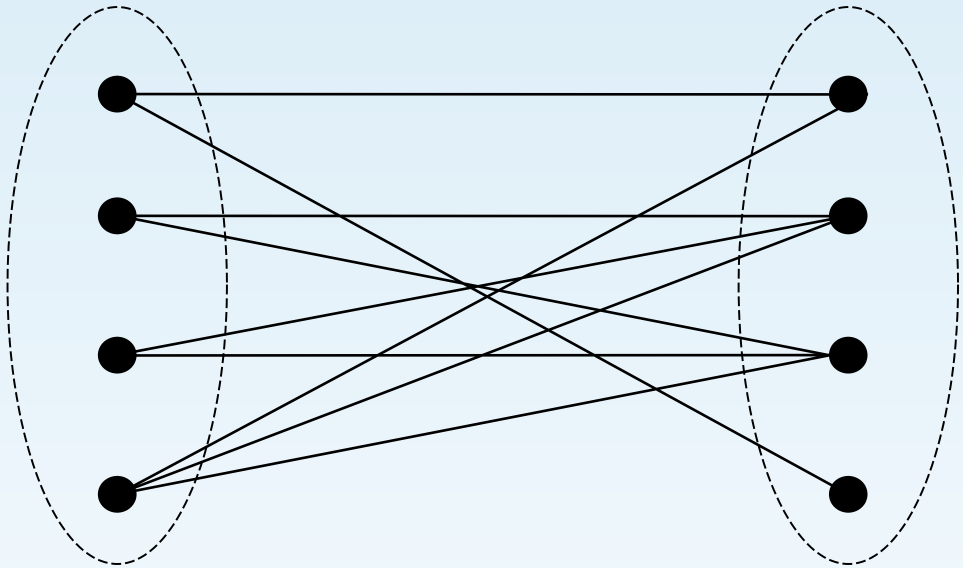
Teoria e Aplicação de Grafos

Roteiro da aula:

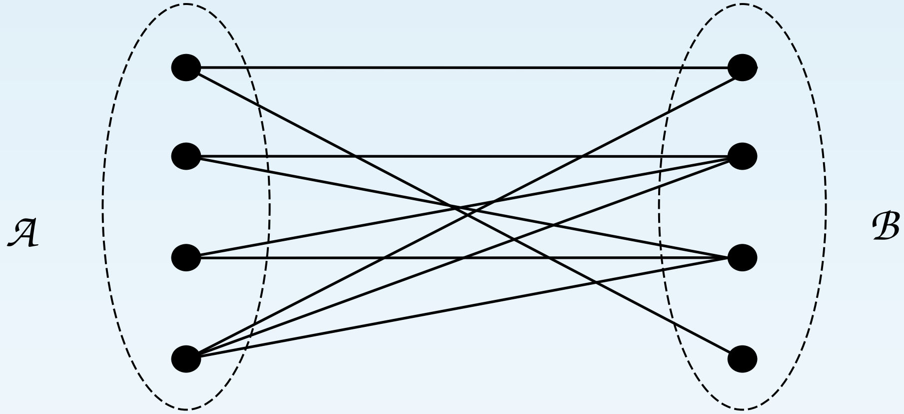
- **Emparelhamentos *(Matchings)***
- **Emparelhamentos bipartidos**
- **Definições**
- **Emparelhamentos Máximos, Maximais, Perfeitos**
- **Teorema de Hall**
- **Condição de Konig**
- **Caminhos aumentados**
- **Exemplos**

Emparelhamentos Bipartidos



Emparelhamentos Bipartidos

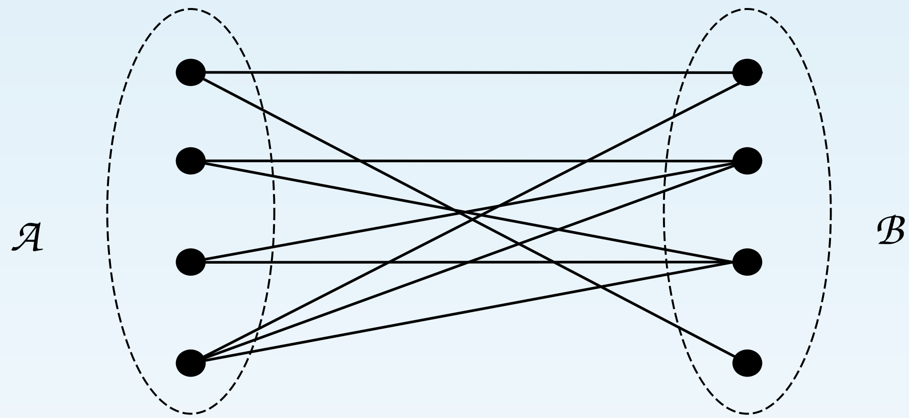
*Um grafo é **bipartido** se seu conjunto de vértices pode ser particionado em dois subconjuntos $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ tal que cada aresta tenha um vértice em $\mathcal{A}$ e outro em $\mathcal{B}$.*



*Um **emparelhamento** $\mathcal{M}$ é um subconjunto de arestas tal que todo vértice tem grau máximo um em $\mathcal{M}$.*

Conjuntos Independentes

Um grafo é ***bipartido*** *se seu conjunto de vértices pode ser particionado em dois subconjuntos A e B tal que cada aresta tenha um vértice em A e outro em B.*

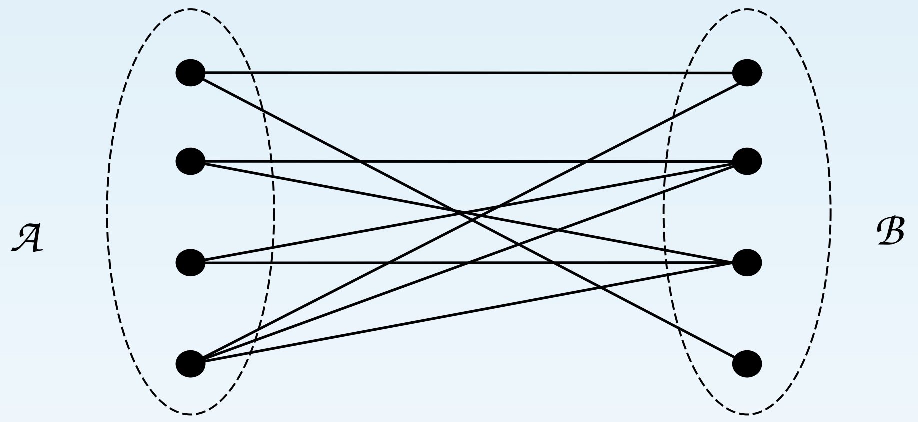


Um ***emparelhamento*** *M é um subconjunto de arestas tal que todo vértice tem grau máximo um em M.*

Uma parte (e.g. A ou B) de um grafo bipartido é também um exemplo de um ***conjunto independente.***

Conjuntos Independentes

*Um **conjunto independente** é um subconjunto de vértices de um grafo que não possuem arestas ligando-os entre si.*

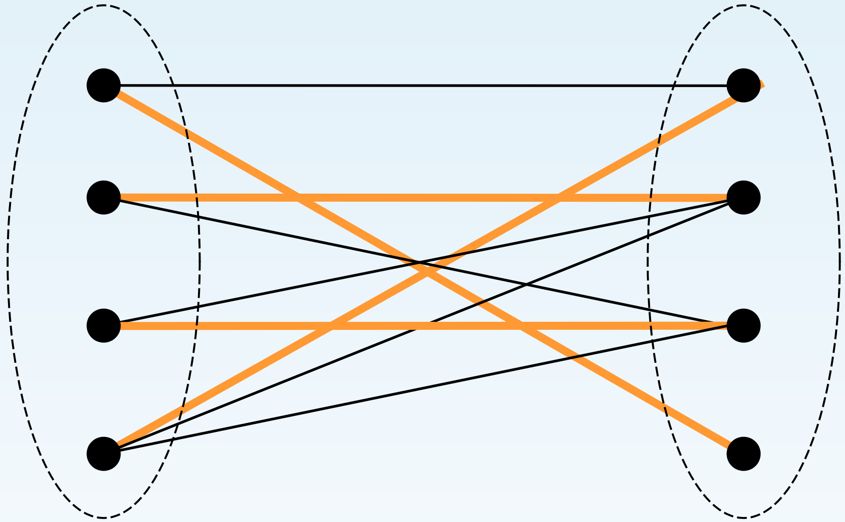


Um grafo é bipartido se, e somente se, seu conjunto de vértices for uma união de dois conjuntos independentes de vértices.

Emparelhamento Máximo

Problema do emparelhamento bipartido:

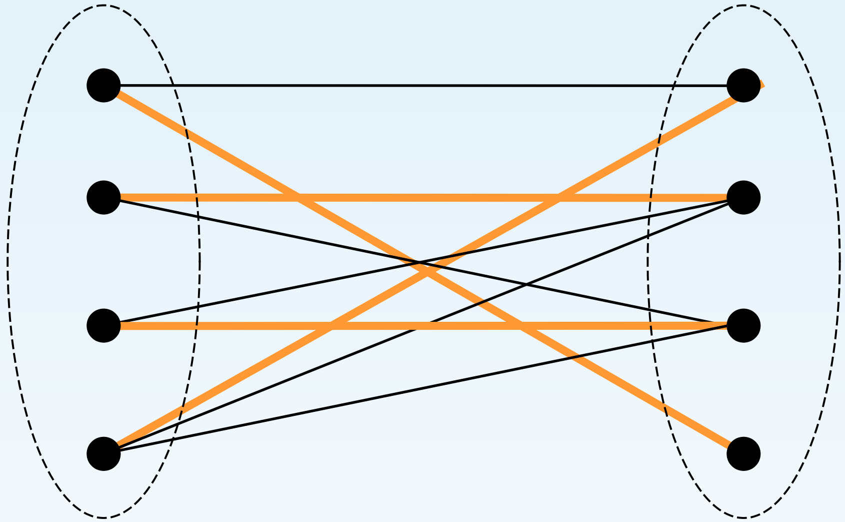
Encontrar um emparelhamento com número máximo de arestas.



Emparelhamento Máximo

Problema do emparelhamento bipartido:

Encontrar um emparelhamento com número máximo de arestas.



Um emparelhamento perfeito é aquele onde todo vértice é emparelhado.

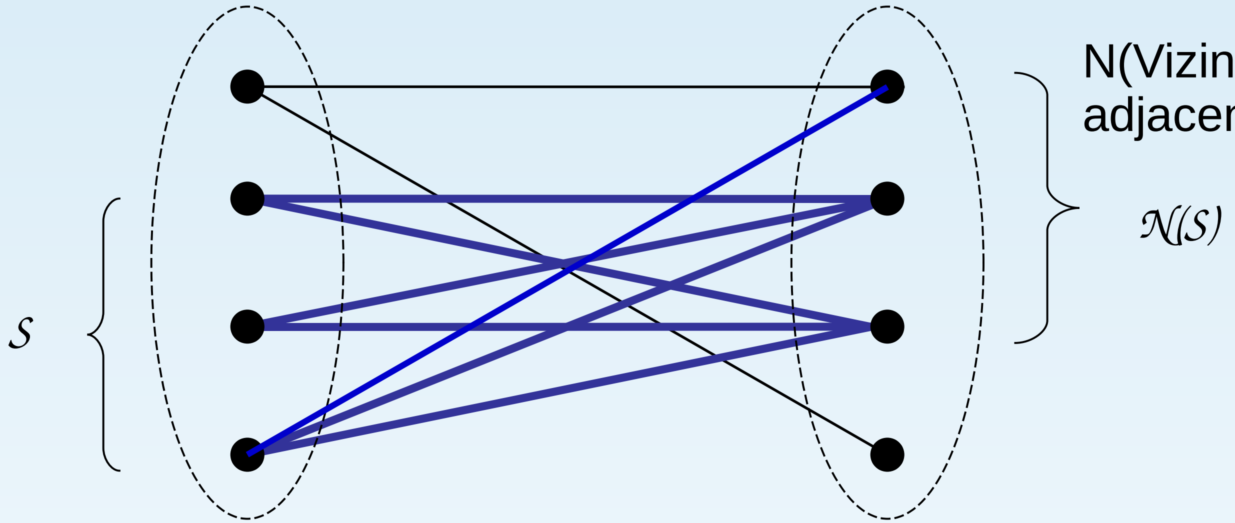
Problema do emparelhamento perfeito: *Há um emp. perfeito?*

Existência de Emparelhamento Perfeito

Teorema de Hall [1935]:

Um grafo bipartido G=(A,B;E) tem um emparelhamento que "satura" A se, e somente se, |N(S)| >= |S| para todo subconjunto S de A.

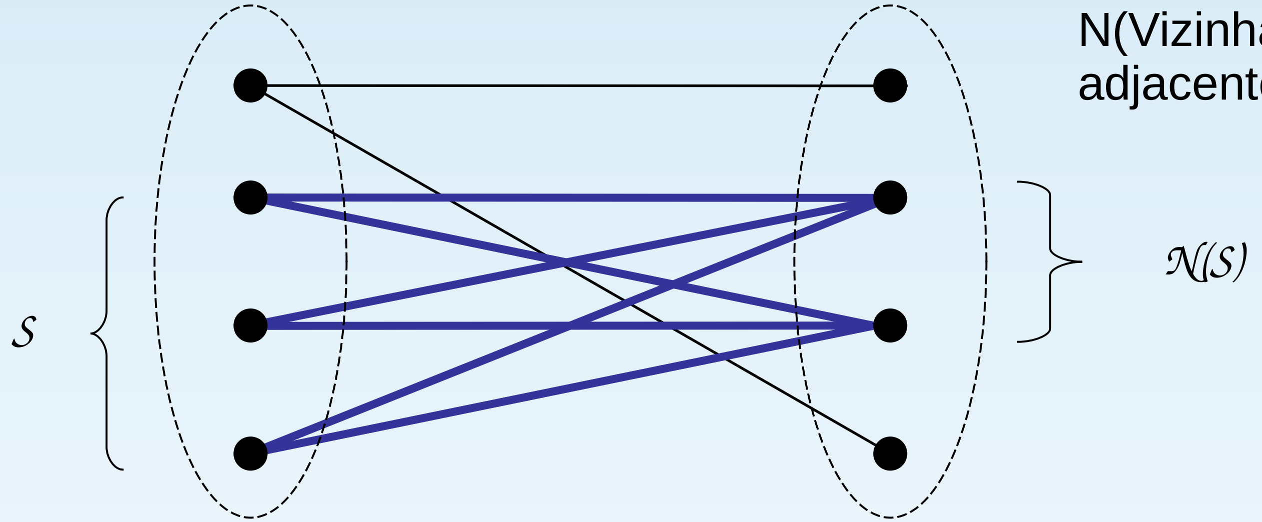
Exemplo: Existência de Emparelhamento Perfeito



N(Vizinhança): vértices adjacentes.

N(S)=S => Existe emparelhamento perfeito

Exemplo: Existência de Emparelhamento Perfeito



N(Vizinhança): vértices adjacentes.

N(S)<S => Não existe emparelhamento perfeito

Emparelhamentos Máximo e Maximal

- **Emparelhamento Máximo: M é um emparelhamento máximo para G se M tem a maior cardinalidade entre todos os possíveis emparelhamentos.**

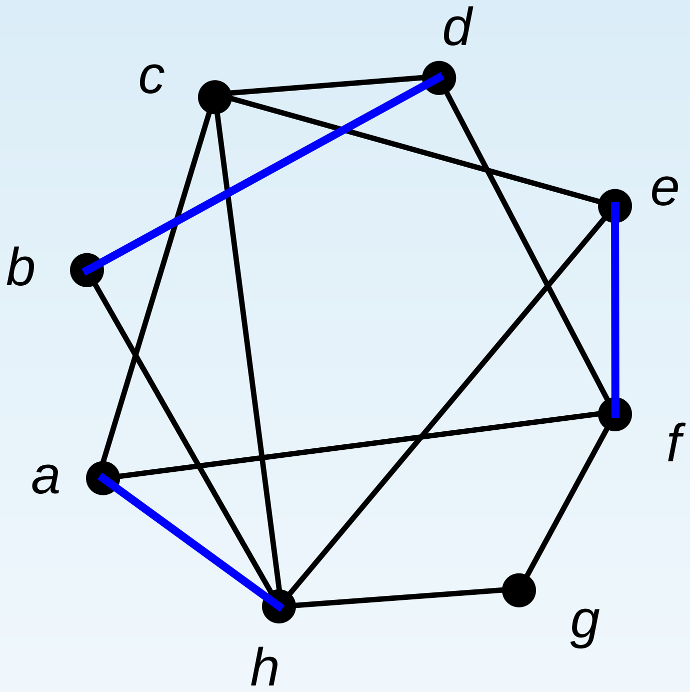
Emparelhamentos Máximo e Maximal

- **Emparelhamento Máximo: M é um emparelhamento máximo para G se M tem a maior cardinalidade entre todos os possíveis emparelhamentos.**
- **Emparelhamento Maximal: Um emparelhamento maximal M que não pode ser aumentado ao adicionar arestas, i.e. não há M’ que contenha M.**

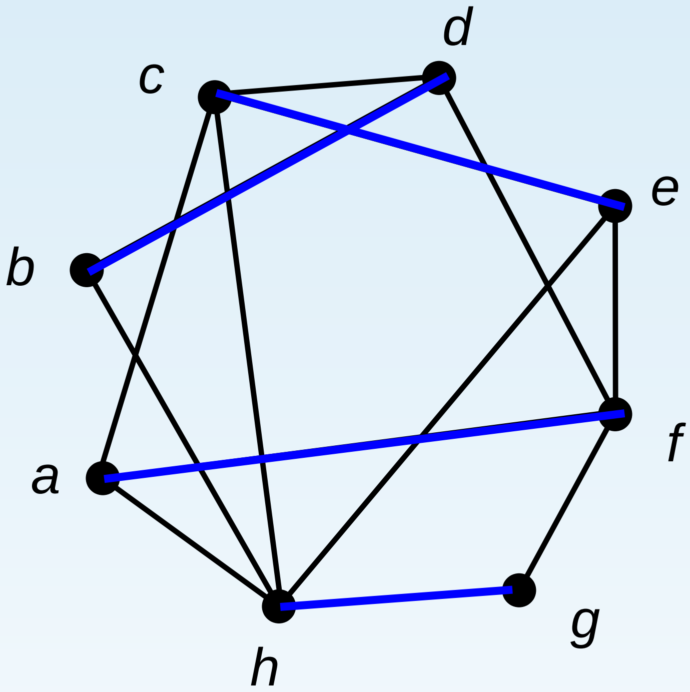
Emparelhamentos Máximo e Maximal

- **Emparelhamento Máximo: M é um emparelhamento máximo para G se M tem a maior cardinalidade entre todos os possíveis emparelhamentos.**
- **Emparelhamento Maximal: Um emparelhamento maximal M que não pode ser aumentado ao adicionar arestas, i.e. não há M’ que contenha M.**
- **Emparelhamento máximo é a meta principal**

Emparelhamentos Máximo e Maximal



(a) Maximal



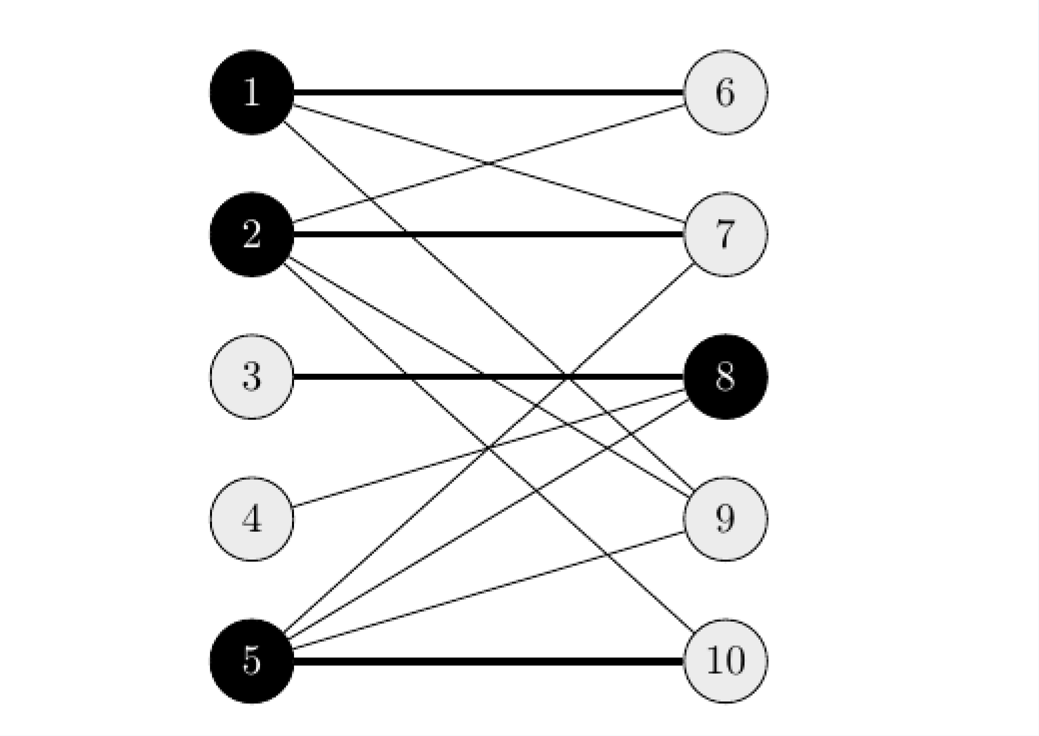
(b) Máximo

Limite superior para Emparelhamento Máximo

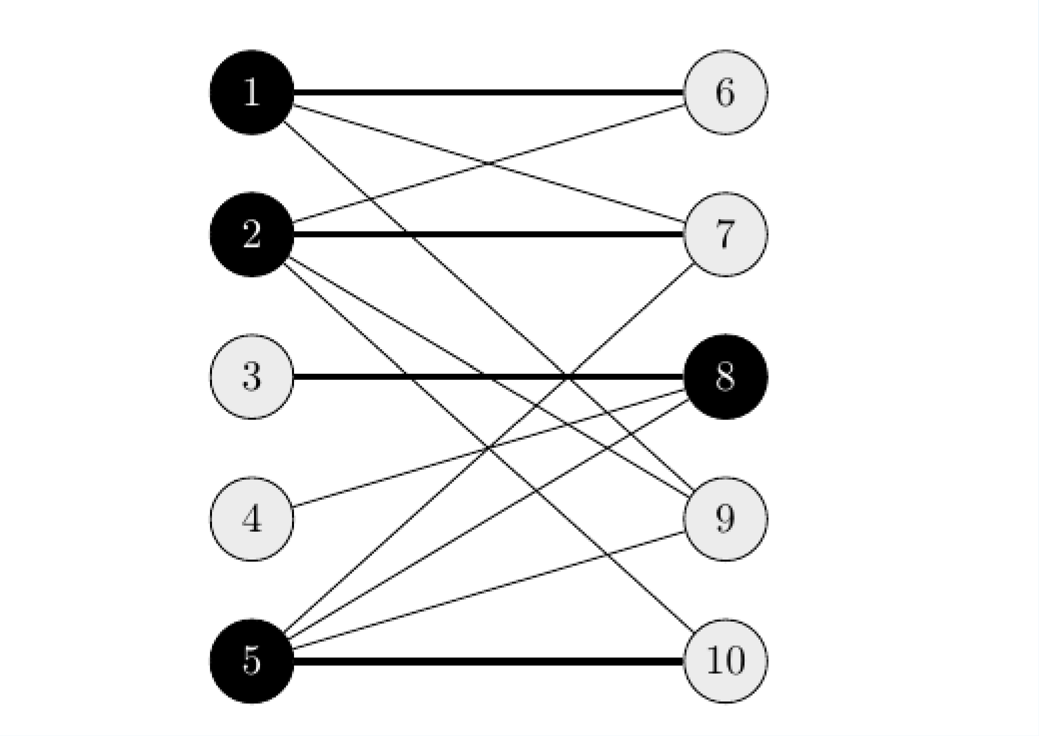
König [1931]:

*Em um grafo bipartido, o tamanho de um emparelhamento máximo é **igual** ao tamanho de uma cobertura mínima de vértices.*

Limite superior para Emparelhamento Máximo

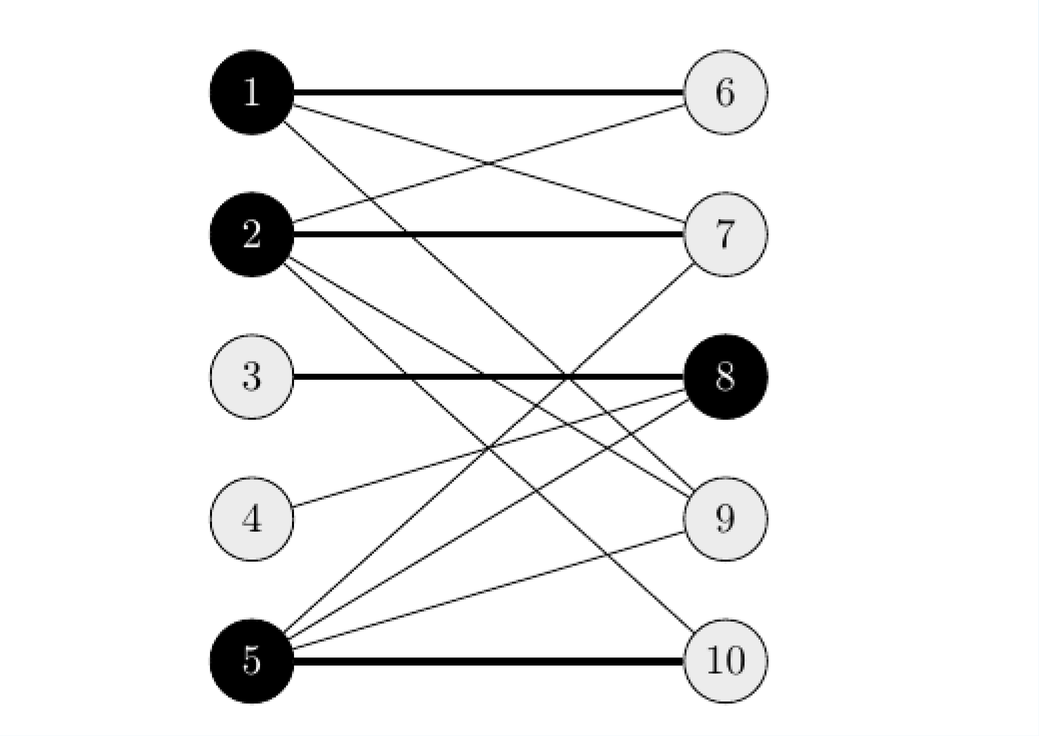


Limite superior para Emparelhamento Máximo



Arestas (1,6), (2,7), (3,8), (5, 10) formam um emparelhamento máximo (4)

Limite superior para Emparelhamento Máximo



Arestas (1,6), (2,7), (3,8), (5, 10) formam um emparelhamento máximo (4)

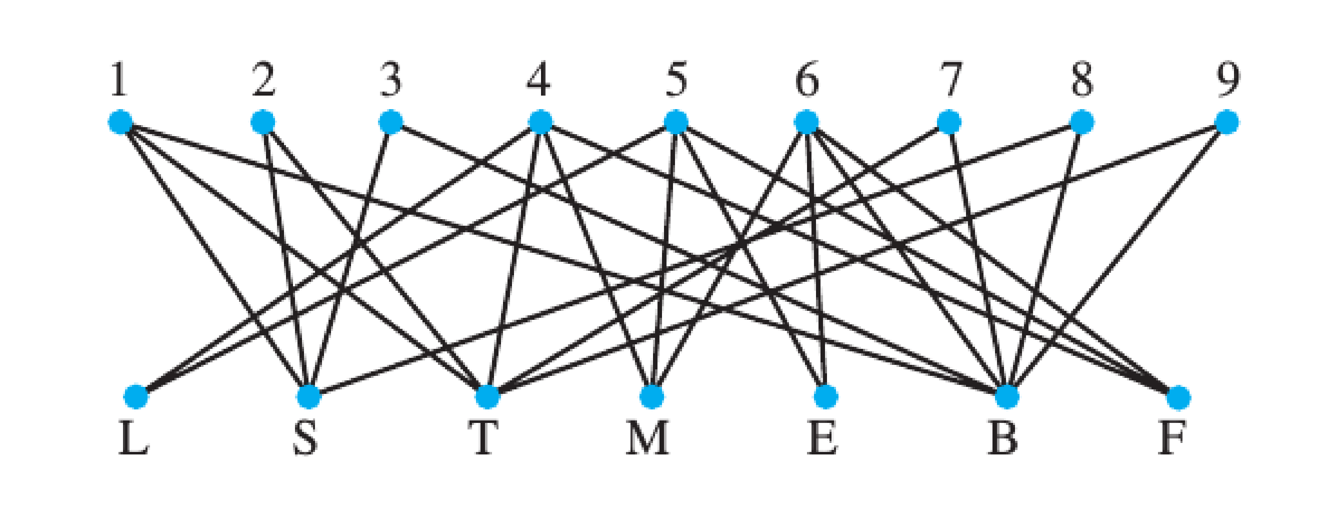
Vértices 1, 2, 5, 8 formam uma cobertura de vértices mínima (4)

Ex: Dada essa tabela de candidatos, construir um possível emparelhamento para todas as vagas?

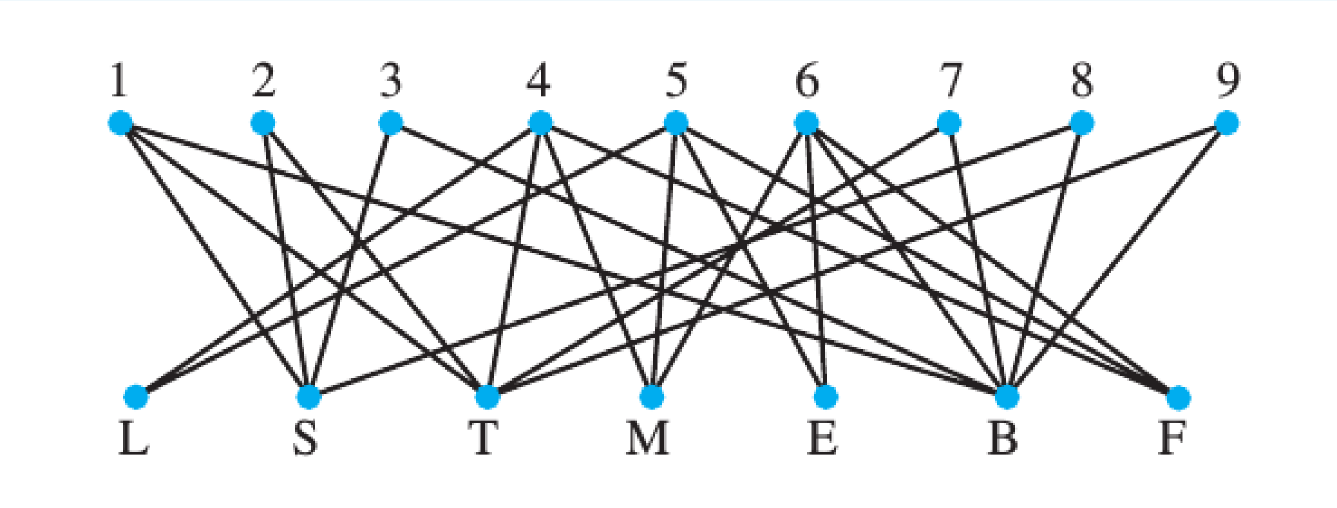
Job \ Applicant	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Assistant librarian				x	x				
Second grade	x	x	x					x	
Third grade	x	x		x			x		x
High school math				x	x	x			
High school English					x	x			
Asst. baseball coach	x		x			x	x	x	x
Asst. football coach				x	x	x			

Table 6.2: *Some other sample job application data*

Ex: Dada essa tabela de candidatos, construir um possível emparelhamento para todas as vagas?

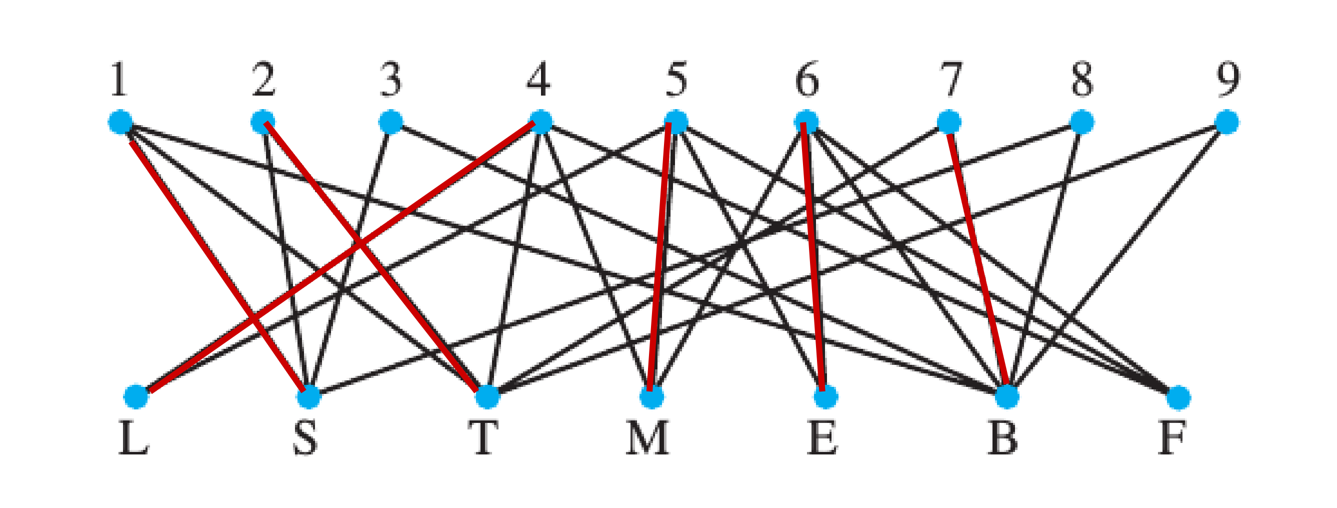


Ex: Dada essa tabela de candidatos, construir um possível emparelhamento para todas as vagas?



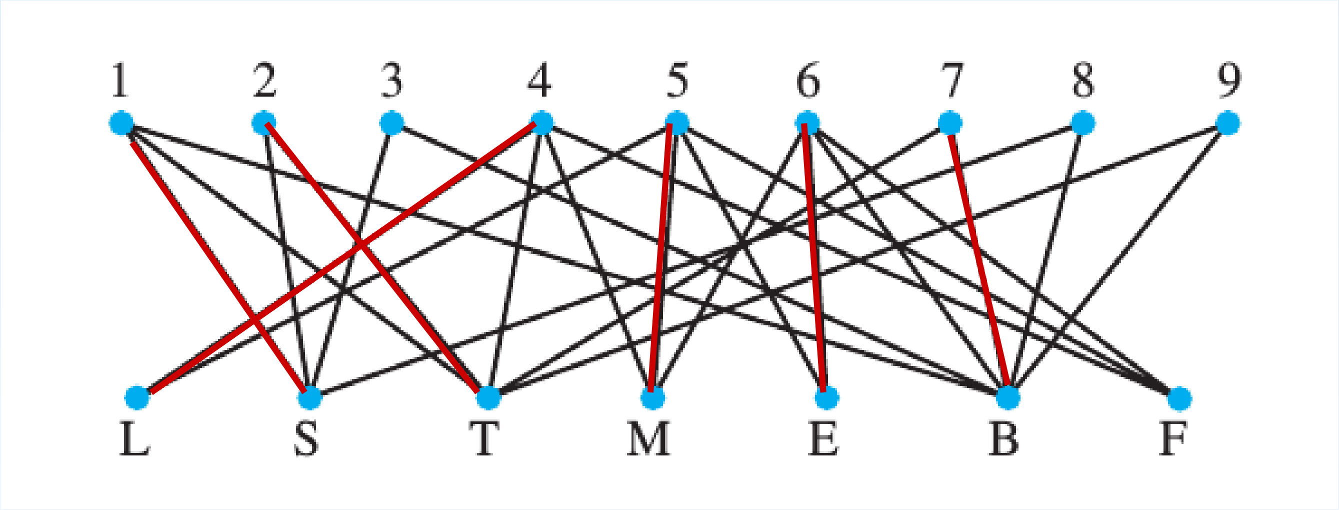
Como construir o maior emparelhamento possível?

Ex: Dada essa tabela de candidatos, construir um possível emparelhamento para todas as vagas?



Iniciar escolhendo possíveis arestas com vértices terminais livres

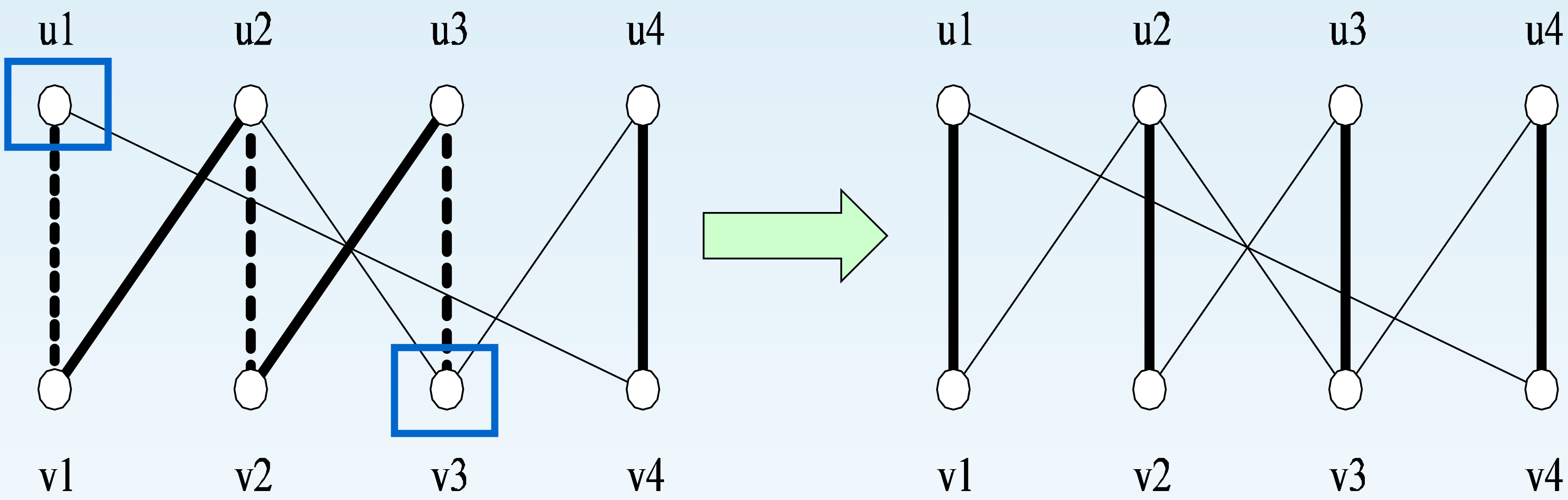
Ex: Dada essa tabela de candidatos, construir um possível emparelhamento para todas as vagas?



Iniciar escolhendo possíveis arestas com vértices terminais livres.

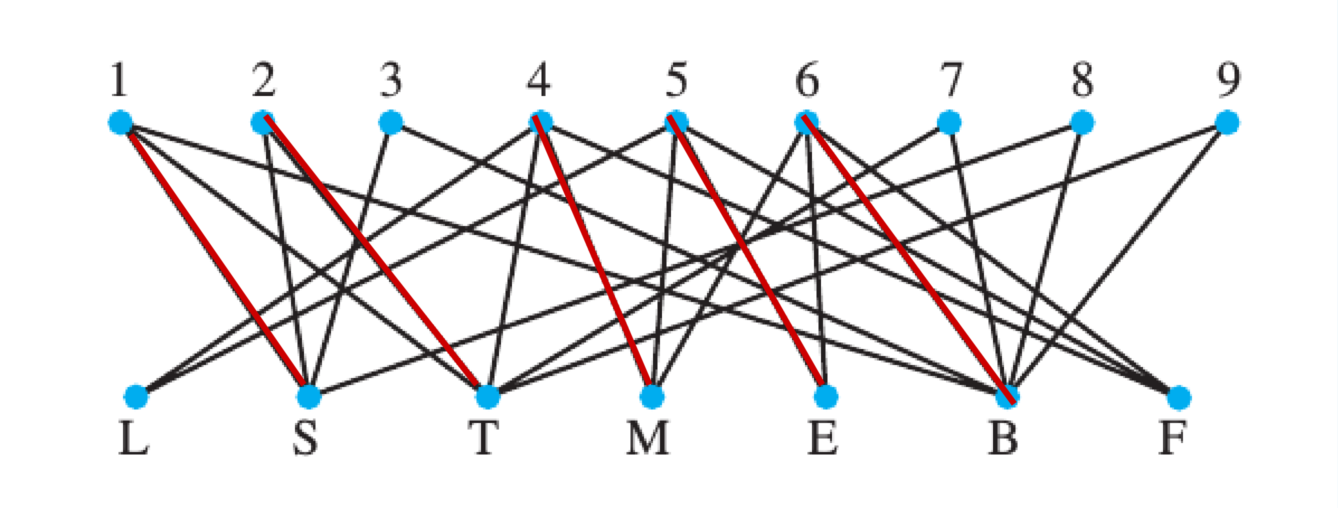
Possível aumentar a partir deste? Outro?

Caminhos aumentados



Dado um emparelhamento M, um ***caminho M-alternado*** *é um caminho que alterna entre arestas em M e arestas não em M. Um caminho M-alternado cujos vértices terminais não estão emparelhados em M é um* ***caminho M-aumentado****.*

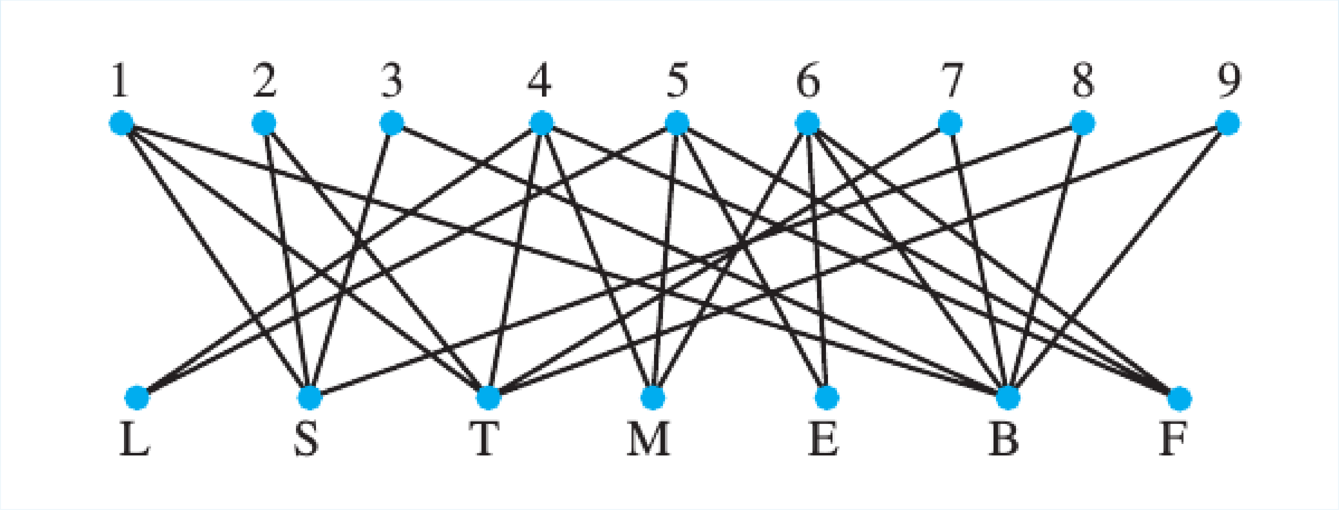
Ex: Aplicar caminhos aumentados nesse emparelhamento



Iniciar escolhendo possíveis arestas com vértices terminais livres.

Possível aumentar a partir deste? Outro?

Ex: Dada essa tabela de candidatos, construir um possível emparelhamento para todas as vagas?



Um emparelhamento máximo

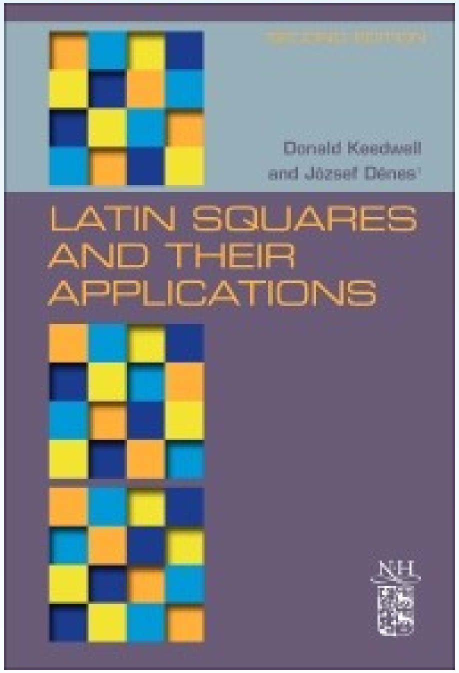
$\{\{L, 4\}, \{S, 2\}, \{T, 7\}, \{M, 5\}, \{E, 6\}, \{B, 8\}\}$

Exemplo: Quadrado Latino

Quadrado Latino: *um quadrado nxn, a meta é preencher o quadrado com números de 1 até n tal que:*

- *Toda linha contenha todos os números de 1 até n.*
- *Toda coluna contenha todos os números de 1 até n.*

1	2	3	4
3	4	2	1
2	1	4	3
4	3	1	2



Várias aplicações

Exemplo: Quadrado Latino

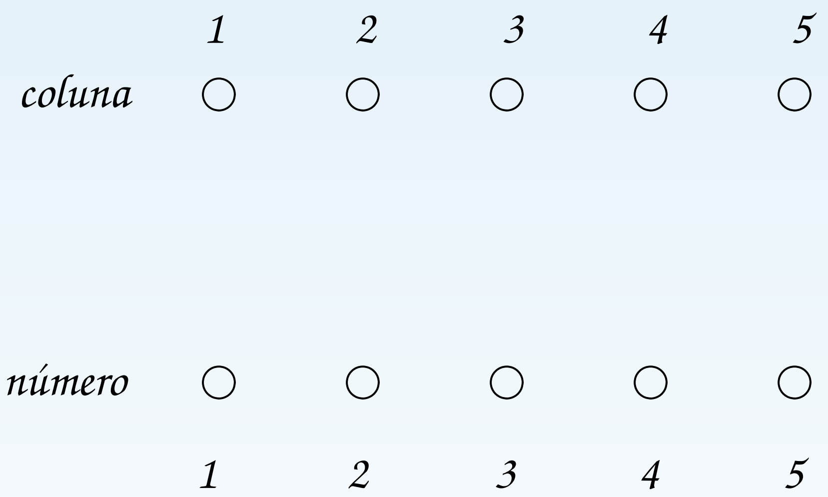
Exemplo: dada essa condição incial é possível preencher e conseguir um quadrado latino?

2	4	5	3	1
4	1	3	2	5
3	2	1	5	4

Exemplo: Quadrado Latino

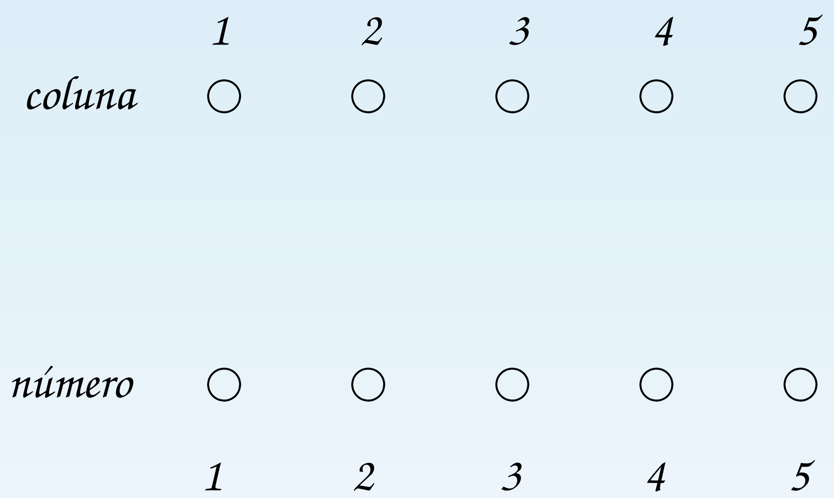
Exemplo: inicialmente construir um emparelhamento bipartido
Considerando a próxima linha vazia;

2	4	5	3	1
4	1	3	2	5
3	2	1	5	4



Exemplo: Quadrado Latino

2	4	5	3	1
4	1	3	2	5
3	2	1	5	4

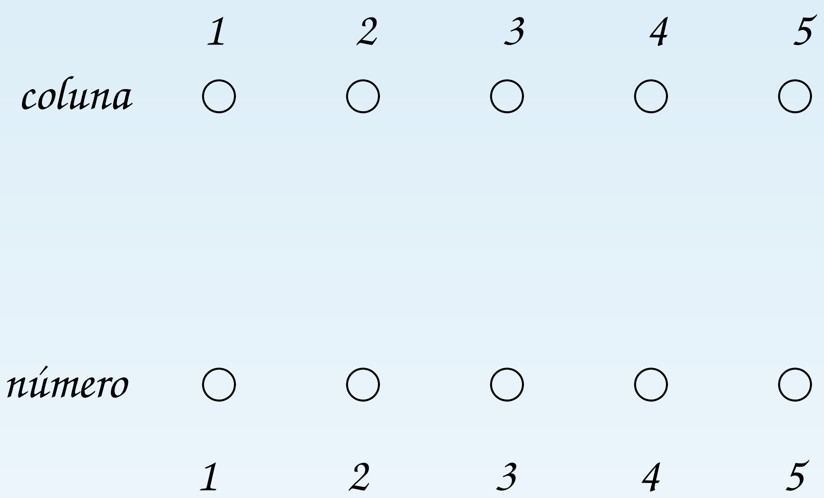


Queremos emparelhar os números para as colunas.

Adicionar um vértice para cada coluna, e um vértice para cada número.

Exemplo: Quadrado Latino

2	4	5	3	1
4	1	3	2	5
3	2	1	5	4



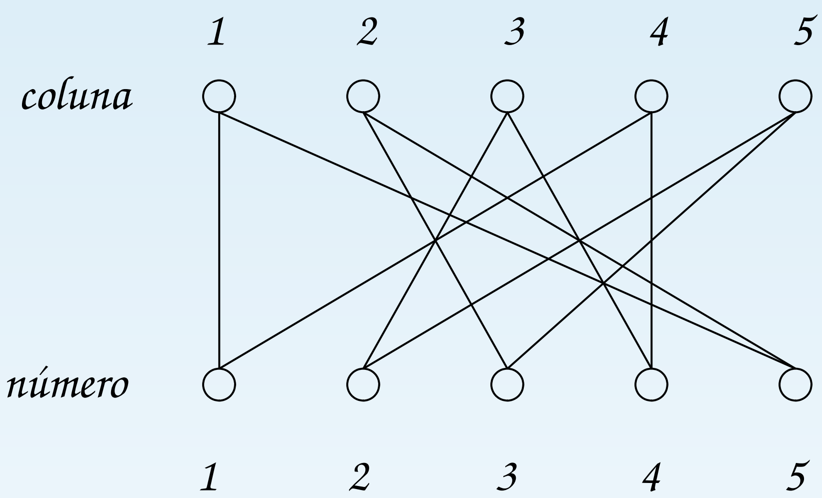
Queremos emparelhar os números para as colunas.

Adicionar um vértice para cada coluna, e um vértice para cada número.

Adicionar uma aresta entre coluna i e cor j se cor j puder ser colocada em i.

Exemplo: Quadrado Latino

2	4	5	3	1
4	1	3	2	5
3	2	1	5	4



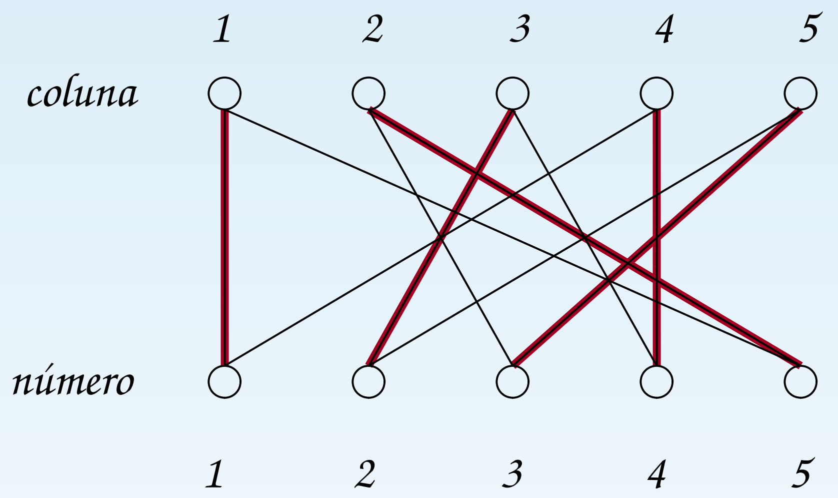
Queremos emparelhar os números para as colunas.

Adicionar um vértice para cada coluna, e um vértice para cada número.

Adicionar uma aresta entre coluna i e cor j se cor j puder ser colocada em i.

Exemplo: Quadrado Latino

2	4	5	3	1
4	1	3	2	5
3	2	1	5	4
1	5	2	4	3

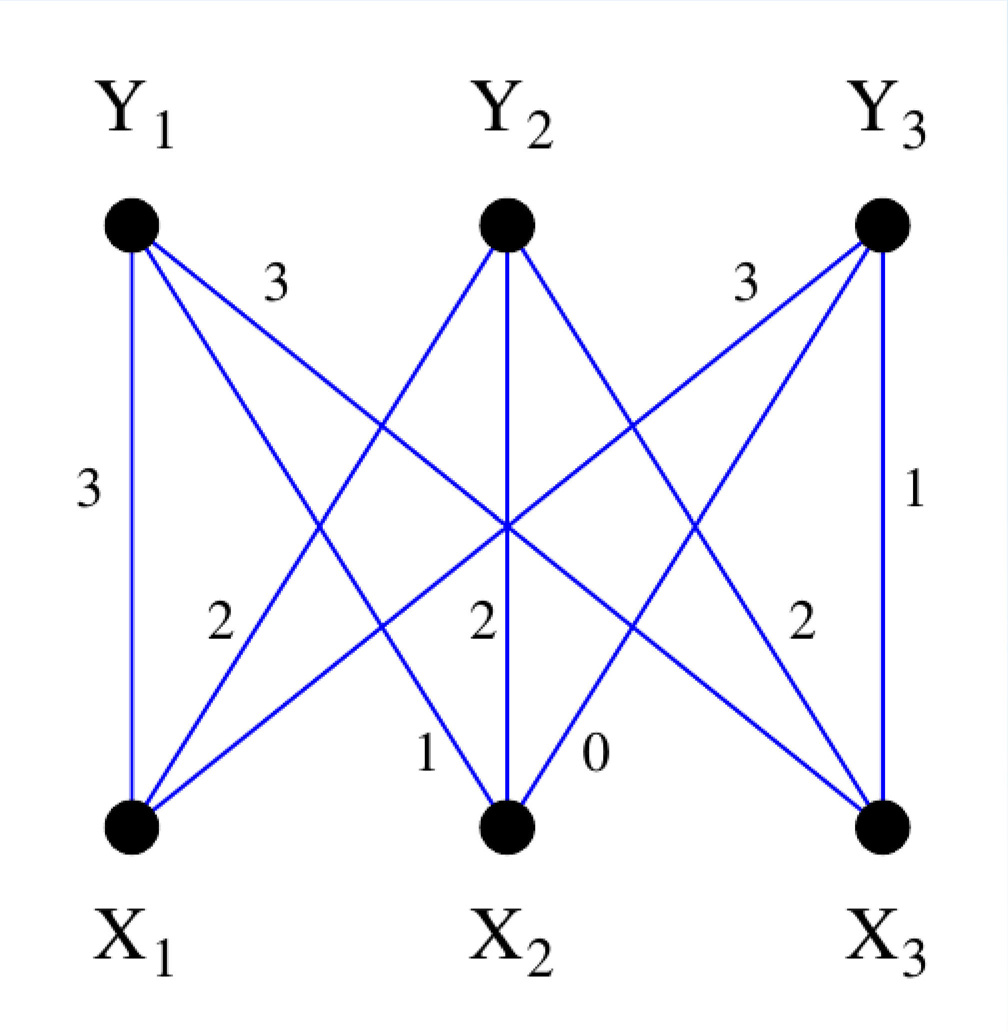


Queremos emparelhar os números para as colunas.

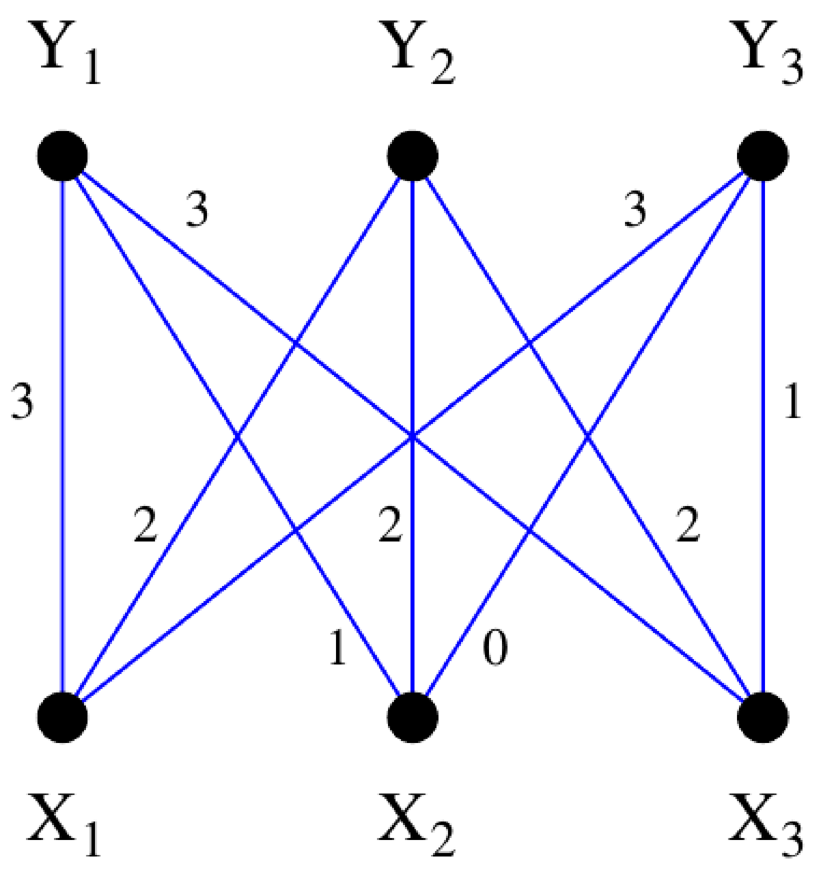
Adicionar um vértice para cada coluna, e um vértice para cada número.

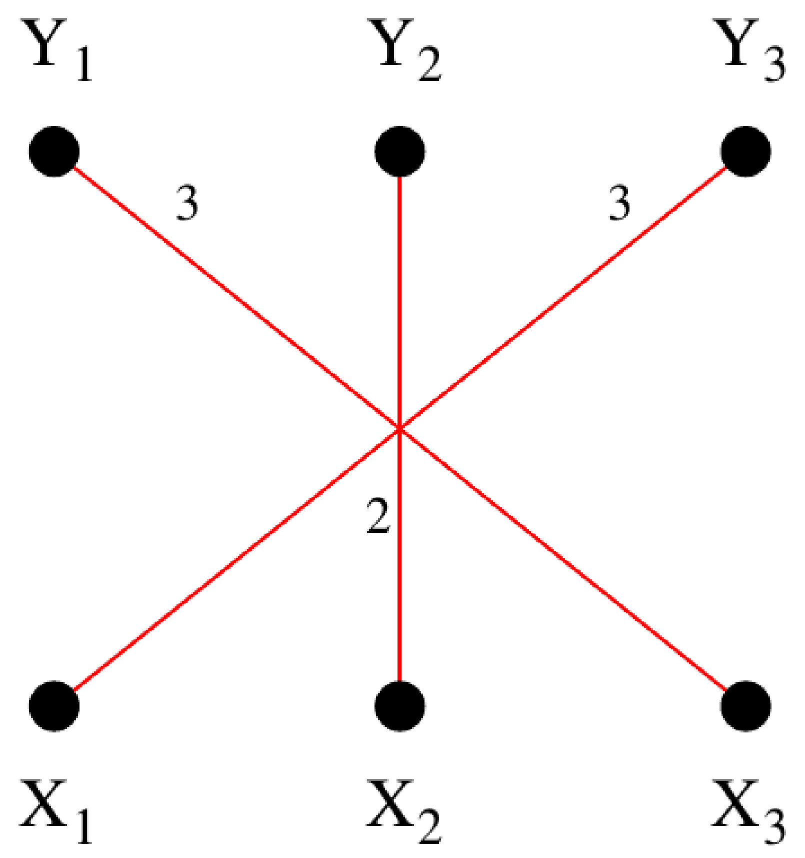
Adicionar uma aresta entre coluna i e cor j se cor j puder ser colocada em i.

Ex: Emparelhamento máximo com pesos

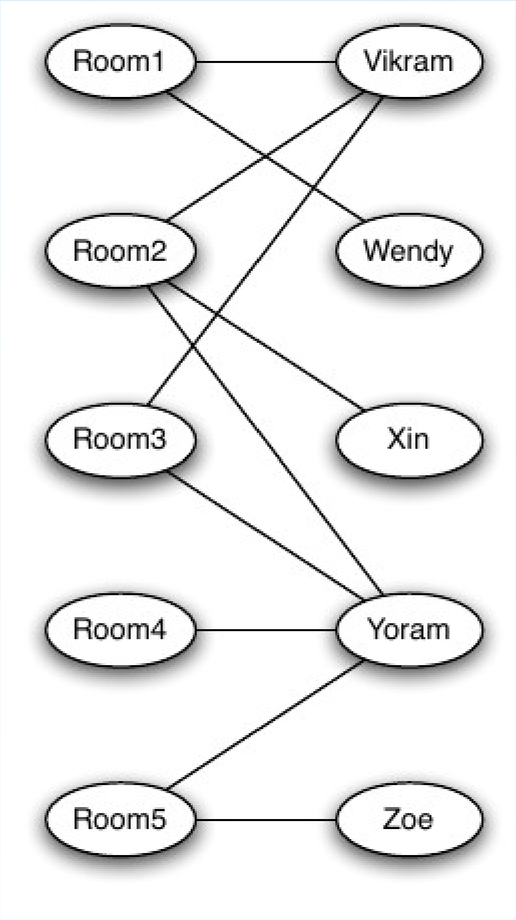


Ex: Emparelhamento máximo com pesos



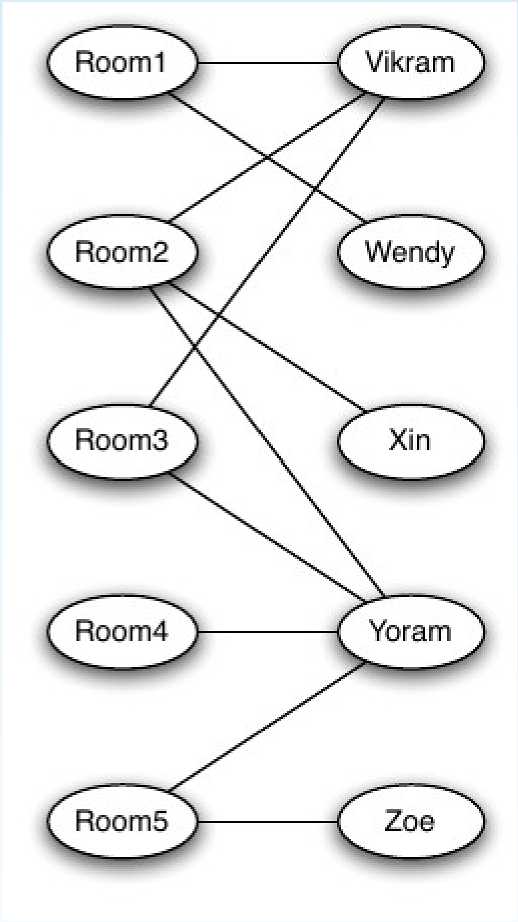


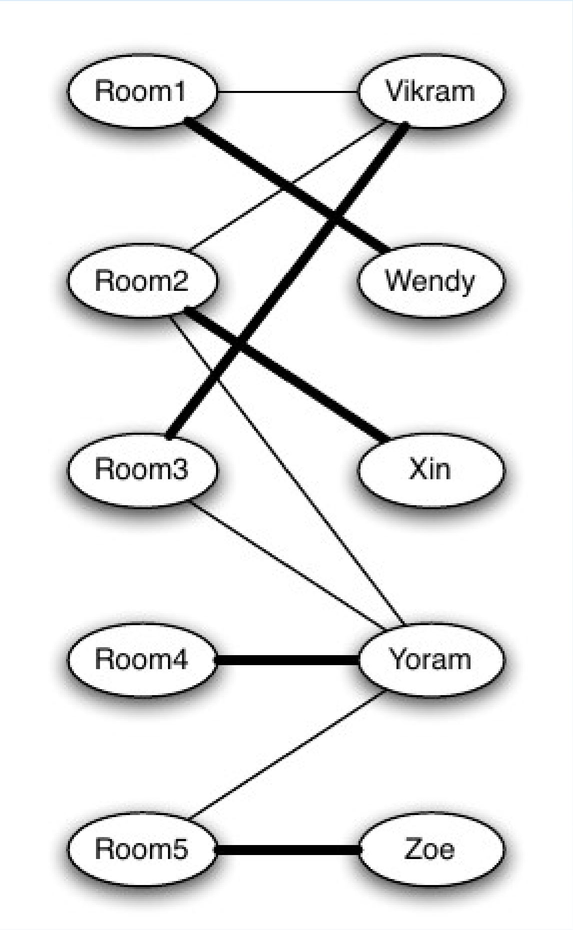
Exemplo:



(Easley, D. & Kleinberg, J. 2010)

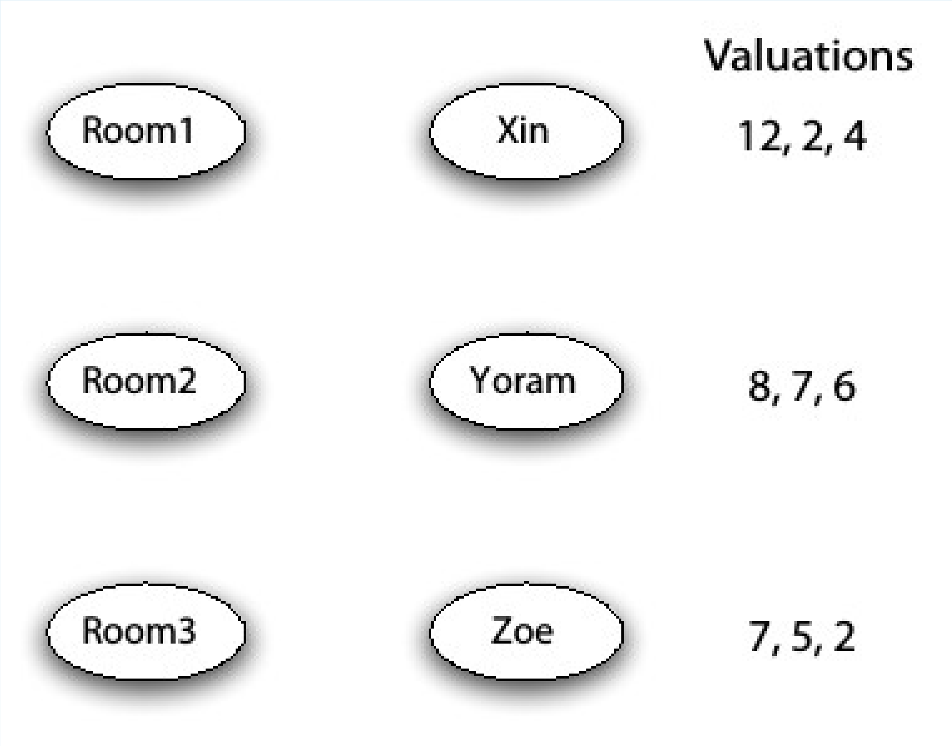
Exemplo:





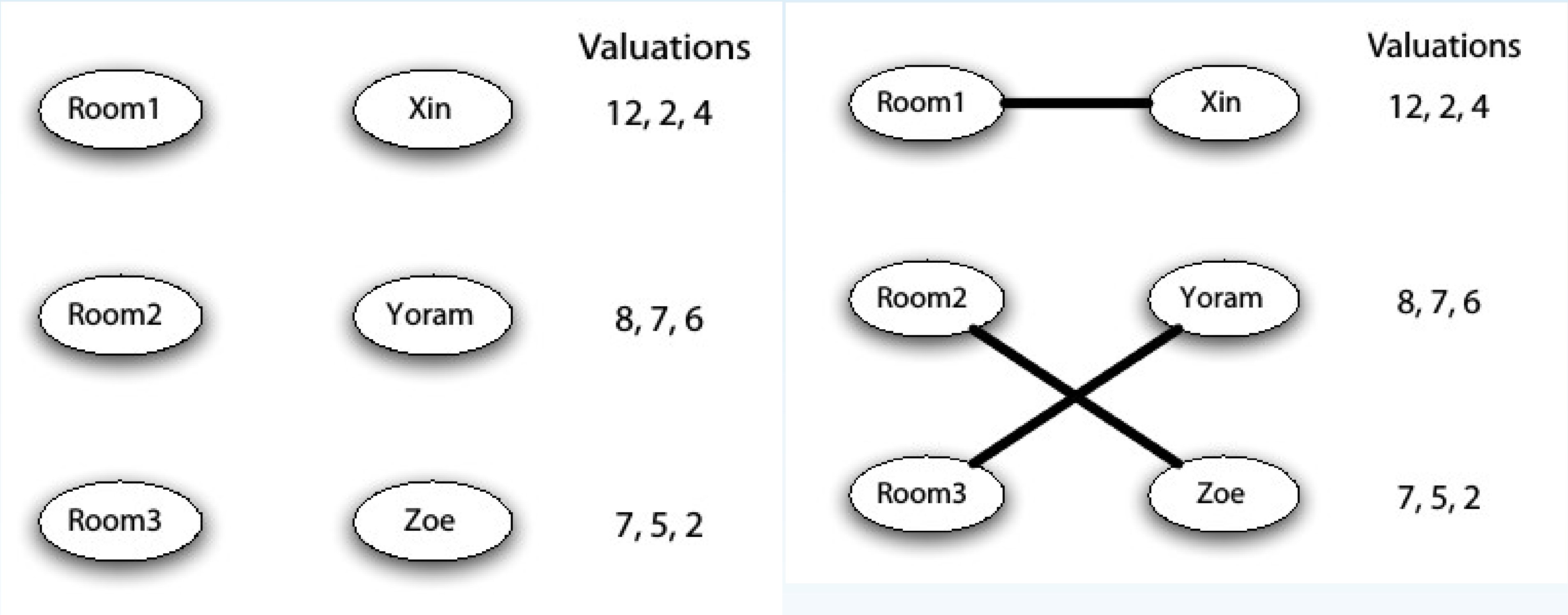
(Easley, D. & Kleinberg, J. 2010)

Ex: Emparelhamento máximo com pesos, opções em leilões



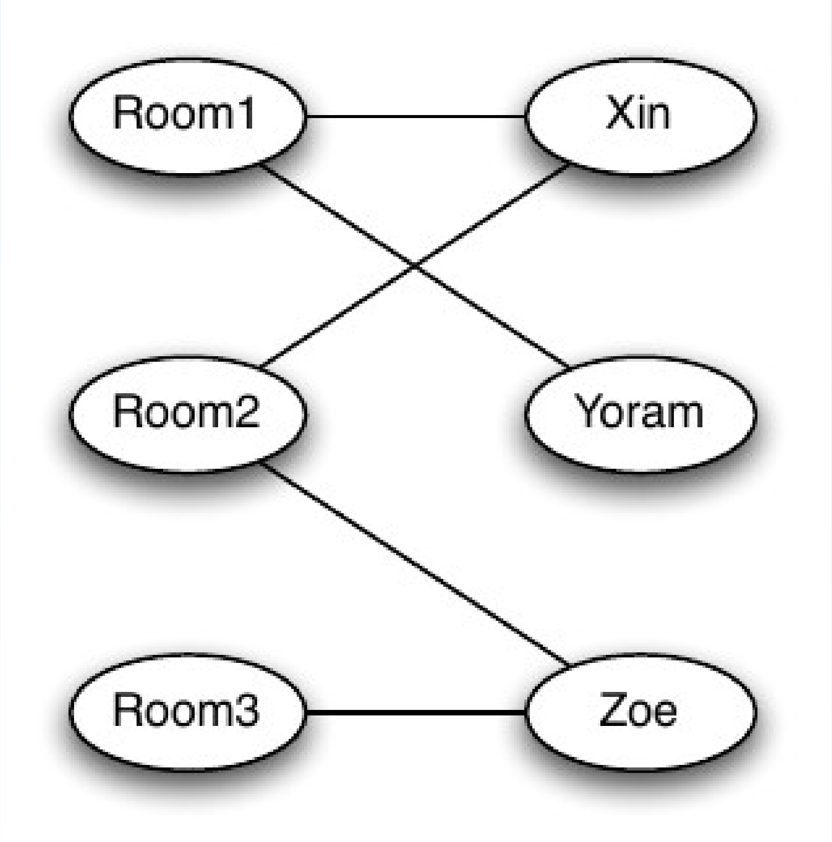
D. Easley & J. Kleinberg

Ex: Emparelhamento máximo com pesos, opções em leilões



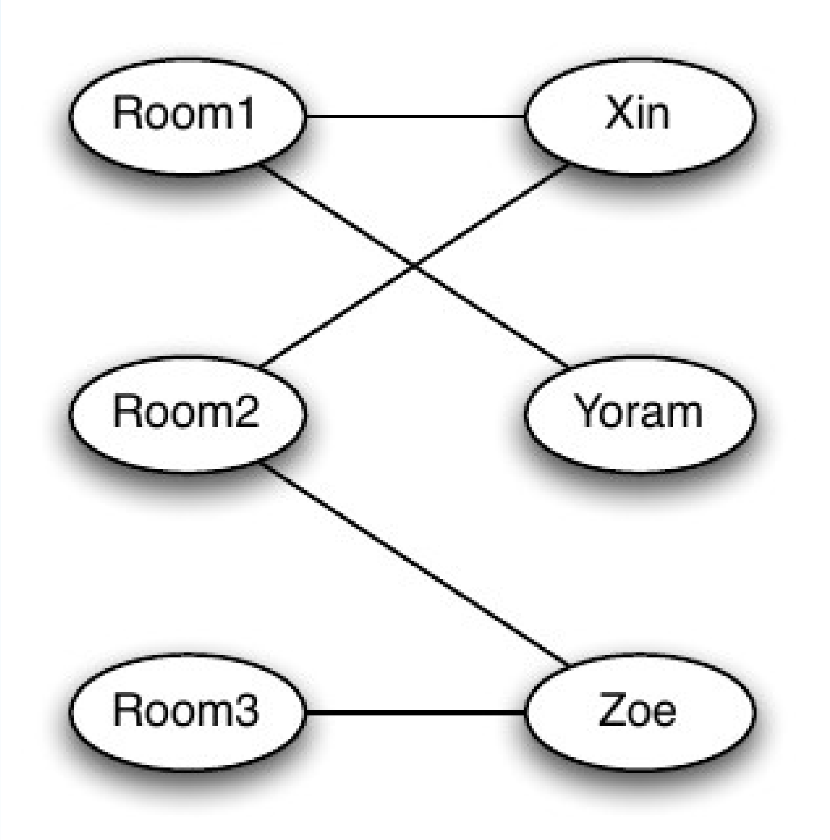
D. Easley & J. Kleinberg

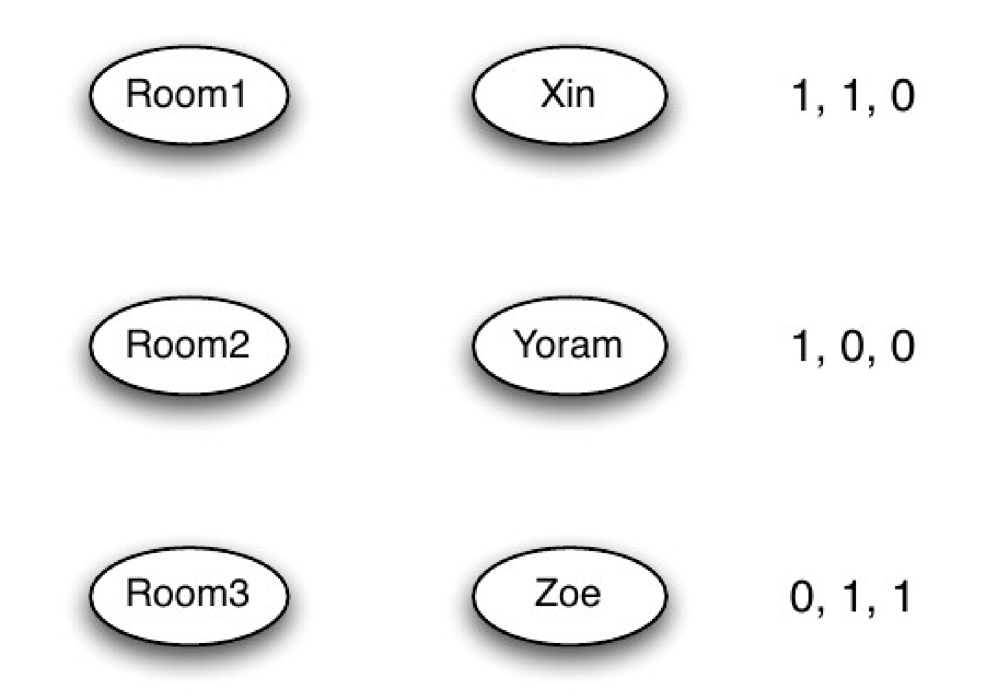
Ex: Emparelhamento máximo com pesos, opções em leilões



D. Easley & J. Kleinberg

Ex: Emparelhamento máximo com pesos, opções em leilões





D. Easley & J. Kleinberg

Exemplo:

3. Suppose we have a set of 3 sellers labeled a, b, and c, and a set of 3 buyers labeled x, y, and z. Each seller is offering a distinct house for sale, and the valuations of the buyers for the houses are as follows.

Buyer	Value for a's house	Value for b's house	Value for c's house
x	2	4	6
y	3	5	1
z	4	7	5

Suppose that sellers a and c each charge 1, and seller b charges 3. Is this set of prices market-clearing? Give a brief explanation.

(Easley, D. & Kleinberg, J. 2010)

Referências Bibliográficas

- Bogart, K. & Stein, C. & Drysdale, R. Discrete Mathematics for Computer Science. Key College Pub., 2006.
- Bondy, J. & Murty, *Graph Theory with Applications*, Elsevier, 1982.
- Ruohonen, K. *Graph Theory*, 2013.
- Sedgewick, R. & Wayne, K. *Algorithms* (4th ed.), Addison-Wesley, 2011.
- Wilson, R. & Watkins, J. *Graphs: An Introductory Approach.* John Wiley, 1990.