Teoria e Aplicação de Grafos

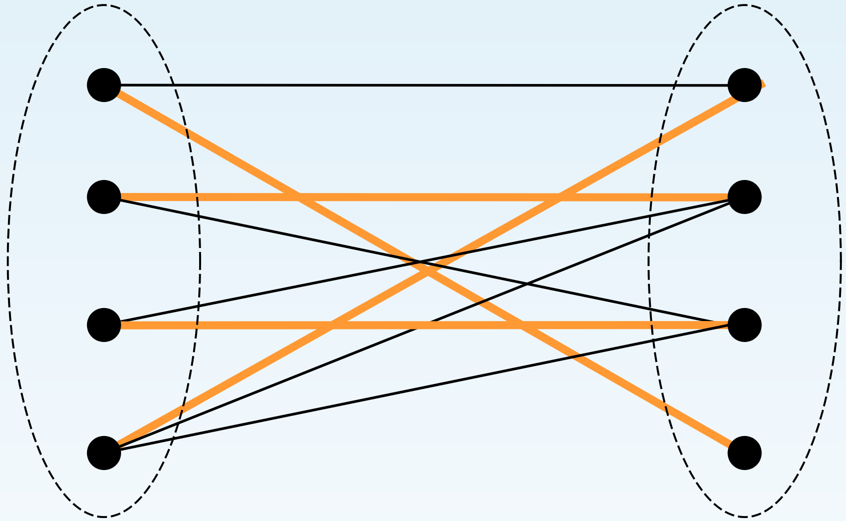
Roteiro da aula:

- Emparelhamentos Máximos em Grafos Bipartidos
- O problema do casamento/emparelhamento estável
- Algoritmo Gale-Shapley
- Exemplo
- Aplicações

Emparelhamento Máximo

Problema do emparelhamento bipartido:

Encontrar um emparelhamento com número máximo de arestas.



Um emparelhamento perfeito é aquele onde todo vértice é emparelhado.

Problema do emparelhamento perfeito: *Há um emp. perfeito?*

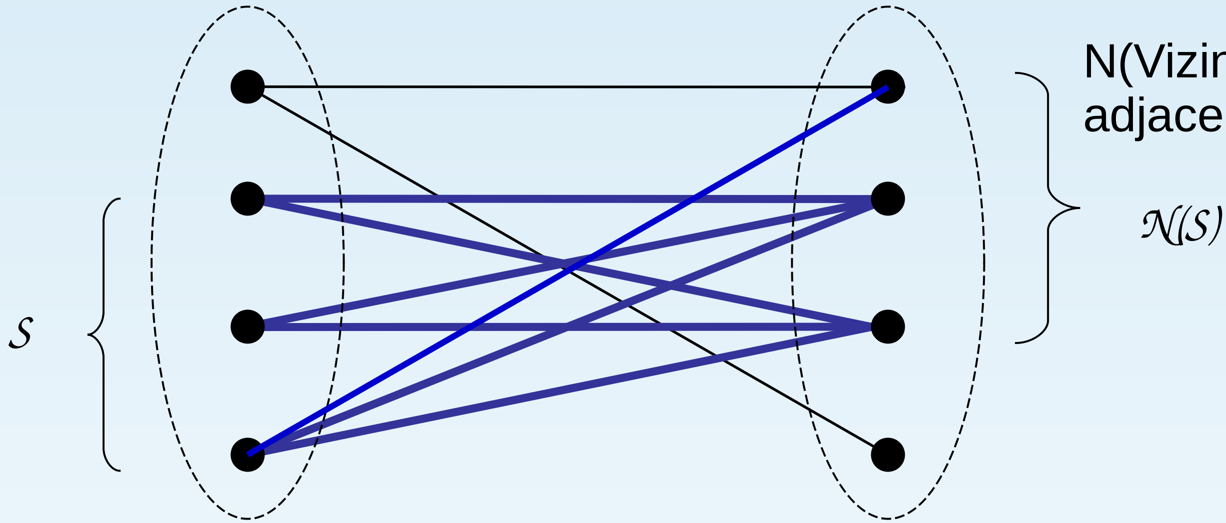
Existência de Emparelhamento Perfeito

Condição necessária e suficiente

Teorema de Hall [1935]:

Um grafo bipartido G=(A,B;E) tem um emparelhamento que "satura" A se, e somente se, |N(S)| >= |S| para todo subconjunto S de A.

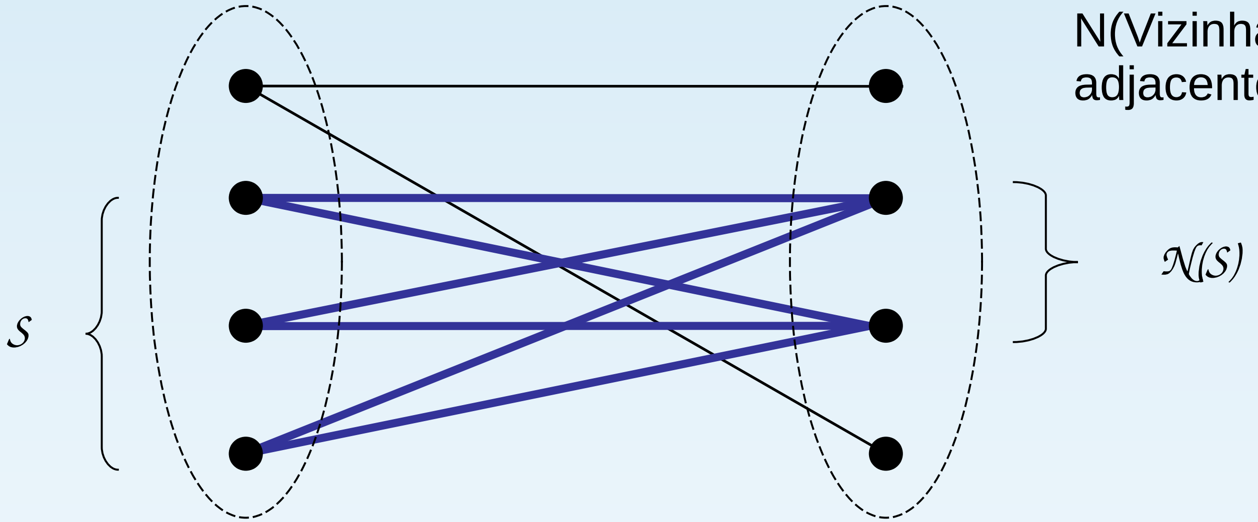
Exemplo: Existência de Emparelhamento Perfeito



N(Vizinhança): vértices adjacentes.

N(S)=S => Existe emparelhamento perfeito

Exemplo: Existência de Emparelhamento Perfeito



N(Vizinhança): vértices adjacentes.

N(S)<S => Não existe emparelhamento perfeito

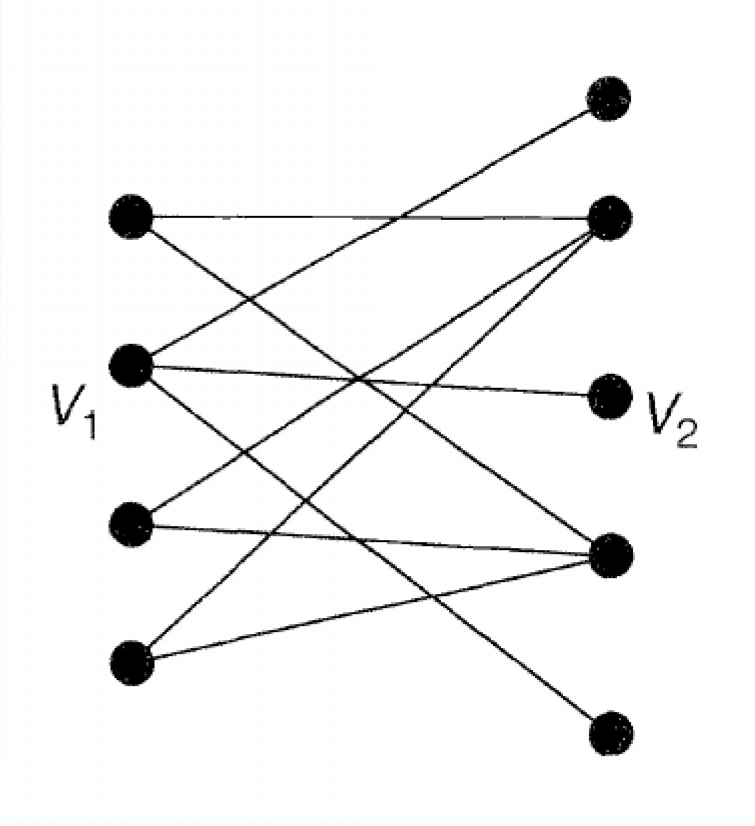
Emparelhamento/Casamento Estável

Usando o Teorema de Hall [1935] e avaliando o que se chama "problema do casamento/emparelhamento estável".

Uma condição necessária e suficiente é que cada conjunto de k garotas coletivamente conheça (estabeleça uma relação) pelo menos k garotos, sendo 1<=k<=m

Emparelhamento/Casamento Estável

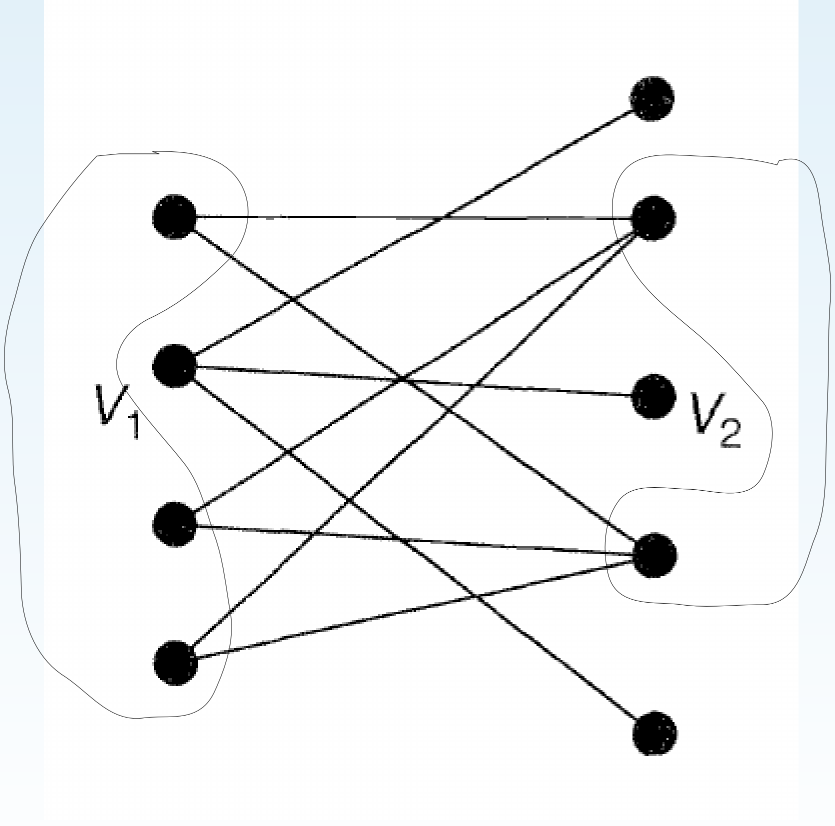
A condição de Hall é satisfeita?



Emparelhamento/Casamento Estável

A condição de Hall é satisfeita?

Não



Ex: Emparelhamento/Casamento Estável

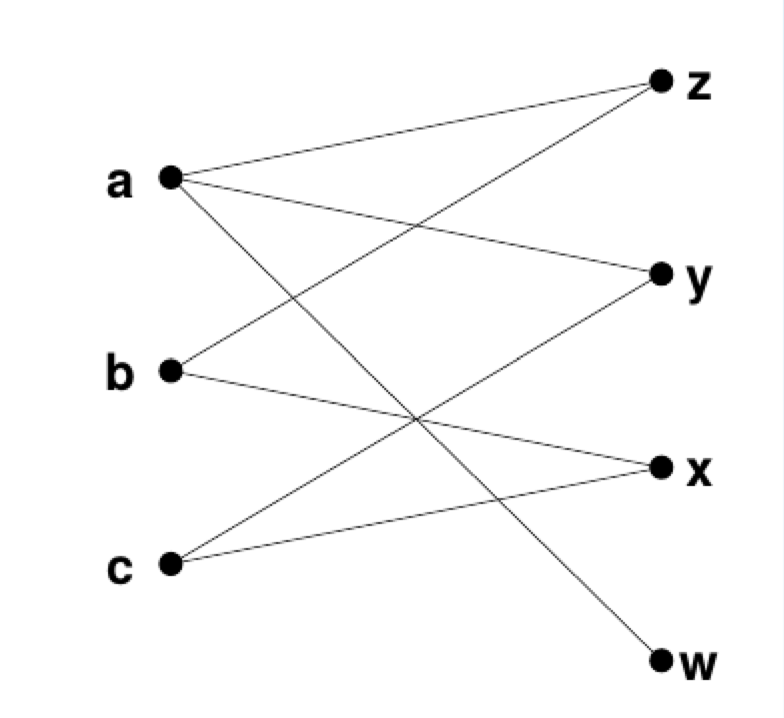
Suponha a seguinte tabela de relações. Grafo?

B	G		
a	w	y	z
b	x	z	
c	x	y	

Ex: Emparelhamento/Casamento Estável

Suponha a seguinte tabela de relações. Grafo?

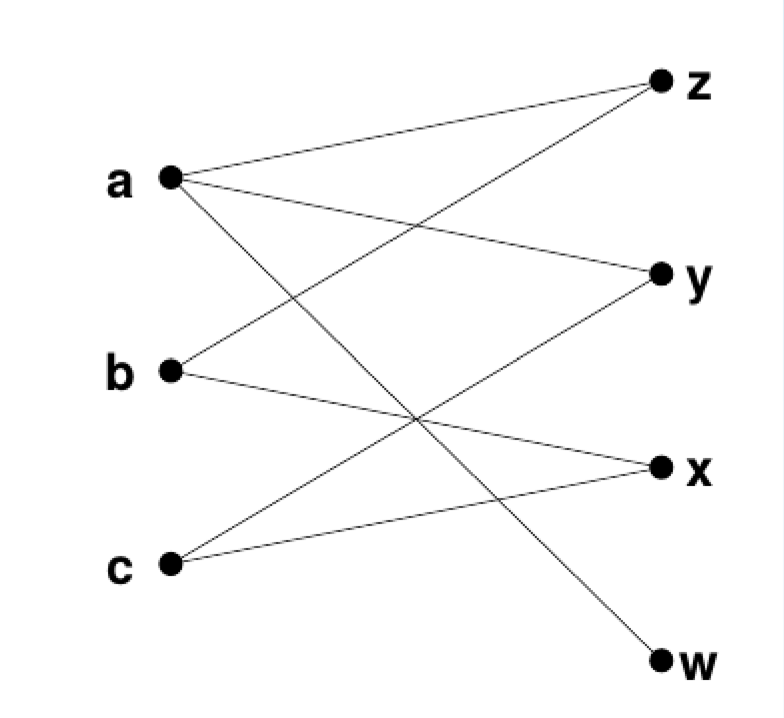
B	G		
a	w	y	z
b	x	z	
c	x	y	



Ex: Emparelhamento/Casamento Estável

Suponha a seguinte tabela de relações. Grafo?

B	G		
a	w	y	z
b	x	z	
c	x	y	

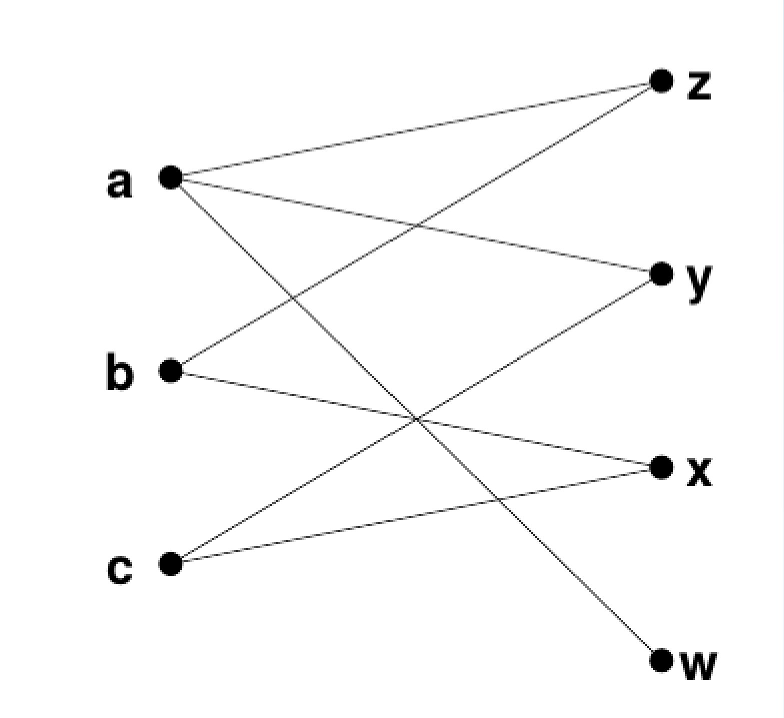


Possível realizar emparelhamentos 1-1 para todos? Quantos?

Ex: Emparelhamento/Casamento Estável

Suponha a seguinte tabela de relações. Grafo?

B	G		
a	w	y	z
b	x	z	
c	x	y	



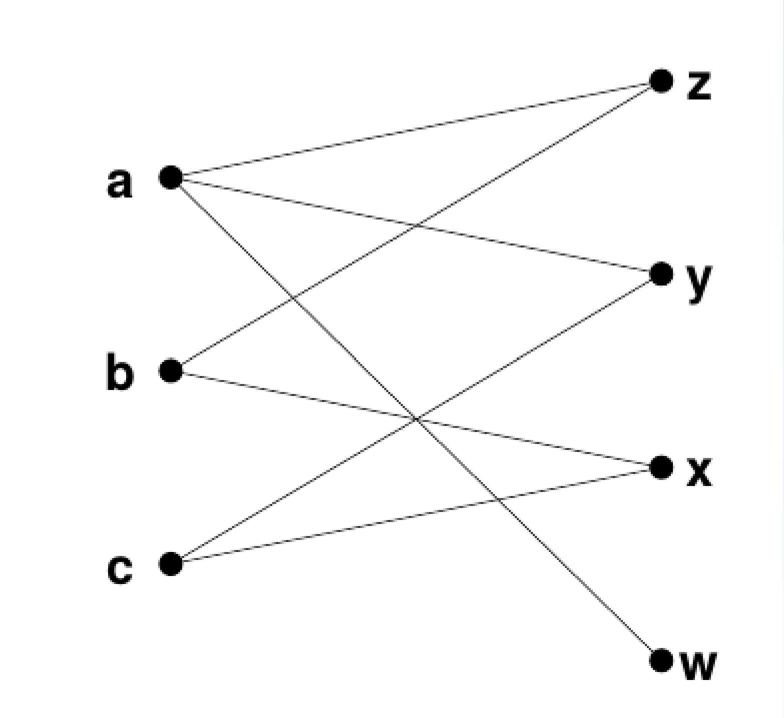
Possível realizar emparelhamentos 1-1 para todos? Sim.

A	$\emptyset$	a	b	c	ab	ac	bc	abc
$\lvert A\rvert$	0	1	1	1	2	2	2	3
$\lvert\phi(A)\rvert$	0	3	2	2	4	4	3	4

Ex: Emparelhamento/Casamento Estável

Suponha a seguinte tabela de relações. Grafo?

B	G		
a	w	y	z
b	x	z	
c	x	y	



Possível realizar emparelhamentos 1-1 para todos? Sim. Quantos?

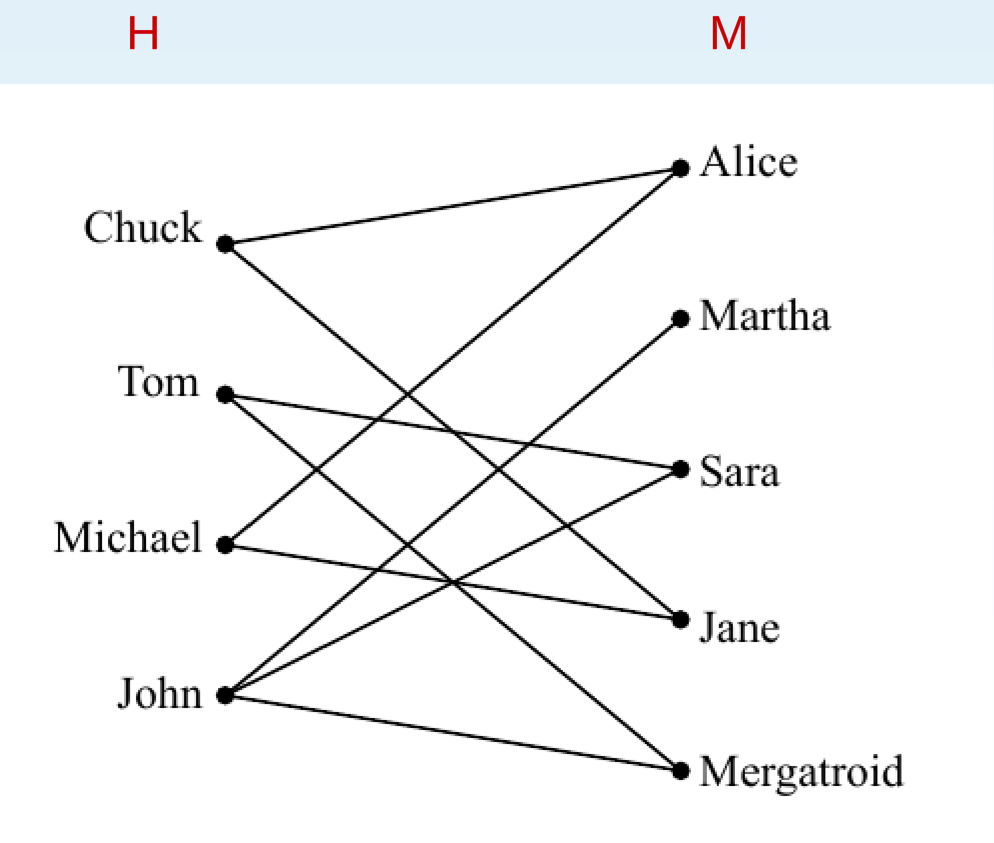
$aw, bx, cy;$ $aw, bz, cx;$ $aw, bz, cy;$

$ay, bz, cx;$ $az, bx, cy.$

O problema do casamento/emparelhamento máximo?

Sejam dois conjuntos de vértices (homens, mulheres), onde a aresta entre dois vértices indica que há uma afeição/interesse entre os mesmos. Como encontrar Casamentos/emparelhamentos para o máximo de casais possível?

exemplo



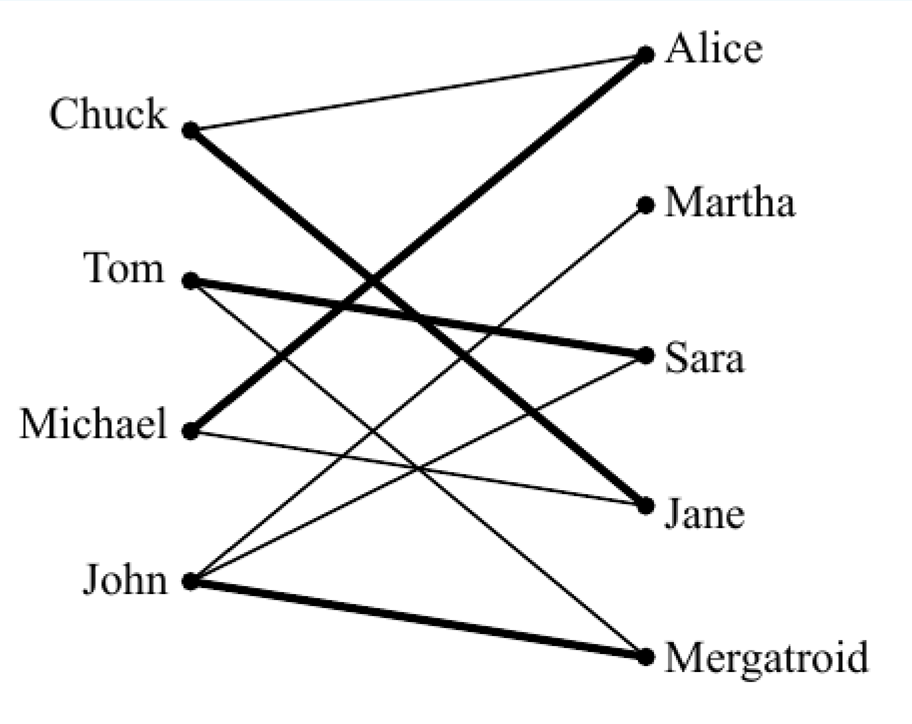
Lehman, Leigthon & Meyer, 2016.

O problema do casamento/emparelhamento máximo?

Uma possível solução (arestas em negrito)

exemplo

H M



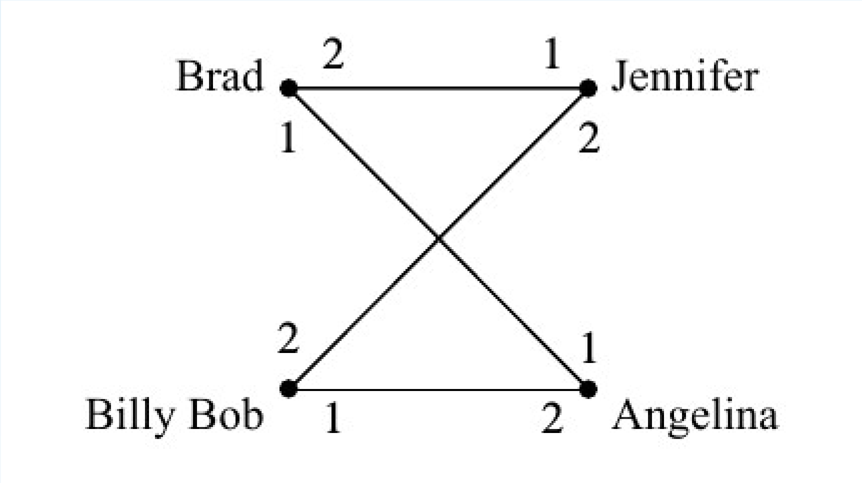
Lehman, Leigthon & Meyer, 2016.

O problema do casamento/emparelhamento estável com preferências?

Suponha, para o emparelhamento estável, que os dois conjuntos sejam do mesmo tamanho, e que cada uma das pessoas (i.e. vértices) possuam preferências ordenadas (exclusivas, i.e. sem empates).

H M

exemplo



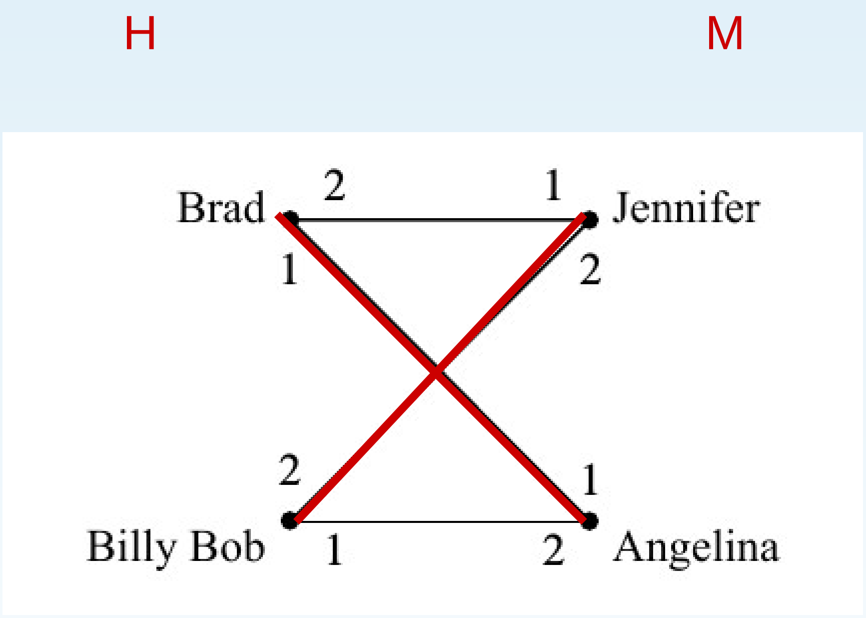
Menor valor, maior preferência

Lehman, Leigthon & Meyer, 2016.

O problema do casamento/emparelhamento estável?

As preferências de Brad e Angelina são (1) entre os mesmos, portanto um emparelhamento estável indicaria.

exemplo estável



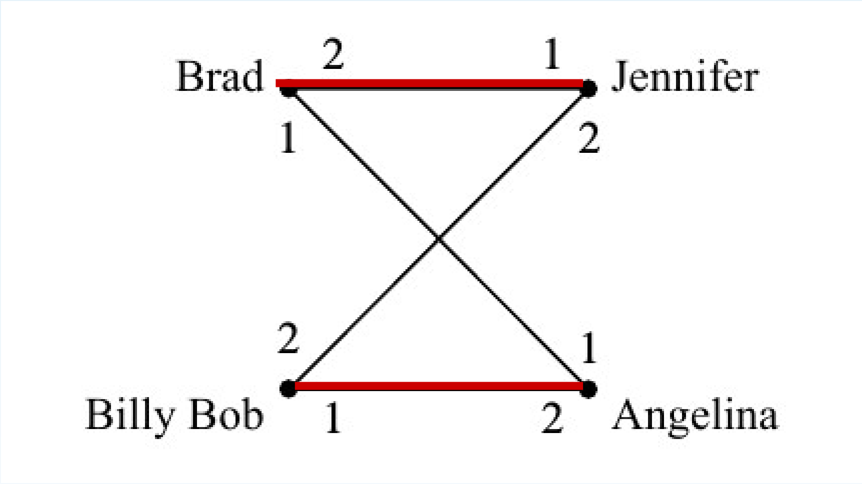
Lehman, Leigthon & Meyer, 2016.

O problema do casamento/emparelhamento estável?

Se as outras ligações fossem escolhidas (exemplo abaixo), o casal Brad e Angelina seria um potencial desequilíbrio (e.g. casal desonesto pois se gostam mais do que aos próprios parceiros).

H M

exemplo instável

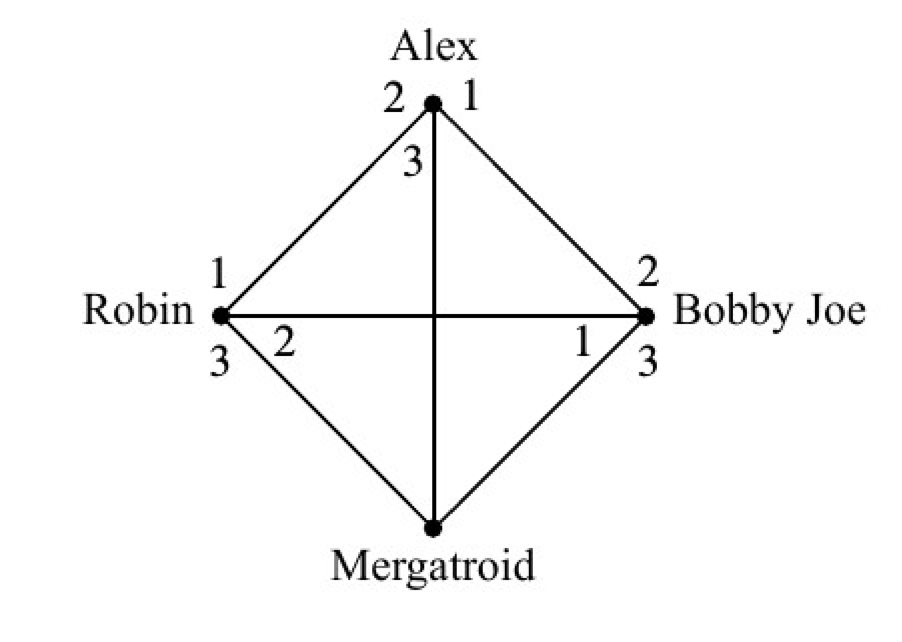


Lehman, Leigthon & Meyer, 2016.

O problema do casamento/emparelhamento estável?

A instabilidade desses emparelhamentos ocorre quando casais (pares) forem escolhidos (i.e. arestas selecionadas), permitindo melhores preferências existirem e não serem escolhidas. Há situações onde a estabilidade não é possível.

exemplo instável



Lehman, Leigthon & Meyer, 2016.

O problema do casamento/emparelhamento estável?

Sejam as seguintes preferências:

	favorite 1st	2nd	least favorite 3rd
Xavier	Amy	Bertha	Clare
Yancey	Bertha	Amy	Clare
Zeus	Amy	Bertha	Clare

Men's Preference Profile

	favorite 1st	2nd	least favorite 3rd
Amy	Yancey	Xavier	Zeus
Bertha	Xavier	Yancey	Zeus
Clare	Xavier	Yancey	Zeus

Women's Preference Profile

Sedgewick & Wayne, 2011

O problema do casamento/emparelhamento estável?

O emparelhamento (X, C), (Y, B) e (Z, A) é estável?:

	favorite 1st	2nd	least favorite 3rd
Xavier	Amy	Bertha	Clare
Yancey	Bertha	Amy	Clare
Zeus	Amy	Bertha	Clare

Men's Preference Profile

	favorite 1st	2nd	least favorite 3rd
Amy	Yancey	Xavier	Zeus
Bertha	Xavier	Yancey	Zeus
Clare	Xavier	Yancey	Zeus

Women's Preference Profile

Sedgewick & Wayne, 2011

O problema do casamento/emparelhamento estável?

O emparelhamento (X, C), (Y, B) e (Z, A) é estável?: Não. O casal (X, B) possui maior afinidade do que entre seus parceiros propostos.

	1st (favorite)	2nd	3rd (least favorite)
Xavier	Amy	Bertha	Clare
Yancey	Bertha	Amy	Clare
Zeus	Amy	Bertha	Clare

Men's Preference List

	1st (favorite)	2nd	3rd (least favorite)
Amy	Yancey	Xavier	Zeus
Bertha	Xavier	Yancey	Zeus
Clare	Xavier	Yancey	Zeus

Women's Preference List

Sedgewick & Wayne, 2011

O problema do casamento/emparelhamento estável?

O emparelhamento (X, A), (Y, B) e (Z, C) é estável?:

	favorite 1st	2nd	least favorite 3rd
Xavier	Amy	Bertha	Clare
Yancey	Bertha	Amy	Clare
Zeus	Amy	Bertha	Clare

Men's Preference List

	favorite 1st	2nd	least favorite 3rd
Amy	Yancey	Xavier	Zeus
Bertha	Xavier	Yancey	Zeus
Clare	Xavier	Yancey	Zeus

Women's Preference List

Sedgewick & Wayne, 2011

O problema do casamento/emparelhamento estável?

O emparelhamento (X, A), (Y, B) e (Z, C) é estável?: Sim.

	favorite 1st	2nd	least favorite 3rd
Xavier	Amy	Bertha	Clare
Yancey	Bertha	Amy	Clare
Zeus	Amy	Bertha	Clare

Men's Preference List

	favorite 1st	2nd	least favorite 3rd
Amy	Yancey	Xavier	Zeus
Bertha	Xavier	Yancey	Zeus
Clare	Xavier	Yancey	Zeus

Women's Preference List

Sedgewick & Wayne, 2011

Algoritmo Gale-Shapley, 1962

D. Gale and L.S. Shapley, "College Admissions and the Stability of Marriage," *American Mathematical Monthly*, v.69, (1962), pp. 9–14.

```
Initialize each person to be free.
while (some man is free and hasn't proposed to every woman) {
    Choose such a man m
    w = 1st woman on m's list to whom m has not yet proposed
    if (w is free)
        assign m and w to be engaged
    else if (w prefers m to her fiancé m')
        assign m and w to be engaged, and m' to be free
    else
        w rejects m
}
```

Algoritmo Gale-Shapley, 1962

The Mating Ritual

The procedure for finding a stable matching involves a *Mating Ritual* that takes place over several days. The following events happen each day:

Morning: Each woman stands on her balcony. Each man stands under the balcony of his favorite among the women on his list, and he serenades her. If a man has no women left on his list, he stays home and does his math homework.

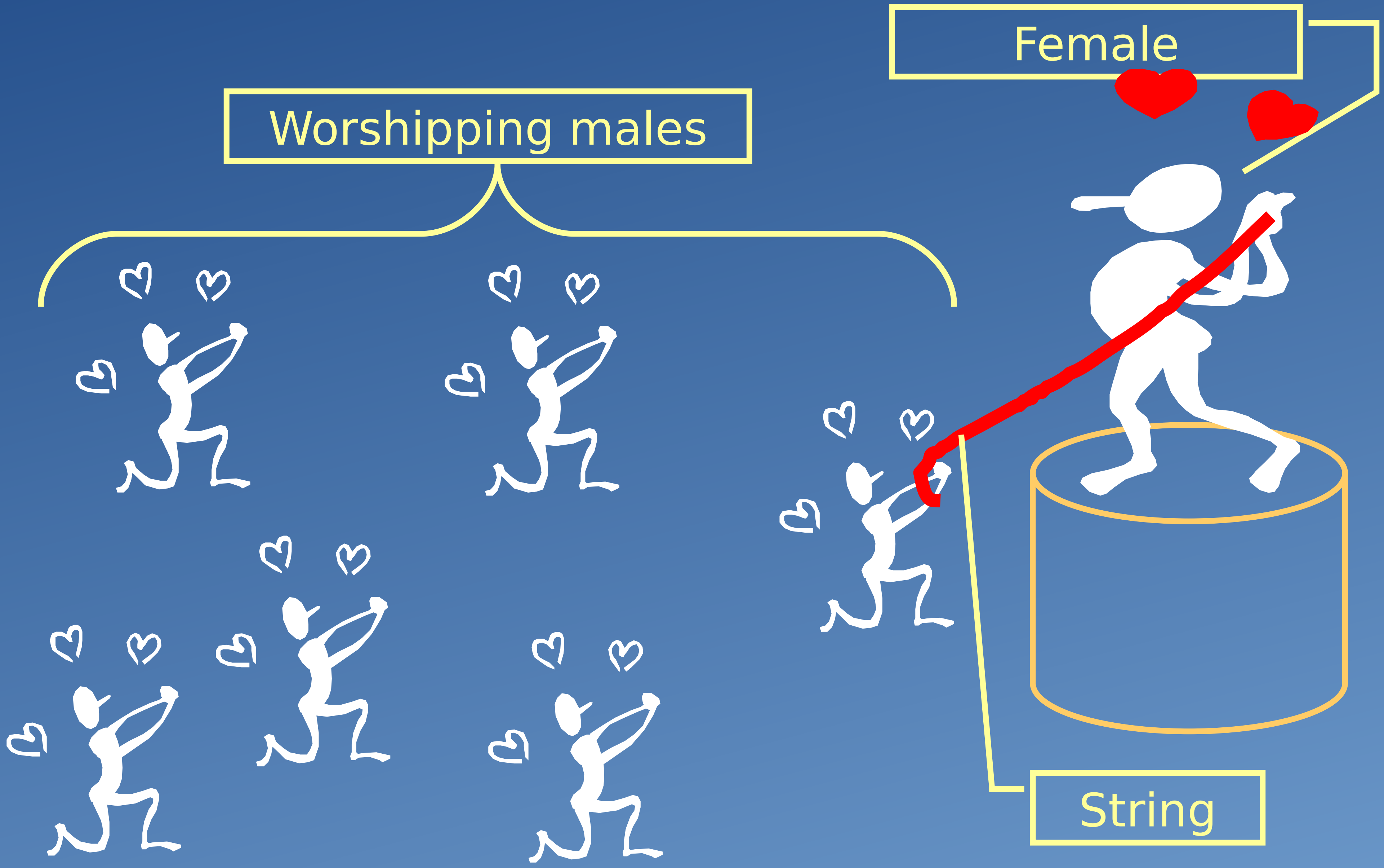
Afternoon: Each woman who has one or more suitors serenading her, says to her favorite among them, "We might get engaged. Come back tomorrow." To the other suitors, she says, "No. I will never marry you! Take a hike!"

Evening: Any man who is told by a woman to take a hike, crosses that woman off his list.

Termination condition: When a day arrives in which every woman has at most one suitor, the ritual ends with each woman marrying her suitor, if she has one.

Lehman, Leigthon & Meyer, 2016.

Situação considerada no algoritmo tradicional G-S



Steven Rudich: www.discretemath.com
www.rudich.net

Exercício: Simule o algoritmo G-S e encontre um emparelhamento estável.

Resultados/teoremas algoritmo Gale-Shapley

* Todos ficam casados/emparelhados.

* O algoritmo G-S produz um emparelhamento estável.

* O algoritmo G-S termina no máximo em N(N-1) + 1 rodadas.

Steven Rudich: www.discretemath.com
www.rudich.net

O algoritmo G-S tradicional sempre produz um emparelhamento favorável ao grupo masculino (i.e. *male-optimal, female-pessimal*).

Steven Rudich: www.discretemath.com
www.rudich.net

Aplicações para o algoritmo de casamento estável (Gale-Shapley)

Quatro estudantes se canditaram a vagas em 4 universidades. Estudantes e universidades ranquearam sua preferências. Siga o algoritmo G-S e encontre uma alocação estável de acordo com esssa preferências.

Student	Schools
Wanda	UA, UC Davis, Cornell, UC Berkeley
Xander	Cornell, UC Davis, UC Berkeley, UA
Yvonne	UA, UC Berkeley, Cornell, UC Davis
Zack	UC Berkeley, Cornell, UC Davis, UA

School	Students
U Arizona	Zack, Yvonne, Wanda, Xander
UC Berkeley	Xander, Zack, Yvonne, Wanda
Cornell	Zack, Wanda, Yvonne, Xander
UC Davis	Yvonne, Xander, Wanda, Zack

Exemplo: Alocando médicos residentes em hospitais

- Sejam n_1 *residentes* $r_1, r_2, \ldots, r_{n_1}$ e n_2 *hospitais* $h_1, h_2, \ldots, h_{n_2}$
- Cada hospital possue uma *capacidade*
- Residentes ranqueiam hospitais em ordem de preferência, hospitais fazem o mesmo
- r vê h *aceitável* se h estiver na lista de preferência de r, e inaceitável caso contrário (e vice-versa)
- Um *emparelhamento* M é um conjunto de pares (residentes-hospitais) tal que:
  - $(r,h) \in M \Rightarrow r, h$ vê um ao outro aceitável
  - Nenhum residente aparece em mais que um par
  - Nenhum hospital parece em mais pares que sua capacidade

Exemplo: Alocando médicos residentes em hospitais

r_1: h_2 h_1

r_2: h_1 h_2

r_3: h_1 h_3

r_4: h_2 h_3

r_5: h_2 h_1

r_6: h_1 h_2

Preferências dos residentes

Cada hospital tem capacidade 2

h_1: r_1 r_3 r_2 r_5 r_6

h_2: r_2 r_6 r_1 r_4 r_5

h_3: r_4 r_3

Preferências dos hospitais

Exemplo: Alocando médicos residentes em hospitais

Podemos inicializar alocação pelos hospitais, ou pelos residentes

Cada hospital tem capacidade **2**

r_1: h_2 h_1

r_2: h_1 h_2

r_3: h_1 h_3

r_4: h_2 h_3

r_5: h_2 h_1

r_6: h_1 h_2

Preferências dos residentes

h_1: r_1 r_3 r_2 r_5 r_6

h_2: r_2 r_6 r_1 r_4 r_5

h_3: r_4 r_3

Preferências dos hospitais

Exemplo: Alocando médicos residentes em hospitais

r_1: h_2 h_1

r_2: h_1 h_2

r_3: h_1 h_3

r_4: h_2 h_3

r_5: h_2 h_1

r_6: h_1 h_2

Pref. residentes

Cada hospital tem capacidade 2

h_1: r_1 r_3 r_2 r_5 r_6

h_2: r_2 r_6 r_1 r_4 r_5

h_3: r_4 r_3

Pref. hospitais

$M = \{(r_1, h_1), (r_2, h_2), (r_3, h_3), (r_5, h_2), (r_6, h_1)\}$ (tamanho 5)

Exemplo: Alocando médicos residentes em hospitais

r_1: h_2 h_1

r_2: h_1 h_2

r_3: h_1 h_3

r_4: h_2 h_3

r_5: h_2 h_1

r_6: h_1 h_2

Pref. residentes

Cada hospital tem capacidade 2

h_1: r_1 r_3 r_2 r_5 r_6

h_2: r_2 r_6 r_1 r_4 r_5

h_3: r_4 r_3

Pref. hospitais

$M = \{(r_1, h_1), (r_2, h_2), (r_3, h_3), (r_5, h_2), (r_6, h_1)\}$ (tamanho 5)

estável?

Exemplo: Alocando médicos residentes em hospitais

r_1: h_2 h_1

r_2: h_1 h_2

r_3: h_1 h_3

r_4: h_2 h_3

r_5: h_2 h_1

r_6: h_1 h_2

Pref. residentes

Cada hospital tem capacidade 2

h_1: r_1 r_3 r_2 r_5 r_6

h_2: r_2 r_6 r_1 r_4 r_5

h_3: r_4 r_3

Pref. hospitais

$M = \{(r_1, h_1), (r_2, h_2), (r_3, h_3), (r_5, h_2), (r_6, h_1)\}$ (tamanho 5)

Estável? Não pois o par (r_2, h_1) possui melhor relação de preferência

Exemplo: Alocando médicos residentes em hospitais

r_1: h_2 h_1

r_2: h_1 h_2

r_3: h_1 h_3

r_4: h_2 h_3

r_5: h_2 h_1

r_6: h_1 h_2

Pref. residentes

Cada hospital tem capacidade 2

h_1: r_1 r_3 r_2 r_5 r_6

h_2: r_2 r_6 r_1 r_4 r_5

h_3: r_4 r_3

Pref. hospitais

$M = \{(r_1, h_1), (r_2, h_2), (r_3, h_3), (r_5, h_2), (r_6, h_1)\}$ (tamanho 5)

Estável? Não pois os pares (r_2, h_1) e (r_4, h_2) possuem melhores relações de preferência

Exemplo: Alocando médicos residentes em hospitais

r_1: h_2 h_1

r_2: h_1 h_2

r_3: h_1 h_3

r_4: h_2 h_3

r_5: h_2 h_1

r_6: h_1 h_2

Pref. residentes

Cada hospital tem capacidade 2

h_1: r_1 r_3 r_2 r_5 r_6

h_2: r_2 r_6 r_1 r_4 r_5

h_3: r_4 r_3

Pref. hospitais

$M = \{(r_1, h_1), (r_2, h_2), (r_3, h_3), (r_5, h_2), (r_6, h_1)\}$ (tamanho 5)

Estável? Não pois os pares (r_2, h_1) , (r_4, h_2) e (r_4, h_3) possuem melhores relações de preferência

Exemplo: Alocando médicos residentes em hospitais

Fazendo o algoritmo Gale-Shapley pelos residentes

r_1: h_2 h_1

r_2: h_1 h_2

r_3: h_1 h_3

r_4: h_2 h_3

r_5: h_2 h_1

r_6: h_1 h_2

Preferências dos residentes

Cada hospital tem capacidade 2

h_1: r_1 r_3 r_2 r_5 r_6

h_2: r_2 r_6 r_1 r_4 r_5

h_3: r_4 r_3

Preferências dos hospitais

Exemplo: Alocando médicos residentes em hospitais

Fazendo o algoritmo Gale-Shapley pelos residentes

Cada hospital tem capacidade 2

r_1: h_2 h_1
r_2: h_1 h_2
r_3: h_1 h_3
r_4: h_2 h_3
r_5: h_2 h_1
r_6: h_1 h_2

Preferências dos residentes

h_1: r_1 r_3 r_2 r_5 r_6
h_2: r_2 r_6 r_1 r_4 r_5
h_3: r_4 r_3

Preferências dos hospitais

Exemplo: Alocando médicos residentes em hospitais

Fazendo o algoritmo Gale-Shapley pelos residentes

r_1: h_2 h_1

r_2: h_1 h_2

r_3: h_1 h_3

r_4: h_2 h_3

r_5: h_2 h_1

r_6: h_1 h_2

Preferências dos residentes

Cada hospital tem capacidade **2**

h_1: r_1 r_3 r_2 r_5 r_6

h_2: r_2 r_6 r_1 r_4 r_5

h_3: r_4 r_3

Preferências dos hospitais

Exemplo: Alocando médicos residentes em hospitais

Fazendo o algoritmo Gale-Shapley pelos residentes

Cada hospital tem capacidade 2

r_1: h_2 h_1

r_2: h_1 h_2

r_3: h_1 h_3

r_4: h_2 h_3

r_5: h_2 h_1

r_6: h_1 h_2

Preferências dos residentes

h_1: r_1 r_3 r_2 r_5 r_6

h_2: r_2 r_6 r_1 r_4 r_5

h_3: r_4 r_3

Preferências dos hospitais

Exemplo: Alocando médicos residentes em hospitais

Fazendo o algoritmo Gale-Shapley pelos residentes

r_1: h_2 h_1

r_2: h_1 h_2

r_3: h_1 h_3

r_4: h_2 h_3

r_5: h_2 h_1

r_6: h_1 h_2

Preferências dos residentes

Cada hospital tem capacidade **2**

h_1: r_1 r_3 r_2 r_5 r_6

h_2: r_2 r_6 r_1 r_4 r_5

h_3: r_4 r_3

Preferências dos hospitais

Exemplo: Alocando médicos residentes em hospitais

Fazendo o algoritmo Gale-Shapley pelos residentes

r_1: h_2 h_1

r_2: h_1 h_2

r_3: h_1 h_3

r_4: h_2 h_3

r_5: h_2 h_1

r_6: h_1 h_2

Preferências dos residentes

Cada hospital tem capacidade **2**

h_1: r_1 r_3 r_2 r_5 r_6

h_2: r_2 r_6 r_1 r_4 r_5

h_3: r_4 r_3

Preferências dos hospitais

Exemplo: Alocando médicos residentes em hospitais

Fazendo o algoritmo Gale-Shapley pelos residentes

r_1: h_2 h_1

r_2: h_1 h_2

r_3: h_1 h_3

r_4: h_2 h_3

r_5: $\cancel{h_2}$ h_1

r_6: h_1 h_2

Preferências dos residentes

Cada hospital tem capacidade 2

h_1: r_1 r_3 r_2 r_5 r_6

h_2: r_2 r_6 r_1 r_4 $\cancel{r_5}$

h_3: r_4 r_3

Preferências dos hospitais

Exemplo: Alocando médicos residentes em hospitais

Fazendo o algoritmo Gale-Shapley pelos residentes

r_1: h_2 h_1

r_2: h_1 h_2

r_3: h_1 h_3

r_4: h_2 h_3

r_5: $\cancel{h_2}$ h_1

r_6: $\cancel{h_1}$ h_2

Preferências dos residentes

Cada hospital tem capacidade **2**

h_1: r_1 r_3 r_2 r_5 $\cancel{r_6}$

h_2: r_2 r_6 r_1 r_4 $\cancel{r_5}$

h_3: r_4 r_3

Preferências dos hospitais

4 pares estáveis, mas é possível um emparelhamento maior?

Exemplo: Alocando médicos residentes em hospitais

Fazendo o algoritmo Gale-Shapley pelos residentes

Cada hospital tem capacidade 2

r_1: h_2 h_1

r_2: h_1 h_2

r_3: h_1 h_3

r_4: h_2 h_3

r_5: $\cancel{h_2}$ h_1?

r_6: $\cancel{h_1}$ h_2

h_1: r_1 r_3 r_2 r_5 $\cancel{r_6}$

h_2: r_2 r_6 r_1 r_4 $\cancel{r_5}$

h_3: r_4 r_3

Preferências dos residentes

Preferências dos hospitais

4 pares estáveis, mas é possível um emparelhamento maior?

Exemplo: Alocando médicos residentes em hospitais

Fazendo o algoritmo Gale-Shapley pelos residentes

Cada hospital tem capacidade **2**

r_1: h_2 h_1

r_2: h_1 h_2

r_3: h_1 h_3

r_4: h_2 h_3

r_5: $\cancel{h_2}$ $\cancel{h_1}$?

r_6: $\cancel{h_1}$ h_2

Preferências dos residentes

h_1: r_1 r_3 r_2 $\cancel{r_5}$ $\cancel{r_6}$

h_2: r_2 r_6 r_1 r_4 $\cancel{r_5}$

h_3: r_4 r_3

Preferências dos hospitais

4 pares estáveis, mas é possível um emparelhamento maior?

Exemplo: Alocando médicos residentes em hospitais

Fazendo o algoritmo Gale-Shapley pelos residentes

Cada hospital tem capacidade **2**

r_1: h_2 h_1

r_2: h_1 h_2

r_3: h_1 h_3

r_4: h_2 h_3

r_5: $\cancel{h_2}$ $\cancel{h_1}$?

r_6: $\cancel{h_1}$ h_2?

Preferências dos residentes

h_1: r_1 r_3 r_2 $\cancel{r_5}$ $\cancel{r_6}$

h_2: r_2 r_6 r_1 r_4 $\cancel{r_5}$

h_3: r_4 r_3

Preferências dos hospitais

4 pares estáveis, mas é possível um emparelhamento maior?

Exemplo: Alocando médicos residentes em hospitais

Fazendo o algoritmo Gale-Shapley pelos residentes

r_1: h_2 h_1

r_2: h_1 h_2

r_3: h_1 h_3

r_4: h_2 h_3

r_5: $\cancel{h_2}$ $\cancel{h_1}$?

r_6: $\cancel{h_1}$ h_2?

Cada hospital tem capacidade **2**

h_1: r_1 r_3 r_2 $\cancel{r_5}$ $\cancel{r_6}$

h_2: r_2 r_6 r_1 $\cancel{r_4}$ $\cancel{r_5}$

h_3: r_4 r_3

Preferências dos residentes

Preferências dos hospitais

4 pares estáveis, mas é possível um emparelhamento maior?

Exemplo: Alocando médicos residentes em hospitais

Fazendo o algoritmo Gale-Shapley pelos residentes

Cada hospital tem capacidade **2**

r_1: h_2 h_1

r_2: h_1 h_2

r_3: h_1 h_3

r_4: $\cancel{h_2}$ h_3?

r_5: $\cancel{h_2}$ $\cancel{h_1}$?

r_6: $\cancel{h_1}$ h_2

Preferências dos residentes

h_1: r_1 r_3 r_2 $\cancel{r_5}$ $\cancel{r_6}$

h_2: r_2 r_6 r_1 $\cancel{r_4}$ $\cancel{r_5}$

h_3: r_4 r_3

Preferências dos hospitais

4 pares estáveis, mas é possível um emparelhamento maior?

Exemplo: Alocando médicos residentes em hospitais

r_1: h_2 h_1

r_2: h_1 h_2

r_3: h_1 h_3

r_4: h_2 h_3

r_5: h_2 h_1

r_6: h_1 h_2

Pref. residentes

Cada hospital tem capacidade 2

h_1: r_1 r_3 r_2 r_5 r_6

h_2: r_2 r_6 r_1 r_4 r_5

h_3: r_4 r_3

Pref. hospitais

$M = \{(r_1, h_2), (r_2, h_1), (r_3, h_1), (r_4, h_3), (r_6, h_2)\}$ (tamanho 5)

Solução estável r_5 não é escolhido

h_3 não preenche capacidade

Alocações com empates, condições práticas gerais GS Hospitais/Residentes

- Na prática, listas de pref. dos residentes são curtas;
- Listas de pref. dos hospitais são geralmente longas, então *empates* podem ser usados;
- Um hospital pode ser *indiferente* aentre vários residentes
- E.g., $\mathbf{h_1: \ (r_1\ r_3)\ \ r_2\ (r_5\ r_6\ \ r_8)}$
- Emparelhamento ***M*** será *estável* se não houver par ***(r,h)*** **tal que**:
  1. ***r***, ***h*** veja um ao outro aceitável
  2. *ou* ***r*** não esteja emparelhado em ***M***

     ou ***r*** prefere ***h*** ao invés do hospital a ele atribuído em ***M***
  3. ou ***h*** não esteja completamente preenchido em ***M***

     ou ***h*** prefere ***r*** ao invés do seu pior residente atribuído em ***M***

Variações/extensões emparelhamento estável

- Listas de preferências parciais
- Empates nas escolhas das preferências
- Várias aplicações
  - Ajuste de tráfego servidores-usuários
  - Emparelhamentos Médicos-Hospitais
  - Candidatos-Empresas(Escolas, Universidades)
  - Listas de transplantes
  - Preços-mercados

Prêmio Nobel de Economia (2012) para Roth & Shapley

KUNGL. VETENSKAPS-AKADEMIEN
THE ROYAL SWEDISH ACADEMY OF SCIENCES

THE PRIZE IN ECONOMIC SCIENCES 2012

INFORMATION FOR THE PUBLIC

Stable matching: Theory, evidence, and practical design

*This year's Prize to **Lloyd Shapley** and **Alvin Roth** extends from abstract theory developed in the 1960s, over empirical work in the 1980s, to ongoing efforts to find practical solutions to real-world problems. Examples include the assignment of new doctors to hospitals, students to schools, and human organs for transplant to recipients. Lloyd Shapley made the early theoretical contributions, which were unexpectedly adopted two decades later when Alvin Roth investigated the market for U.S. doctors. His findings generated further analytical developments, as well as practical design of market institutions.*

http://www.nobelprize.org/nobel_prizes/economic-sciences/laureates/2012/popular-economicsciences2012.pdf

Referências Bibliográficas

- Bogart, K. & Stein, C. & Drysdale, R. Discrete Mathematics for Computer Science. Key College Pub., 2006.
- Bondy, J. & Murty, *Graph Theory with Applications*, Elsevier, 1982.
- Lehman, E. Leighton, F.T. & Meyer, A.R. *Mathematics for Computer Science*, 2016.
- Sedgewick, R. & Wayne, K. *Algorithms* (4th ed.), Addison-Wesley, 2011.
- Wilson, R. & Watkins, J. *Graphs: An Introductory Approach.* John Wiley, 1990.