	x	x	x	x					
Third grade	x	x		x					
High school math				x	x	x			
High school English				x		x	x		
Asst. baseball coach						x	x	x	x
Asst. football coach					x	x		x	

Table 6.1: *Some sample job application data*

Bogart, Stein & Drysdale, 2006.

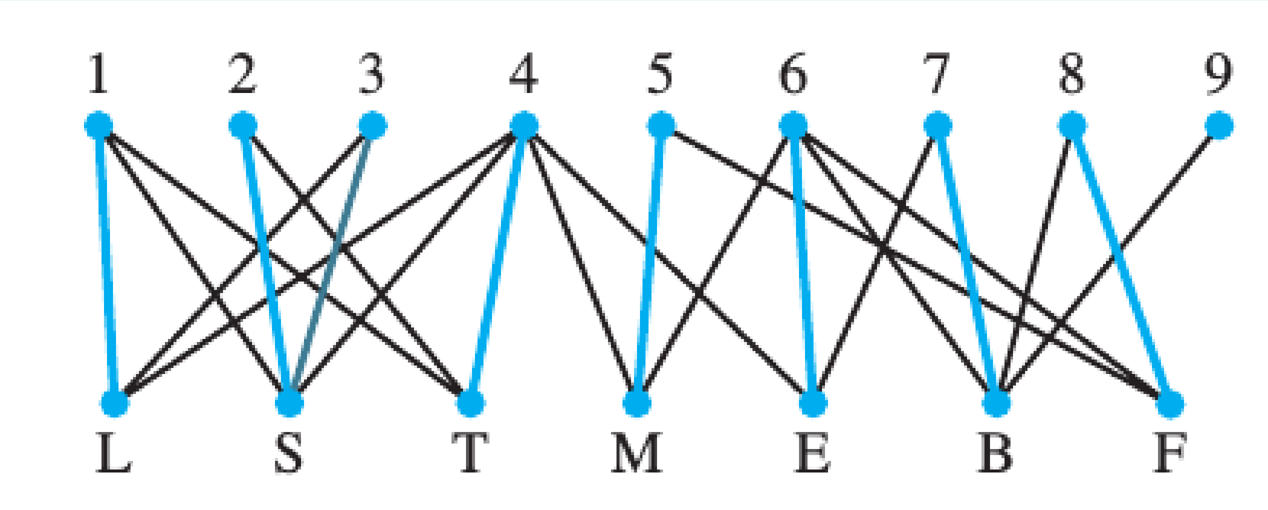
Emparelhamentos



Bogart, Stein & Drysdale, 2006.

Emparelhamentos

Solução possível: {L,1}, {S,2}, {T,4}, {M,5}, {E,6}, {B,7}, {F,8}



Bogart, Stein & Drysdale, 2006.

Emparelhamentos

Definição:

Um conjunto de arestas em um grafo que não compartilham nenhum vértice terminal é considerado um emparelhamento (*matching*).

Exemplos de problemas usando Emparelhamentos

The oil well drilling problem [Devine, 1973]. Suppose we are given the locations of oil deposits. We want to exploit all the deposits at minimum drilling cost. It is technically feasible to access two deposits with one well: drill a hole to the first deposit, and then continue drilling from that same hole, possibly at a different angle, to the second deposit. The oil is then brought up from both deposits via concentric pipes. We know the savings possible from combined drilling operations for each pair of deposits. The question is: How do we combine the drilling operations so that the savings are as large as possible?

M.O. Ball et al., Eds., *Handbooks in OR & MS, Vol. 7*

Exemplos de problemas usando Emparelhamentos

Plotting street maps [Iri & Taguchi, 1980; Iri, Murota & Matsui, 1983]. A pen-plotter has to draw a street map of a city. Since the total length of the lines to be drawn is fixed, this amounts to minimizing the total distance of the 'non-drawing' moves, or *shifts*, the pen makes to change position. A natural assumption is that the pen starts from some prescribed point and returns to it when the drawing is finished. For simplicity, we assume that this common starting and ending point is a point of the map to be drawn. Moreover, we assume that the graph of the map (edges are streets, nodes are intersections) is connected, i.e., that you can travel between any two intersections in the city along streets. The question is: In what order should the edges be drawn to minimize the total drawing time?

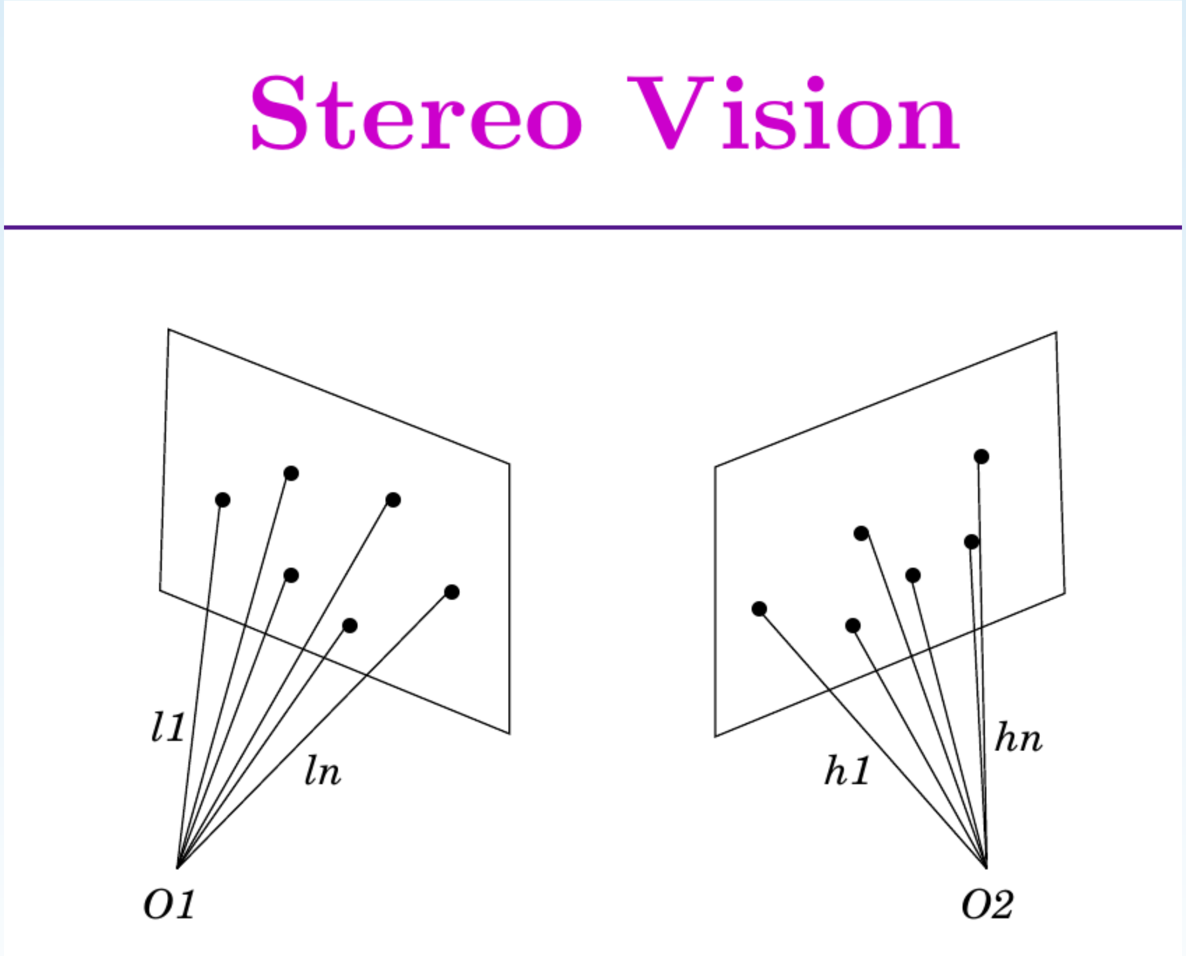
M.O. Ball et al., Eds., *Handbooks in OR & MS, Vol. 7*

Exemplos de problemas usando Emparelhamentos

Scheduling [Fujii, Kasami & Ninomiya, 1969]. Suppose, you and your partner want to restore this lovely old house you just bought. You have divided the whole project into a number of one-week jobs that must be carried out in accordance with certain precedence relations. For example, it is difficult to paper a new wall before putting it up. As the project puts already enough pressure on the relationship, you have agreed not to work together on any job. You both have about the same skills, however, so either of you can do each job equally well. The question is: How do you allocate the jobs between you so you can finish the project as early as possible?

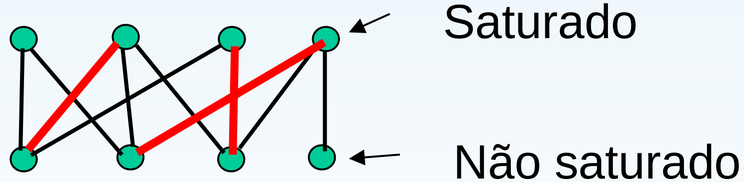
M.O. Ball et al., Eds., *Handbooks in OR & MS, Vol. 7*

Exemplos de problemas usando Emparelhamentos

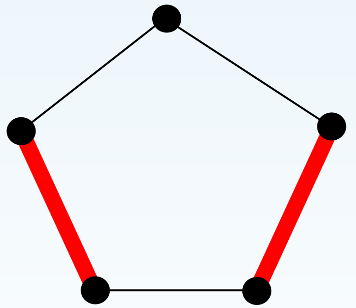


Emparelhamentos

- **Um *emparelhamento* em um grafo simples *G* é um conjunto de arestas que não compartilham vértices terminais.**
- **Os vértices incidentes nas arestas de um emparelhamento *M* são chamados *saturados* por *M*; os outros são *não saturados*.**
- **Um *emparelhamento perfeito* em um grafo é um emparelhamento que satura todos os vértices.**



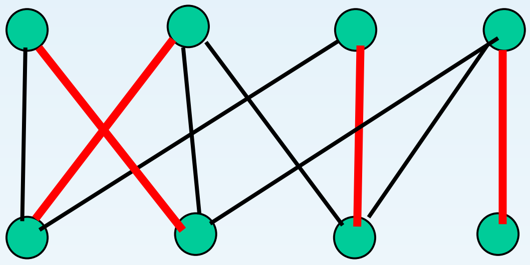
Um emparelhamento em grafo bipartido



Um emparelhamento em grafo genérico(geral)

Emparelhamento Perfeito

- **Um *emparelhamento perfeito* em um grafo é um emparelhamento que satura todos os vértices.**



Emparelhamento Perfeito

Ex: Emparelhamento Perfeito em $K_{n,n}$

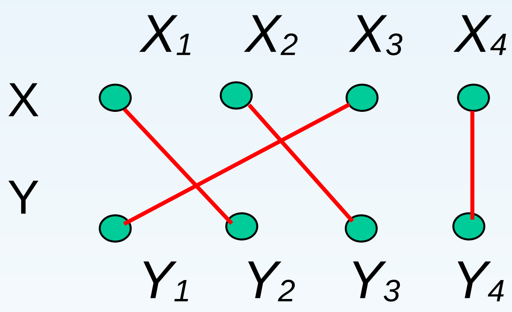
- Considere $K_{n,n}$ com conjuntos particionados $X=\{x_1,\ldots, x_n\}$ e $Y=\{y_1,\ldots, y_n\}$.
- Um emparelhamento perfeito define uma bijeção de X para Y.
- Successivamente encontrar pares para x_1, x_2,… produz $n!$ emparelhamentos perfeitos.
  - Cada emparelhamento é representado por uma permutação de $[n]$, mapeando i para j quando x_i é emparelhado a y_j.

Ex: Emparelhamento Perfeito em $K_{n,n}$

- Para $K_{3,3}$, *há*: 123, 132, 213, 231, 312, 321.
  - 312: $(x_1\text{-}y_3)$ $(x_2\text{-}y_1)$ $(x_3\text{-}y_2)$

Emparelhamentos como matrizes

- **Podemos representar os emparelhamentos como matrizes.**
  - **Com *X* e *Y* indexando linhas e colunas, a posição *i, j* *será* 1 para cada aresta $x_i y_j$ em um emparelhamento *M* na matriz correspondente.**



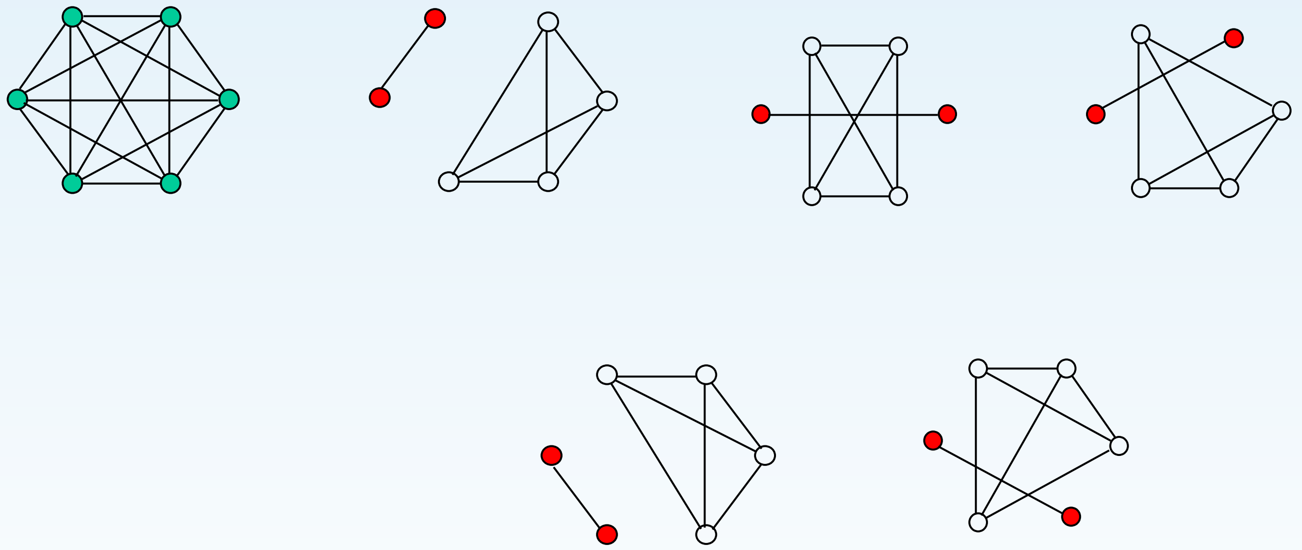
$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccc} Y_1 & Y_2 & Y_3 & Y_4 \end{array} \\
\begin{array}{c} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Emparelhamentos Perfeitos em Grafos Completos

- K_{2n+1} não possui emparelhamento perfeito, Considere K_{2n}.
  - Seja f_n o número de maneiras para emparelhar 2n pessoas distintas em K_{2n}
  - Há $2n$-1 escolhas para parceiros de v_{2n}, e para cada dessas escolhas há f_{n-1} maneiras de completar o emparelhamento
  - Logo f_n=(2n-1)f_{n-1} para $n \geq 1$. Com f_0=1, segue-se por indução que f_n=(2n-1)·(2n-3) · · ·(1).

Emparelhamentos Perfeitos em Grafos Completos

- Para K_6 , n=3,
  - f_3 é o número de emparelhamentos perfeitos
  - $f_3 = (2n-1) * f_2 = 5 * f_2 = 5*3*f_1$



Emparelhamento Perfeito x Máximo

- **Todo** ***emparelhamento perfeito*** **em um grafo G é também um emparelhamento máximo.**

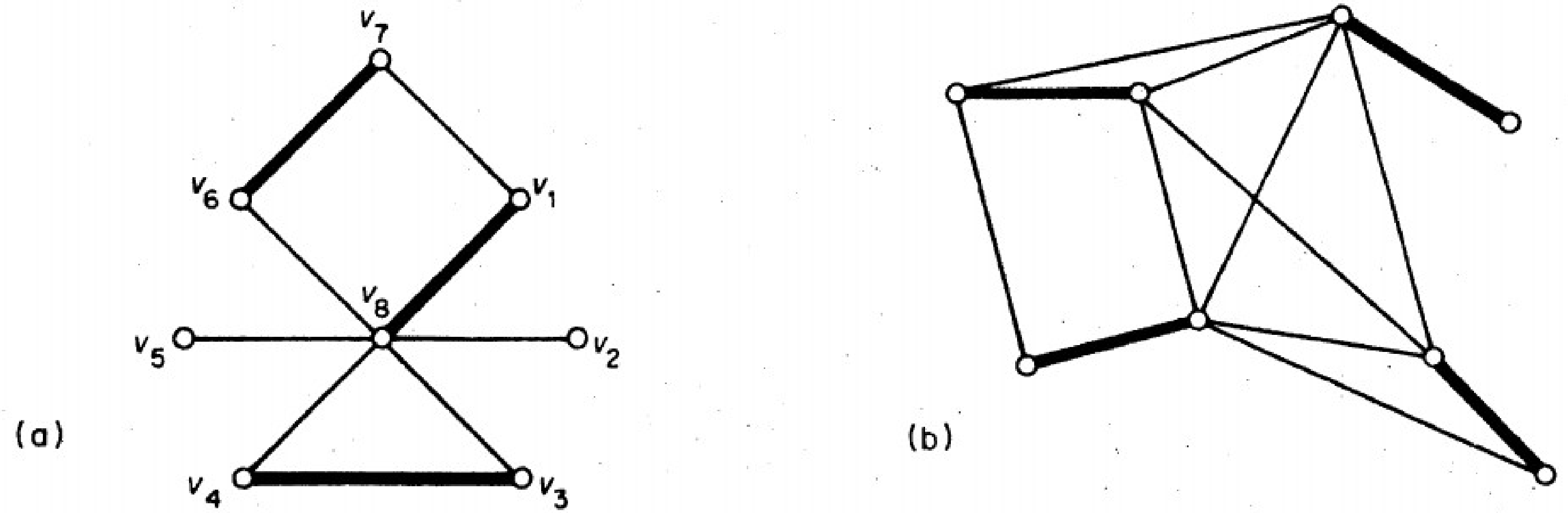


Figure 5.1. (*a*) A maximum matching; (*b*) a perfect matching

Bondy & Murty, 1982.

Emparelhamentos máximos em grafos bipartidos

- **Como encontrar um emparelhamento de máxima cardinalidade em um grafo bipartido G?**

Referências Bibliográficas

- Bogart, K. & Stein, C. & Drysdale, R. Discrete Mathematics for Computer Science. Key College Pub., 2006.
- Bondy, J. & Murty, *Graph Theory with Applications*, Elsevier, 1982.
- Ruohonen, K. *Graph Theory*, 2013.
- Sedgewick, R. & Wayne, K. *Algorithms* (4th ed.), Addison-Wesley, 2011.
- Wilson, R. & Watkins, J. *Graphs: An Introductory Approach.* John Wiley, 1990.