Teoria e Aplicação de Grafos

Roteiro da aula:

- Exemplo: Problema do Conector
- Árvore Geradora Mínima Euclideana
- Número de árvores geradoras
- Cortes em Grafos
- Matriz de Corte
- *Rank* de grafos
- Grafos Bipartidos

Exemplo: Problema do Conector

Dada uma rede (i.e. grafo) com os custos de ligação entre os vértices, como construir uma rede de custo geral mínimo?

- **Seja, por exemplo o seguinte quadro de distâncias (em milhas) entre as 6 maiores cidades do mundo. Qual a menor viagem (ligação) entre todas as seis?**

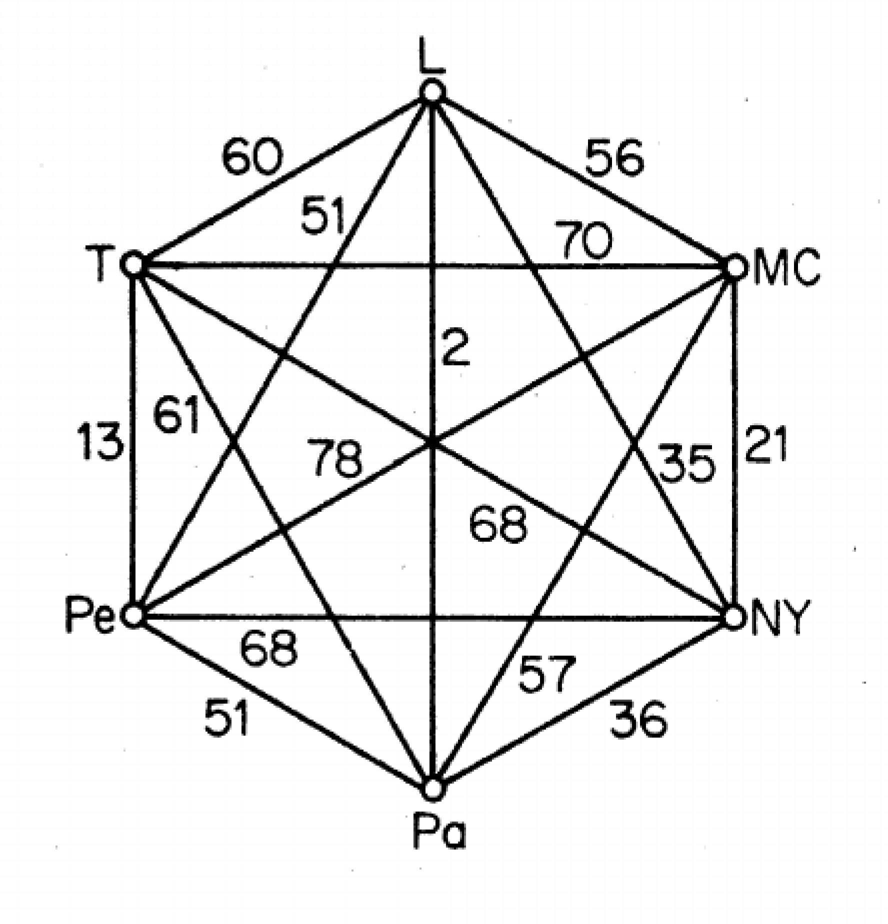
Exemplo: Problema do Conector

	L	MC	NY	Pa	Pe	T
L	—	5558	3469	214	5074	5959
MC	5558	—	2090	5725	7753	7035
NY	3469	2090	—	3636	6844	6757
Pa	214	5725	3636	—	5120	6053
Pe	5074	7753	6844	5120	—	1307
T	5959	7035	6757	6053	1307	—

London Mexico City New York Paris Pequim Toquio

Bondy & Murty, 1982

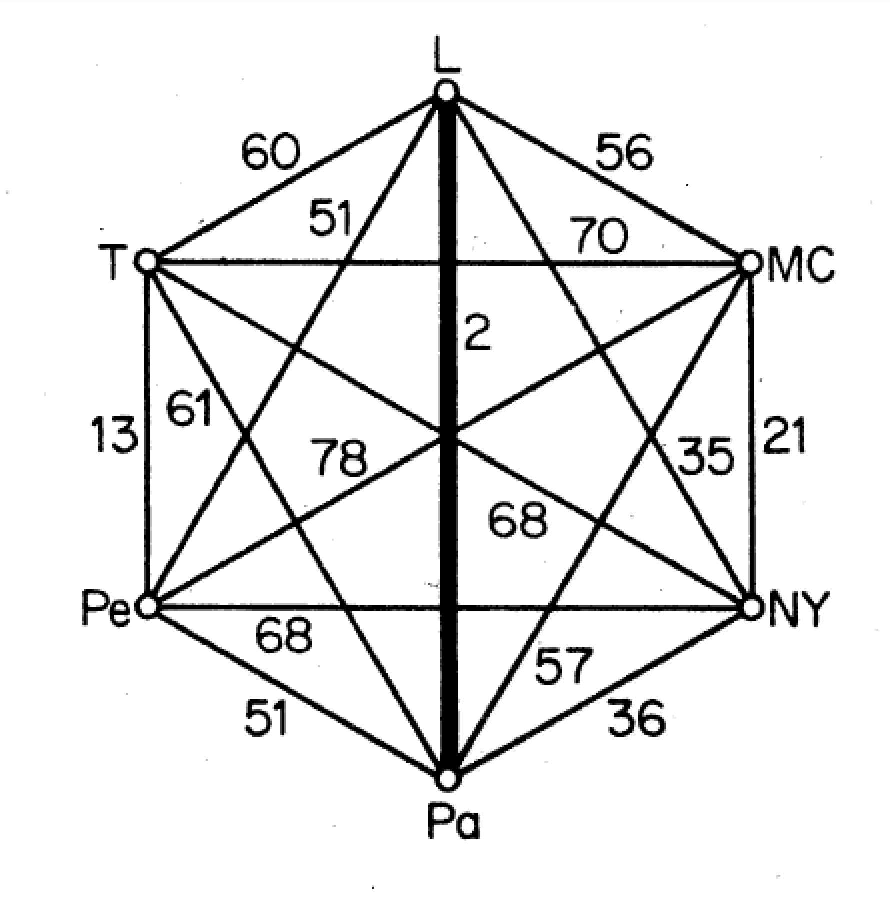
Exemplo: Problema do Conector



Aproximando para dezenas de centenas de milhas

Bondy & Murty, 1982

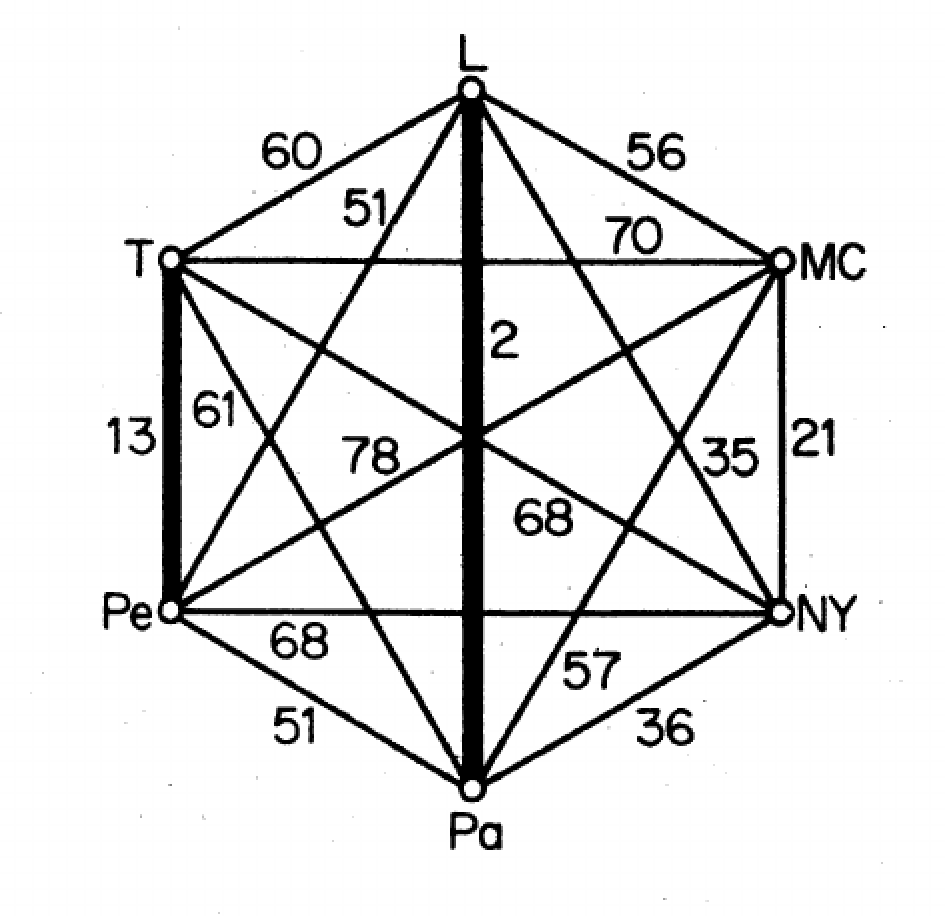
Exemplo: Problema do Conector



Aplicando Alg. Kruskal

Bondy & Murty, 1982

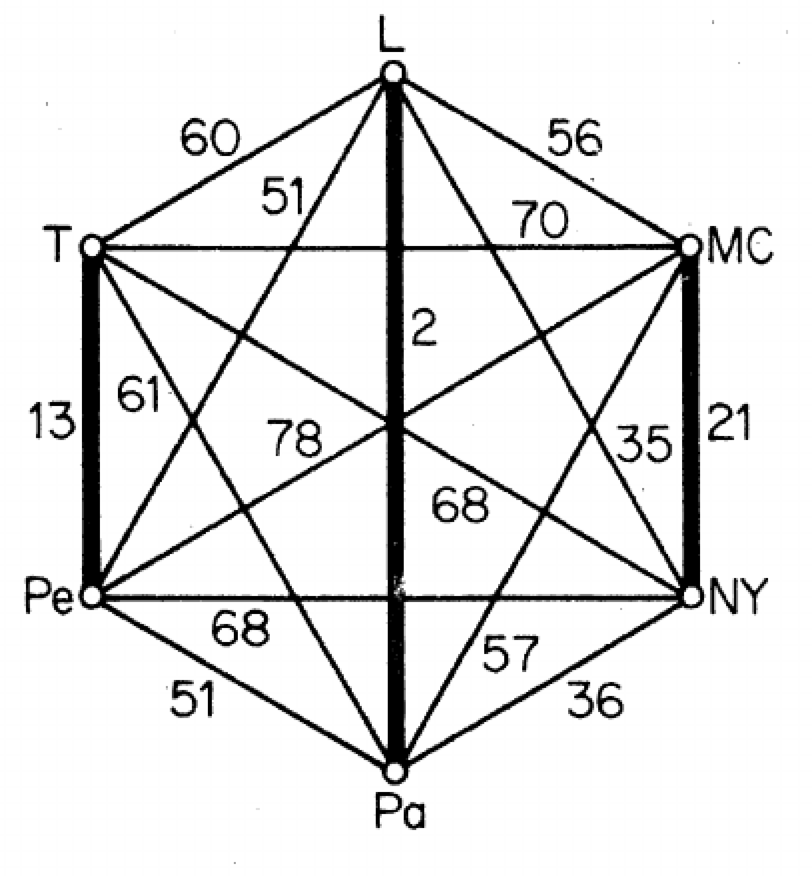
Exemplo: Problema do Conector



Aplicando Alg. Kruskal

Bondy & Murty, 1982

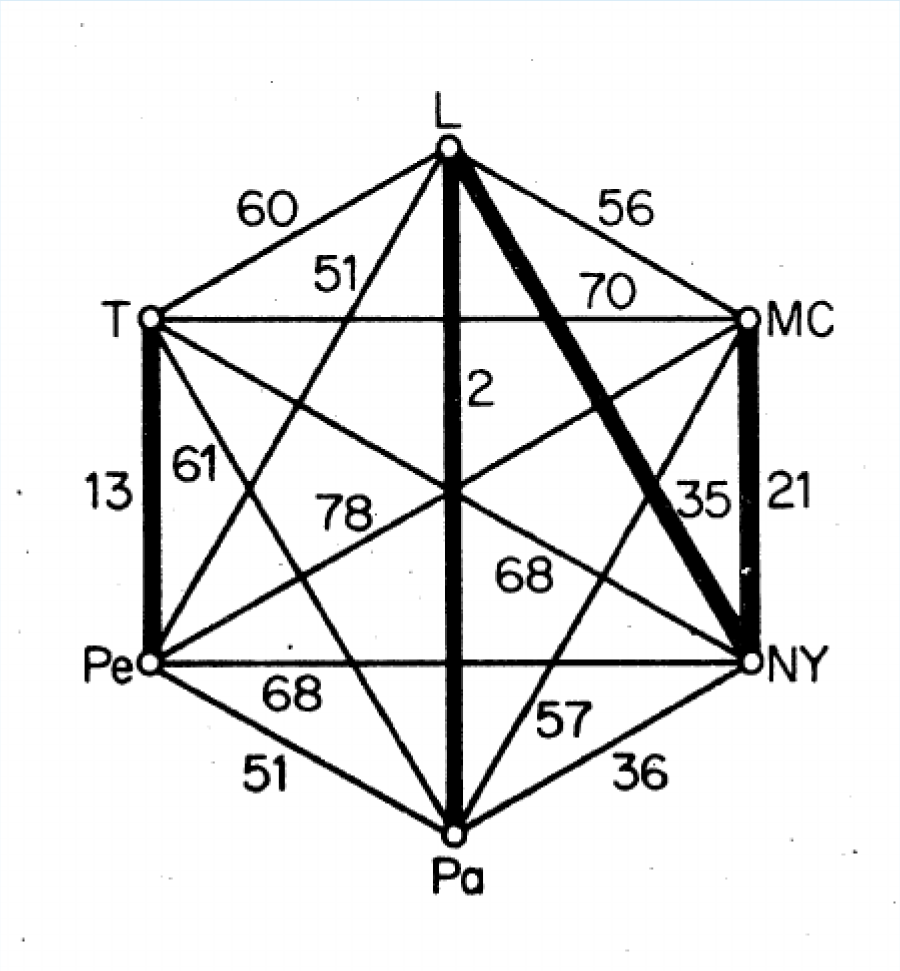
Exemplo: Problema do Conector



Aplicando Alg. Kruskal

Bondy & Murty, 1982

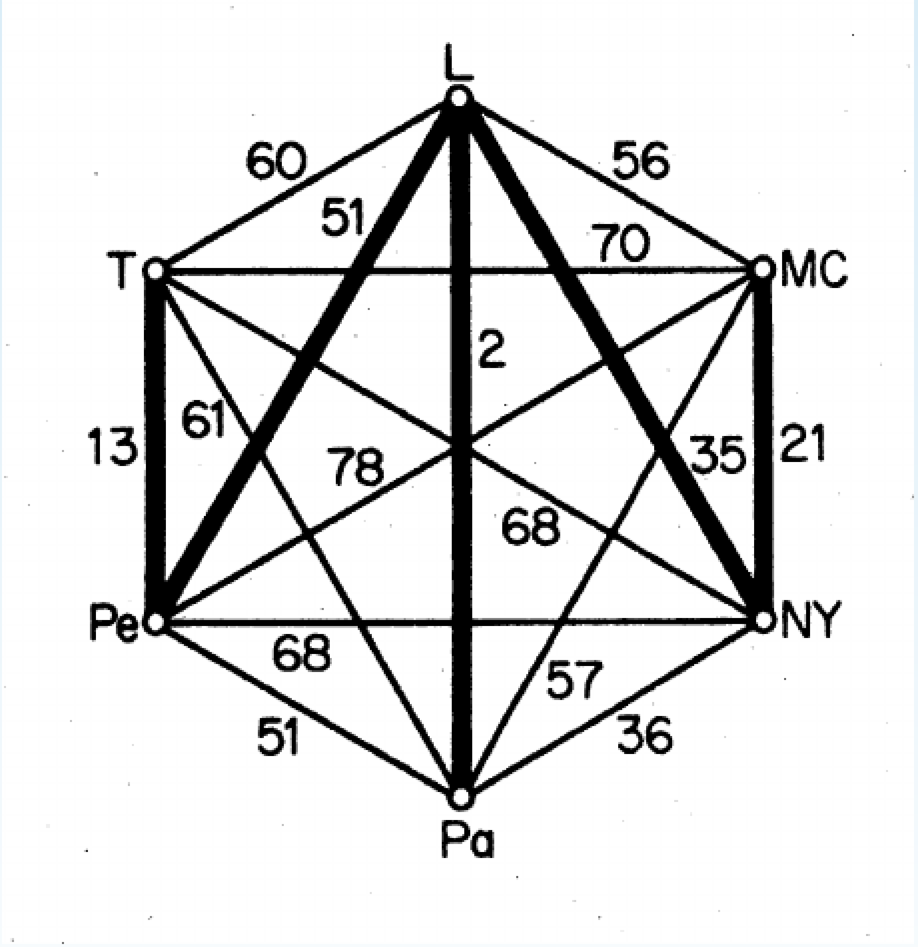
Exemplo: Problema do Conector



Aplicando Alg. Kruskal

Bondy & Murty, 1982

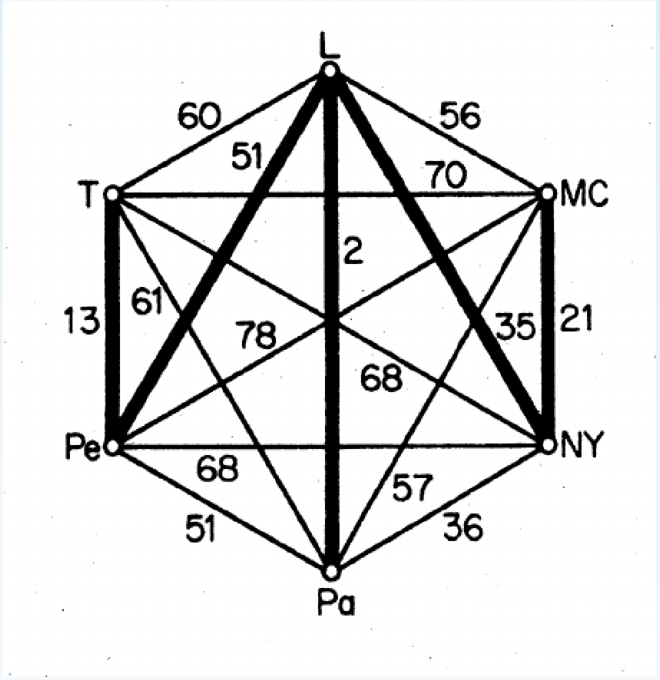
Exemplo: Problema do Conector



Aplicando Alg. Kruskal

Bondy & Murty, 1982

k- conectividade

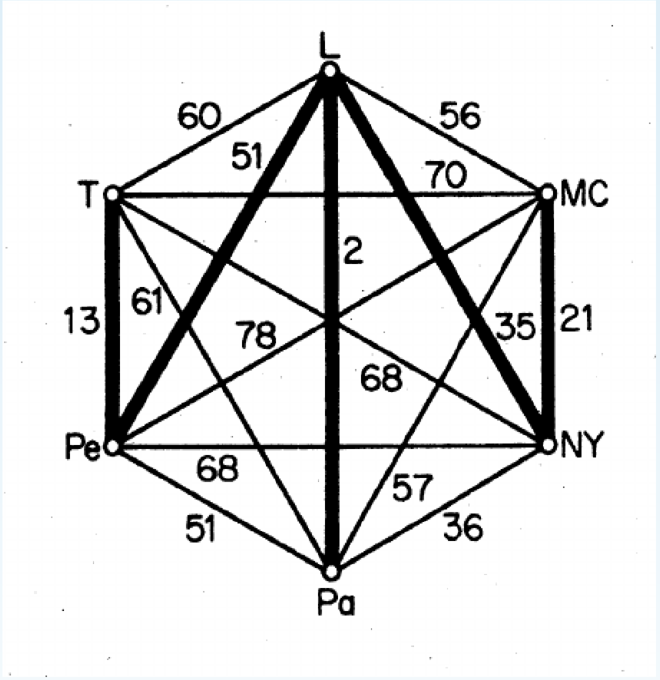


Aplicando Alg. Kruskal

Uma árvore de conectividade obtida por Alg. Kruskal possui conectividade 1.

Bondy & Murty, 1982

k- conectividade



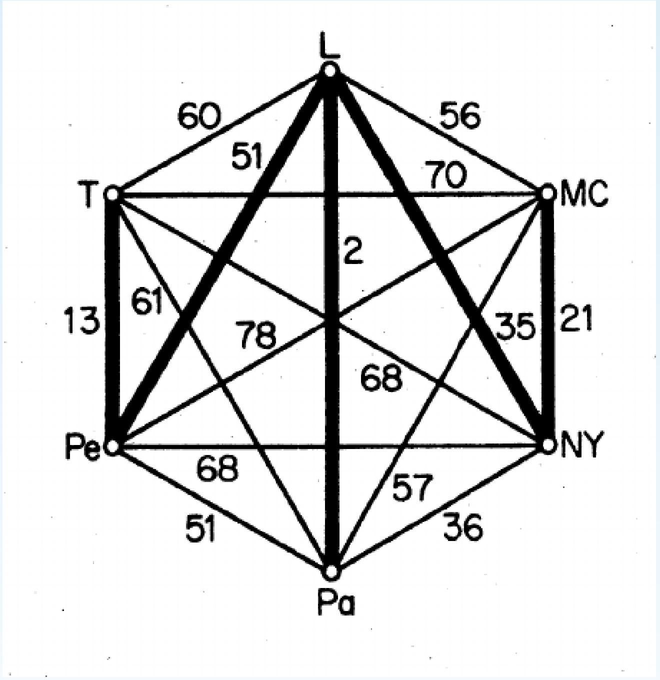
Aplicando Alg. Kruskal

Uma árvore de conectividade obtida por Alg. Kruskal possui conectividade 1.

No caso de se obter conectividades maiores, K=2, k=3…, o problema pode não ter solução dependendo do grafo G

Bondy & Murty, 1982

k- conectividade



Aplicando Alg. Kruskal

Uma árvore de conectividade obtida por Alg. Kruskal possui conectividade 1.

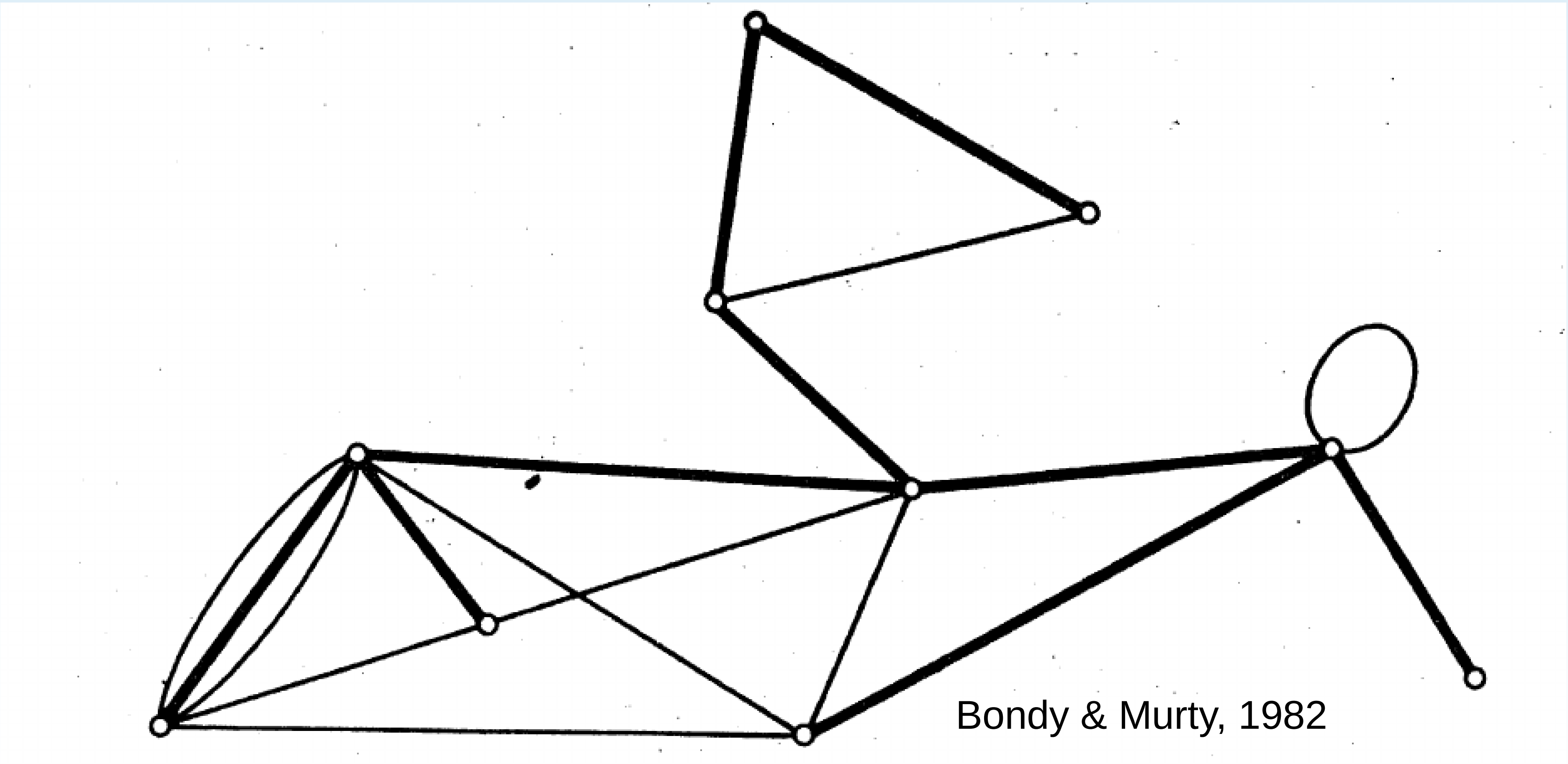
No caso de se obter conectividades maiores, K=2, k=3…, o problema pode não ter solução dependendo do grafo G

(**Aplicação**: redes robustas devem ter mais de uma conexão possível nos vértices para evitar perda de conexão daquele vértice)

Bondy & Murty, 1982

Conectividade em Grafos e Árvores Geradoras

Todo Grafo conectado possui uma Árvore Geradora



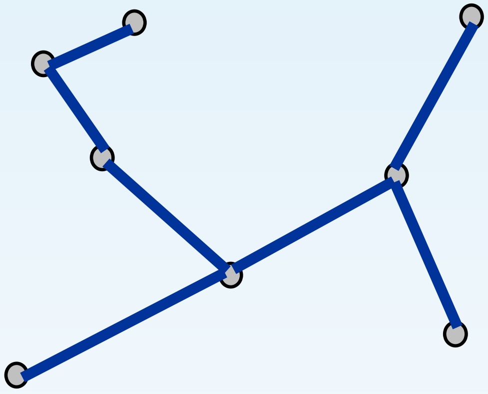
Bondy & Murty, 1982

Árvore Geradora Mínima (AGM) Euclideana

Sejam N pontos em um plano, encontrar a AGM que os conecta

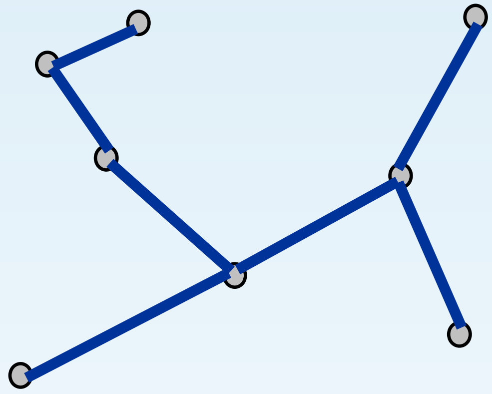
Árvore Geradora Mínima (AGM) Euclideana

Sejam N pontos em um plano, encontrar a AGM que os conecta



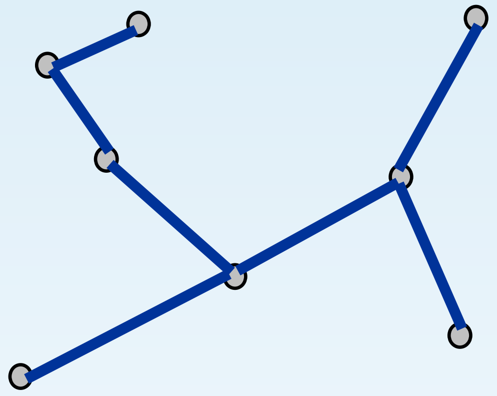
Árvore Geradora Mínima (AGM) Euclideana

Uma solução: Calcular O(N^2) distâncias e executar Alg. Prim no grafo completo



Árvore Geradora Mínima (AGM) Euclideana

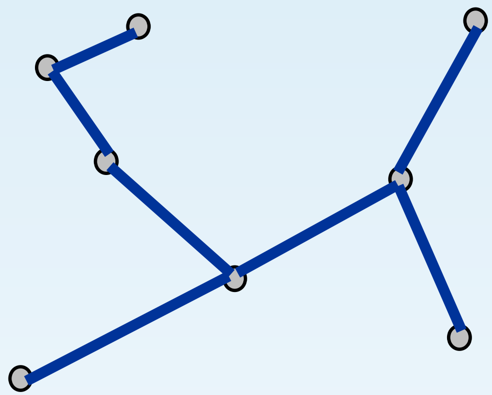
Uma solução: Calcular $O(N^2)$ distâncias e executar Alg. Prim no grafo completo



Problema: Custo quadrático (memória e tempo de execução)

Árvore Geradora Mínima (AGM) Euclideana

Uma solução: Calcular $O(N^2)$ distâncias e executar Alg. Prim no grafo completo

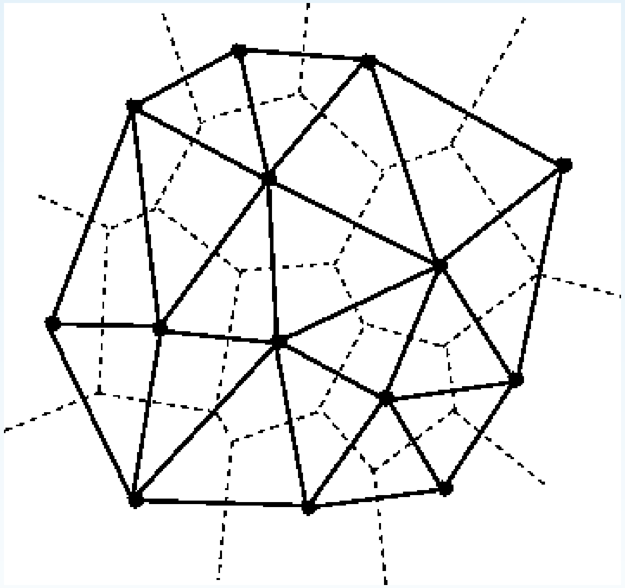


Problema: Custo quadrático (memória e tempo de execução)

Seria possível explorar geometria para diminuir custo computacional?

Árvore Geradora Mínima (AGM) Euclideana

Da geometria: **Arestas da AGM Euclideana são arestas de uma triangulação de Delaunay**



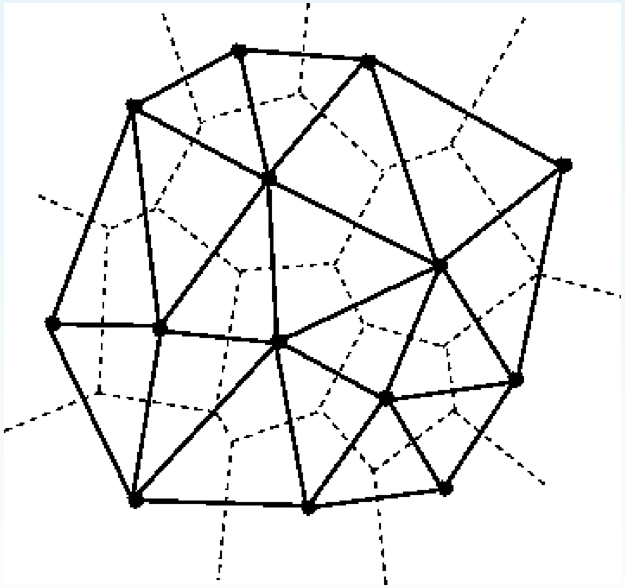
Árvore Geradora Mínima (AGM) Euclideana

Uma solução:

Calcular diagrama de Voronoi e obter uma triangulação de Delaunay.

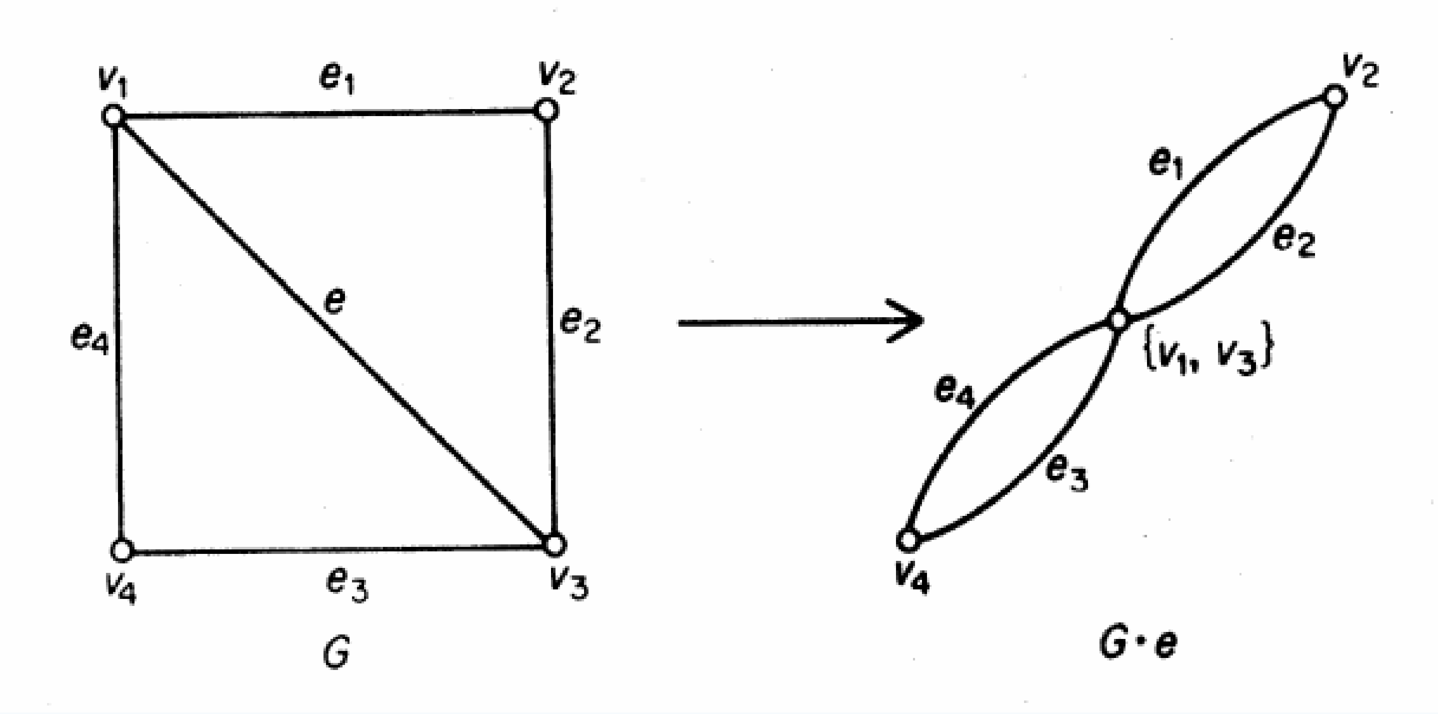
Executar Alg. Kruskal na arestas de Delaunay

Custo seria O(N log N)



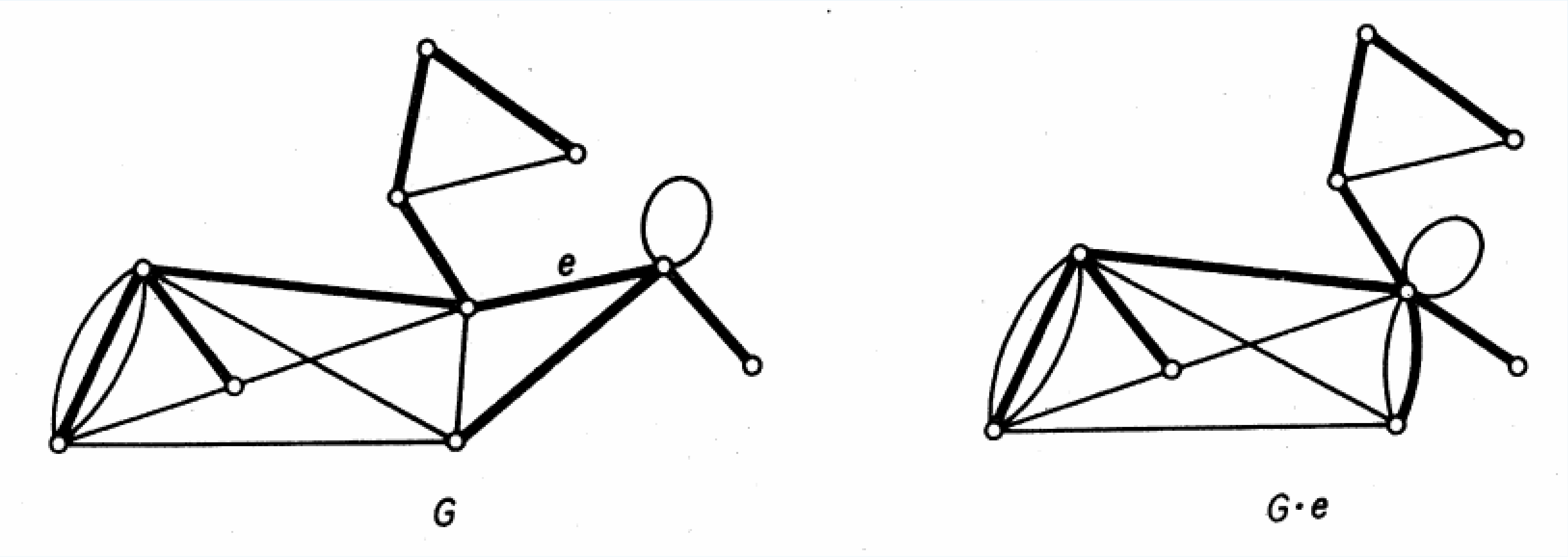
Contração de aresta

Uma aresta *e* de G é contraída se a mesma for deletada e seus terminais identificados. O grafo G resultante é denotado por G.*e*



Contração de aresta

Uma aresta *e* de G é contraída se a mesma for deletada e seus terminais identificados. O grafo G resultante é denotado por G.*e*



Número de árvores geradoras de um grafo

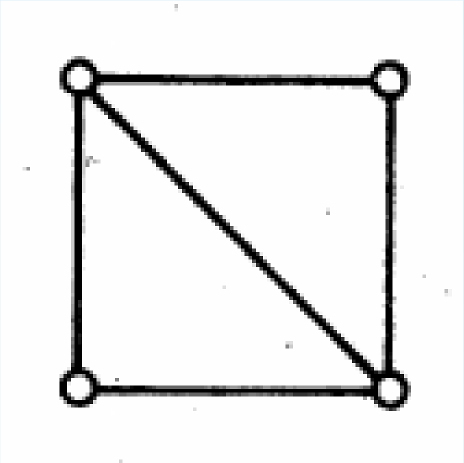
Teorema:

Se e é uma aresta contraída de G, então o número de árvores geradoras de G é dado por

$$\tau(G) = \tau(G - e) + \tau(G \cdot e)$$

Número de árvores geradoras de um grafo

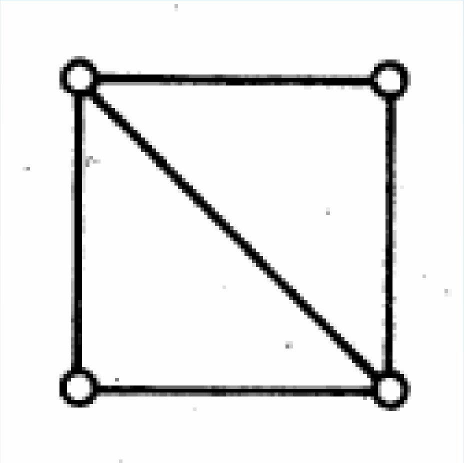
G



Bondy & Murty, 1982

Número de árvores geradoras de um grafo

G



$$\tau(G) = \tau(G - e) + \tau(G \cdot e)$$

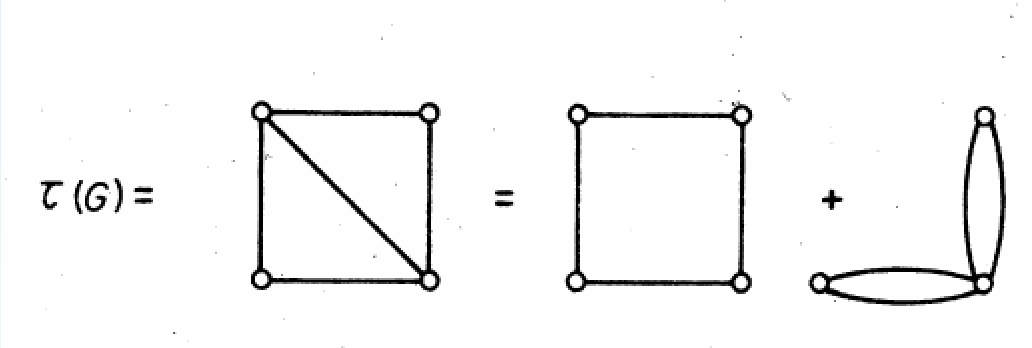
Bondy & Murty, 1982

Número de árvores geradoras de um grafo

Aplicando $\tau(G) = \tau(G-e) + \tau(G \cdot e)$ recursivamente

Número de árvores geradoras de um grafo

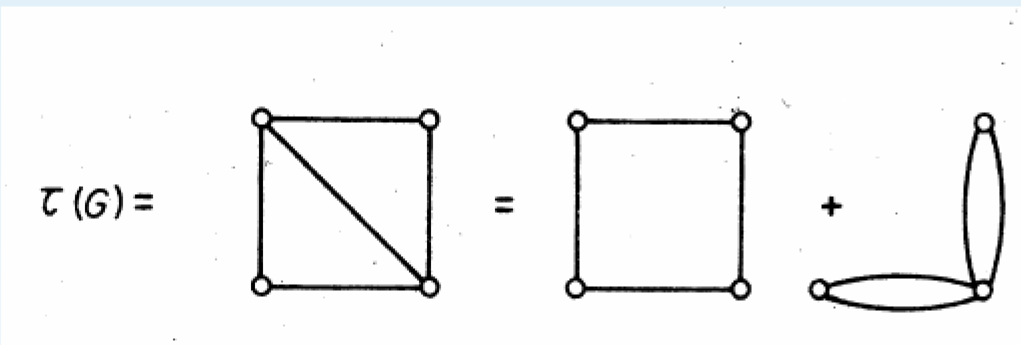
Aplicando $$\tau(G) = \tau(G - e) + \tau(G \cdot e)$$ recursivamente

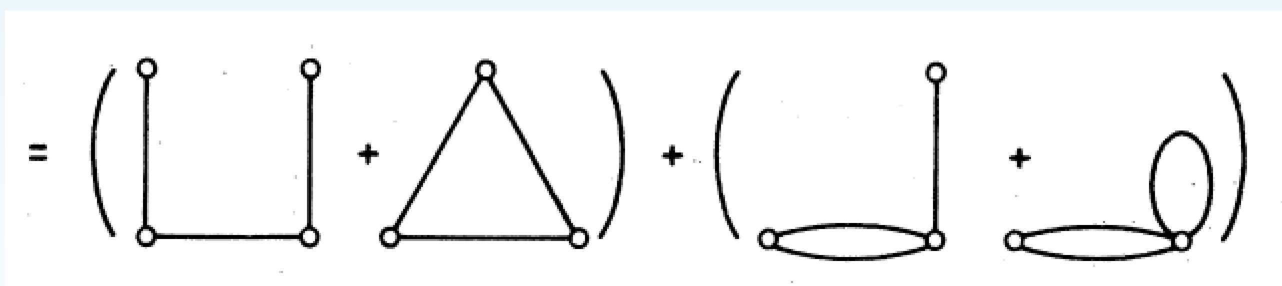


Bondy & Murty, 1982

Número de árvores geradoras de um grafo

Aplicando $\tau(G) = \tau(G - e) + \tau(G \cdot e)$ recursivamente

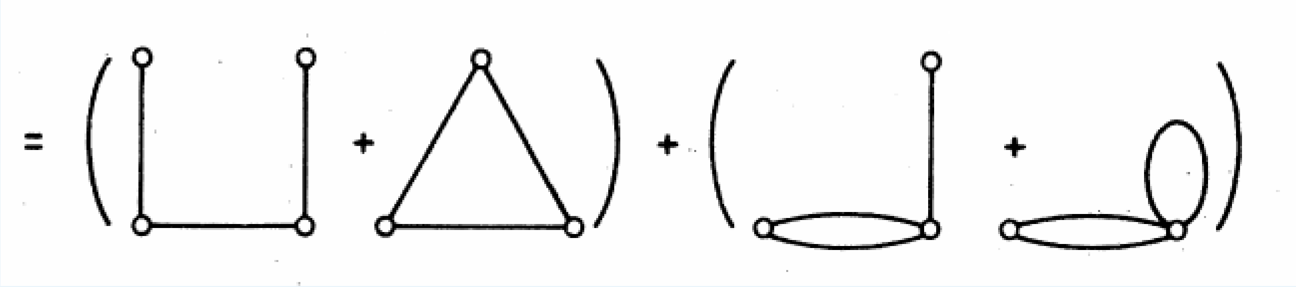


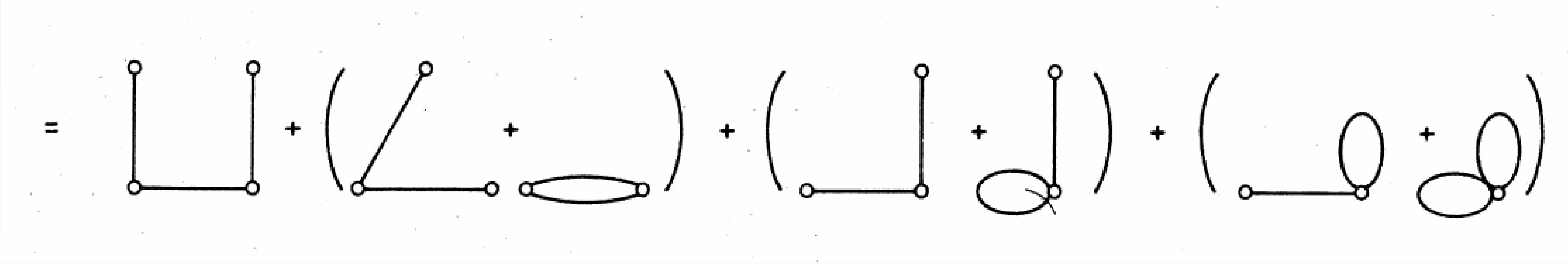


Bondy & Murty, 1982

Número de árvores geradoras de um grafo

Aplicando $\tau(G) = \tau(G - e) + \tau(G \cdot e)$ recursivamente

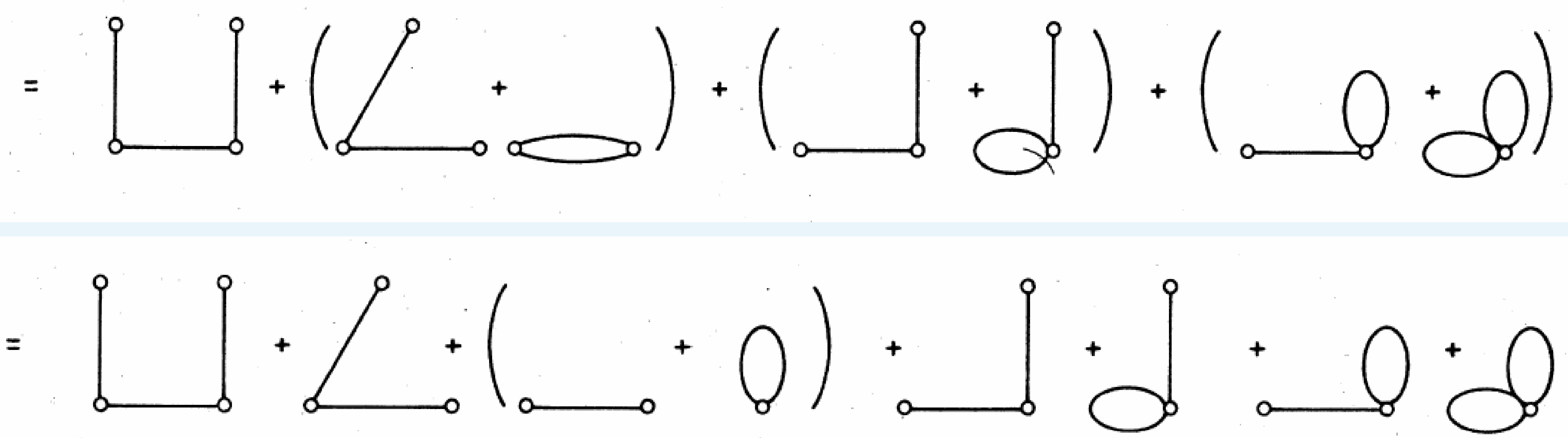




Bondy & Murty, 1982

Número de árvores geradoras de um grafo

Aplicando $\tau(G) = \tau(G - e) + \tau(G \cdot e)$ recursivamente



= 8

Bondy & Murty, 1982

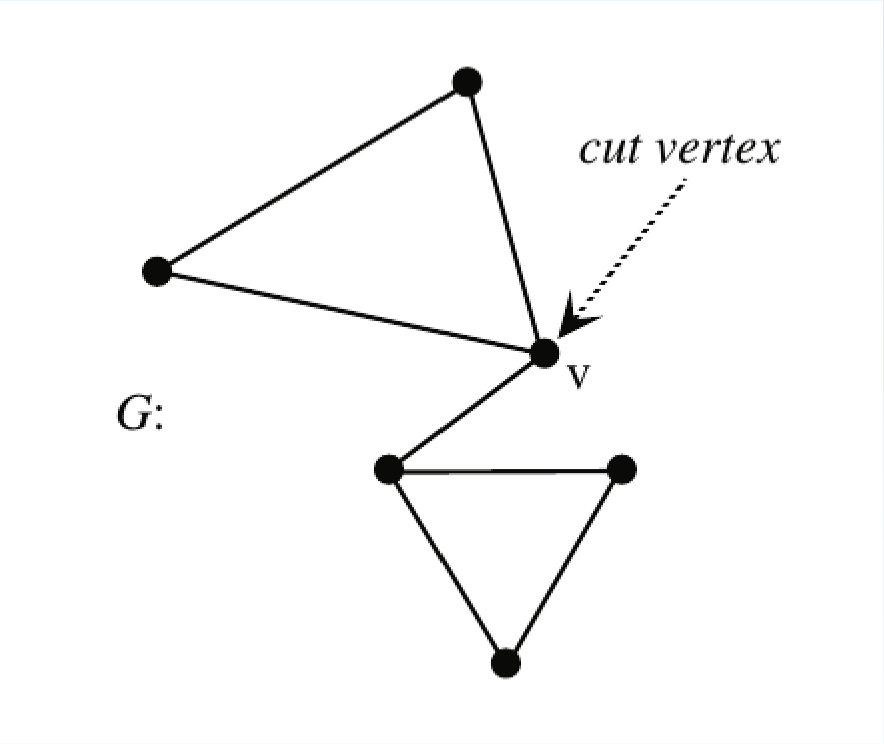
Corte

É uma operação que, através da remoção de vértices ou da remoção de arestas, resulta no aumento do número de componentes conexas de G.

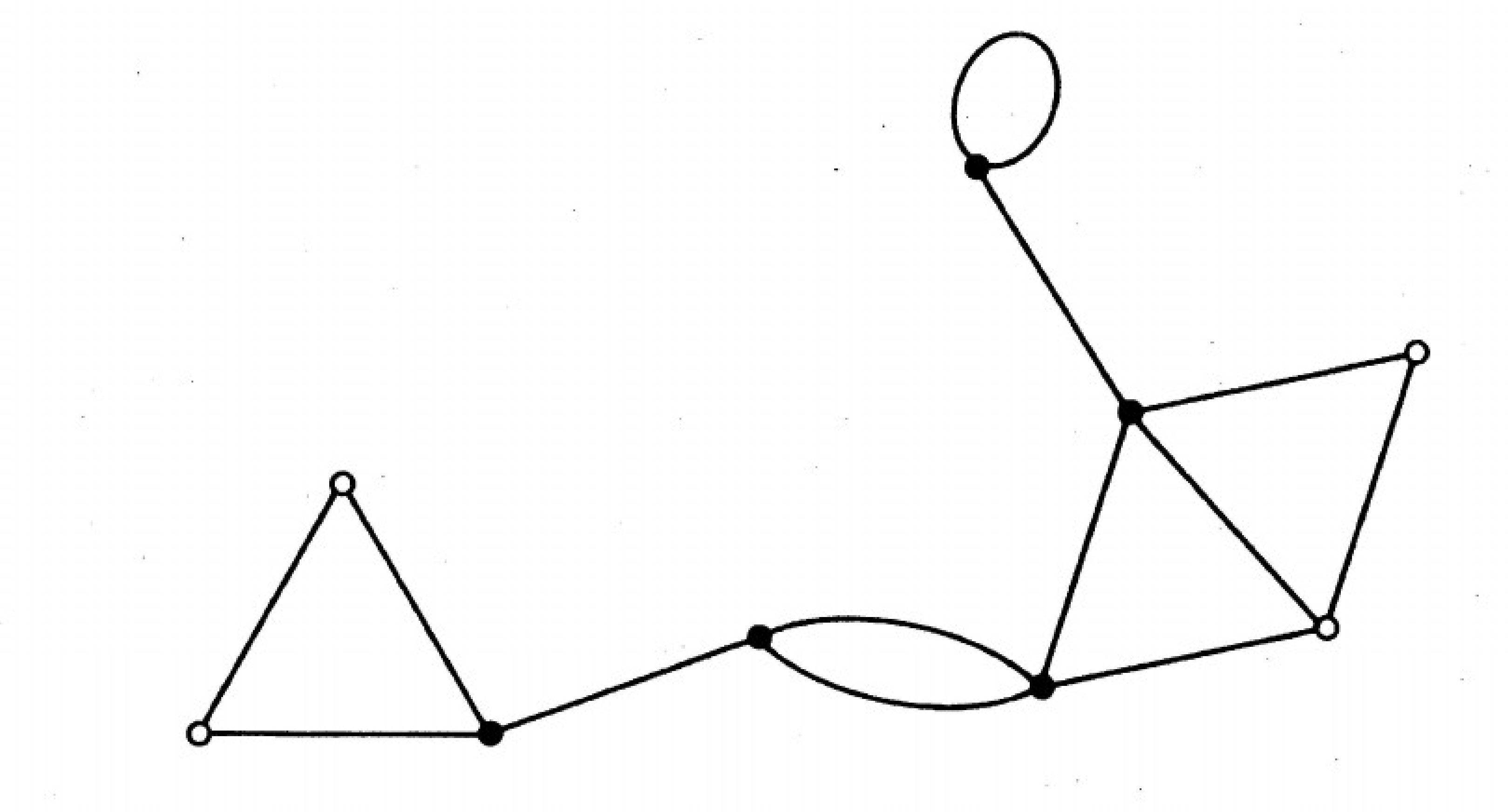
Corte em Vértices

O conjunto minimal de vértices cuja remoção torna G desconexo e composto por duas componentes conexas

Corte em Vértices



Corte em Vértices

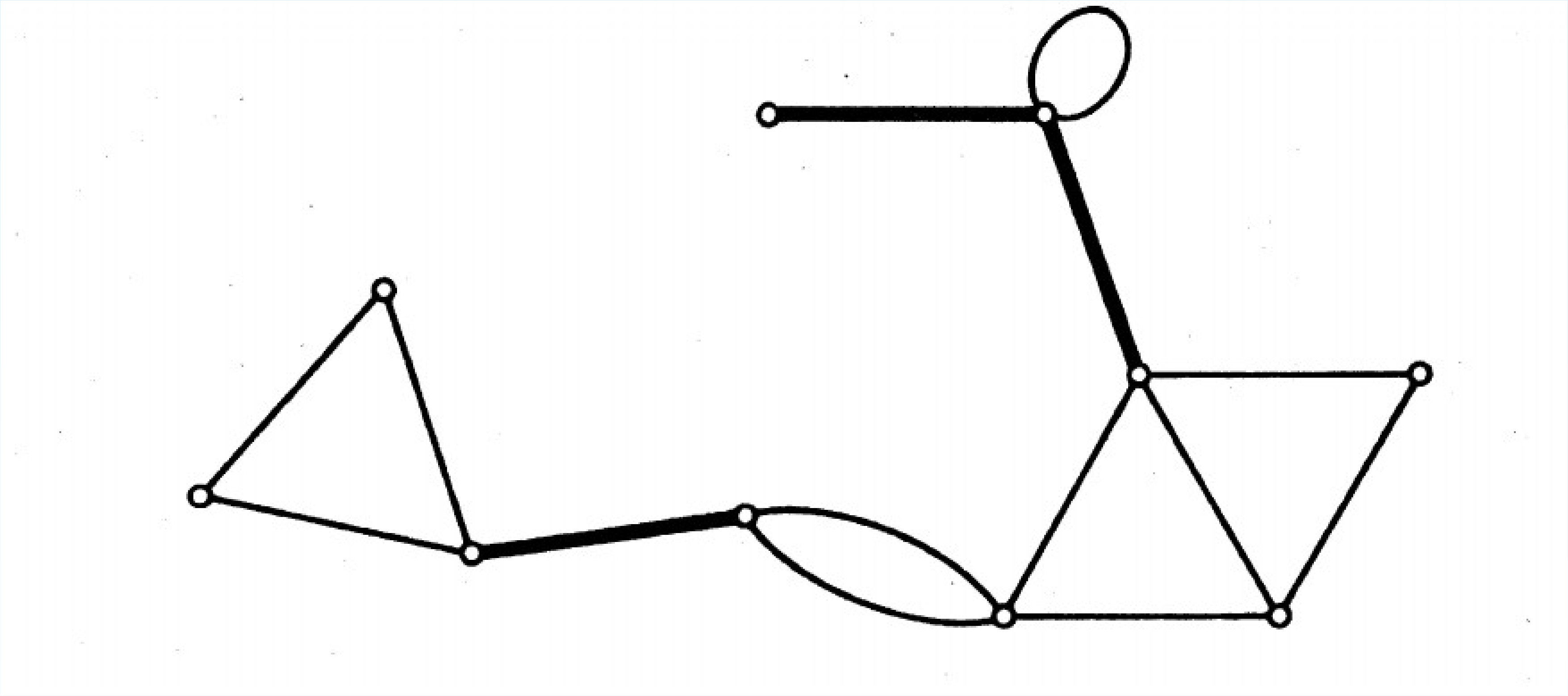


Bondy & Murty, 1982

Corte em Arestas

Conjunto minimal de arestas cuja remoção torna G desconexo e composto por duas componentes conexas

Corte em Arestas



Bondy & Murty, 1982

Blocos

Bloco: Um grafo conectado que não possui vértices de corte (Corte em vértices) é um bloco

Blocos

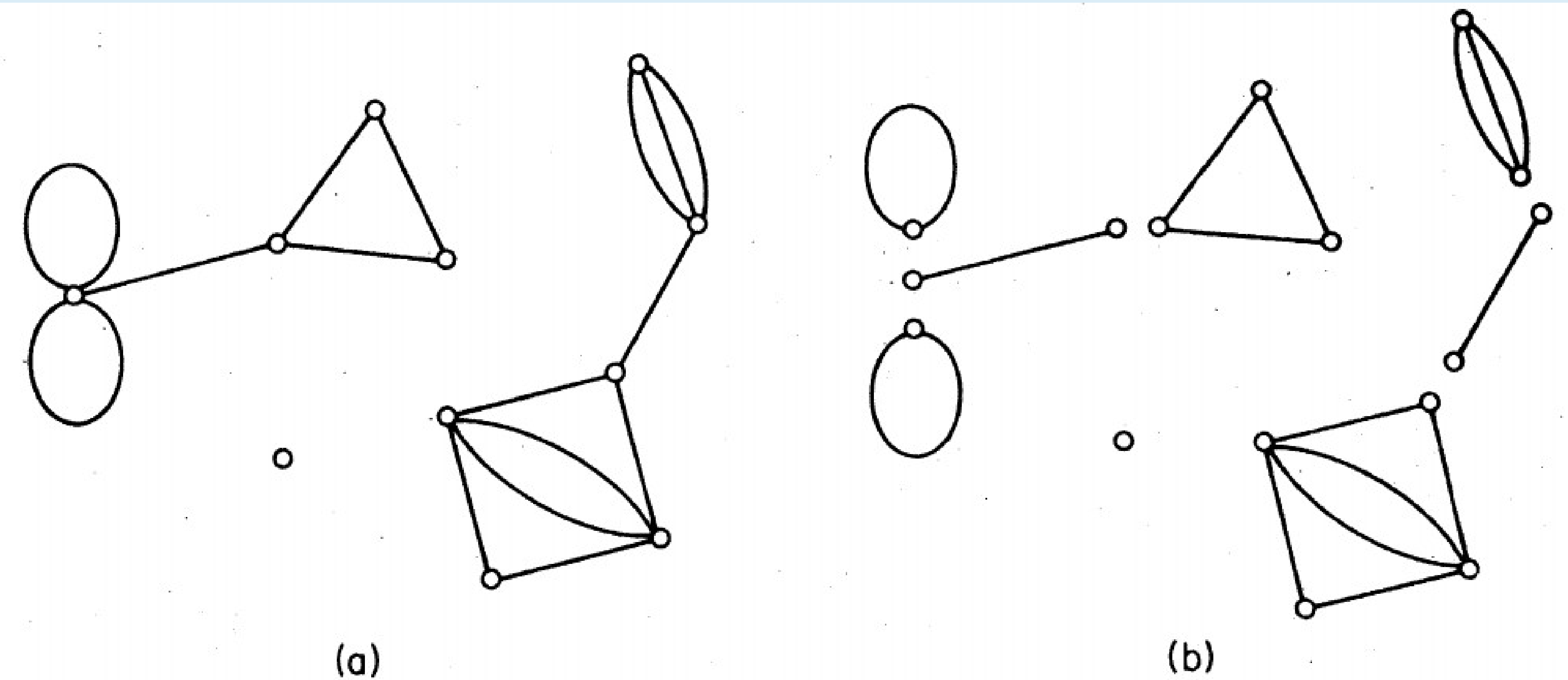
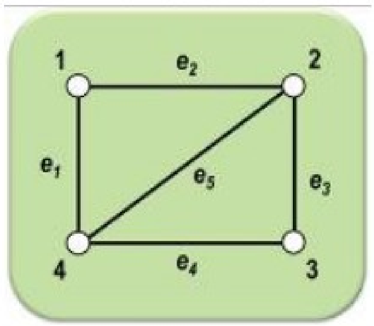


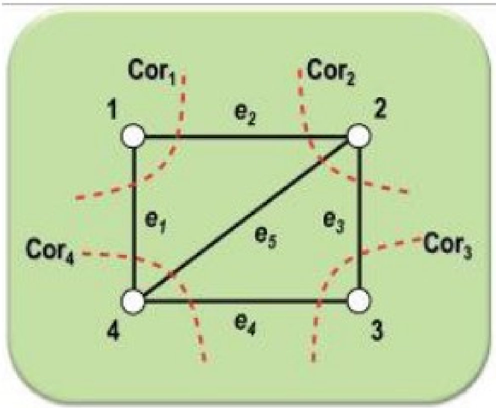
Figure 3.3. (*a*) *G*; (*b*) the blocks of *G*

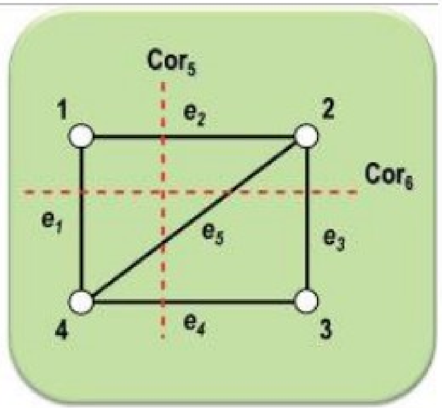
Bondy & Murty, 1982

Matriz de Corte

- É a matriz obtida pelas condições: $q_{ij} = 1$ se a aresta j pertence ao corte i e $q_{ij} = 0$ caso contrário.



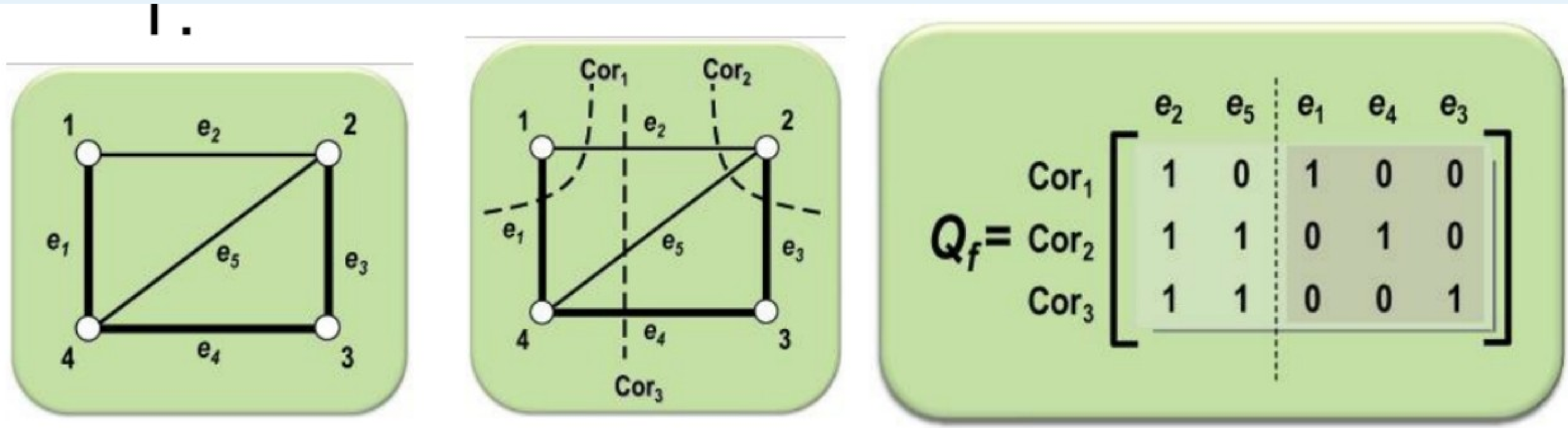




$$Q_C = \begin{array}{c} \\ Cor_1 \\ Cor_2 \\ Cor_3 \\ Cor_4 \\ Cor_5 \\ Cor_6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

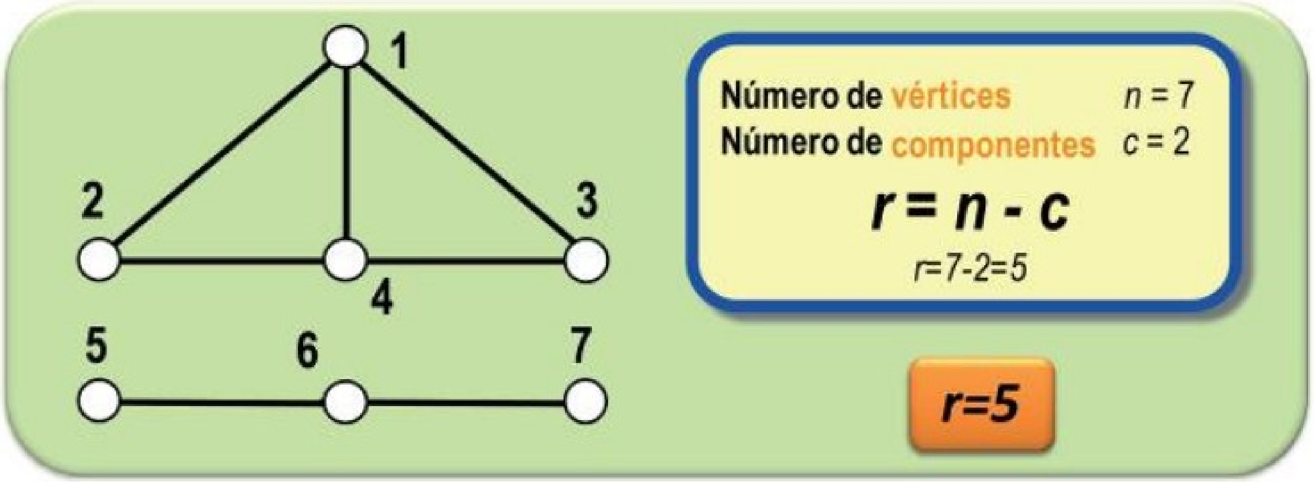
Matriz de Corte Fundamental

Dado um subgrafo gerador conexo e acíclico de G, i.e. uma árvore geradora T de G, um corte fundamental em G é aquele que remove apenas uma aresta de T.



Rank de um grafo

- O rank ou posto de um grafo G com n vértices e c componentes conexas é dado por
- r = n-c

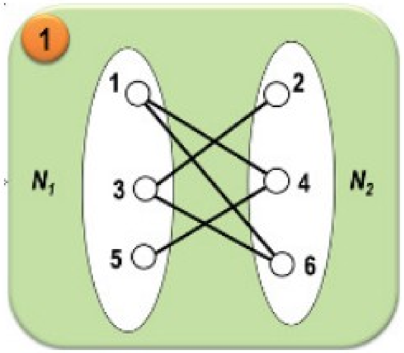


Grafos Bipartidos

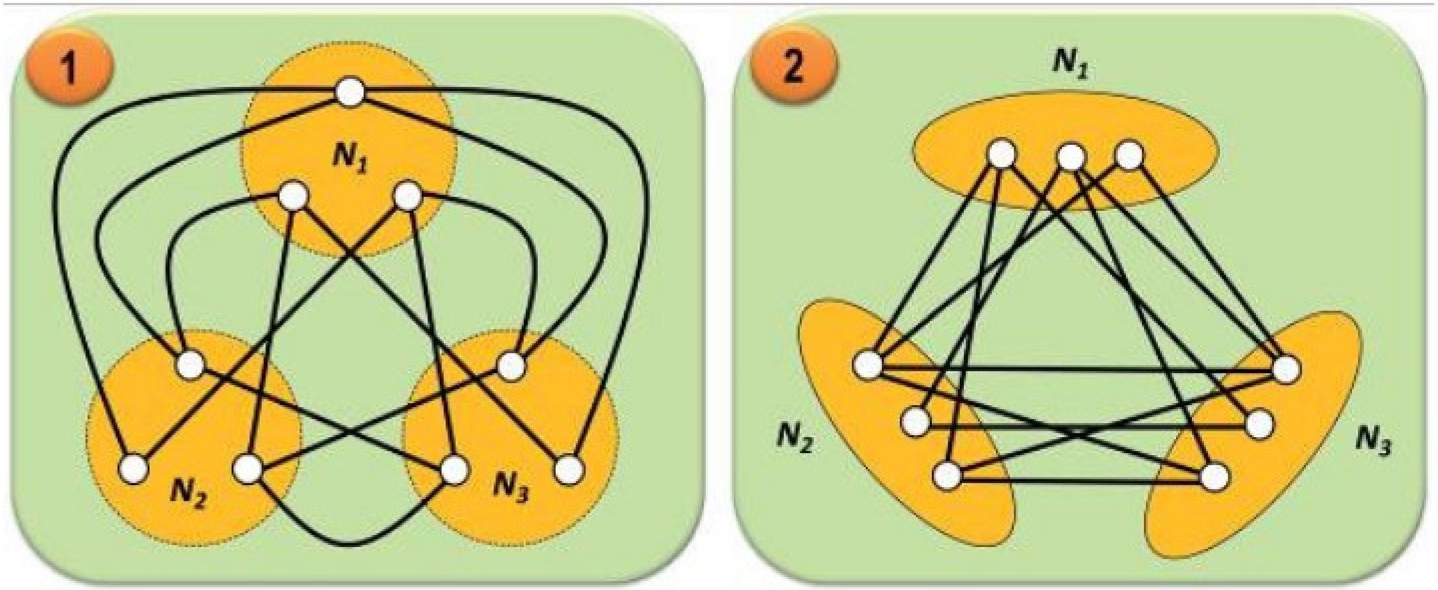
- Um grafo G é bipartido quando seu conjunto de vértices N pode ser dividido em dois conjuntos N_1 e N_2, tais que

$$N_1 \cap N_2 = \emptyset \text{ e } N_1 \cup N_2 = N$$

e somente existem arestas em G ligando algum vértice de N_1 com algum vértice de N_2 e vice-versa



Grafos 3-partidos



Problema

Seja o seguinte problema:

Considere a tabela, onde 9 pessoas enviaram currículos para preencher 7 vagas de emprego em uma escola. As qualificações dos candidatos permitem que eles possam preencher, às vezes, mais de uma vaga. Monte um grafo com os candidatos (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) sendo vértices de um lado, e as vagas (L, S, T, M, E, B, F) sendo vértices de outro. Coloque arestas entre os candidatos e vagas que ele pode preencher. É possível preencher todas as vagas com esses candidatos?

Problema

Job \ Applicant	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Assistant librarian	x		x	x					
Second grade	x	x	x	x					
Third grade	x	x		x					
High school math				x	x	x			
High school English				x		x	x		
Asst. baseball coach						x	x	x	x
Asst. football coach					x	x		x	

Table 6.1: *Some sample job application data*

Bogart, Stein & Drysdale, 2006.

Referências Bibliográficas

- Bogart, K. & Stein, C. & Drysdale, R. Discrete Mathematics for Computer Science. Key College Pub., 2006.
- Bondy, J. & Murty, *Graph Theory with Applications*, Elsevier, 1982.
- Ruohonen, K. *Graph Theory*, 2013.
- Sedgewick, R. & Wayne, K. *Algorithms* (4th ed.), Addison-Wesley, 2011.
- Wilson, R. & Watkins, J. *Graphs: An Introductory Approach.* John Wiley, 1990.