

Teoria e Aplicação de Grafos

Roteiro da aula:

- **Grafos Bipartidos**
- **Exemplos**
- **Algoritmo para identificar Grafos Bipartidos**
- **Exemplos**

Grafos Bipartidos

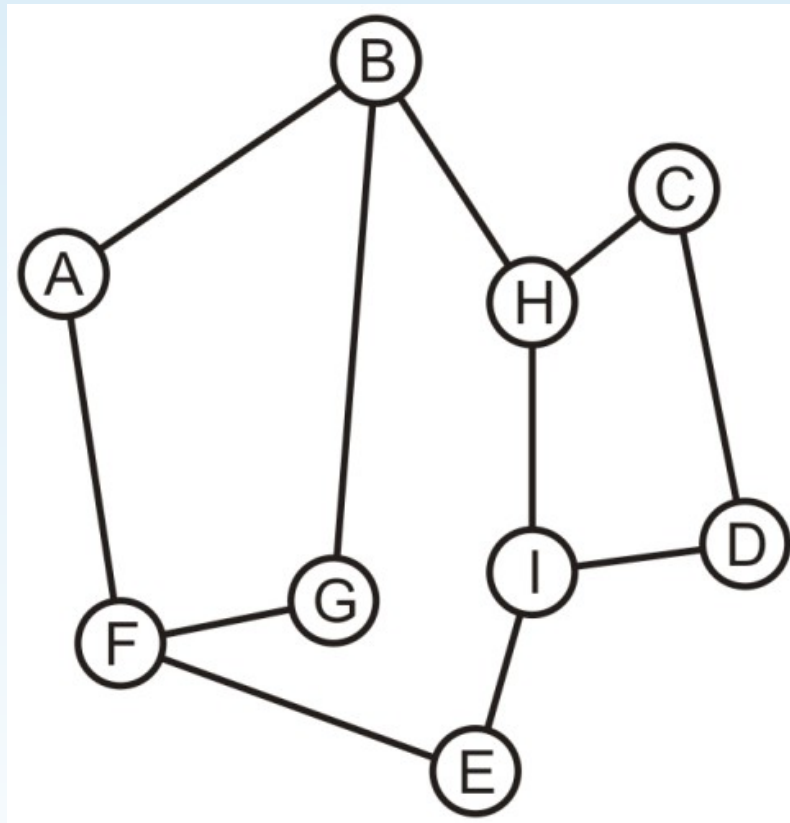
Definição

- Um *grafo bipartido* é um grafo onde os vértices V podem ser divididos em dois conjuntos disjuntos V_1 e V_2 tais que toda aresta tem um vértice em V_1 e o outro em V_2

Exemplo de problema usando Grafos Bipartidos

The assignment problem. Suppose n tasks are to be carried out and each must be assigned to a single person. We have a staff of n people available and each person can be assigned only one task. Moreover, we know for each person p and task t a number $w_{p,t}$ quantifying the productivity of p when carrying out t . Now, the question is: How do we assign the tasks to the people, i.e. make task-person pairs, so that the total productivity is as large as possible?

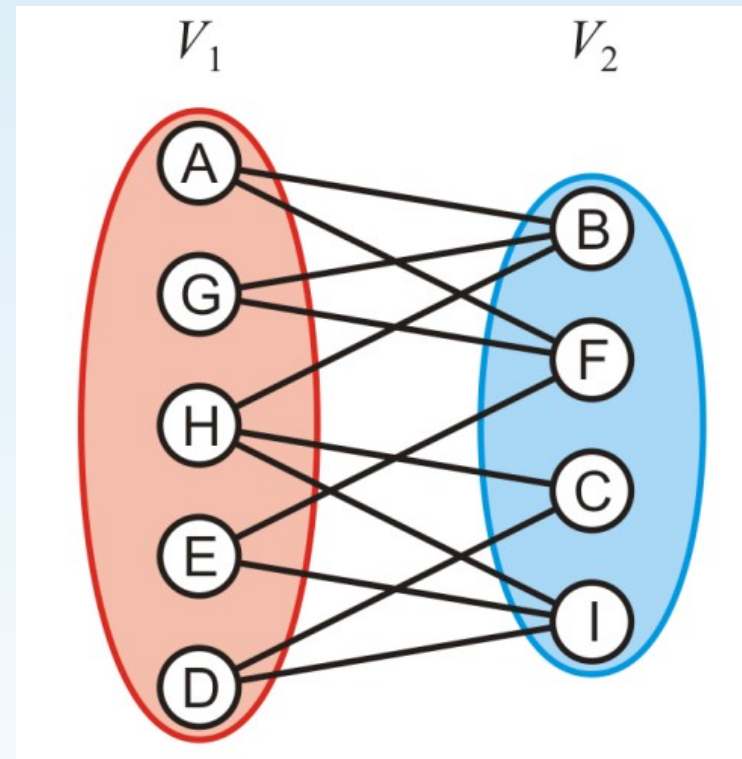
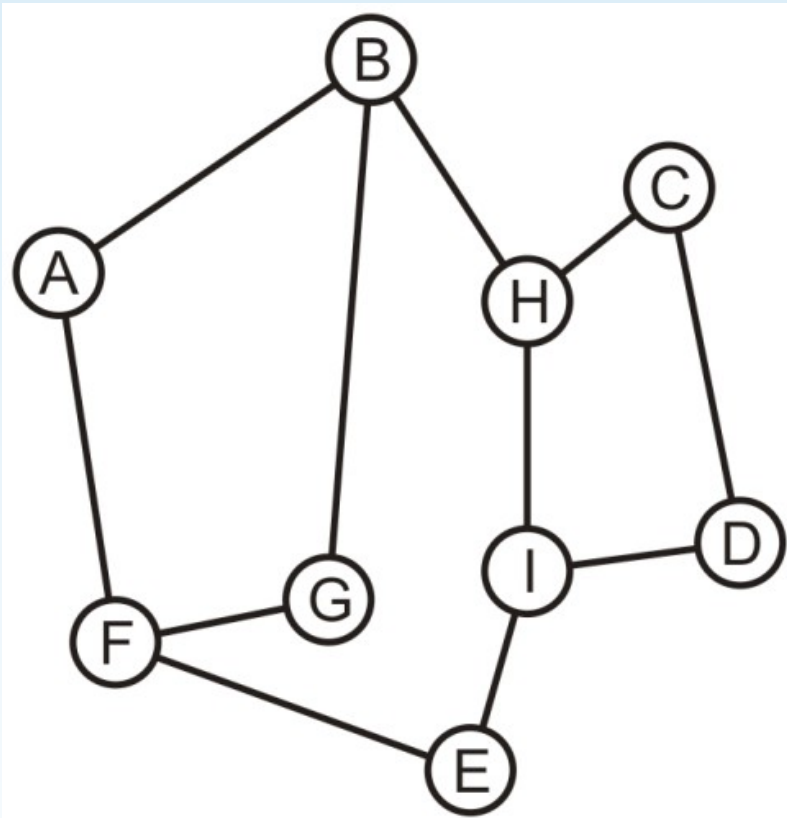
Exemplo: Este é um grafo bipartido?



Bipartido?

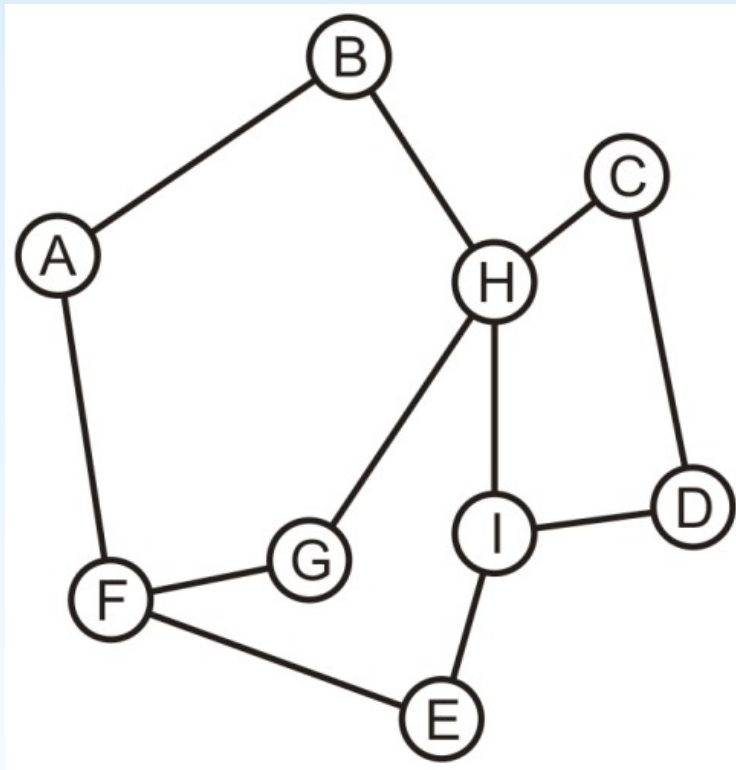
Exemplo: Este é um grafo bipartido?

Sim. Podemos decompor os vértices em dois conjuntos disjuntos



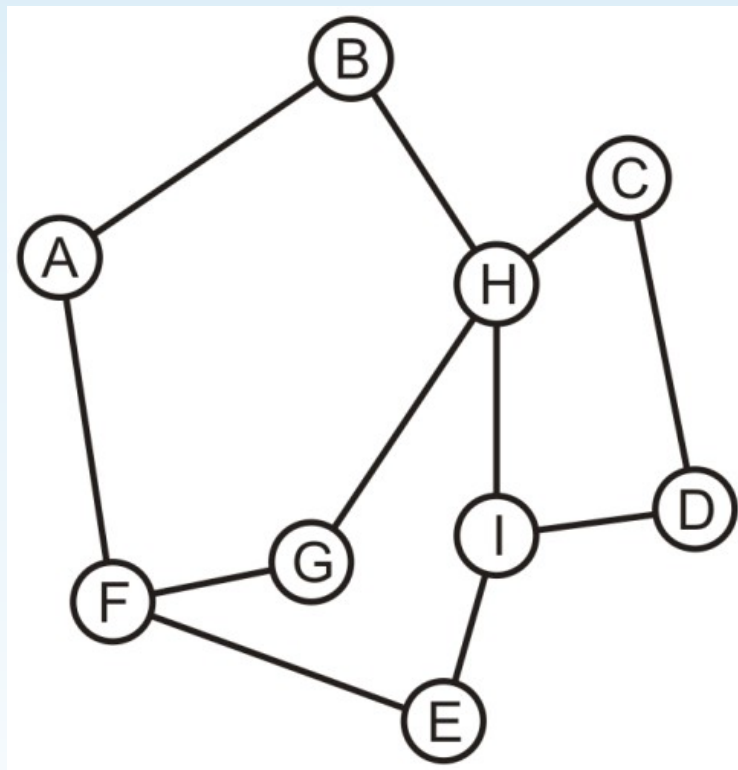
Exemplo: Este é um grafo bipartido?

E este? Bipartido?



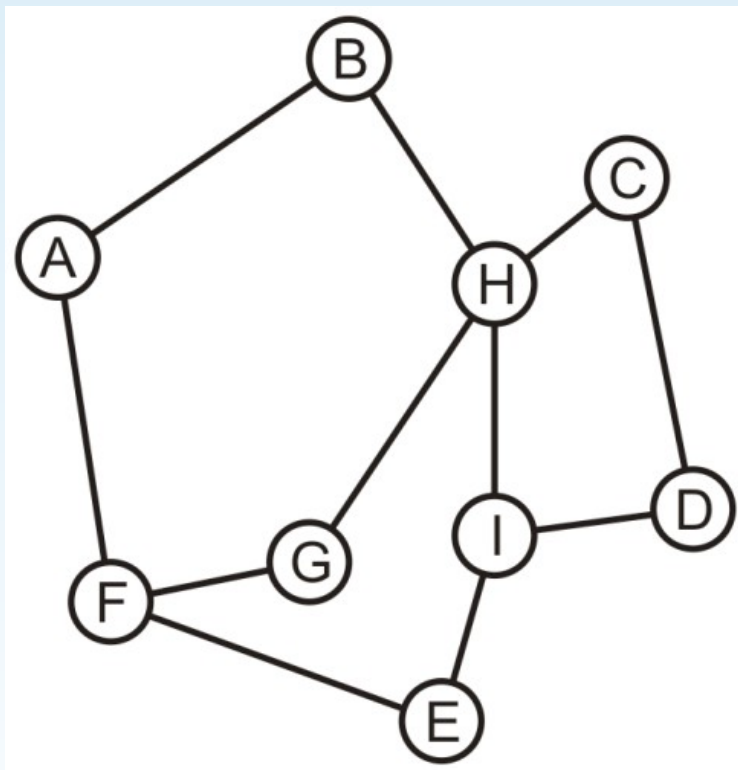
Exemplo: Este é um grafo bipartido?

Não.



Exemplo: Este é um grafo bipartido?

Não. Seria possível encontrar um algoritmo que determine se um grafo é bipartido?



Algoritmo para determinar se Grafo é Bipartido

?

Algoritmo para determinar se Grafo é Bipartido

Considere busca em largura (BFS) para um grafo conectado:

Algoritmo para determinar se Grafo é Bipartido

Considere busca em largura (BFS) para um grafo conectado:

- Escolha um vértice, marque-o como pertencendo a V_1 e coloque-o em uma fila

Algoritmo para determinar se Grafo é Bipartido

Considere busca em largura (BFS) para um grafo conectado:

- Escolha um vértice, marque-o como pertencendo a V_1 e coloque-o em uma fila
- Enquanto a fila não estiver vazia, retire o vértice v e

Algoritmo para determinar se Grafo é Bipartido

Considere busca em largura (BFS) para um grafo conectado:

- Escolha um vértice, marque-o como pertencendo a V_1 e coloque-o em uma fila
- Enquanto a fila não estiver vazia, retire o vértice v e
 - Quaisquer vértices adjacentes que já estão marcados devem pertencer ao conjunto que não contém v , caso contrário, o grafo não é bipartido (fim: enquanto)

Algoritmo para determinar se Grafo é Bipartido

Considere busca em largura (BFS) para um grafo conectado:

- Escolha um vértice, marque-o como pertencendo a V_1 e coloque-o em uma fila
- Enquanto a fila não estiver vazia, retire o vértice v e
 - Quaisquer vértices adjacentes que já estão marcados devem pertencer ao conjunto que não contém v , caso contrário, o grafo não é bipartido (fim: enquanto)
 - Quaisquer vértices adjacentes não marcados serão marcados como pertencentes ao outro conjunto e serão colocados na fila

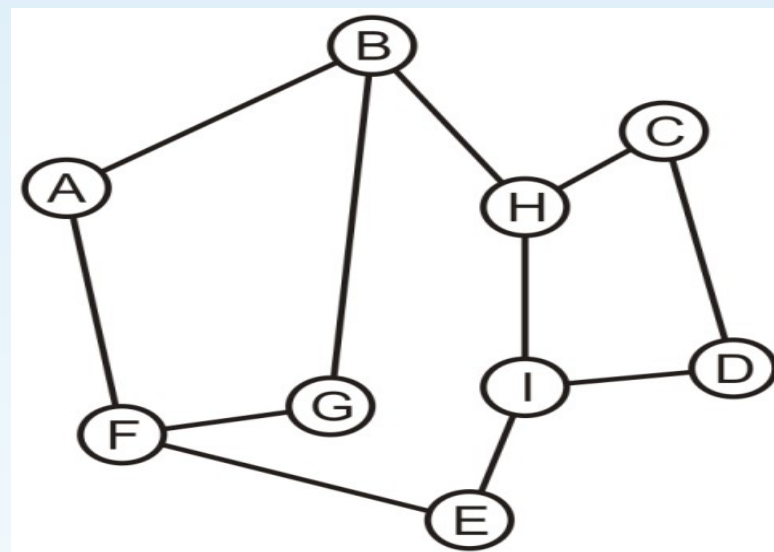
Algoritmo para determinar se Grafo é Bipartido

Considere busca em largura (BFS) para um grafo conectado:

- Escolha um vértice, marque-o como pertencendo a V_1 e coloque-o em uma fila
- Enquanto a fila não estiver vazia, retire o vértice v e
 - Quaisquer vértices adjacentes que já estão marcados devem pertencer ao conjunto que não contém v , caso contrário, o grafo não é bipartido (fim: enquanto)
 - Quaisquer vértices adjacentes não marcados serão marcados como pertencentes ao outro conjunto e serão colocados na fila
- Se a fila estiver vazia, o grafo é bipartido

Exemplo: Algoritmo para determinar se Grafo é Bipartido

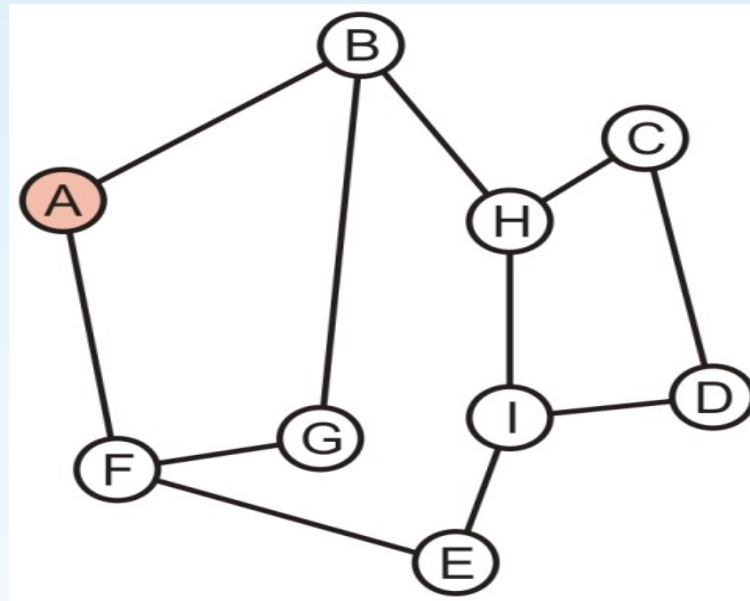
Seja o grafo a seguir



--	--	--	--	--	--

Exemplo: Algoritmo para determinar se Grafo é Bipartido

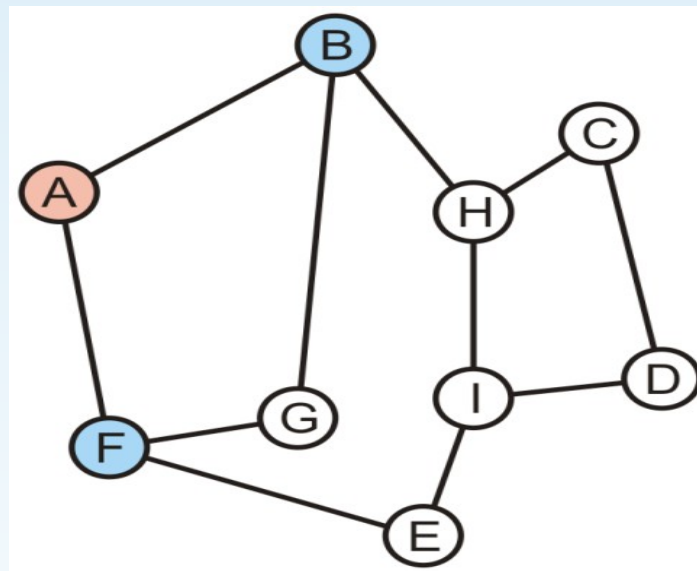
Começando com qualquer vértice



A					
----------	--	--	--	--	--

Exemplo: Algoritmo para determinar se Grafo é Bipartido

Retire A da fila, e seus vizinhos não estão marcados. Inclua-os na fila como do outro conjunto

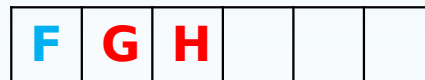
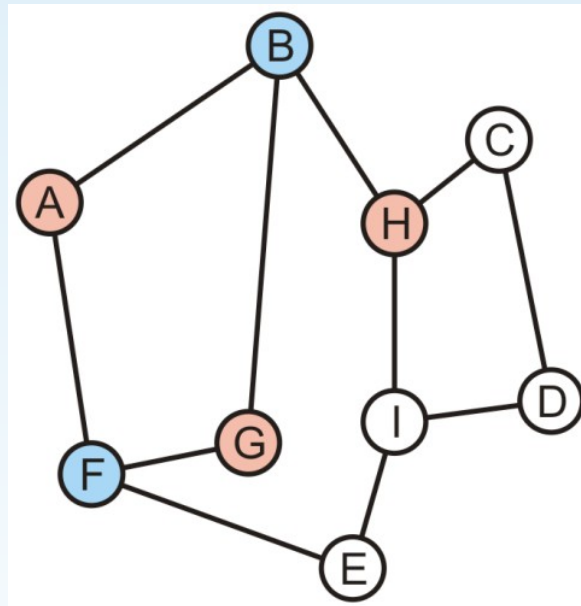


B	F				
---	---	--	--	--	--

Exemplo: Algoritmo para determinar se Grafo é Bipartido

Retirar B da fila — conjunto azul:

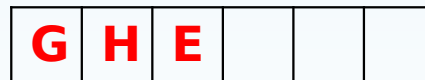
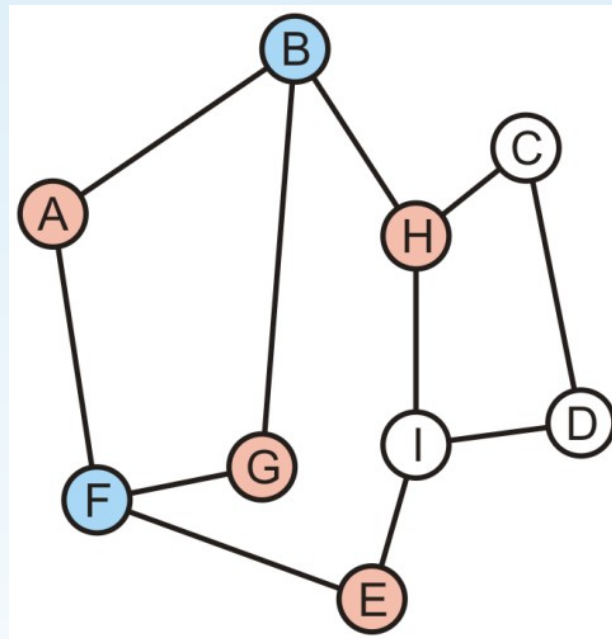
- Um seu vizinho marcado, A, é **vermelho** (outro conjunto)
- Seus outros vizinhos G e H não estão marcados: marque-os como **vermelho** e coloque-os na fila



Exemplo: Algoritmo para determinar se Grafo é Bipartido

Retirar F — conjunto **azul**:

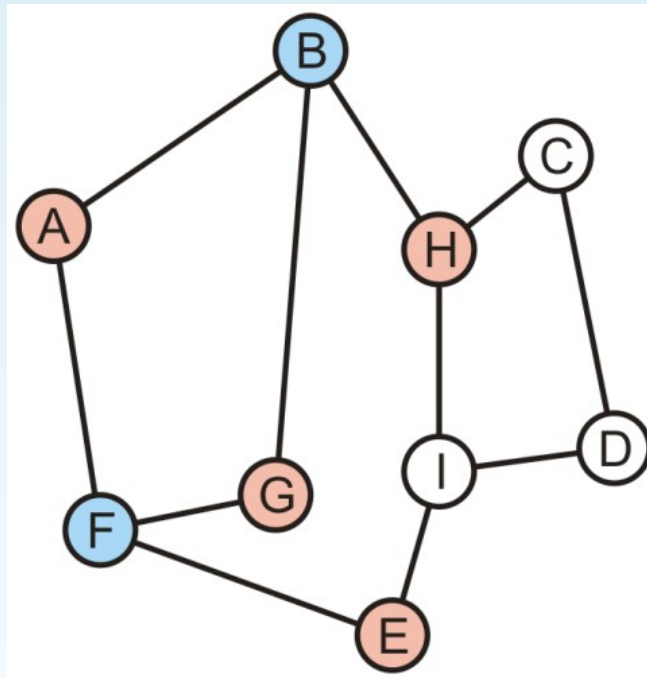
- Seus dois vizinhos marcados, A e G, são **vermelhos**
- Seu vizinho E não está marcado: marque-o **vermelho** e coloque-o na fila



Exemplo: Algoritmo para determinar se Grafo é Bipartido

Retire G — é **vermelho**:

- Seus dois vizinhos marcados, B e F, são **azuis**

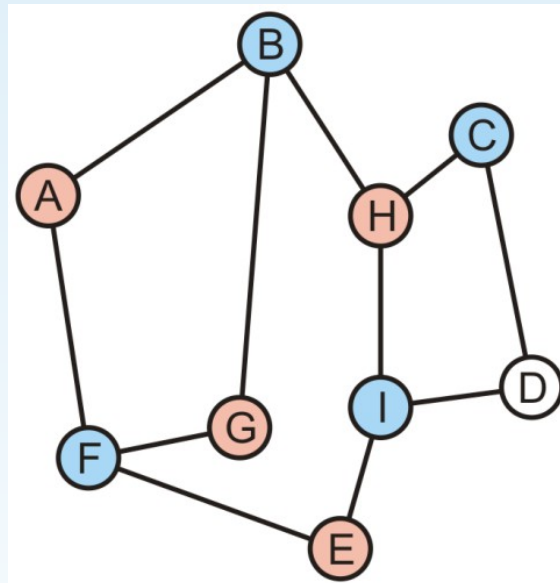


H	E				
---	---	--	--	--	--

Exemplo: Algoritmo para determinar se Grafo é Bipartido

Retire H — é **vermelho**:

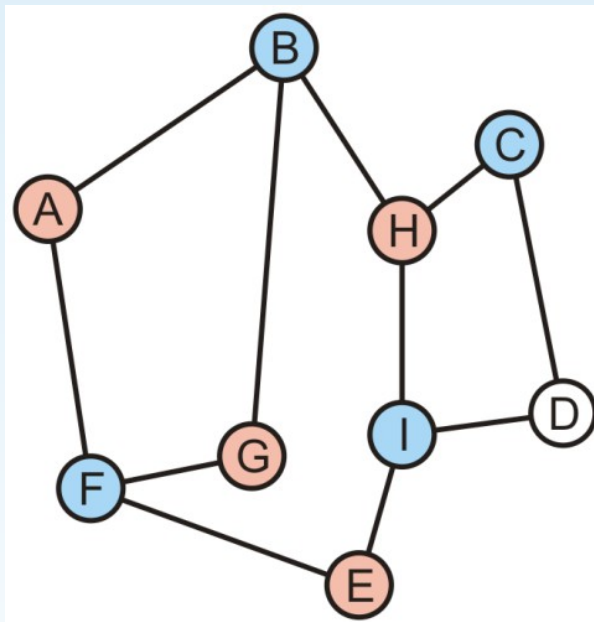
- Seu vizinho marcado, B, é **azul**
- Ele tem dois vizinhos não marcados, C e I; marque-os como **azuis** e coloque-os na fila



Exemplo: Algoritmo para determinar se Grafo é Bipartido

Retire E— é **vermelho**:

- Seus vizinhos marcados, F e I, são **azuis**

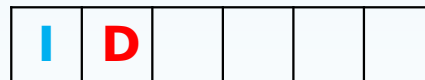
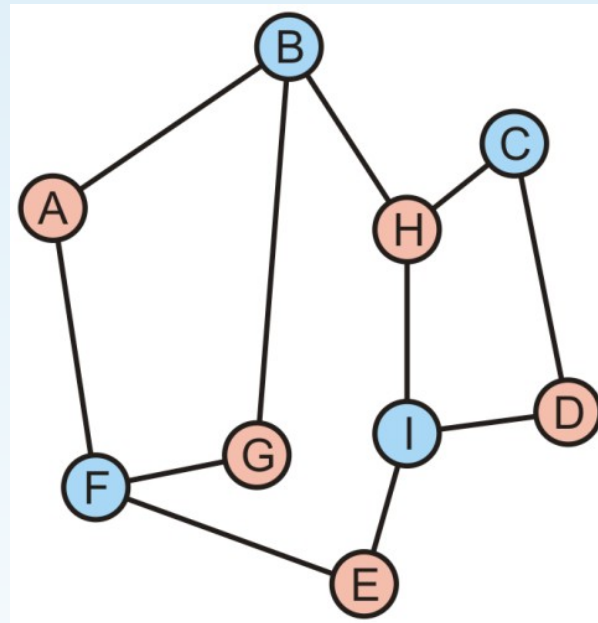


C	I				
---	---	--	--	--	--

Exemplo: Algoritmo para determinar se Grafo é Bipartido

Retire C— é azul:

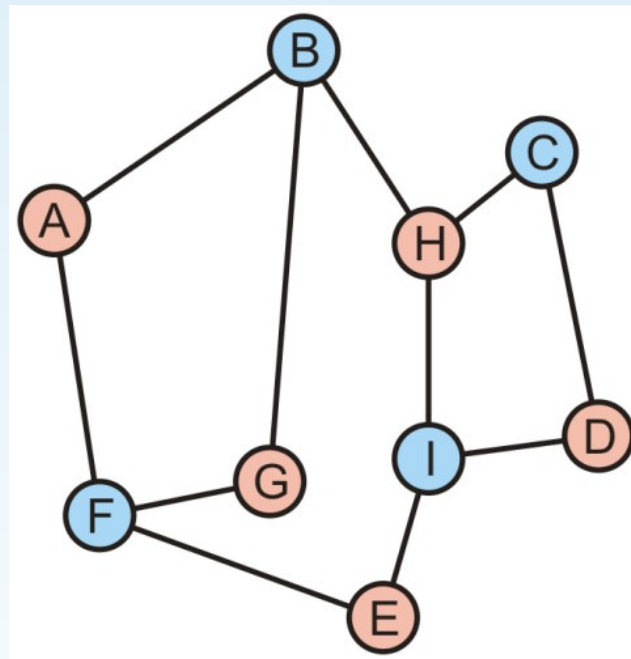
- Seu vizinho marcado, H, é vermelho
- Marque D como vermelho e coloque-o na fila



Exemplo: Algoritmo para determinar se Grafo é Bipartido

Retire I — é azul:

- Seus vizinhos marcados, H, D e E, são todos vermelhos

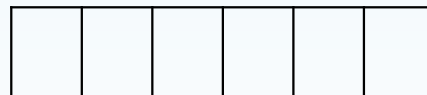
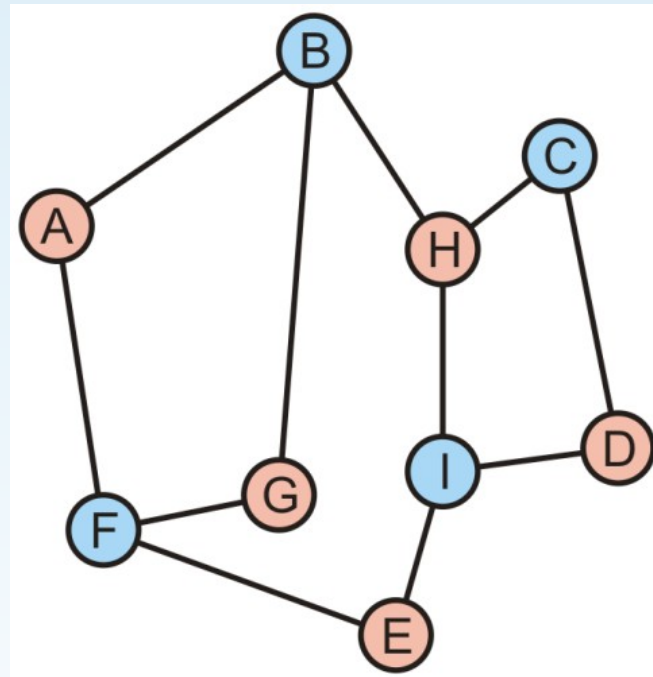


D						
---	--	--	--	--	--	--

Exemplo: Algoritmo para determinar se Grafo é Bipartido

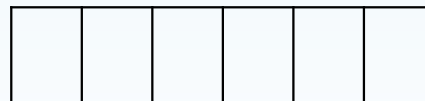
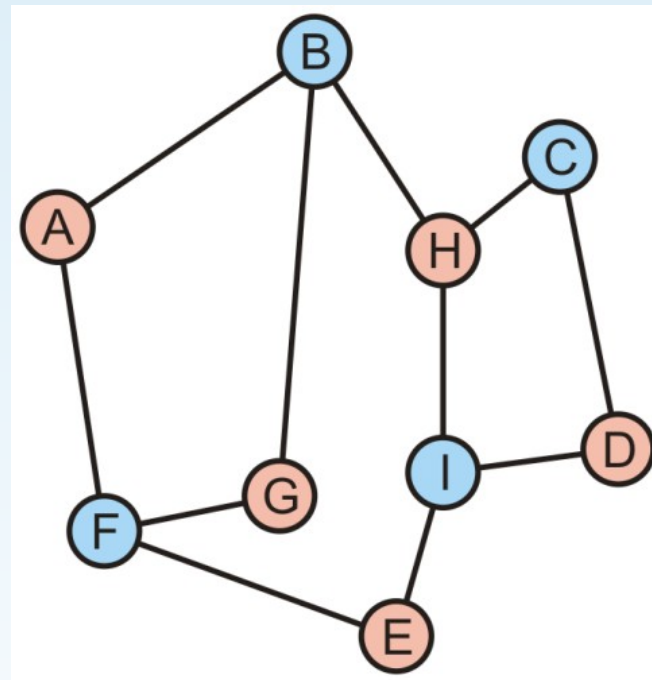
Retire D— é **vermelho**:

- Seus vizinhos marcados, C e I, são **azuis**



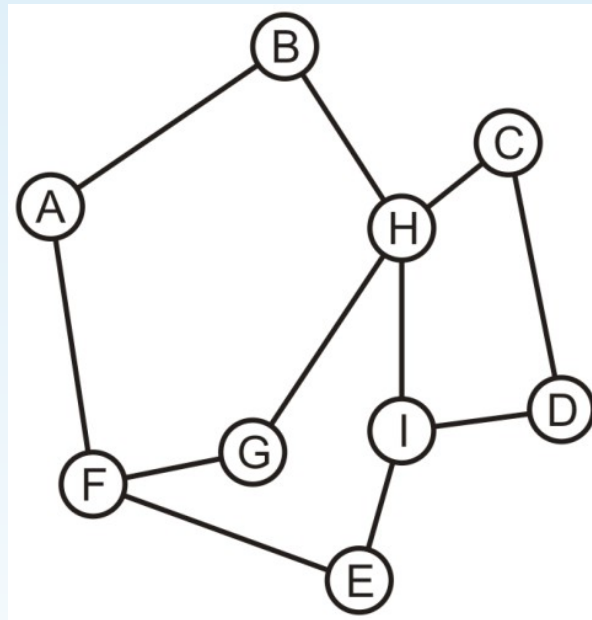
Exemplo: Algoritmo para determinar se Grafo é Bipartido

A fila está vazia, o grafo é bipartido



Exemplo: Algoritmo para determinar se Grafo é Bipartido

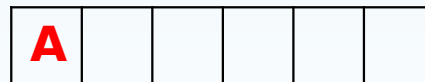
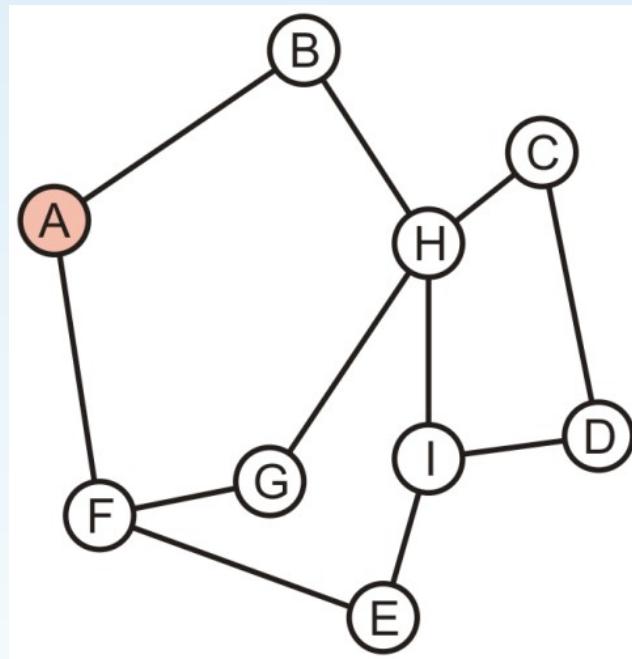
Considere agora o outro grafo (não bipartido)



--	--	--	--	--	--	--

Exemplo: Algoritmo para determinar se Grafo é Bipartido

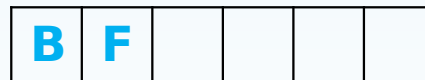
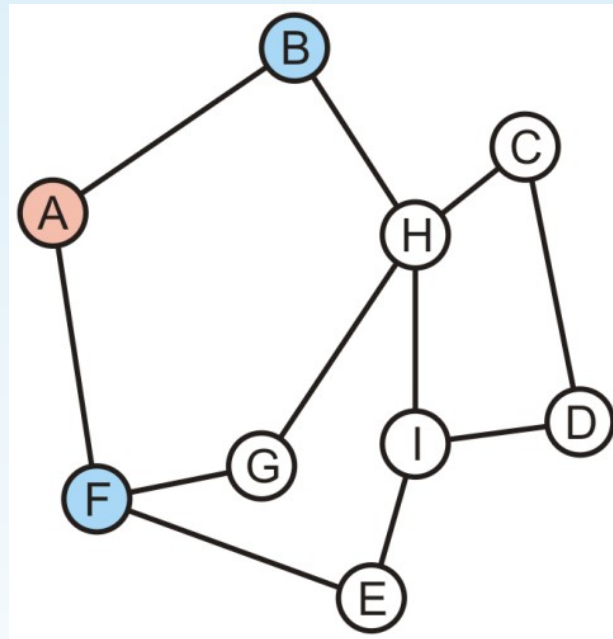
Coloque A na fila e marque **vermelho** designando um conjunto



Exemplo: Algoritmo para determinar se Grafo é Bipartido

Retire A da fila:

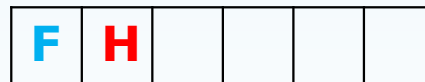
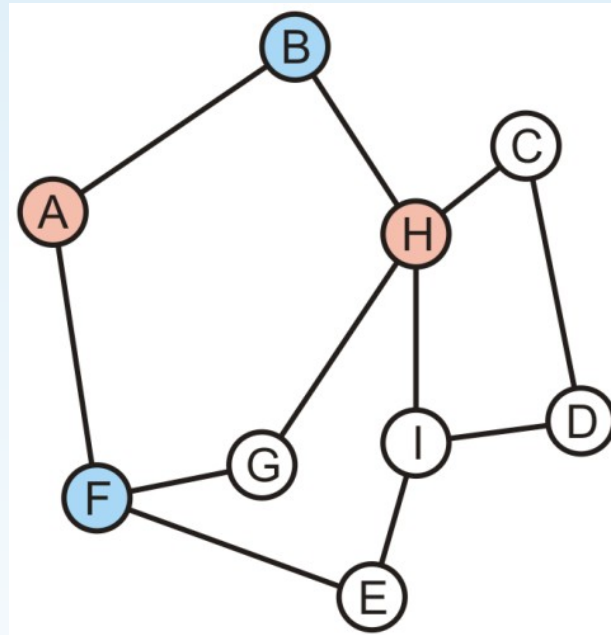
- Seus vizinhos não estão marcados: faça-os **azuis** e coloque-os na fila



Exemplo: Algoritmo para determinar se Grafo é Bipartido

Retire B da fila:

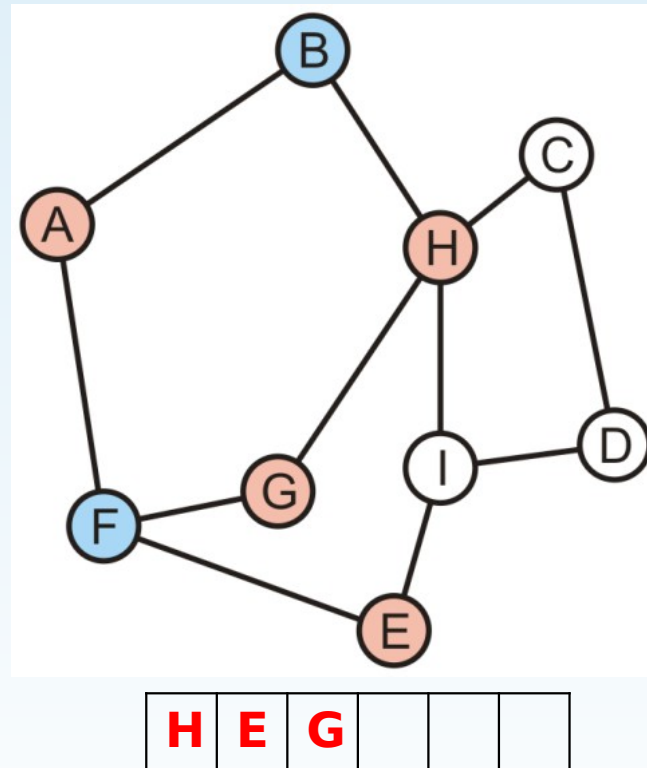
- Seu vizinho, A, é **vermelho**
- O outro vizinho, H, não está marcado: coloque-o como **vermelho** (outro conjunto) e na fila



Exemplo: Algoritmo para determinar se Grafo é Bipartido

Retire F da fila:

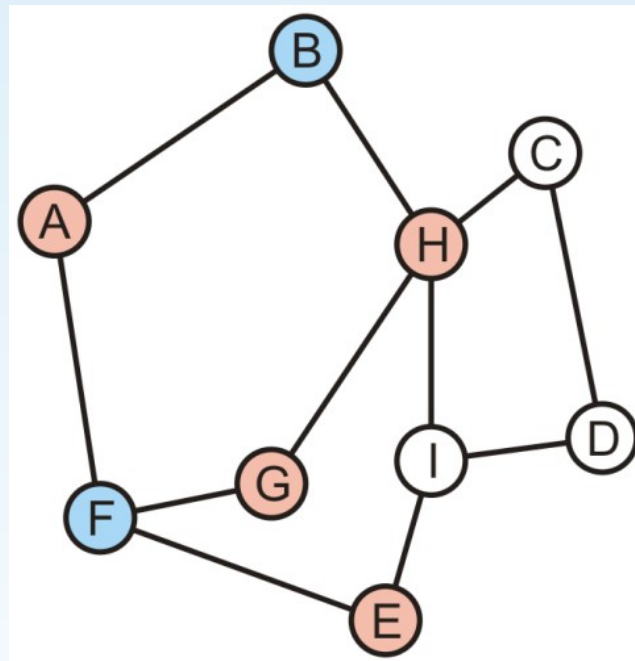
- Seu vizinho já marcado, A, é **vermelho**
- Os outros dois vizinhos, E e G, não estão marcados: coloque-os como **vermelhos** e na fila



Exemplo: Algoritmo para determinar se Grafo é Bipartido

Retire H da fila— é vermelho:

- Seu vizinho, G, já (marcado) é vermelho
- O grafo não é bipartido



E	G				
---	---	--	--	--	--

Resumo: Algoritmo para determinar se Grafo é Bipartido

- Percorra o grafo a partir de um vértice com busca em largura (BFS)
- Cada vértice é identificado para um conjunto (e.g. cor)
- O primeiro vértice é identificado como de um conjunto (cor) e colocado na fila
- Quando um vértice é retirado da fila:
 - Cada vizinho seu não visitado(marcado) é colocado na fila sendo do conjunto (cor) oposto
 - Cada vizinho visitado deve ser de conjunto(cor) oposto
 - Caso contrário, o grafo não é bipartido

Definição e Teorema sobre Grafos Bipartidos

Definição:

Ciclos que possuem um número par, ou um número ímpar de vértices são chamados de *ciclos pares* e *ciclos ímpares*, respectivamente

Teorema

Um grafo é bipartido se, e somente se, ele não possui ciclos ímpares.

Exercício

Implemente em linguagem C o algoritmo de identificação de grafos bipartidos por busca em largura (BFS).

Referências Bibliográficas

- Bogart, K. & Stein, C. & Drysdale, R. Discrete Mathematics for Computer Science. Key College Pub., 2006.
- Bondy, J. & Murty, *Graph Theory with Applications*, Elsevier, 1982.
- Ruohonen, K. *Graph Theory*, 2013.
- Sedgewick, R. & Wayne, K. *Algorithms* (4th ed.), Addison-Wesley, 2011.
- Wilson, R. & Watkins, J. *Graphs: An Introductory Approach*. John Wiley, 1990.