13

Indução em n

Base

$$\sum_{1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$1 = \frac{2}{2}$ ✓

h.I $\sum^{n-1} \frac{(n-1).n}{2}$

$$\sum_{1}^{n} i = \sum_{i=1}^{n-1} + n \overset{h.i}{=} \frac{(n-1).n}{2} + n = \frac{n(2+n-1)}{2}$$

$$\frac{n(n+1)}{2}$$

14

Indução em

$$\sum_{1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Base $1^2 = 1 = \frac{1.2.3}{6} = 1$ ✓

Paso $(n>1)$: $\sum_{1}^{n} i^2 = \sum_{1}^{n-1} i^2 + n^2 \overset{h.I}{=} \frac{(n-1)(n)2(n-1)+n^2}{6}$

✓

$$\frac{n(n+1)^{(n+2)}}{6} = \frac{n(2n^2+3n+1)}{6}$$

$$\frac{(n-1).n.(2n-1)+6n^2}{6}$$

$$\frac{n(2n^2-n-2n+1+6n)}{6} = \frac{n((n-1)(2n-1)+6n)}{6}$$

75

$$\sum_{i=0}^{m} 2^i = 2^{m+1} - 1$$

Base 0 $= 2^0 = 2^1 - 1$

$1 = 1$ ✓

Indução em m

$m > 0$

$$\sum_{i=0}^{m} 2^i = \sum_{i=0}^{m-1} 2^i + 2^m \overset{hI}{=} 2^m - 1 + 2^m = 2^{m+1} - 1$$

76

Base $m = 1$ $\quad 1^3 = 1 = 1^2$

Caso $m > 1$ $\quad$ Indução em m $\quad 1^3 + 2^3 + 3^3 \ldots = (1+2+3+4)^2$

Sabemos que $1 + 2 + \ldots m = \frac{m(m+1)}{2}$

$$\sum i^3 = (1 + 2 + \ldots m)^2 = \left(\frac{m(m+1)}{2}\right)^2 = \frac{m^2(m+1)^2}{4}$$

Então $\displaystyle\sum_{1}^{m+1} i^3 = \sum_{i}^{m} i^3 + (m+1)^3 = \frac{m^2(m+1)^2}{4} + (m+1)^3$

$$\frac{m^2(m+1)^2 + 4(m+1)^3}{4}$$

$$(m+1)^2(m^2 + 4(m+1))/4$$

$$\frac{(m+1)^2(m+2)^2}{4} = \frac{(m+1)^2 (m^2 + 4m + 4)}{4}$$ ✓

17

Base $n=0$ $\frac{3}{2^0-1} = \frac{3}{0}$ / falso

Base $n=1$ $\frac{3}{2^2-1} \geq 0$ ✓

$\frac{3}{3} \geq 0$

Reescrevendo: $\frac{3}{2^{2n}-1} = \underline{3.k = 2^{2n}-1}$

Passo:

$2^{2n}-1 = 3.k'$

$2^{2(n+1)}-1 = 3k''$ {provar}

$2^{2n+2}-1 = 2^2 . 2^{2n}-1 = 4\,2^{2n}-1$

$3.2^{2n} + \underline{2^{2n}-1}$ h.I

$3.2^{2n} + 3.k'$

$\underline{2^{2(n+1)}-1 = 3(2^{2n}+k') = 3k''}$

19 $n! \leq n^2$

Indução em n

Base = 1

$n! \leq n^n$

$1! \leq 1$

$1 \leq 1$ ✓

$(n+1)! = (n+1).n! \leq (n+1).n^n \leq (n+1).(n+1)^n \leq (n+1)^{(n+1)}$

18

$$3^n \geq n^2 + 3 \quad \forall n / n \geq 2$$

Indução em n:

Base $= 2$ $\quad 3^2 \geq 7$

Passo para $n > 2$: $\quad 3^n = 3 \cdot 3^{n-1} \geq 3((n-1)^2 + 3)$

$$3(n^2 - 2n + 4)$$

$$3n^2 - 6n + 12$$

$$n^2 + 3 + (2n^2 - 6n + 9 \geq n^2 + 3$$

$$\geq 0$$

$\Delta < 0$

Parábola que não toca o eixo x.