## II. DERIVADA DE LAS FUNCIONES ALGEBRAICAS Y TRIGONÓMETRICAS

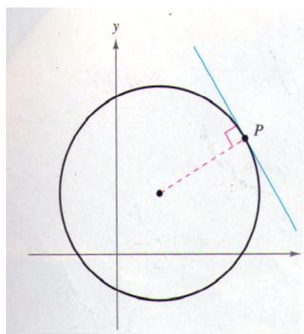
### DERIVADA: INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA E INTERPRETACIÓN COMO RAZÓN DE CAMBIO

La noción de "Límite" es fundamental en el estudio del Cálculo, pues, el cálculo se desarrolló a la sombra de 4 problemas que involucraban el proceso de límite, en los que trabajaban matemáticos del siglo XVII:

a) El problema de la recta tangente
b) El problema de la velocidad y aceleración
c) El problema de los máximos y mínimos
d) El problema del área

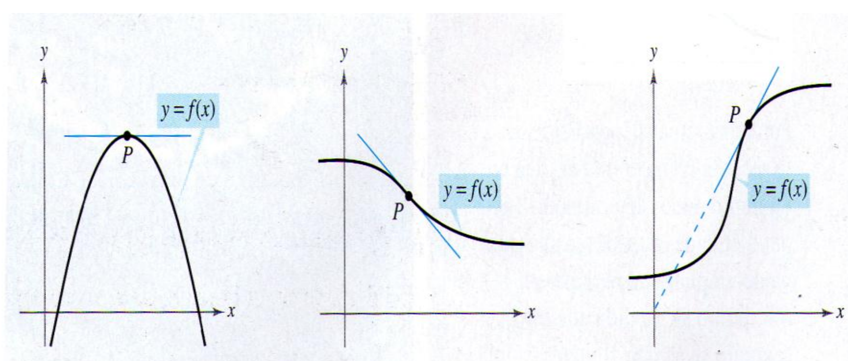
En el problema de la Recta Tangente, ¿qué quiere decir que una recta es tangente a una curva en un punto?

En una "Circunferencia" la recta tangente en el punto "P" es la recta perpendicular al radio y que pasa por P.



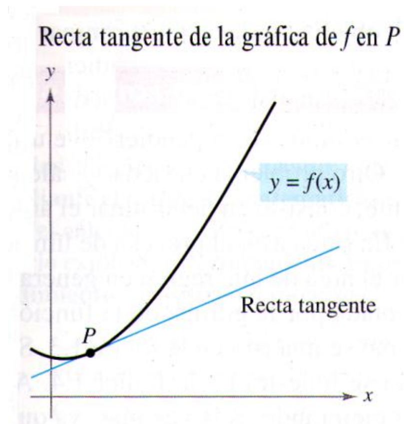

Recta tangente a una circunferencia

En una curva general, el problema se complica, pues ¿Cómo se podrían definir la rectas tangentes de las gráfica abajo mostradas?

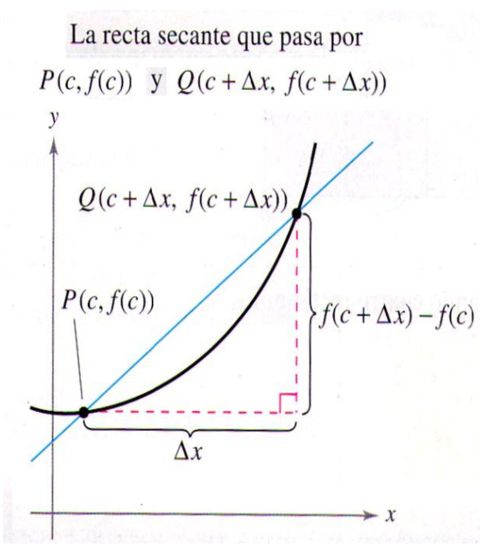



Recta tangente a una curva en un punto

"En el Problema de la Recta Tangente", se tiene una función $f(x)$ y un punto "$P$" de su gráfica y se trata de encontrar la "Ecuación de la Recta Tangente" a la gráfica en el punto "$P$".




A excepción en los casos en que la recta tangente es vertical, el problema de encontrar la Recta Tangente en el punto "$P$" equivale a determinar *"la pendiente de la recta tangente en el punto P"*. Esta pendiente se puede calcular aproximadamente, trazando una recta que pase por el punto de tangencia "P" y por otro punto "Q" sobre la curva. Esta recta se llama "*Recta Secante*".



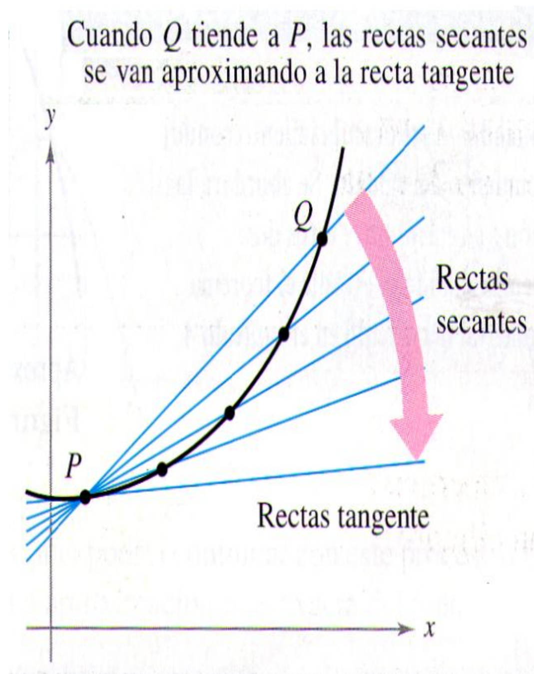

Si $P(c, f(c))$ es el punto de tangencia y el otro punto $Q(c+\Delta x, f(c+\Delta x))$ sobre la gráfica de $f(x)$, la pendiente de la recta secante que pasa por esos dos puntos es:

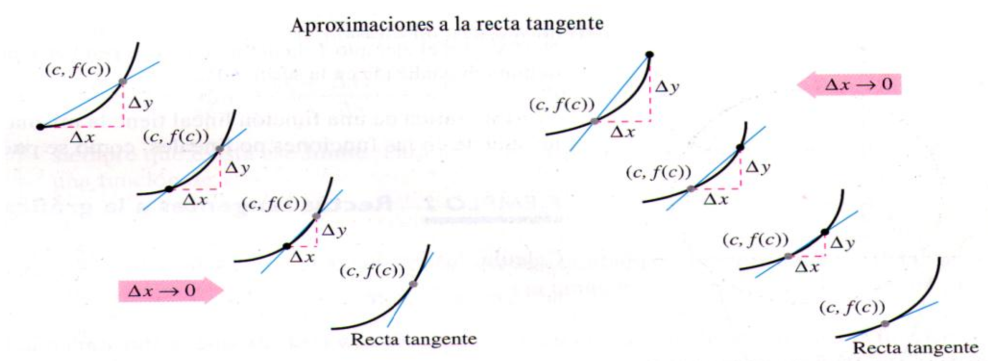
$$= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{(c+\Delta x) - c} \quad \frac{Cambio\ en\ y}{Cambio\ en\ x}$$

$$m_{Sec} = \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} \quad Pendiente\ de\ la\ secante$$

El miembro de la derecha en esta ecuación es un "*cociente incremental o de diferencias*". El denominador $\Delta x$ es el cambio o incremento en la variable "$x$" y el numerador es $\Delta y = f(c+\Delta x) - f(c)$ que es el cambio o incremento en la variable "$y$"

A medida que el punto "Q" se aproxima al punto "P", la pendiente de la recta secante se aproxima a la recta tangente y cuando existe y tal "posición límite" se dice que la pendiente de la recta tangente es el "límite de la pendiente de la recta secante"




**DERIVADAS, RECTA TANGENTE Y LAS RAZONES DE CAMBIO**

**DEFINICIÓN 2.1 (RECTA TANGENTE CON PENDIENTE "$m$")**: Si $f(x)$ está definida en un intervalo abierto que contiene a un número "$c$" y además $f(x)$ continua en "$c$". "*La recta Tangente*" a la gráfica de $f(x)$ en el punto $P(c, f(c))$ es:

$(i)$La recta que pasa por "$P$" y que tiene pendiente $m(c)$

$$m(c) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x}$$

Si este límite existe.

$(ii)$La recta $x = c$

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} \text{ es } +\infty \text{ ó } -\infty$$

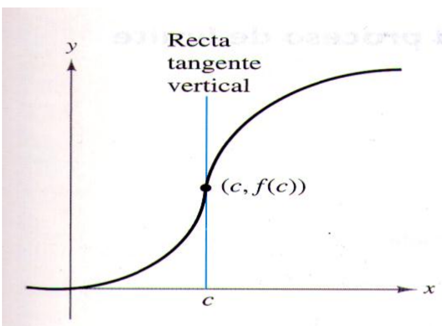
$$\lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} \text{ es } +\infty \text{ ó } -\infty$$

Entonces la recta que pasa por el punto $\left(c, f(c)\right)$ y que tiene pendiente "$m$" es la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto $\left(c, f(c)\right)$ y cuya ecuación viene dada por:

$$y - f(c) = m(x - c)$$

La "pendiente de la recta tangente a la gráfica en el punto $P(c, f(c))$ se llama "pendiente de la gráfica de $f$ en $x = c$.

La definición de la recta tangente a una curva no incluye la posibilidad de una recta vertical. Para éstas, se utilizan las siguientes definiciones:



La gráfica de $f$ tiene recta tangente vertical en $(c, f(c))$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} = \infty$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} = -\infty$$

**DEFINICIÓN 2.2 (RECTA NORMAL A UNA GRÁFICA)**: La recta normal a una gráfica en un punto dado es la recta perpendicular a la recta en ese punto.

**DEFINICIÓN DE DERIVADA DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO**

**DEFINICIÓN 2.3 (DERIVADA DE UNA FUNCIÓN)**: La derivada de la función "$f(x)$" en "$x$" viene dada por:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Siempre que el límite exista. Para todos los "$x$" que existe este límite, $f'(x)$ es una función de la variable "$x$"

El proceso de calcular la función derivada de una función se llama "*derivación*". Una función es derivable en "$x$" si su derivada en "$x$" existe y derivable en un intervalo abierto $(a, b)$ si es derivable en todos y cada uno de los puntos de ese intervalo.

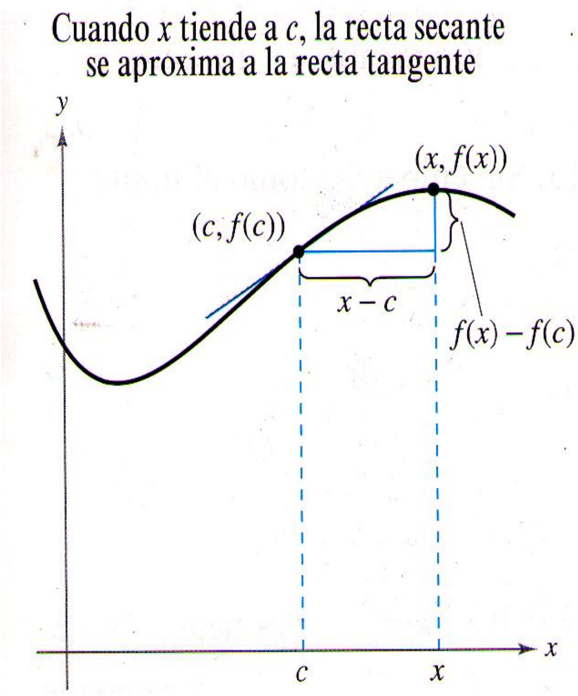
**NOTACIONES DE DERIVADA**:

$$f'(x); \quad \frac{dy}{dx}; \quad y'; \quad \frac{d}{dx}[f(x)]; \quad D_x[y]$$

$$\frac{dy}{dx} \text{ se lee: "derivada de } y \text{ con respecto a } x\text{"}$$

**DIFERENCIABILIDAD Y CONTINUIDAD**

La siguiente forma alternativa como un "límite" de la derivada es útil para investigar la relación que existe entre derivabilidad y continuidad. La derivada de "$f$" en "$c$" es:




$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

Observe que la existencia del límite en esta forma alternativa requiere que los límites laterales existan y sean iguales:

$$\lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \quad \text{y} \quad \lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

Estos límites laterales se denominan "*derivada por la izquierda y derivada por la derecha*" respectivamente. Se dice que $f(x)$ es derivable en un intervalo cerrado $[a, b]$ si es derivable en abierto $(a, b)$ y además existe la derivada por la derecha de "$a$" y por la izquierda de "$b$".

**DEFINICIÓN 2.4 (DERIVADA LATERAL)**:

$(i)$ Si la función "$f(x)$" está definida en "$c$" entonces la derivada por la derecha de $f(x)$ en "$c$", denotada por $f'_+(c)$ está definida por:

$$f'_+(c) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} \Leftrightarrow f'_+(c) = \lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

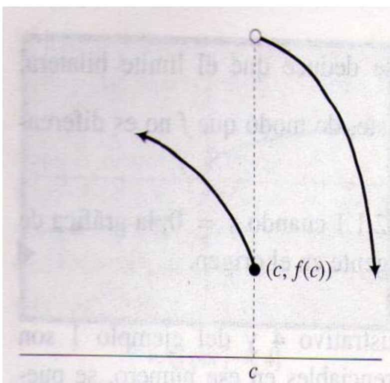
Si existe límite.

$(ii)$ Si la función "$f(x)$" está definida en "$c$" entonces la derivada por la izquierda de $f(x)$ en "$c$", denotada por $f'_{-}(c)$ está definida por:

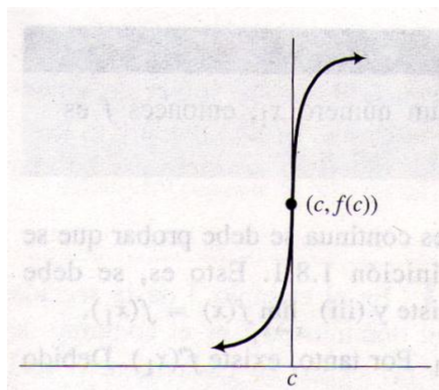
$$f'_{-}(c) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} \Leftrightarrow f'_{-}(c) = \lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

Si existe límite.

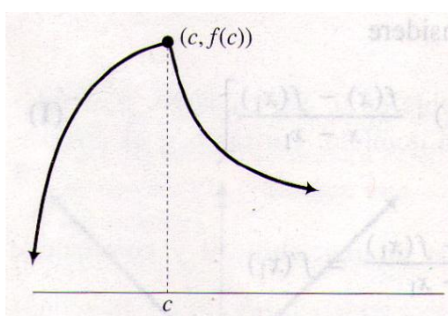
**TEOREMA 2.1:** Si $f(x)$ es una función diferenciable en un número "$c$", entonces $f(x)$ es continua en $x = c$



$f$ no es diferenciable en $c$
$f$ es discontinua en $c$



$f$ no es diferenciable en $c$
$f$ es continua en $c$



$f$ no es diferenciable en $c$
$f$ es continua en $c$

## TEOREMAS ACERCA DE LA DIFERENCIABILIDAD DE FUNCIONES ALGEBRAICAS

**TEOREMA 2.2** (LA REGLA DE DIFERENCIACIÓN DE UNA CONSTANTE): Si "$c$" es un número real (constante) $f(x) = c$ entonces

$$\frac{d}{dx}[c] = 0$$

**TEOREMA 2.3** (LA REGLA PARA LA DIFERENCIACIÓN DE UNA CONSTANTE POR UNA FUNCIÓN): Si $f(x)$ es una función derivable, "$c$" un número real, entonces "$cf(x)$" también es derivable, entonces:

$$\frac{d}{dx}[cf(x)] = cf'(x)$$

**TEOREMA 2.4** (LA REGLA PARA LA DIFERENCIACIÓN DE SUMA Y DIFERENCIA DE FUNCIONES): Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones derivables, entonces la suma o diferencia de las funciones $f(x) \pm g(x)$ también es derivable y su derivada es:

$$\frac{d}{dx}[f(x) \pm g(x)] = f'(x) \pm g'(x)$$

Esta regla aplica a cualquier número finito de sumas o diferencia de funciones.

**TEOREMA 2.5** (LA REGLA PARA LA DIFERENCIACIÓN DEL PRODUCTO DE FUNCIONES): Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones derivables, entonces el producto de $f(x)$ con $g(x)$ también es derivable y su derivada es:

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$$

Esta regla aplica a cualquier número finito de producto de funciones.

**TEOREMA 2.6** (LA REGLA PARA LA DIFERENCIACIÓN DEL COCIENTE DE FUNCIONES): Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones derivables, entonces el cociente $\frac{f(x)}{g(x)}$ también es derivable y su derivada es:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{[g(x)]^2};\ g(x) \neq 0$$

**TEOREMA 2.7** (LA REGLA PARA LA DIFERENCIACIÓN DE POTENCIAS):

✓ "$n$" es un número racional positivo y si $f(x) = x^n$ entonces su derivada es:

$$\frac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1}$$

✓ "$n$" es un número racional negativo y si $f(x) = x^{-n}$ entonces su derivada es:

$$\frac{d}{dx}[x^{-n}] = -nx^{-n-1}$$

| Función Original | Reescribir | Derivar | Simplificar |
|---|---|---|---|
| $y=\frac{5}{2x^3}$ | $y=\frac{5}{2}x^{-3}$ | $y'=\frac{5}{2}(-3x^{-4})$ | $y'=-\frac{15}{2x^4}$ |
| $y=\frac{5}{(2x)^3}$ | $y=\frac{5}{8}x^{-3}$ | $y'=\frac{5}{8}(-3x^{-4})$ | $y'=-\frac{15}{8x^4}$ |
| $y=\frac{7}{3x^{-2}}$ | $y=\frac{7}{3}x^{2}$ | $y'=\frac{7}{3}(2x)$ | $y'=\frac{14}{3}x$ |
| $y=\frac{7}{(3x)^{-2}}$ | $y=7(3x)^2$ | $y'=63(2x)$ | $y'=126x$ |
| $y=\frac{3}{5}\sqrt{x}$ | $y=\frac{3}{5}x^{\frac{1}{2}}$ | $y'=\frac{3}{5}\left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)$ | $y'=\frac{3}{10\sqrt{x}}$ |
| $y=\frac{3}{5\sqrt{x}}$ | $y=\frac{3}{5}x^{-\frac{1}{2}}$ | $y'=\frac{3}{5}\left(-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}\right)$ | $y'=-\frac{3}{10x\sqrt{x}}$ |
| $y=5\sqrt[3]{x}$ | $y=5x^{\frac{1}{3}}$ | $y'=5\left(\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\right)$ | $y'=\frac{5}{3\sqrt[3]{x^2}}$ |
| $y=\frac{3}{5\sqrt[3]{x}}$ | $y=\frac{3}{5}x^{-\frac{1}{3}}$ | $y'=\frac{3}{5}\left(-\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}\right)$ | $y'=-\frac{1}{5x\sqrt{x}}$ |
| $y=5\sqrt[4]{x^3}$ | $y=5x^{\frac{3}{4}}$ | $y'=5\left(\frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}}\right)$ | $y'=\frac{15}{4\sqrt[4]{x}}$ |
| $y=\frac{3}{5\sqrt[4]{x^3}}$ | $y=\frac{3}{5}x^{-\frac{3}{4}}$ | $y'=\frac{3}{5}\left(-\frac{3}{4}x^{-\frac{7}{4}}\right)$ | $y'=-\frac{9}{20x\sqrt{x^3}}$ |

**DERIVADAS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS**

**TEOREMA 2.8** (LA REGLA PARA LA DIFERENCIACIÓN DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS):

$$\frac{d}{dx}[Sen\ x] = Cos\ x; \qquad \frac{d}{dx}[Cos\ x] = -Sen\ x$$

$$\frac{d}{dx}[Tan\ x] = Sec^2\ x; \qquad \frac{d}{dx}[Cot\ x] = -Csc^2\ x$$

$$\frac{d}{dx}[Sec\ x] = Sec\ x\ Tan\ x; \qquad \frac{d}{dx}[Csc\ x] = -Csc\ x\ Cot\ x$$

**DERIVADA DE UNA FUNCIÓN COMPUESTA**

Para calcular la derivada de una función compuesta utilizamos la "*Regla de la Cadena*" o de los Teoremas más importantes del Cálculo.

**TEOREMA 2.9** (LA REGLA DE LA CADENA): Si $y = f(u)$ es una función diferenciable de la variable "$u$" y si además $u = g(x)$, es una función diferenciable de la variable "$x$", entonces $y = f(g(x))$ es una es una función derivable de la variable "$x$", entonces

$$y = f[g(x)] = f(u)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx} \quad ó \quad \frac{d}{dx}[f(g(x))] = f'(g(x))g'(x)$$

En general: $D_x[f(u)] = f'(u)D_x u$

| $y = f(g(x))$ | $u = g(x)$ | $y = f(u)$ |
|---|---|---|
| $y = \sqrt{4x^5 - 3x + 1}$ | $u = 4x^5 - 3x + 1$ | $y = \sqrt{u}$ |
| $y = Cos\ 5x$ | $u = 5x$ | $y = Cos\ u$ |
| $y = \frac{1}{x^2 + 1}$ | $u = x^2 + 1$ | $y = \frac{1}{u}$ |
| $y = Tan^4 x$ | $u = Tan\ x$ | $y = u^4$ |

**TEOREMA 2.10** (REGLA GENERAL DE LA DIFERENCIACIÓN DE LAS POTENCIAS): Si $y = [u(x)]^n$ donde "$u$" es una función derivable de la variable "$x$" y "$n$" es un número racional, entonces

$$\frac{d}{dx}[u]^n = nu^{n-1}\ (u')$$

**TEOREMA 2.11** (REGLA GENERAL DE LA DIFERENCIACIÓN DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS):

$$\frac{d}{dx}[Sen\,u\,] = u'Cos\,u\,; \qquad \frac{d}{dx}[Cos\,u\,] = -u'Sen\,u$$

$$\frac{d}{dx}[Tan\,u\,] = u'Sec^2\,u; \qquad \frac{d}{dx}[Cot\,u\,] = -u'Csc^2\,u$$

$$\frac{d}{dx}[Sec\,u\,] = u'Sec\,u\,Tan\,u; \quad \frac{d}{dx}[Csc\,u\,] = -u'Csc\,u\,Cot\,u$$

## DIFERENCIACIÓN IMPLÍCITA

Las funciones que hemos tratado hasta ahora se pueden describir expresando una variable "*explícitamente*" en términos de la otra variable, como por ejemplo:

$$y = 3x^3 - 4x^2 - 2; \qquad y = Cos\,(3x); \qquad y = \sqrt[3]{5x^2}$$

Sin embargo, algunas funciones se definen "*implícitamente*" por medio de una relación entre las variables "$x$" e "$y$", como:

$$3x^5y^2 - 5xy^3 + 7y - 2x + x^2 - y^2 = 10$$

$$x^2 + y^2 = 9; \qquad \frac{9x^2}{16} + \frac{5y^2}{9} = 1; \quad \frac{7x^2}{4} - \frac{5y^2}{16} = 1$$

### ESTRATEGIA PARA LA DERIVACIÓN IMPLICITA

1. Derivar ambos lados de la ecuación respecto a "$x$"
2. Agrupar en el lado izquierdo de la ecuación todos los términos en que aparezca "$\frac{dy}{dx}$" y los términos restantes pasarlos al otro miembro
3. Factorizar "$\frac{dy}{dx}$" en el lado izquierdo de la ecuación
4. Despejar "$\frac{dy}{dx}$"

## DERIVADA DE ORDEN SUPERIOR

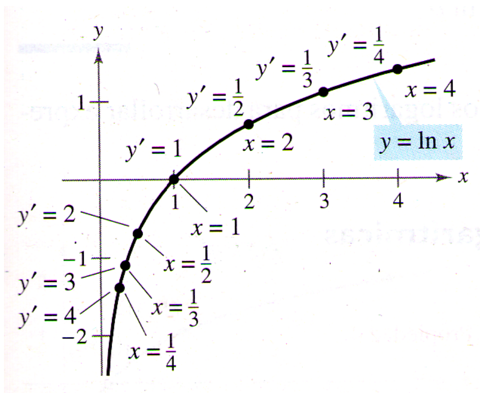
Si "$f(x)$" es una función derivable, entonces su derivada $f'(x)$ es una función. Si esta es una nueva función, nos preguntamos ¿es derivable? si la respuesta es sí, entonces su derivada sería $f''(x)$, la cual llamaríamos segunda función derivada, la cual es una nueva función, que también pudiera ser derivable y su derivada sería $f'''(x)$, y así sucesivamente iríamos derivando las derivadas obtenidas, siempre y cuando éstas sean derivables.

## DERIVADA DE LA FUNCIÓN
## LOGARITMO NATURAL "$ln\ x$"

La función "*Logaritmo Natural*" la cual denotamos como "$\ln x$" no es una función algebraica ni Trigonométrica y forma el grupo llamado como "*Funciones Trascendentes*" (grupo de funciones que no son algebraicas, entre las que se incluyen las Trigonométricas). La *base* de los "*Logaritmos Naturales*" es $e = 2.71828182846$"

## PROPIEDADES DE LA FUNCIÓN
## LOGARITMO NATURAL $y = \ln x$

(a) Dominio: $(0, \infty)$ y Recorrido o Rango: $(-\infty, \infty)$
$(b)$ La Función es continua, creciente e inyectiva
$(c)$ La gráfica es cóncava hacia abajo



La función logaritmo natural es creciente, y su gráfica es cóncava hacia abajo

**TEOREMA 2.12** (PROPIEDADES DE LOS LOGARITMOS): Si $A$ y $B$ son números positivos y "$n$" es un número racional, los logaritmos cumplen las siguientes propiedades:

1. $\ln(1) = 0$
2. $\ln(AB) = \ln A + \ln B$
3. $\ln\left(\frac{A}{B}\right) = \ln A - \ln B$
4. $\ln(A^n) = n \ln A$

**TEOREMA 2.13** (DERIVADA DE LA FUNCIÓN LOGARITMO NATURAL): Si "$u$" es derivable en la variable "$x$":

$$\frac{d}{dx}[\ln x] = \frac{1}{x}, \quad x > 0 \qquad\qquad \frac{d}{dx}[\ln u] = \frac{u'}{u}$$

## DIFERENCIACIÓN LOGARITMICA

Muchas veces la expresión que define a una función $f(x)$ se simplifica enormemente si consideramos una nueva función "$F(x) = ln\, f(x)$". Esto ocurre si por ejemplo existen muchos productos, cocientes y/o potencias, pues en tal caso, las propiedades de la función "*logaritmo natural* $ln\, f(x)$" (Teorema 2.12) pueden simplificar el trabajo relacionado con la diferenciación de este tipo de expresiones un poco complejas haciendo aparecer sumas, restas y productos respectivamente de las potencias por los logaritmos respectivos.

Ejemplo:

Derivar $\quad y = \dfrac{\sqrt[4]{x^3}\sqrt{x^2+1}}{(3x+2)^5}$

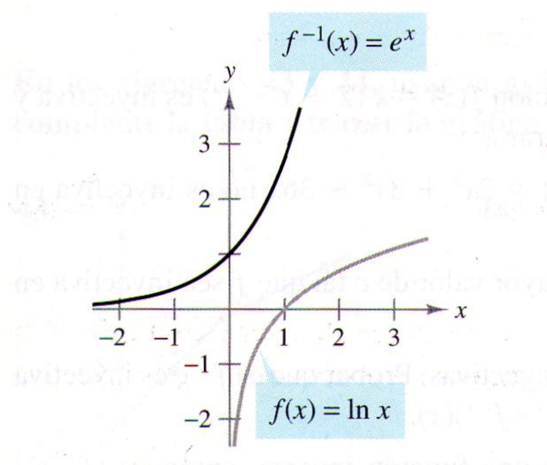
## DERIVADA DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL NATURAL $y = e^x$

La función inversa de función "*Logaritmo Natural* $y = \ln x$" se llama "*función exponencial natural*" la cual denotamos como "$y = e^x$". Esto es:

$$y = e^x \Leftrightarrow \ln y = x$$

## PROPIEDADES DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL NATURAL $y = e^x$

(a) Dominio: $(-\infty, \infty)$ y Recorrido o Rango: $(0, \infty)$
$(b)$ La Función es continua, creciente e inyectiva
$(c)$ La gráfica es cóncava hacia arriba
$(d)$ $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0 \quad y \lim\limits_{x\to\infty} e^x = \infty$




La función inversa de la función logaritmo natural es la función exponencial natural

**TEOREMA 2.14** (DEFINICIÓN DEL NÚMERO "$e$"): El número "$e$" es el valor de la función exponencial "$y = e^x$" en "$x = 1$", es decir,

$$e^1 = e = 2.71828182846$$

**TEOREMA 2.15**: $\ln e = 1$

**TEOREMA 2.16:** Si $m, n$ son números reales entonces:

$$(i)\ e^m e^n = e^{m+n} \qquad (ii)\ \frac{e^m}{e^n} = e^{m-n}$$

$$(iii)(e^m)^n = e^{mn} \qquad (iv)\ e^0 = 1$$

**TEOREMA 2.17** (DERIVADA DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL NATURAL): Si "$u$" es derivable en la variable "$x$":

$$\frac{d}{dx}[e^x] = e^x \qquad \frac{d}{dx}[e^u] = u'\, e^u$$

**DEFINICIÓN 2.5 (DEFINICIÓN DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL DE BASE "$a$")**: Si "$a$" es cualquier número real positivo diferente de 1 ($a \neq 1$) y "$x$" es cualquier número real, entonces la función $f(x) = a^x$ se denomina "*función exponencial de base a*"

$$a^x = e^{(\ln a)x}$$

$$Si\ a = 1 \text{ entonces } \quad y = 1^x = 1 \text{ función constante}$$

**TEOREMA 2.18** (DERIVADA DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL DE BASE $a$): Si "$u$" es derivable en la variable "$x$":

$$\frac{d}{dx}[a^x] = a^x \ln a \qquad \frac{d}{dx}[a^u] = u'\, a^u \ln a$$

**DEFINICIÓN 2.6a (DEFINICIÓN DE LA FUNCIÓN LOGARITMICA DE BASE "$a$")**: Si "$a$" es cualquier número real positivo diferente de 1 ($a \neq 1$), la "*función logarítmica de base a*" es la inversa de la función exponencial de base a, es decir:

$$y = log_a x \iff a^y = x$$

**DEFINICIÓN 2.6b (DEFINICIÓN DE LA FUNCIÓN LOGARITMICA DE BASE "$a$")**: Si "$a$" es cualquier número real positivo diferente de 1 ($a \neq 1$) y "$x$" cualquier número real positivo, entonces la "*función logarítmica de base a*" denotada por $log_a x$, se define como:

$$log_a x \ = \frac{\ln x}{\ln a}$$

Por la definición se tiene entonces que

$$log_a e \ = \frac{\ln e}{\ln a} = \frac{1}{\ln a}$$

**TEOREMA 2.19** (PROPIEDADES COMO FUNCIONES INVERSAS):

1. $y = a^x$ si y solo si $x = \ log_a x$
2. $a^{log_a x} = x$ Para $x > 0$
3. $log_a a^x = x$ Para toda $x > 0$

**TEOREMA 2.20** (DERIVADA DE LA FUNCIÓN LOGARITMICA DE BASE $a$): Si "$u$" es derivable en la variable "$x$":

$$\frac{d}{dx}[log_a x\,] = \frac{1}{x \ln a}$$

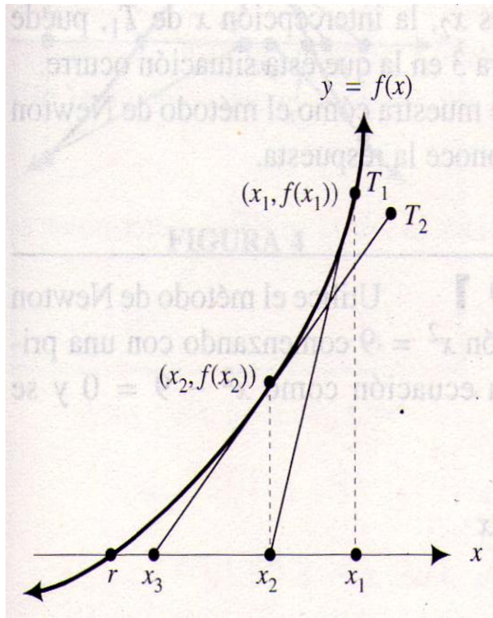
$$\frac{d}{dx}[log_a u\,] = u' \ \frac{log_a e}{u \ln a} = u' \frac{1}{u \ln a}$$

## APLICACIONES DE LA RECTA TANGENTE

Antes del avance tecnológico de los últimos años y el desarrollo de las calculadoras y computadoras, las raíces de una ecuación de la forma $f(x) \ = \ 0$ o lo que es su equivalente "*los ceros de la función* $f(x)$" se aproximaron por técnicas numéricas donde la principal herramienta era la derivada. Actualmente el cálculo de dichas raíces es sumamente por el uso de las calculadoras modernas. Aquí veremos dos métodos de los tantos que se desarrollaron en esa época: El Método de Newton y el Método de los Diferenciales.

**MÉTODO DE NEWTON**

Sea $f(x)$ una función y sea el número "$r$" una intercepción "$x$" de la gráfica. Para obtener una aproximación de "$r$", lo primero que hacemos es elegir un número "$x_1$", la cual debe ser razonablemente cercana al número "$r$". Luego consideramos la "*recta tangente*" a la gráfica $f(x)$ en el punto $P(x_1, f(x_1))$. Esta recta tangente la denotamos $T_1$ en la gráfica y su intercepción en el eje "$x$" es "$x_2$". El número "$x_2$" sirve ahora para una segunda aproximación de "$r$". Repetimos el proceso con la *recta tangente* $T_2$ en el punto $P(x_2, f(x_2))$ y la intercepción en el eje "$x$" es "$x_3$". Este proceso se continúa hasta obtener el grado de aproximación que requerimos.




A fin de obtener las aproximaciones sucesivas $x_2, x_3, \ldots$ de la primera aproximación $x_1$ utilizamos las ecuaciones de la recta Tangente. La ecuación de la recta tangente $T_1$ en el punto $P(x_1, f(x_1))$ es:

$$y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1)$$

La intercepción en el eje "$x$" de $T_1$ es "$x_2$". Si consideramos ahora $x = x_2$ y $y = 0$, la ecuación anterior queda:

$$0 - f(x_1) = f'(x_1)(x_2 - x_1) \rightarrow x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)};\ f'(x_1) \neq 0$$

Con este valor de $x_2$, una ecuación de $T_2$ es

$$y - f(x_2) = f'(x_2)(x - x_2)$$

Si consideramos ahora $x = x_3$ y $y = 0$, la ecuación anterior queda:

$$0 - f(x_2) = f'(x_2)(x_3 - x_2) \rightarrow x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}; f'(x_2) \neq 0$$

Y continuamos el proceso hasta llegar a nuestra aproximación, sabiendo que:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \text{ si } f'(n) \neq 0$$

Al utilizar el "*Método de Newton*" para determinar las raíces de $f(x) = 0$:

1. Haga una buena *suposición* para la primera aproximación $x_1$. Una gráfica de $f(x)$ le ayudará a obtener una elección razonable.

2. Obtenga una segunda aproximación $x_2$ con el valor de $x_1$ en la fórmula de arriba. Después utilice $x_2$ en la fórmula para conseguir una tercera aproximación de $x_3$ y así sucesivamente hasta que $x_{n+1} = x_n$ para el grado requerido.

Ejemplo:

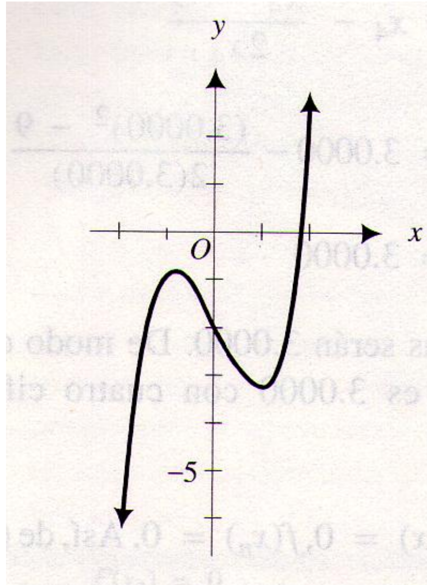
Utilizar el "Método de Newton" para determinar una raíz real de: $x^3 - 2x - 2 = 0$

Sea $f(x) = x^3 - 2x - 2$
$f'(x) = 3x^2 - 2$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{{x_n}^3 - 2x_n - 2}{3{x_n}^2 - 2}$$

| $n$ | $x_n$ | $\frac{{x_n}^3 - 2x_n - 2}{3{x_n}^2 - 2}$ | $x_{n+1}$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 1.50000 | −0.34211 | 1.84211 |
| 2 | 1.84211 | 0.06928 | 1.77283 |
| 3 | 1.77283 | 0.00353 | 1.76930 |
| 4 | 1.76930 | 0.00001 | 1.76929 |
| 5 | 1.76929 | 0.00000 | 1.76929 |




$f(x) = x^3 - 2x - 2$

**DIFERENCIALES**

El concepto de "*diferencial*" permite aproximar cambios en valores de función de puntos cercanos a puntos donde la función es diferenciable. Se verá que una aproximación mediante diferenciales está relacionada con una "*aproximación lineal*" o "aproximación *por medio de la recta tangente de la función $f(x)$ en el punto c*". En nuestra época, la aproximación por diferenciales ha perdido vigencia debido a los adelantos tecnológicos existentes, pero siguen siendo importantes como artificio notacional conveniente para el cálculo de antiderivadas.

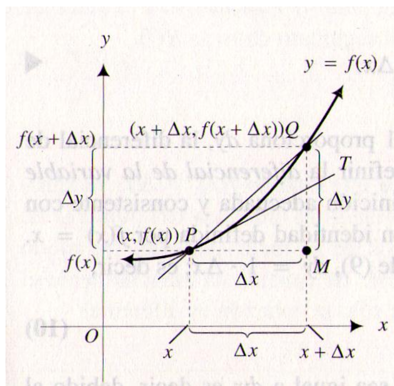
Sea $y = f(x)$, donde $f(x)$ es diferenciable $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$; con $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$

Por la definición formal de límite:

$$\forall \varepsilon > 0;\ \exists \delta > 0:\ 0 < |\Delta x| < \delta \to \left| \frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x) \right| < \varepsilon$$
$$0 < |\Delta x| < \delta \leftrightarrow \left| \frac{\Delta y - f'(x)\Delta x}{\Delta x} \right| < \varepsilon$$

Esto significa que $|\Delta y - f'(x)\Delta x|$ es pequeño en comparación con $\Delta x$; o sea que si $|\Delta x|$ es suficientemente pequeño $\Delta y - f'(x)\Delta x$ es una buena aproximación para $\Delta y$, y se escribe

$$\Delta y \approx f'(x)\Delta x, \text{si } \Delta x \text{ sufucientemente pequeño}$$




La interpretación gráfica de lo enunciado anteriormente es: sea la curva de la ecuación $y = f(x)$. La recta $PT$ es tangente a la curva en $P(x, f(x)$.

El punto $Q(x + \Delta x, f(x + \Delta x))$ y la distancia dirigida $\overline{MQ}$ es $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$. Aquí $\Delta x$ y $\Delta y$ son positivos, pero pudieran ser negativos. Para un valor pequeño de $\Delta x$, la pendiente de la recta secante PQ y la pendiente de la recta tangente en P son aproximadamente iguales, es decir:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx f'(x) \to \Delta y \approx f'(x)\Delta x$$

Lo cual definimos como "*Diferencial de y*".

**DEFINICIÓN 2.7 (DIFERENCIAL DE LA VARIABLE DEPENDIENTE $y$):** Si $f$ está definida por la ecuación $y = f(x)$, entonces la "*diferencial de y*" denotada por "$dy$" está dada por

$$dy = f'(x)\Delta x$$

donde "$x$" está en el dominio de $f'(x)$ y $\Delta x$ es un incremento arbitrario de "$x$".

**DEFINICIÓN 2.8 (DIFERENCIAL DE LA VARIABLE INDEPENDIENTE $x$):** Si $f$ está definida por la ecuación $y = f(x)$, entonces la "*diferencial de x*" denotada por "$dx$" está dada por

$$dx = \Delta x$$

donde "$x$" está en el dominio de $f'(x)$ y $\Delta x$ es un incremento arbitrario de "$x$".

De aquí deducimos que $dy = f'(x)dx$