$$\dfrac{\dfrac{}{\neg p \to \bot, \neg p \vdash \cancel{Q}\ \neg p \to \bot}(Ax) \qquad \dfrac{}{\neg p \to \bot, \neg p \vdash \neg p}(Ax)}{\neg p \to \bot, \neg p \vdash \bot}\, e\,(e\to)$$

$$\dfrac{\neg p \to \bot, \neg p \vdash \bot}{\neg p \to \bot \vdash \neg\neg p}(i\neg)$$

$$\dfrac{\neg p \to \bot \vdash \neg\neg p}{\neg p \to \bot \vdash p}(\neg\neg)$$

2)

$$\dfrac{\dfrac{}{\neg\neg p, \neg p \vdash \neg\neg p}(e\neg) \qquad \dfrac{}{\neg\neg p, \neg p \vdash \neg p}(e\neg)}{\neg\neg p, \neg p \vdash \bot}$$

$$\dfrac{\neg\neg p, \neg p \vdash \bot}{\neg\neg p \vdash p}(PBC)$$

1)

$W, \neg P, P \vdash P$ (e¬) $P, W, \neg P \vdash \neg P$ (e¬)

$P, W, \neg P \vdash \bot$ (Ex)

$P, W, \neg P \vdash U$ (i→)

$\neg P\ W \vdash W$ (e→) $W, \neg P \vdash P \to U$ (e→)

$W, \neg P \vdash \neg P$ (e¬) $W, \neg P \vdash P$ (e¬)

$W, \neg P \vdash \bot$ (PBC)

$W \vdash P$ (i→)

$\vdash \overbrace{((P \to U) \to P)}^{W} \to P$

4)

(Ax) (Ax)

$P, W, \neg P \vdash P$ (e¬) $P, W, \neg P \vdash \neg P$ (e¬)

$\vdash \bot$ (Ex)

$P, W, \neg P \vdash U$ (i→)

$W \vdash W$ (e→) $W, \neg P \vdash P \to U$ (e→)

$W, \neg P \vdash \neg P$ (e¬) $W, \neg P \vdash P$ (e¬)

$W, \neg P \vdash \bot$ (i¬)

$W \vdash \neg\neg P$ (¬¬)

$\overbrace{(P \to U) \to P}^{W}$ $\vdash P$ (i→)

$\vdash ((P \to U) \to P) \to P$

3)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[(A\vee\neg A)\to\neg A]^{u} \qquad \dfrac{[A]^{v}}{A\vee\neg A}}{\neg A} \qquad\qquad [A]^{v}}{\perp}\,(\neg i)\,v}{\neg A}\,(\vee i)}{A\vee\neg A}\,(\to i)\,u}{}$$

6)

$$\dfrac{(LP)\quad ((A\vee\neg A)\to A)\to(A\vee\neg A)\to(A\vee\neg A) \qquad ((A\vee\neg A)\to A)\to(A\vee\neg A)}{A\vee\neg A}\,(e\to)$$

9) O número necessário é 3, pois basta ~~dizer~~ provar que PBC equivale $(\neg\neg e)$ que a $(\neg\neg e)$ equivale (LEM) e que o LEM equivale a (LP).

Assim, por transitividade, todas estão provadas suas equivalências.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{x, x \to \bot, \neg U \vdash x \to \bot \;(e\neg) \qquad x, x \to \bot, \neg U \vdash x \;(e\to)}{x, x\to\bot, \neg U \vdash \bot}\;(PBC)}{x \to \bot, x \vdash U}\;(i\to)}{x \to \bot \vdash x \to U}$$

10)

Assim, prova-se, que provando o absurdo, é possível provar qualquer proposição, dessa forma, confirmando a lei da explosão.