3. APLICACIONES DE LA DERIVADA

3.1. MOVIMIENTO RECTILINEO

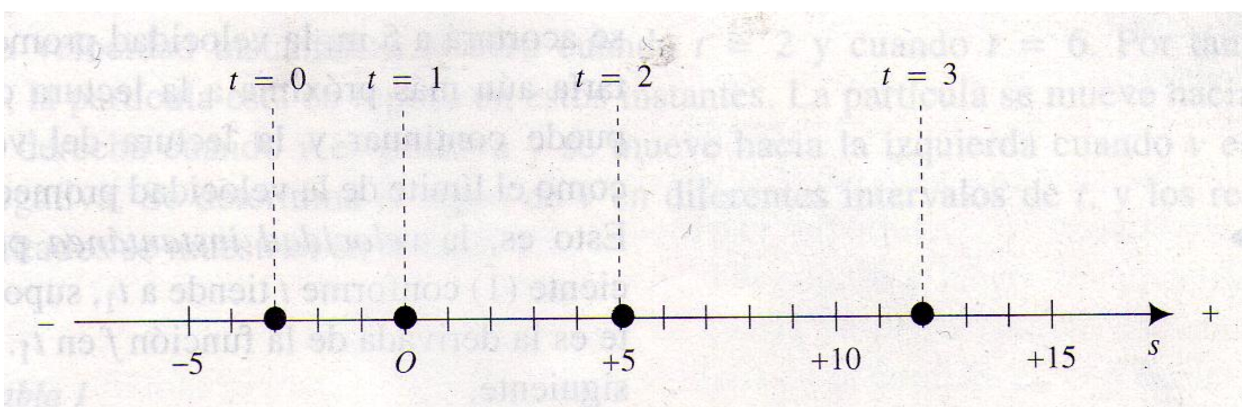
Las muchas aplicaciones que tiene la derivada serán estudiadas en esta sección, entre ellas consideraremos la aplicación física: "*el movimiento de una partícula sobre una recta*". Este movimiento se le llama "*movimiento rectilíneo*", en el que se elige arbitrariamente un sentido como positivo $(+)$ en la recta y el sentido negativo que sería el opuesto al sentido positivo elegido.

Supongamos que una partícula se mueve en una recta horizontal, cuyo sentido ó "*dirección positiva es hacia la derecha*" y el "*sentido negativo hacia la izquierda*". Seleccionamos algún punto sobre la recta y lo denotamos "*0*". Sea "$f(t)$ *la función que determina la distancia dirigida a partir del punto 0 en cualquier tiempo particular* "t" de la partícula en estudio. La distancia "s" dirigida desde *0* hasta la partícula la medimos en metros *(m)* y el tiempo "t" en segundos. Para determinar la distancia desde el punto *0* hasta la partícula en un tiempo particular "t" denotamos:

$$s = f(t)$$

Ejemplo: Sea $s = t^2 + 2t - 3$ la ecuación del movimiento de una partícula en cualquier tiempo "t".
Cuando $t = 0$, $s = -3$, la partícula se encuentra 3 m a la izquierda de "0"
Cuando $t = 1$, $s = 0$, quiere decir que la partícula está en "0" al primer segundo
Cuando $t = 2$, $s = 5$, la partícula se encuentra 5 m a la derecha de "0" a los 2 segundos
Cuando $t = 3$, $s = 12$, la partícula se encuentra 12 m a la derecha de "0" a los 3 segundos

Una descripción gráfica para este movimiento lo presentamos en la siguiente figura



Entre el tiempo $t = 1$ y $t = 3$, la partícula se mueve desde el punto "$s = 0$" hasta el punto "$s = 12$", es decir en 2 segundos el cambio en la distancia es de 12 m. La "*velocidad promedio*" de la partícula es la "*razón de cambio en la distancia dirigida*" desde un punto fijo al "*cambio en el tiempo*", entonces para nuestra partícula para ese primer análisis la velocidad promedio es $v_{prom} = \frac{12}{2} = 6\ \frac{m}{s}$. Para $t = 0$ y $t = 2$, la partícula se mueve desde el punto "$s = -3$" hasta el punto "$s = 5$", entonces la "*razón de cambio en la distancia dirigida es de 8m*" en 2 segundos, luego la velocidad promedio es $v_{prom} = \frac{8}{2} = 4\ \frac{m}{s}$.

En este ejemplo observamos que la "*velocidad promedio*" no es constante por lo que no nos brinda información sobre la velocidad en un instante específico, para ello utilizaremos el concepto la "*velocidad instantánea*"

✓ **DEFINICIÓN (VELOCIDAD INSTANTÁNEA):** Si f es una función definida por la ecuación $s = f(t)$, y una partícula se desplaza a lo largo de una recta, tal que "s" es el número de unidades de la distancia dirigida de la partícula desde un punto fijo sobre la recta en "t" unidades de tiempo, entonces la "**velocidad instantánea**" de la partícula a las "t" unidades de tiempo es "v" unidades de velocidad, donde

$$\boxed{v = f'(t) \leftrightarrow v = \frac{ds}{dt}}$$

La velocidad instantánea puede ser positiva o negativa, dependiendo si la partícula se desplaza en el sentido positivo o negativo. Cuando la velocidad instantánea es "0" la partícula está en reposo. La rapidez de una partícula en cualquier tiempo "t" es el valor absoluto de la velocidad instantánea $|v(t)|$, por lo que la rapidez es un número no negativo. Esta rapidez nos indica cuán rápido se mueve la partícula pero no nos dice en qué sentido se mueve.

En Física la tasa de variación ó razón de cambio instantánea de la velocidad se le llama "*aceleración instantánea*". Si una partícula se mueve a lo largo de una recta de acuerdo con la ecuación de movimiento $s = f(t)$, donde a los "t" segundos la velocidad instantánea es "v" metros por segundos y la aceleración instantánea es "a" metros por segundo por segundo, entonces "a" es la primera derivada de "v" con respecto a "t" o su equivalente la segunda derivada de "s" con respecto a "t":

$$\boxed{v = f'(t) \leftrightarrow v = \frac{ds}{dt} \leftrightarrow a = \frac{dv}{dt} \leftrightarrow a = \frac{d^2s}{dt^2}}$$

Cuando "$a > 0$" "v" es creciente y cuando "$a < 0$" "v" es decreciente. Cuando "$a = 0$" "v" no está cambiando. Como la rapidez de la partícula a los "t" segundos es $|v(t)|$ metros por segundo tenemos los siguientes resultados:

(i) Si $v \geq 0$ y $a > 0$, la rapidez es creciente.
(ii) Si $v \geq 0$ y $a < 0$, la rapidez es decreciente.
(iii) Si $v \leq 0$ y $a > 0$, la rapidez es decreciente.
(iv) Si $v \leq 0$ y $a < 0$, la rapidez es creciente.

Ejemplos

1. Una partícula se desplaza a lo largo de una recta horizontal de acuerdo con la ecuación

$$s = t^3 - 12t^2 + 36t - 24, \qquad t \geq 0$$

Determinar los intervalos de tiempo en los que la partícula: (a) Se mueve a la derecha; (b) Se mueve a la izquierda, (c) Instante "t" en que cambia de sentido.

Solución:

$$v = \frac{ds}{dt} = 3t^2 - 246t + 36 = 3(t^2 - 8t + 12) = 3(t-6)(t-2)$$

La velocidad instantánea es "0" si $3(t-6)(t-2) = 0$, es decir $t = 6$ y $t = 2$, por lo que la "*partícula está en reposo*" en esos instantes. Si "v" es positiva entonces la partícula se mueve a la derecha y se mueve a la izquierda sí "v" es negativa.

Para interpretar visualmente el movimiento de la partícula, construimos valores de "s" y de "v" para valores enteros de "t" desde $t = 0$ hasta $t = 8$ y luego la esquematizamos:

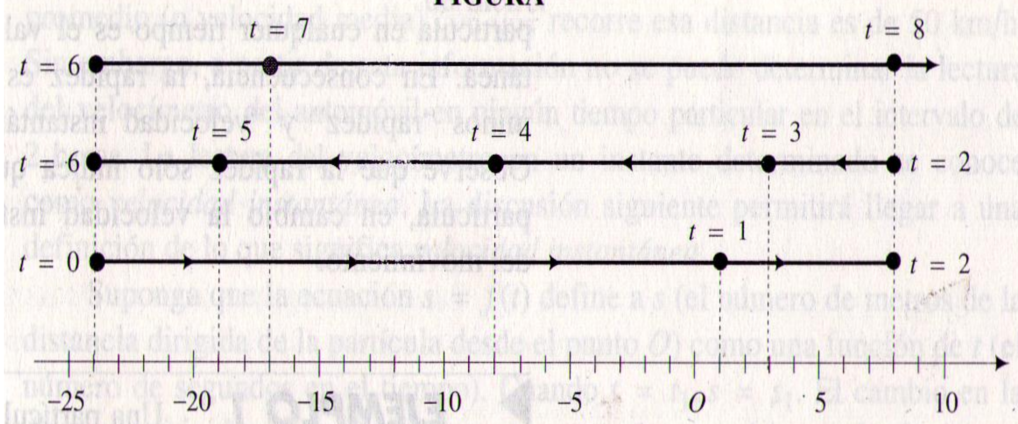
Tabla

	$t-2$	$t-6$	*Conclusión*
$0 \leq t < 2$	−	−	v es positivo; la partícula se mueve hacia la derecha
$t = 2$	0	−	v es cero; la partícula está en reposo
$2 < t < 6$	+	−	v es negativo; la partícula se mueve hacia la izquierda
$t = 6$	+	0	v es cero; la partícula está en reposo
$6 < t$	+	+	v es positivo; la partícula se mueve hacia la derecha

Tabla

t	s	v
0	−24	36
1	1	15
2	8	0
3	3	−9
4	−8	−12
5	−19	−9
6	−24	0
7	−17	15
8	8	36

FIGURA



2. Se lanza verticalmente una pelota hacia arriba desde el piso con una velocidad inicial de $64\ \frac{ft}{s}$. Si el sentido positivo de la distancia desde un punto inicial "0" es hacia arriba; "t" segundos es el tiempo que transcurre desde que la pelota fue lanzada y "s" pies es la distancia de la pelota desde el punto inicial a los "t" segundos, entonces la ecuación del movimiento es
$$s = -16t^2 + 64t, \qquad t \geq 0$$
(a) ¿Cuántos segundos le tomará la pelota para llegar al punto más alto?
(b) ¿Qué tan alto llegará la pelota?
(c) ¿Cuál es la velocidad instantánea a los $t = 1$ s y $t = 3$ s?
(d) ¿Cuál es la rapidez de la pelota a los $t = 1$ s y $t = 3$ s?
(e) ¿Cuál es la velocidad instantánea cuando llega al piso?

Solución:
$$s = 0 \rightarrow -16t^2 + 64t = 0 \rightarrow -16t(t-4) = 0 \rightarrow t = 0 \text{ y } t = 4$$

Esto quiere decir que la pelota está en el suelo a los $t = 0$ y $t = 4$ segundos

$$v = \frac{ds}{dt} \rightarrow v(t) - 32t + 64$$

(a) $v(t) = 0 \rightarrow -32t + 64 = 0 \rightarrow t = 2$

A la pelota le tomará 2 segundos en llegar al punto más alto.

(b) $s(t) = -16t^2 + 64t \rightarrow s(2) = -16(2)^2 + 64(2) \rightarrow s(2) = -64 + 128 \rightarrow s(2) = 64$ ft

La pelota alcanzará una altura máxima de 64 ft.

(c) $v(1) - 32(1) + 64 \rightarrow v(1) = 32\frac{ft}{s}$

$v(3) - 32(3) + 64 \rightarrow v(3) = -32\frac{ft}{s}$

(d) $v(1) = \left|32\frac{ft}{s}\right| = 32\frac{ft}{s};\ v(3) = \left|-32\frac{ft}{s}\right| = 32\frac{ft}{s}$

(e) Como sabemos que la pelota llega al suelo a los $t = 4$ segundos,

$v(4) - 32(43) + 64 \rightarrow v(4) = -64\frac{ft}{s}$

3. Una partícula se desplaza a lo largo de una recta horizontal de acuerdo con la ecuación
$$s = -t^3 + 3t^2, \qquad t \geq 0$$
Donde "s" metros es la distancia dirigida de la partícula desde el origen a los "t" segundos. Si "v" metros por segundos es la velocidad instantánea y "a" metros por segundo por segundo es la aceleración instantánea a los "t" segundos, determinar:
(a) "$v(t)$" y "$a(t)$" en términos de "t"

(b) Describa la posición y movimiento de la partícula en una tabla que incluya a los intervalos de tiempo en que la partícula se mueve a la izquierda y en los que se mueve a la derecha; en los que la velocidad es creciente y en los que la velocidad es decreciente; los intervalos en que la rapidez es creciente y en los que es decreciente; la posición de la partícula con respecto al origen durante esos intervalos de tiempo. Muestre el comportamiento de la partícula mediante una gráfica.

Solución:

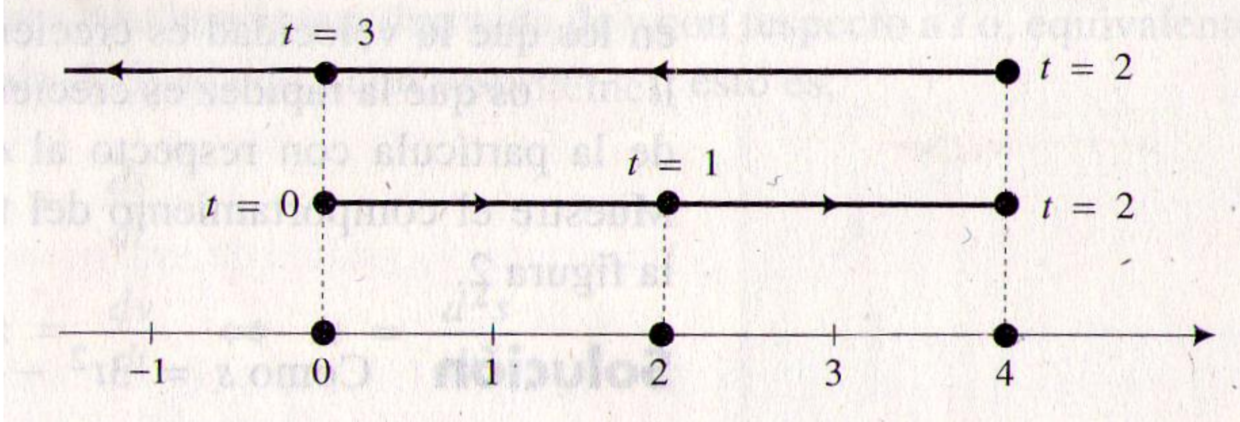
$$v = \frac{ds}{dt} = -3t^2 + 6t \leftrightarrow a = \frac{dv}{dt} \leftrightarrow a = \frac{d^2s}{dt^2} = -6t + 6$$

$s = 0$ Cuando $t = 0$ y $t = 3$
$v = 0$ Cuando $t = 0$ y $t = 2$
$a = 0$ Cuando $t = 1$

Tabla

	s	v	a	*Conclusión*
$t = 0$	0	0	6	La partícula está en el origen. La velocidad es 0 y es creciente. La rapidez es creciente.
$0 < t < 1$	+	+	+	La partícula está a la derecha del origen y se mueve hacia la derecha. La velocidad es creciente. La rapidez es creciente.
$t = 1$	2	3	0	La partícula está a 2 metros a la derecha del origen y se mueve hacia la derecha a 3 m/s. La velocidad no cambia, de modo que la rapidez tampoco.
$1 < t < 2$	+	+	−	La partícula está a la derecha del origen y su movimiento es hacia la derecha. La velocidad es decreciente. La rapidez es decreciente.
$t = 2$	4	0	−6	La partícula está a 4 metros a la derecha del origen y cambia el sentido de su movimiento de derecha a izquierda. La velocidad es decreciente. La rapidez es decreciente.
$2 < t < 3$	+	−	−	La partícula está a la derecha del origen y su movimiento es hacia la izquierda. La velocidad es decreciente. La rapidez es creciente.
$t = 3$	0	−9	−12	La partícula está en el origen y su movimiento es hacia la izquierda a 9 m/s. La velocidad es decreciente. La rapidez es creciente.
$3 < t$	−	−	−	La partícula está a la izquierda del origen y su movimiento es hacia la izquierda. La velocidad es decreciente. La rapidez es creciente.

FIGURA

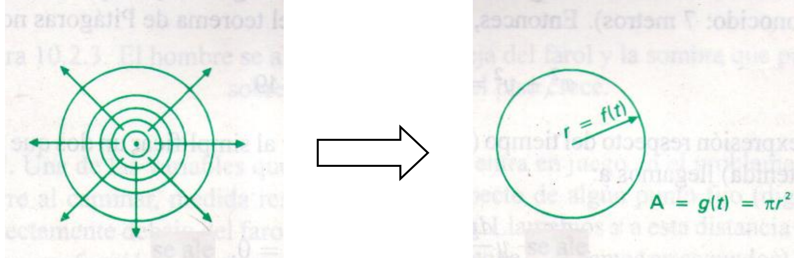


3.2. VARIACIONES EN EL TIEMPO RELACIONADAS.

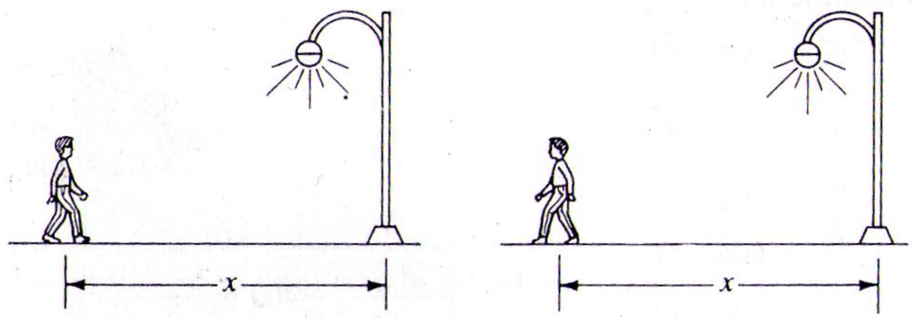
La derivada $\frac{dy}{dx}$ de una función $y = f(x)$ es una "razón de cambio instantáneo con respecto a la variable "x". Cuando una función describe "*posición o distancia*" entonces su razón de cambio respecto al tiempo $\frac{dx}{dt}$ es interpretada como la "*velocidad instantánea*". En general una "*razón de cambio o intensidad de variación*" con respecto al tiempo es la respuesta a la pregunta: *¿Cuán rápido varía la cantidad*?

- Si "V" representa un "*volumen*" que varía o cambia con el tiempo, entonces $\frac{dV}{dt}$ es la razón o la rapidez la cual está variando el "*volumen*" con respecto al tiempo "t". $\frac{dV}{dt} = 3\frac{cm^3}{min}$ "*significa que el "volumen está aumentando* $3\ cm^3$ *cada minuto*" y $\frac{dV}{dt} = -3\frac{cm^3}{min}$ significa que el "*volumen está disminuyendo* $3\ cm^3$ *cada minuto*".

- Si "A" representa un "*área de ondas circulares*" que se generan en un estanque al lanzar una piedra y que varía o cambia con el tiempo, entonces $\frac{dA}{dt}$ es la razón o la rapidez la cual está variando el "*área de los círculos*" con respecto al tiempo "t".



- Si "x" representa la "*distancia*" entre un hombre y un faro de luz, que varía o cambia con el tiempo, entonces $\frac{dx}{dt}$ es la razón o la rapidez la cual está variando la "*distancia*" con respecto al tiempo "t". $\frac{dx}{dt} < 0$ "*significa que la "distancia entre el hombre y el faro de luz disminuye*" es decir el hombre camina hacia el faro de luz; por el contrario $\frac{dx}{dt} > 0$ "*significa que la "distancia entre el hombre y el faro de luz aumenta*" es decir el hombre camina alejándose del faro de luz.



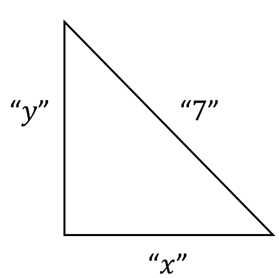
(a) $dx/dt < 0$ (b) $dx/dt > 0$

✓ **SUGERENCIAS**

(1) Hacer un bosquejo de la situación
(2) Designar "*símbolos o variables*" a las cantidades y designar las que varían en el tiempo.
(3) Analizar el enunciado del problema y distinguir *cuáles razones se conocen* y *cuál es la razón que se requiere.*
(4) *Plantear una ecuación* que relacione las variables.
(5) *Derivar la ecuación* planteada en el paso (4) con respecto al tiempo, *utilizando la derivación implícita*. La ecuación resultante de la derivación implícita relaciona las razones según cambian las variables.

Ejemplos

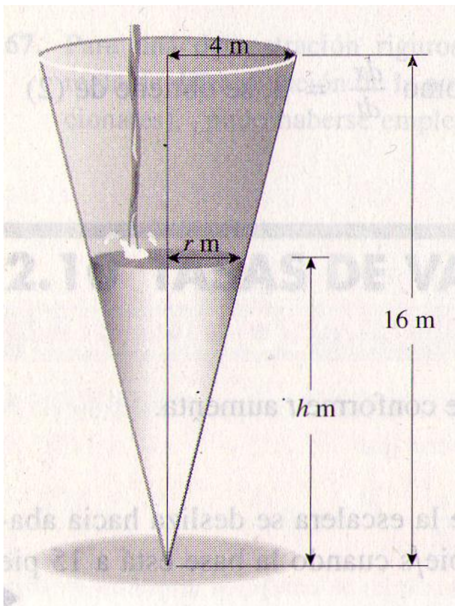
1. Una escalera de 7 mts de longitud, está recargada sobre una pared. En su extremo superior se encuentra un hombre haciendo arreglos. Esta persona no sabía que el piso sobre la cual puso la escalera para apoyarla a la pared era resbaladizo y en determinado momento el extremo sobre el piso empieza a moverse alejándose de la pared a una velocidad de $2\,\frac{mts}{min}$ ¿A qué velocidad irá cayendo el hombre cuando éste se encuentra a 1 mt sobre el suelo?



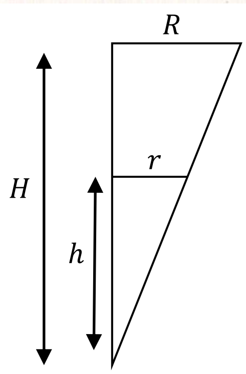
- "t" número de minutos desde que la escalera empezó a resbalar.
- "x" distancia de la base de la escalera a la pared.
- "y" distancia de la parte superior de la escalera al piso.
- $\frac{dx}{dt} = 2\,\frac{mts}{min}$; $\left.\frac{dy}{dt}\right|_{y=1\,mt} = ?$
- $x^2 + y^2 = (7)^2$

- $x^2 + (1)^2 = (7)^2 \rightarrow x = \sqrt{48} \rightarrow x = 6.93\ mts$
- $x^2 + y^2 = (7)^2 \rightarrow 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0 \rightarrow x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} = 0 \rightarrow (6.93)(2) + (1)\frac{dy}{dt} = 0 \rightarrow 13.86 + \frac{dy}{dt} = 0$
- R: $-13.86 = \frac{dy}{dt}$ lo que significa que la distancia del hombre y el piso disminuye 13.86 metros cada minuto

2. Una cantidad de agua fluye a una tasa de 2 m^3/min hacia el interior de un depósito cuya forma es la de un "cono invertido" de 16 m de altura y 4 m de radio de la base. ¿qué tan rápido sube el nivel del agua cuando ésta ha alcanzado 5 m de profundidad?



- "t" número de minutos desde que se empezó a verter agua dentro del depósito.
- "h" altura del nivel de agua.
- "r" radio del espejo circular de agua.
- $H = 16m$ altura del cono; $R = 4$ radio de la base del cono
- $\frac{dV}{dt} = 2\frac{m^3}{min}; \left.\frac{dh}{dt}\right|_{h=5\ mt} = ?$
- $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ por semejanza de triángulos $\frac{H}{R} = \frac{h}{r} \rightarrow \frac{16}{4} = \frac{h}{r} \rightarrow r = \frac{1}{4}h$
- $V = \frac{1}{3}\pi(\frac{1}{4}h)^2 h \rightarrow V = \frac{1}{3}\pi\frac{1}{16}h^3 \rightarrow V = \frac{1}{48}\pi h^3$
- $\frac{dV}{dt} = \frac{1}{16}\pi h^2\frac{dh}{dt} \rightarrow (2) = \frac{1}{16}\pi(5)^2\frac{dh}{dt} \rightarrow \frac{32}{25\pi} = \frac{dh}{dt}$
- $\frac{dh}{dt} = 0.4074\frac{\text{mts}}{min}$
- R: El nivel del agua subirá 0.4074 metros cada minuto



3.3. VALORES MÁXIMOS Y MÍNIMOS DE FUNCIONES.

✓ **DEFINICIÓN (VALOR MÁXIMO RELATIVO)**: una función $y = f(x)$ tiene un "*valor máximo relativo en el número c*", si existe un intervalo abierto que contiene a "c", en el que $y = f(x)$ está definida, tal que $f(c) \geq f(x)$ para toda "x" en el intervalo.

✓ **DEFINICIÓN (VALOR MÍNIMO RELATIVO)**: una función $y = f(x)$ tiene un "*valor mínimo relativo en el número c*", si existe un intervalo abierto que contiene a "c", en el que $y = f(x)$ está definida, tal que $f(c) \leq f(x)$ para toda "x" en el intervalo.

- ✓ **DEFINICIÓN (EXTREMO RELATIVO)**: si una función tiene un "*valor máximo ó mínimo relativo en el número c*", se dice que la función tiene un extremo relativo en "c".

- ✓ **TEOREMA**: si $f(x)$ existe para todos los valores de "x" en el intervalo abierto (a, b) y si $f(x)$ tiene un extremo relativo en "c", donde $a < c < b$ y además $f'(c)$ existe, entonces $f'(c) = 0$.

- ✓ **DEFINICIÓN (NÚMERO CRÍTICO)**: si "c" es un número del dominio de la función $f(x)$ y si $f'(c) = 0$ ó $f'(c)$ no existe, entonces "c" es un número crítico de la función $f(x)$.

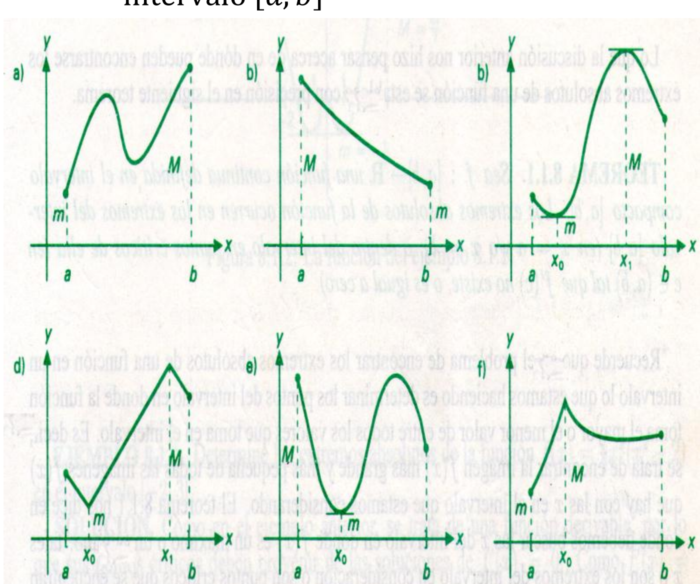
- ✓ **DEFINICIÓN (VALOR MÁXIMO ABSOLUTO)**: la función $y = f(x)$ tiene un "*valor máximo absoluto en un intervalo*", si existe algún número "c", en el intervalo tal que $f(c) \geq f(x)$ para toda "x" en el intervalo. El número $f(c)$ es el "*valor máximo absoluto*" de $f(x)$ en el intervalo.

- ✓ **DEFINICIÓN (VALOR MÍNIMO ABSOLUTO)**: la función $y = f(x)$ tiene un "*valor mínimo absoluto en un intervalo*", si existe algún número "c", en el intervalo tal que $f(c) \leq f(x)$ para toda "x" en el intervalo. El número $f(c)$ es el "*valor mínimo absoluto*" de $f(x)$ en el intervalo.

- ✓ **PROCEDIMIENTO PARA DETERMINAR MÁXIMO ABSOLUTO Ó MÍNIMO ABSOLUTO EN UN INTERVALO:**

  - Determinar los valores de la función en los números críticos de $f(x)$ en (a, b).
  - Determine los valores de $f(a)$ y $f(b)$.
  - El "*mayor*" de los valores determinado en los pasos anteriores es el "*máximo absoluto*" y el "*menor*" de los valores es el "*mínimo absoluto*

- ✓ **TEOREMA DEL VALOR EXTREMO**: si $f(x)$ es una función contínua en un intervalo cerrado $[a, b]$ entonces $f(x)$ tiene un "*valor máximo absoluto*" y un valor "*mínimo absoluto*" en el intervalo $[a, b]$

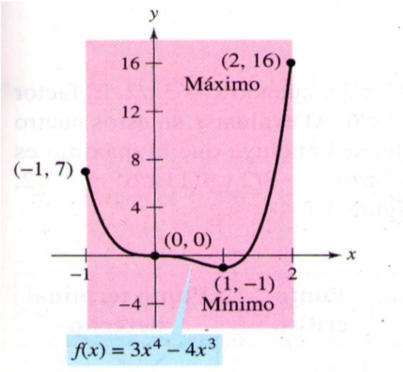


EXTREMOS ABSOLUTOS EN LOS EXTREMOS DEL INTERVALO: Figura a), $x = a$ mínimo absoluto y $x = b$ máximo absoluto y Figura b) $x = a$ máximo absoluto y $x = b$ mínimo absoluto

EXTREMOS ABSOLUTOS EN EL INTERIOR DEL INTERVALO: Figura c) $x = x_0$ mínimo absoluto y $x = x_1$ máximo absoluto y la derivada $f'(x) = 0$
Figura d) $x = x_0$ mínimo absoluto y $x = x_1$ máximo absoluto y $f'(x)$ no existe.

EXTREMOS ABSOLUTOS EN EL INTERIOR y EXTREMO DEL INTERVALO: Figura e) $x = a$ máximo absoluto y $x = x_0$ mínimo absoluto ($f'(x) = 0$); $x = a$ mínimo absoluto y $x = x_0$ mínimo absoluto ($f'(x)$ no existe.

1. Determinar los extremos de $f(x) = 3x^4 - 4x^3$ en el intervalo $[-1,2]$



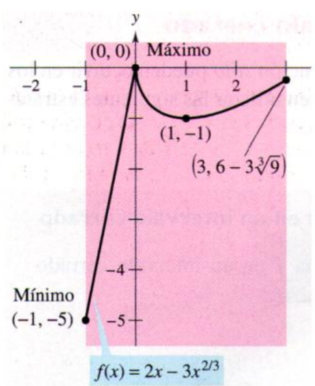
En el intervalo cerrado $[-1,2]$, f tiene un mínimo en $(1,-1)$ y un máximo en $(2,16)$

Punto terminal izquierdo	Punto crítico	Punto crítico	Punto terminal derecho
$f(-1) = 7$	$f(0) = 0$	$f(1) = -1$ Mínimo	$f(2) = 16$ Máximo

Respuesta:

- ✓ Tiene el mínimo absoluto en $x = 1$ o sea el punto $(1,-1)$
- ✓ Tiene el máximo absoluto en $x = 2$ o sea el punto $(2,16)$

2. Determinar los extremos de $f(x) = 2x - 3x^{\frac{2}{3}}$ en el intervalo $[-1,3]$



En el intervalo cerrado $[-1,3]$, f tiene un mínimo en $(-1,-5)$ y un máximo en $(0,0)$

Punto terminal izquierdo	Punto crítico	Punto crítico	Punto terminal derecho
$f(-1) = -5$ Mínimo	$f(0) = 0$ Máximo	$f(1) = -1$	$f(3) = 6 - 3\sqrt[3]{9} \approx -0.24$

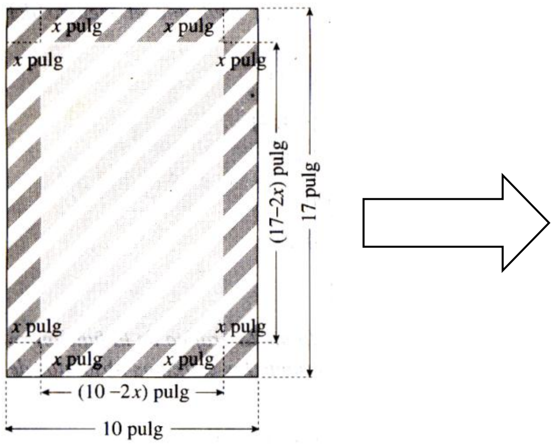
Respuesta:

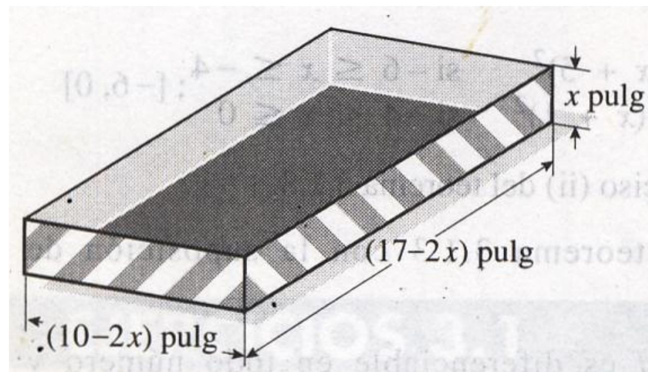
- ✓ Tiene el mínimo absoluto en $x = -1$ o sea el punto $(-1,-5)$
- ✓ Tiene el máximo absoluto en $x = 0$ o sea el punto $(0,0)$

3.4. APLICACIONES EN QUE INTERVIENEN EXTREMOS ABSOLUTOS EN UN INTERVALO CERRADO.

Ahora aplicaremos el "Teorema del Valor Extremo" a problemas en que la solución es un extremo absoluto de una función en un intervalo cerrado.

1. Un fabricante de cajas de cartón quiere elaborar cajas abiertas a partir de trozos rectangulares de cartón de 10 pulgadas por 17 pulgadas, cortando cuadrados en las cuatro esquinas y doblando los lados hacia arriba. Se desea determinar la "*longitud del lado de los cuadrados*" que se deben cortar de modo que la caja tenga el *mayor volumen* posible.



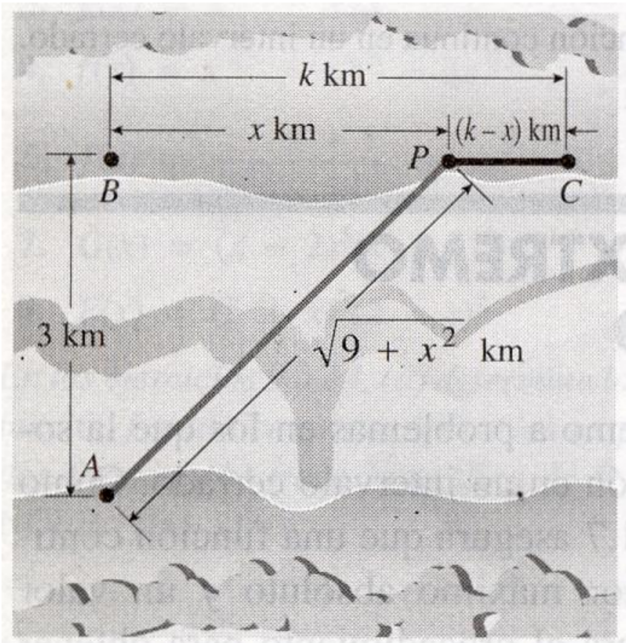


Sea "x" lado de los cuadrados a cortar; Ancho $= 10-2x$, largo$= 17-2x$; alto $= x$
Volumen$= (Ancho)(largo)(alto) \to V(x) = (10-2x)(17-2x)x \to V(x) = 4x^3 - 54x^2 + 170x$

Dominio de $V(x)$ es $[0,5] \to V'(x) = 12x^2 - 108x + 170 \to V'(x) = 0 \to 12x^2 - 108x + 170 = 0$
Obtenemos dos valores posibles de $x_1 = 6.97\ pulgadas$ y $x_2 = 2.03\ pulgadas$
$V(0) = 0$ y $V(5) = 0$, luego el valor más grande dentro del intervalo es $x_2 = 2.03\ pulgadas$

Respuesta: Se deben cortar cuadrados de lado $x = 2.03\ pulgadas$ y dará un volumen máximo de $V = 156.03 pulg^3$

2. Los puntos "A" y "B" están opuestos uno al otro sobre orillas de un río de *3 Km* de ancho. Un punto "C" está en la misma orilla que "B" pero a "k" kilómetros de "B" río abajo. Una compañía telefónica desea tender un cable desde el punto "A" hasta "C", donde el costo de kilómetros de cable por tierra es de $B/.10{,}000.00$ y el del cable subacuático es de $B/.12{,}500.00$. Sea "P" un punto en la misma orilla que "B" y "C" de modo que el cable se tienda de "A" hasta "P" y luego de allí a "C".
   a) Obtenga una ecuación que estime el costo total $C(x)$ en dólares del tendido del cable y establezca el dominio de $C(x)$
   b) Si $k = 2$ Km Estime el "*valor de x*" para el cual el costo del cable tendido sea el menor costo posible.



Si "k" kilómetros es la distancia de B a C y "x" la distancia del punto B a P, entonces la distancia del punto P a C es: $k - x$ kilómetros

a) $C(x) = $ Costo de A a P $+$ Costo de P a C

$$(\overline{AP})^2 = (\overline{AB})^2 + (\overline{BP})^2$$
$$(\overline{AP})^2 = 9 + x^2$$
$$\overline{AP} = \sqrt{9 + x^2}$$
$$\overline{PC} = k - x$$

$$C(x) = \text{Costo de } A \text{ a } P + \text{Costo de } P \text{ a } C$$
$$C(x) = (12{,}5000)\overline{AP} + 10{,}000\overline{PC}$$

$$C(x) = (12{,}5000)\sqrt{9 + x^2} + 10{,}000(k - x)$$

Dominio de $C(x)$ $\quad [0, k]$

b) $C(x) = (12{,}5000)\sqrt{9 + x^2} + 10{,}000(2 - x)$; Dominio de $C(x)$ $\quad [0{,}2]$

$$C'(x) = (12{,}5000)\frac{2x}{2\sqrt{9 + x^2}} - 10{,}000 \rightarrow C'(x) = \frac{12{,}500\, x}{\sqrt{9 + x^2}} - 10{,}000 = 0$$

$$C'(x) = 12{,}500\, x - 10{,}000\sqrt{9 + x^2} = 0 \rightarrow 5x = 4\sqrt{9 + x^2} \rightarrow x = \pm 4$$

El valor $x = -4$ es una "solución extraña de la ecuación" y el valor $x = 4$ no está en el dominio de la función $C(x)$; por lo que no existen números críticos en $[0{,}2]$ y el mínimo debe estar en uno de los extremos del intervalo:

$x = 0 \rightarrow C(x) = B/.\,57{,}500$ y $x = 2 \rightarrow C(2) = B/.\,45{,}069$

Respuesta: El costo del cable es mínimo cuando este se tiende directamente desde A hasta C.

3.5. TEOREMA DE ROLLE Y TEOREMA DEL VALOR MEDIO

El matemático francés Michelle Rolle (1652-1719) demostró que si $f(x)$ es una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y diferenciable en el intervalo abierto (a, b)y si $f(a)$ y $f(b)$ son iguales ó son iguales a "cero (0)" entonces existe al menos un número "c" entre "a" y "b" para la cual $f'(c) = 0$.

3.5.1. TEOREMA DE ROLLE: Sea $f(x)$ una función tal que:

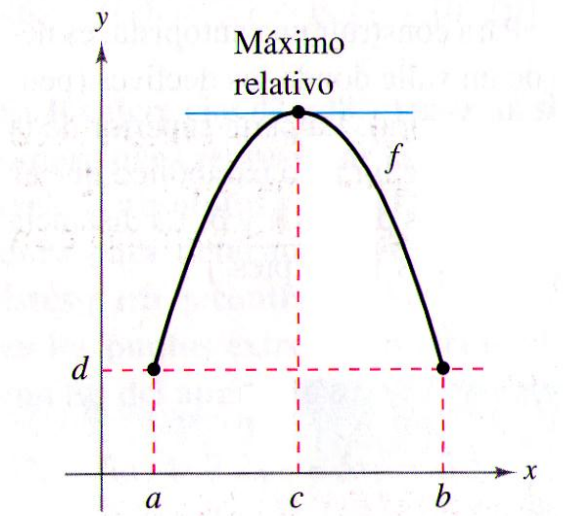
(i) Es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$

(ii) Es diferenciable en el intervalo abierto (a, b)

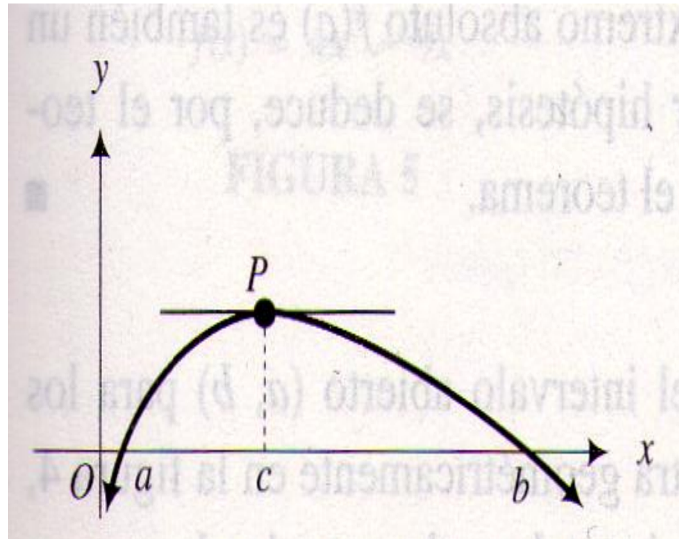
(iii) $f(a) = 0$ y $f(b) = 0$ ó $f(a) = f(b)$

Entonces existe un número "c" en el intervalo abierto (a, b) tal que $f'(c) = 0$

El "*Teorema de Rolle*" establece el hecho de una función continua en un intervalo cerrado debe tener tanto un mínimo ó un máximo en el intervalo y que debe ser en el interior del intervalo; a diferencia del “*Teorema del Valor Extremos*” que establece que los valores pueden ocurrir tanto en el interior del intervalo como en los extremos del intervalo.

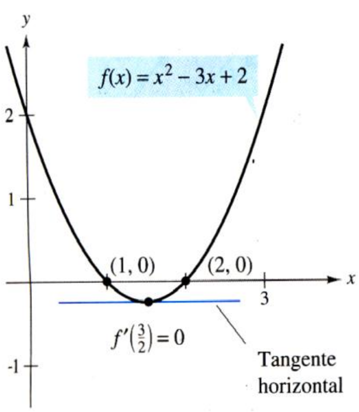


f es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b)



Ejemplos:

El valor de x para el cual $f'(x) = 0$ está entre las dos intersecciones con el eje x



1. Si $f(x) = x^2 - 3x + 2$. El “*Teorema de Rolle*” nos garantiza la existencia de un numero “c” donde la pendiente de la recta tangente es horizontal, siempre y cuando las condiciones del “*Teorema*” se cumplan.

- $f(x) = x^2 - 3x + 2 \rightarrow f(x) = 0$
$x^2 - 3x + 2 = 0 \rightarrow (x-2)(x-1) = 0 \rightarrow x = 1$ y $x = 2$ son las intersecciones de $f(x)$ con el eje “x”

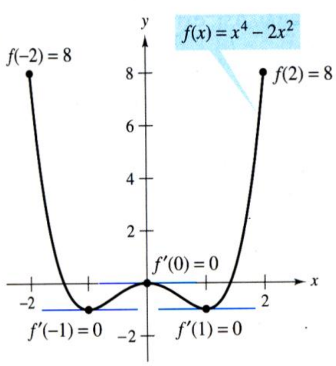
- $f(x)$ es continua en $[1,2]$ y diferenciable en $(1,2)$
- $f'(x) = 2x - 3 \rightarrow f'(x) = 0 \rightarrow 2x - 3 = 0 \rightarrow x = \frac{3}{2}$ y $c = \frac{3}{2}$ y $\frac{3}{2}$ está entre $[1,2]$

2. Si $f(x) = 4x^3 - 9x$. El “*Teorema de Rolle*” nos garantiza la existencia de un numero “c” donde la pendiente de la recta tangente es horizontal, siempre y cuando las condiciones del “*Teorema*” se cumplan.

- $f(x) = 4x^3 - 9x \rightarrow f(x) = 0 \rightarrow 4x^3 - 9x = 0 \rightarrow 4x\left(x^2 - \frac{4}{9}\right) = 0$
$x = 0; x = \frac{2}{3}$ y $x = x = -\frac{2}{3}$ son las intersecciones de $f(x)$ con el eje “x”
- $f(x)$ es continua en $\left[-\frac{2}{3}, 0\right]$ y diferenciable en $\left(-\frac{2}{3}, 0\right)$; $\left[0, \frac{2}{3}\right]$ y diferenciable en $\left(0, \frac{2}{3}\right)$

- $f'(x) = 12x^2 - 9 \rightarrow f'(x) = 0 \rightarrow 12x^2 - 9 = 0 \rightarrow x = \mp\frac{\sqrt{3}}{2}$
- Entre $x = -\frac{2}{3}$ y $x = 0$ existe $c = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ tal que $f'(x) = 0$ y entre $x = 0$ y $x = \frac{2}{3}$ existe $c = \frac{\sqrt{3}}{2}$ tal que $f'(x) = 0$ $[P(-\frac{\sqrt{3}}{2}, 5.20)$ "*máximo*" y $Q = (\frac{\sqrt{3}}{2}, -5.20)$ "*mínimo*"]

$f'(x) = 0$ para más de un valor de x en el intervalo $(-2, 2)$



3. Si $f(x) = x^4 - 2x^2$, en el intervalo $[-2,2]$. El "*Teorema de Rolle*" nos garantiza la existencia de un numero "c" donde la pendiente de la recta tangente es horizontal, siempre y cuando las condiciones del "*Teorema*" se cumplan.

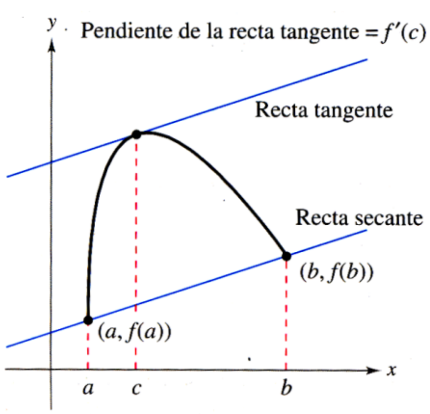
- $f(-2) = 8$ y $f(2) = 8$ y $f(x)$ es continua en $[-2,2]$ y derivable en $(-2, 2)$
- $f'(x) = 4x^3 - 4x \rightarrow f'(x) = 0 \rightarrow 4x^3 - 4x = 0$
- $4x(x^2 - 1) = 0 \rightarrow x = 0;\ x = \mp 1$
- Entre $x = -2$ y $x = 2$ existe $c_1 = -1$ tal que $f'(x) = 0$; $c_2 = 0$ tal que $f'(x) = 0$ $c_3 = 1$ tal que $f'(x) = 0$ $[P(-1, -1)$ "*mínimo*"; $Q = (0,0)$ "*máximo*" y $R = (2, -1)$ "*mínimo*"]

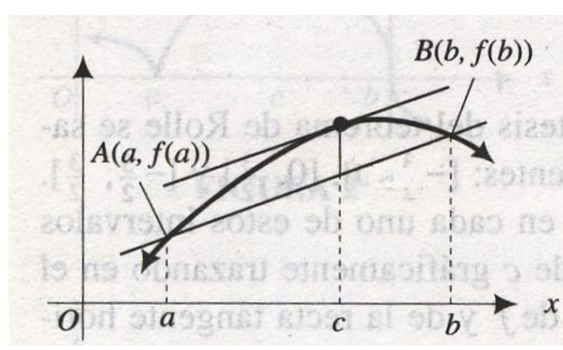
3.5.2. TEOREMA DE TEOREMA DEL VALOR MEDIO: Sea $f(x)$ una función tal que:
(i) Es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$
(ii) Es diferenciable en el intervalo abierto (a, b)

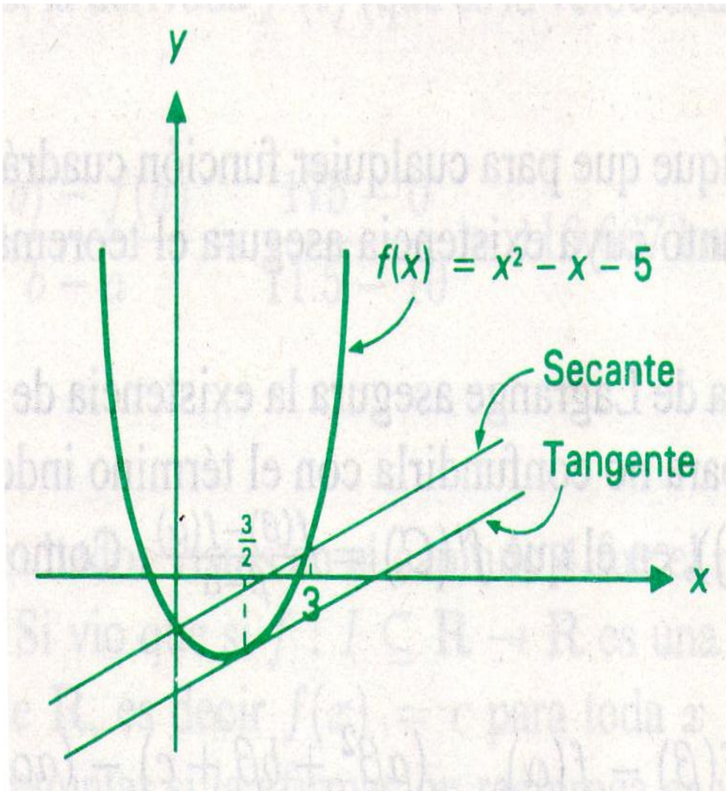
Entonces existe un número "c" en el intervalo abierto (a, b) tal que:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Este teorema es una generalización del "*Teorema de Rolle*" y se le conoce como "*Teorema de Lagrange*" nos afirma el hecho de la pendiente de la recta tangente en el punto $x = c$ es paralela a la pendiente de la recta secante que pasa por los punto $A(a, f(a))$ y $B(b, f(b))$







1. Si $f(x) = x^2 - x - 5$, en el intervalo $[0,3]$. Verificar el "*Teorema del Valor Medio*".

El "*Teorema del Valor Medio*" nos garantiza la existencia de un numero "c" donde la pendiente de la recta tangente en $x = c$ es paralela a la recta secante que pasa por $A(0,-5)$ y $B(3,1)$ horizontal, siempre y cuando las condiciones del "*Teorema*" se cumplan.

Como $f(x) = x^2 - x - 5$ es una función Polinómica se cumplen los hechos de que es continua en un intervalo cerrado $[0,3]$ y diferenciable en $(0,3)$. Luego debe existir c en $(0,3)$ tal que:

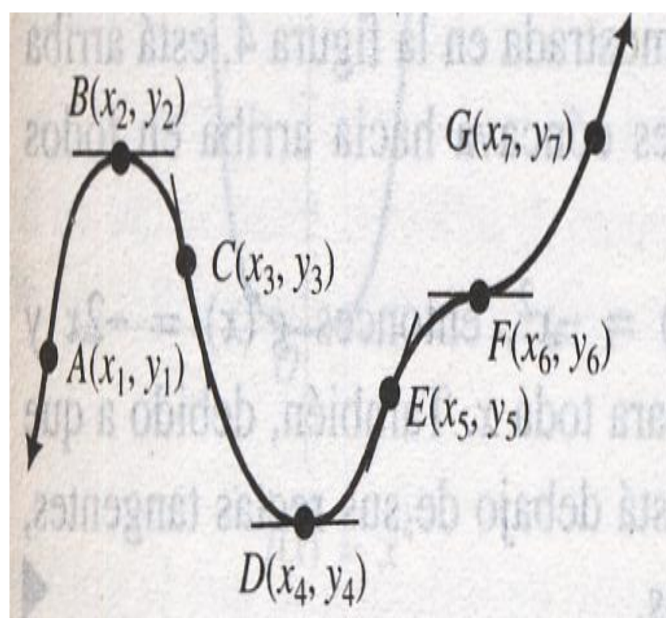
$$f'(c) = \frac{f(3) - f(0)}{3 - 0} \to f'(c) = \frac{1 + 5}{3} \to f'(c) = 2$$

Como $f'(x) = 2x - 1$ en el punto c debe ocurrir que $f'(c) = 2c - 1 \to 2c - 1 = 2 \to c = \frac{3}{2}$ el cual es el punto c que asegura el "*Teorema*"

3.6. FUNCIONES CRECIENTES Y DECRECIENTES. PRUEBA DE LA PRIMERA DERIVADA

Ahora utilizaremos la derivada para obtener propiedades de las gráficas de las funciones.

3.6.1. FUNCIONES CRECIENTES



- ✓ **DEFINICIÓN**: una función $f(x)$ definida en un intervalo es creciente en ese intervalo sí y sólo sí$f(x_1) < f(x_2)$ siempre que $x_1 < x_2$. Con x_1 y x_2 son dos números cualesquiera del intervalo.

3.6.2. FUNCIONES DECRECIENTES

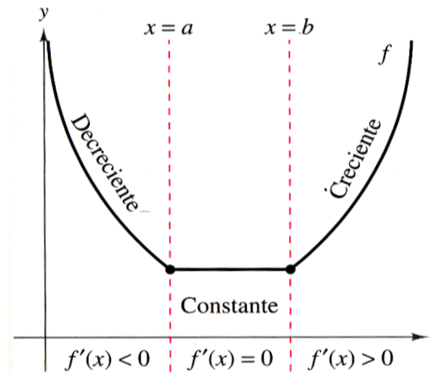
- ✓ **DEFINICIÓN**: una función $f(x)$ definida en un intervalo es decreciente en ese intervalo sí y sólo sí$f(x_1) > f(x_2)$ siempre que $x_1 < x_2$. Con x_1 y x_2 son dos números cualesquiera del intervalo.

  Decimos que $f(x)$ es creciente si "*cuando x se mueve hacia la derecha, su gráfica asciende*" y es decreciente si "*cuando x se mueve hacia la derecha, su gráfica desciende*"

✓ **TEOREMA: (CRITERIO PARA FUNCIONES CRECIENTES Y FUNCIONES DECRECIENTES):**

Sea $f(x)$ una función que es continua en un intervalo cerrado$[a,b]$ y derivable en el intervalo abierto (a,b):

1. Si $f'(x) > 0$ para toda x en (a,b)entonces $f(x)$ es *creciente* en $[a,b]$
2. Si $f'(x) < 0$ para toda x en (a,b)entonces $f(x)$ es *decreciente* en $[a,b]$
3. Si $f'(x) = 0$ para toda x en (a,b)entonces $f(x)$ es *constante* en $[a,b]$



La derivada se relaciona con la pendiente de una función

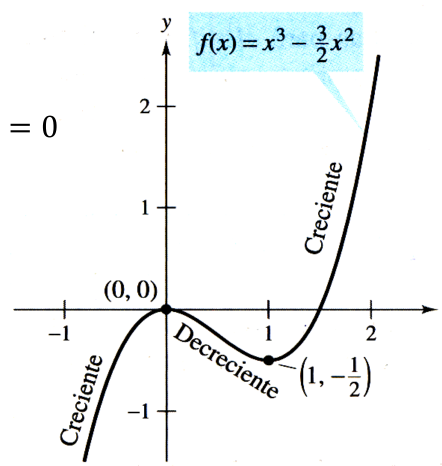
Ejemplos:

1. Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función$f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2$

$$f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 \rightarrow f'(x) = 3x^2 - 3x \rightarrow f'(x) = 0 \rightarrow 3x^2 - 3x = 0$$

$$3x(x-1) = 0 \rightarrow x = 0 \text{ y } x = 1$$

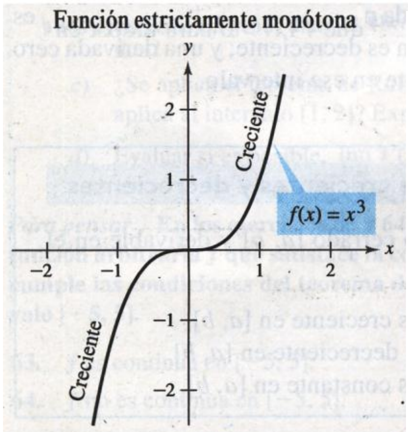
Intervalo	$-\infty < x < 0$	$0 < x < 1$	$1 < x < \infty$
Valor de prueba	$x = -1$	$x = \frac{1}{2}$	$x = 2$
Signo de $f'(x)$	$f'(-1) = 6 > 0$	$f'(\frac{1}{2}) = -\frac{3}{4} < 0$	$f'(2) = 6 > 0$
Conclusión	Creciente	Decreciente	Creciente

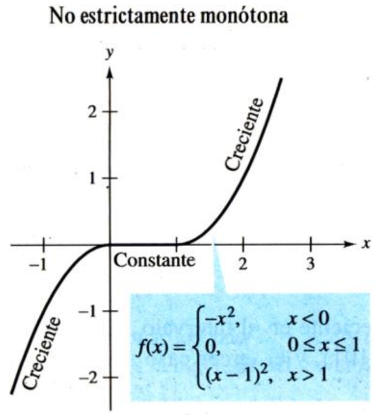


ESTRATEGIAS PARA DETERMINAR LOS INTERVALOS EN LOS QUE LA FUNCIÓN ES CRECIENTE O DECRECIENTE

Sea $f(x)$ una función continua en un intervalo (a,b). Para determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$, necesitamos seguir los siguientes pasos:

1. Localizar los puntos críticos de la función $f(x)$ en (a,b) para determinar los intervalos de prueba.
2. Determinar el signo de $f'(x)$ en un valor de prueba en cada intervalo
3. Recurrir al Teorema XX para determinar si $f(x)$ es creciente o decreciente





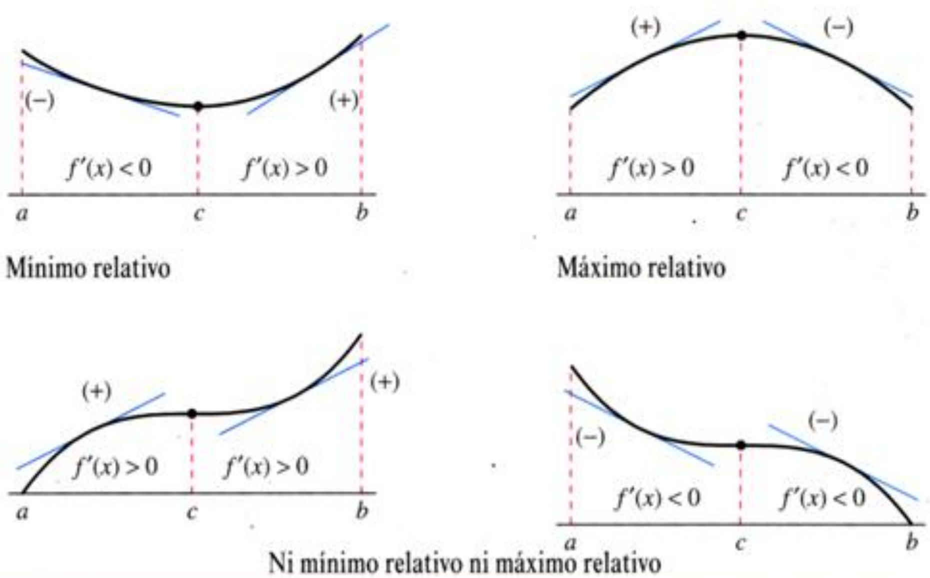
Una función es "estrictamente monótona" sobre un intervalo, si es creciente o decreciente en todo el intervalo.

3.6.3. PRUEBA DE LA PRIMERA DERIVADA

TEOREMA **Criterio de la primera derivada**

Sea c un punto crítico de una función f que es continua en un intervalo abierto I que contiene a c. Si f es derivable en el intervalo, excepto posiblemente en c, entonces $f(c)$ puede clasificarse como sigue.

1. Si $f'(x)$ cambia de negativa a positiva en c, entonces f tiene un *mínimo relativo* en $(c, f(c))$.
2. Si $f'(x)$ cambia de positiva a negativa en c, entonces f tiene un *máximo relativo* en $(c, f(c))$.
3. Si $f'(x)$ es positiva en ambos lados de c o negativa en ambos lados de c, entonces $f(c)$ no es ni un mínimo relativo ni un máximo relativo.

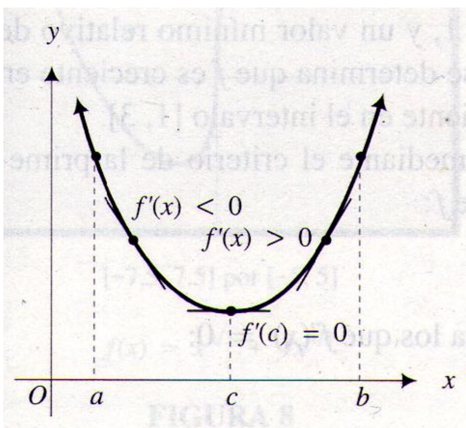


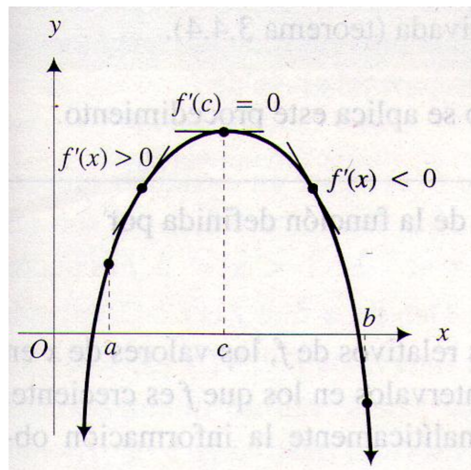
Teorema Criterio de la primera derivada para extremos relativos

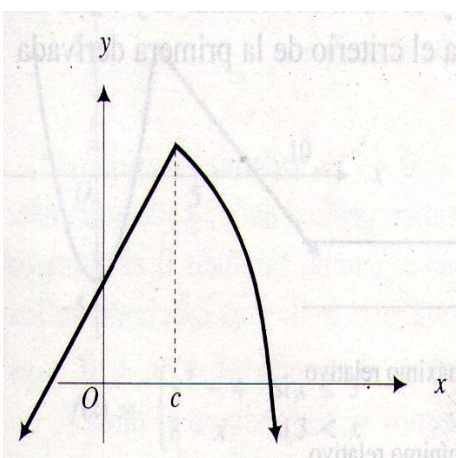
Sea f una función continua en todos los puntos del intervalo abierto (a, b) que contiene al número c, y suponga que f' existe en todos los puntos de (a, b) excepto posiblemente en c:

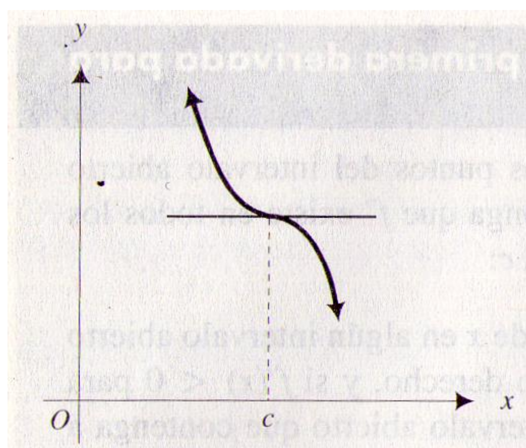
(i) si $f'(x) > 0$ para todos los valores de x en algún intervalo abierto que contenga a c como su extremo derecho, y si $f'(x) < 0$ para todos los valores de x de algún intervalo abierto que contenga a c como su extremo izquierdo, entonces f tiene un valor máximo relativo en c;

(ii) si $f'(x) < 0$ para todos los valores de x en algún intervalo abierto que contenga a c como su extremo derecho, y si $f'(x) > 0$ para todos los valores de x de algún intervalo abierto que contenga a c como su extremo izquierdo, entonces f tiene un valor mínimo relativo en c.



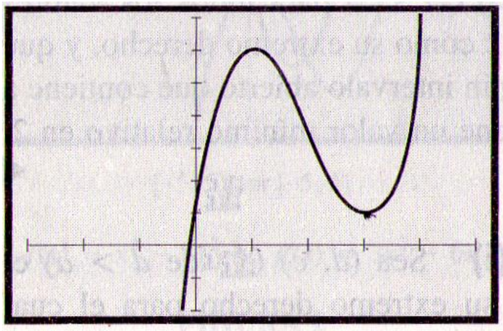






Ejemplos:

1. Determinar los extremos relativos de la función $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$
   a. Calcule $f'(x)$: $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1 \rightarrow f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$
   b. Determine los números críticos de $f(x)$, es decir los valores de "x" para los cuales $f'(x) = 0$ o para los que $f'(x)$ no existe:
   $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 0 \rightarrow 3(x^2 - 4x + 3) = 0 \rightarrow 3(x-3)(x-1) = 0 \rightarrow x = 3$ y $x = 1$
   Puntos críticos: (3,1) y (1,5)

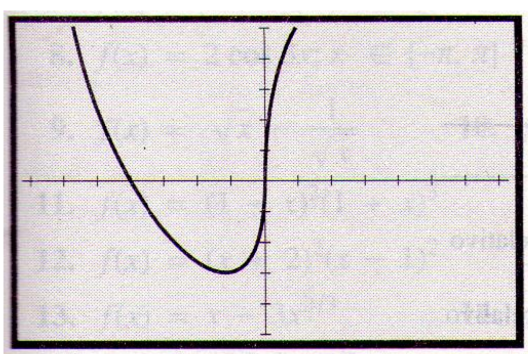


$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$

Tabla

	$f(x)$	$f'(x)$	*Conclusión*
$x < 1$		+	f es creciente
$x = 1$	5	0	f tiene un valor máximo relativo
$1 < x < 3$		−	f es decreciente
$x = 3$	1	0	f tiene un valor mínimo relativo
$3 < x$		+	f es creciente

2. Determinar los extremos relativos de la función $f(x) = x^{\frac{4}{3}} - 4x^{\frac{1}{3}}$
   c. Calcule $f'(x)$: $f(x) = x^{\frac{4}{3}} - 4x^{\frac{1}{3}} \rightarrow f'(x) = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}} - \frac{4}{3}x^{-\frac{2}{3}} \rightarrow f'(x) = \frac{4}{3}x^{-\frac{2}{3}}(x+1)$
   d. Determine los números críticos de $f(x)$, es decir los valores de "x" para los cuales $f'(x) = 0$ o para los que $f'(x)$ no existe:
   $f'(x) = \frac{4}{3}x^{-\frac{2}{3}}(x+1) = 0 \rightarrow x = 0$ $f'(x)$ no existe y $x = -1$
   Puntos críticos: $(0,0)$ y $(-1,-3)$



$f(x) = x^{4/3} + 4x^{1/3}$

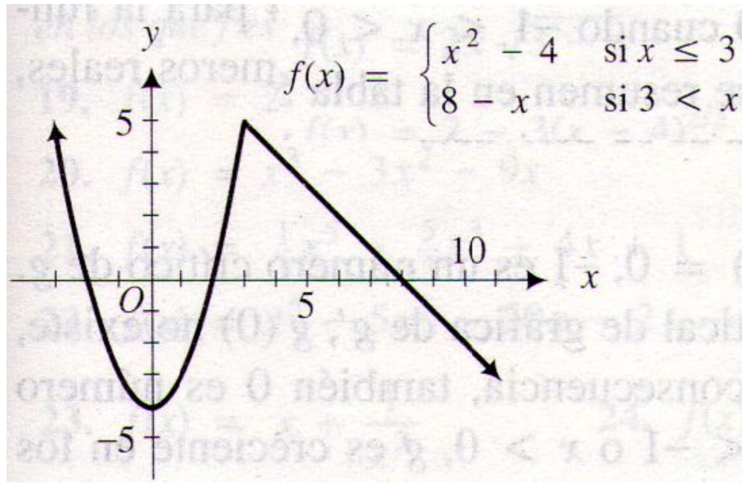
Tabla

	$f(x)$	$f'(x)$	*Conclusión*
$x < -1$		−	f es decreciente
$x = -1$	−3	0	f tiene un valor mínimo relativo
$-1 < x < 0$		+	f es creciente
$x = 0$	0	n.e.	f no tiene un extremo relativo en $x = 0$
$0 < x$		+	f es creciente

3. Determinar los extremos relativos de la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x \le 3 \\ 8 - x & \text{si } 3 < x \end{cases}$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < 3 \\ -1 & \text{si } 3 < x \end{cases}$$

$x = 3$ es un número crítico pues la derivada en ese punto no existe y $x = 0$ la derivada es "0".
Puntos críticos: $(0, -4)$ y $(3,5)$

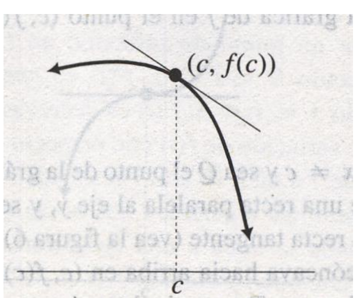


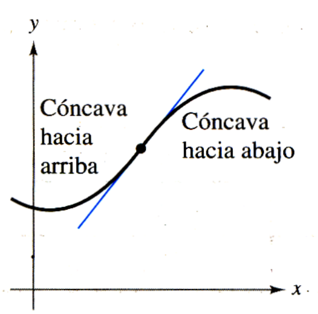
3.7. CONCAVIDAD Y PUNTOS DE INFLEXIÓN

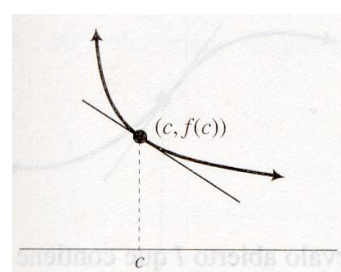
La segunda derivada al igual que la primera derivada nos ofrece información acerca del comportamiento de la función y su gráfica.

- ✓ **DEFINICIÓN (CONCAVIDAD HACIA ARRIBA).** Se dice que la gráfica de una función es "*cóncava hacia arriba*" en el punto $(c, f(c))$ si existen $f'(c)$ y un intervalo abierto "I" que contiene a "c" tal que para todos los valores "$x \neq c$" en I, el punto $(x, f(x))$ de la gráfica está arriba de la recta tangente a la gráfica en $(c, f(c))$.

- ✓ **DEFINICIÓN (CONCAVIDAD HACIA ABAJO).** Se dice que la gráfica de una función es "*cóncava hacia abajo*" en el punto $(c, f(c))$ si existen $f'(c)$ y un intervalo abierto "I" que contiene a "c" tal que para todos los valores "$x \neq c$" en I, el punto $(x, f(x))$ de la gráfica está por debajo de la recta tangente a la gráfica en $(c, f(c))$.







- ✓ **TEOREMA**: si $f(x)$ es alguna función diferenciable en algún intervalo abierto que contiene a "c" entonces
  - (i) si $f''(c) > 0$ la gráfica de $f(x)$ es "*cóncava hacia arriba*" en $(c, f(c))$.
  - (ii) si $f''(c) < 0$ la gráfica de $f(x)$ es "*cóncava hacia abajo*" en $(c, f(c))$.

- ✓ **DEFINICIÓN (PUNTO DE INFLEXIÓN).** Sea $f(x)$ una función que es continua en un intervalo abierto y sea "c" un punto en ese intervalo. Si la gráfica de $f(x)$ tiene una recta tangente en este $(c, f(c))$, entonces este punto es un "*punto de inflexión*" de la gráfica de la función $f(x)$ si la concavidad de $f(x)$ cambia de cóncava hacia arriba a cóncava hacia abajo o viceversa en ese punto.

- ✓ **DEFINICIÓN (PUNTO DE INFLEXIÓN).** El punto $(c, f(c))$ es un "*punto de inflexión*" de la gráfica de la función $f(x)$ si la gráfica tiene una recta tangente en ese punto y si existe un intervalo abierto "I" que contiene a "c" tal que si "x" está en I, entonces:

  (i) si $f''(x) < 0$ si $x < c$ y $f''(x) > 0$ si $x > c$
  (ii) si $f''(x) > 0$ si $x < c$ y $f''(x) < 0$ si $x > c$

Para localizar los posibles puntos de inflexión, se pueden determinar los valores de "x" para los cuales $f''(x) = 0$ ó $f''(x)$ no existe.

- ✓ **TEOREMA (PUNTO DE INFLEXIÓN):** Sí $(c, f(c))$ es n punto de inflexión de la gráfica de $f(x)$, entonces $f''(c) = 0$ ó $f''(c)$ no existe.

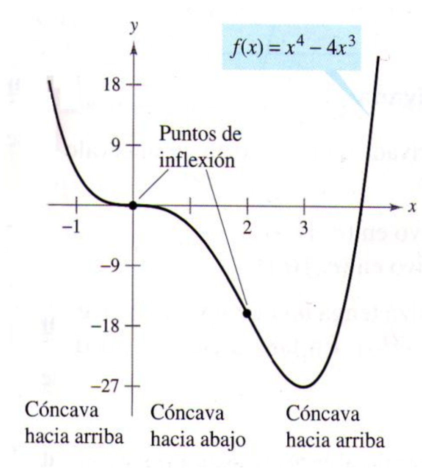
Ejemplos:

Determinar los puntos de inflexión y analizar la concavidad de la gráfica de $f(x) = x^4 - 4x^3$.

$$f(x) = x^4 - 4x^3 \to f'(x) = 4x^3 - 12x^2 \to f''(x) = 12x^2 - 24x \to f''(x) = 12x(x-2)$$

$$\text{Si } f''(x) = 0 \to 12x(x-2) = 0 \to x = 0 \text{ y } x = 2$$

INTERVALO	VALOR PRUEBA	$f''(x)$	CONCLUSIÓN
$(-\infty, 0)$	$x = -1$	$f''(-1) > 0$	Cóncava hacia arriba
$x = 0$		0	Punto de Inflexión
$(0,2)$	$x = 1$	$f''(1) < 0$	Cóncava hacia abajo
$x = 2$		0	Punto de Inflexión
$(2, \infty)$	$x = 3$	$f''(3) > 0$	Cóncava hacia arriba



3.8. PRUEBA DE LA SEGUNDA DERIVADA PARA EXTREMOS RELATIVOS

Además de un método para analizarla concavidad es posible utilizar la segunda derivada para efectuar una prueba simple correspondientes a los máximos y mínimos relativos. Se basa en el hecho de que si la gráfica de una función $f(x)$ es cóncava hacia arriba en un intervalo abierto que contiene a "c" y $f'(c)=0$ entonces $f(c)$ debe ser un mínimo relativo de $f(x)$; o si la gráfica de una función $f(x)$ es cóncava hacia abajo en un intervalo abierto que contiene a "c" y $f'(c)=0$ entonces $f(c)$ debe ser un máximo relativo de $f(x)$.

✓ **TEOREMA (CRITERIO DE LA SEGUNDA DERIVADA):** Sí $f(x)$ es una función tal que $f'(c)=0$ y la segunda derivada de $f(x)$ existe en un intervalo abierto que contiene a "c".

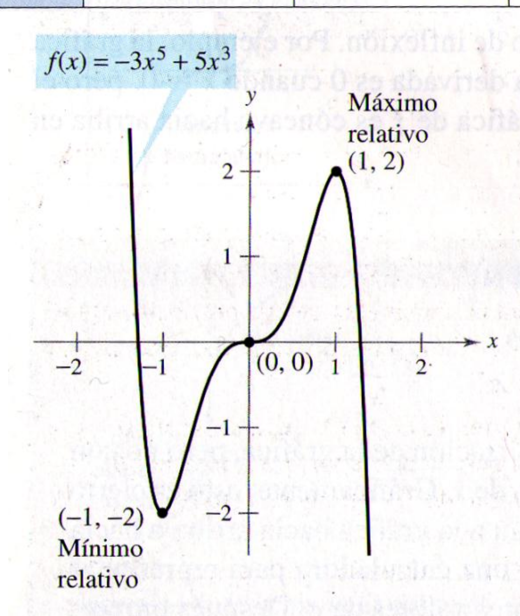
(i) $f''(x)>0$ entonces $f(x)$ tiene un mínimo relativo en $(c, f(c))$
(ii) $f''(x)<0$ entonces $f(x)$ tiene un máximo relativo en $(c, f(c))$
(iii) $f''(x)=0$ entonces el criterio falla. Esto es, $f(x)$ quizás tenga un máximo relativo, un mínimo relativo en $(c, f(c))$ o ninguno de los dos. En tales casos se recomienda utilizar el "*criterio de la primera derivada*".

Ejemplo

1. Determinar los extremos relativos de $f(x)=-3x^5+5x^3$ utilizando el criterio de la 2da derivada.

$f(x)=-3x^5+5x^3 \rightarrow f'(x)=-15x^4+15x^2 \rightarrow f'(x)=15x^2(1-x^2) \rightarrow f''(x)=-60x^3+30x$
$f''(x)=30x(1-2x^2)$
Como $f'(x)=15x^2(1-x^2) \rightarrow f'(x)=0 \rightarrow 15x^2(1-x^2)=0 \rightarrow x=0; x=-1; x=1$

Punto	$(-1,-2)$	$(1,2)$	$(0,0)$
Signo de $f''(x)$	$f''(-1)>0$	$f''(1)<0$	$f''(0)=0$
Conclusión	Mínimo relativo	Máximo relativo	Falla de la prueba



(0, 0) no es ni un mínimo relativo ni un máximo relativo

3.9. TRAZADO Y ANÁLISIS DE GRÁFICAS DE FUNCIONES

Ahora utilizaremos todos los conceptos estudiados para el trazado de una gráfica. A continuación enunciaremos los pasos que se deben seguir para dicho trazado:

1. Determine el dominio de f.
2. Determine las intercepciones x y y. Cuando determine las intercepciones x, tal vez necesite aproximar las raíces de la ecuación $f(x) = 0$ en la graficadora.
3. Pruebe la simetría con respecto al eje y y al origen.
4. Verifique si la gráfica tiene asíntotas horizontales, verticales u oblicuas.
5. Calcule $f'(x)$ y $f''(x)$.
6. Determine los números críticos de f. Estos son los valores de x del dominio de f para los que $f'(x)$ no existe o $f'(x) = 0$.
7. Aplique el criterio de la primera derivada o el criterio de la segunda derivada para determinar si en un número crítico existe un valor máximo relativo, un valor mínimo relativo o no se tiene ningún extremo relativo.
8. Determine los intervalos en los que f es creciente obteniendo los valores de x para los que $f'(x)$ es positiva; determine los intervalos en los que f es decreciente obteniendo los valores de x para los que $f'(x)$ es negativa. Al localizar los intervalos donde f es monótona, también verifique los números críticos en los que f no tiene un extremo relativo.
9. Determine los números críticos de f', esto es, los valores de x para los que $f''(x)$ no existe o $f''(x) = 0$, para obtener los puntos de inflexión posibles. En cada uno de estos valores de x verifique si $f''(x)$ cambia de signo y si la gráfica tiene una recta tangente ahí a fin de determinar si en realidad se tiene un punto de inflexión.
10. Verifique la concavidad de la gráfica. Obtenga los valores de x para los que $f''(x)$ es positiva a fin de obtener puntos en los cuales la gráfica es cóncava hacia arriba; para determinar los puntos en los que la gráfica es cóncava hacia abajo obtenga los valores de x en los que $f''(x)$ es negativa.
11. Calcule la pendiente de cada una de las tangentes de inflexión, esto le será de gran ayuda.

Ejemplos:

Analizar y dibujar la gráfica de $f(x)=\dfrac{2(x^2-9)}{x^2-4}$.

Solución

Primera derivada: $f'(x) = \dfrac{20x}{(x^2-4)^2}$

Segunda derivada: $f''(x) = \dfrac{-20(3x^2+4)}{(x^2-4)^3}$

Intersecciones en x: $(-3, 0), (3, 0)$

Intersección en y $\left(0, \frac{9}{2}\right)$

Asíntotas verticales: $x = -2, x = 2$

Asíntota horizontal: $y = 2$

Punto crítico: $x = 0$

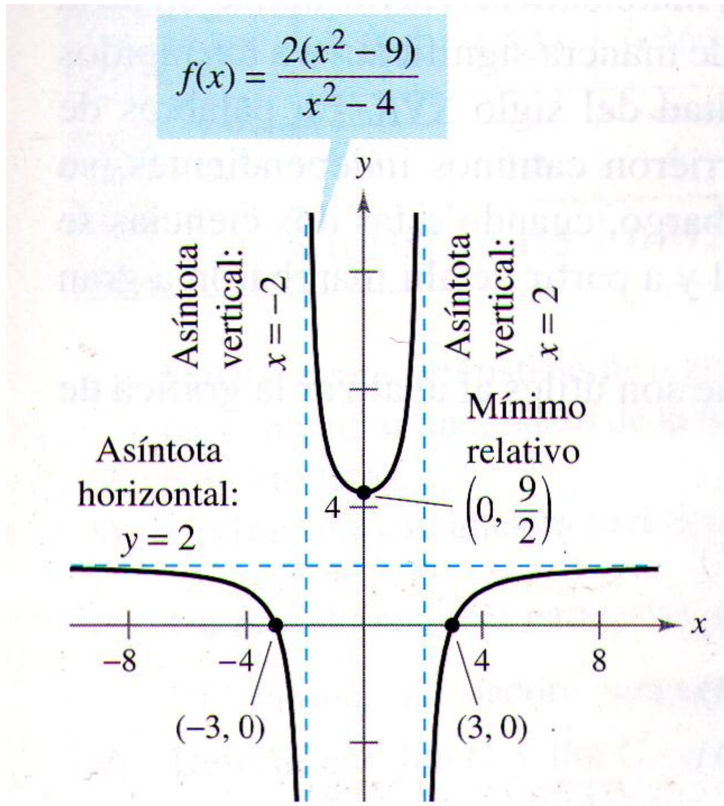
Posibles puntos de inflexión: Ninguno

Dominio: Todos los números reales excepto $x = \pm 2$

Simetría: Con respecto al eje y

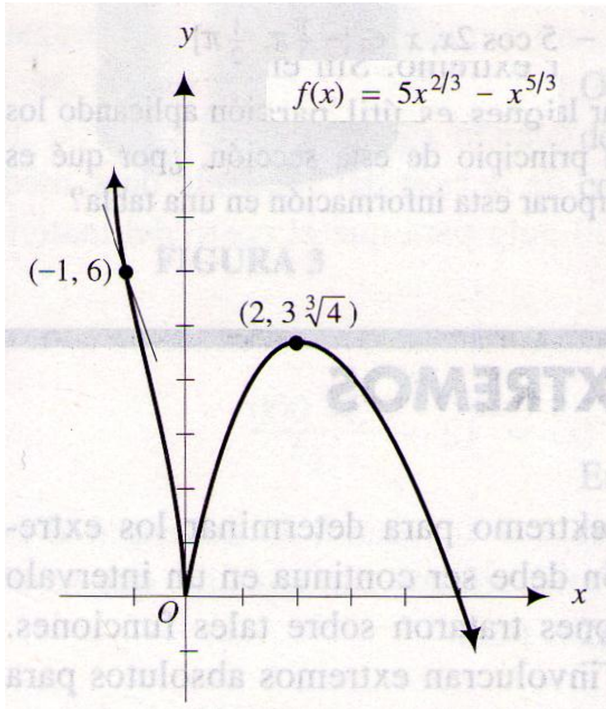
Intervalos de prueba: $(-\infty, -2), (-2, 0), (0, 2), (2, \infty)$

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	Característica de la gráfica
$-\infty < x < -2$		$-$	$-$	Decreciente, cóncava hacia abajo
$x = -2$	Indef.	Indef.	Indef.	Asíntota vertical
$-2 < x < 0$		$-$	$+$	Decreciente, cóncava hacia arriba
$x = 0$	$\frac{9}{2}$	0	$+$	Mínimo relativo
$0 < x < 2$		$+$	$+$	Creciente, cóncava hacia arriba
$x = 2$	Indef.	Indef.	Indef.	Asíntota vertical
$2 < x < \infty$		$+$	$-$	Creciente, cóncava hacia abajo



2. Analizar y trazar la gráfica de $f(x) = 5x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{5}{3}}$

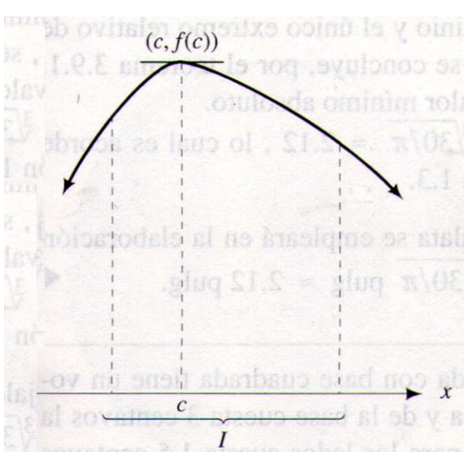
	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	*Conclusión*
$x < -1$		$-$	$+$	f es decreciente; la gráfica de f es cóncava hacia arriba
$x = -1$	6	-5	0	f es decreciente; la gráfiea de f tienen un punto de inflexión
$-1 < x < 0$		$-$	$-$	f es decreciente; la gráfica de f es cóncava hacia abajo
$x = 0$	0	n.e.	n.e.	f tiene un valor mínimo relativo
$0 < x < 2$		$+$	$-$	f es creciente; la gráfica de f es cóncava hacia abajo
$x = 2$	$3\sqrt[3]{4} \approx 4.8$	0	$-$	f tiene un valor máximo relativo; la gráfica de f es cóncava hacia abajo
$2 < x$		$-$	$-$	f es decreciente; la gráfica de f es cóncava hacia abajo

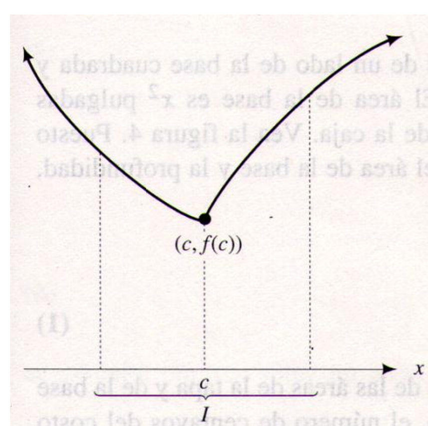


3.10. APLICACIONES SOBRE EXTREMOS ABSOLUTOS

En una sección anterior vimos problemas de aplicación en las que se aplicaba el "*Teorema del Valor Extremo*", para determinar extremos absolutos de una función continua en un intervalo cerrado. Ahora se considerarán aplicaciones que involucran "*extremos absolutos*" para los cuales no puede aplicarse el "*Teorema del Valor Extremo*", pero primero se presentará un "Teorema" el cual en ocasiones es útil para determinar si un *extremo relativo* es un *extremo absoluto*.

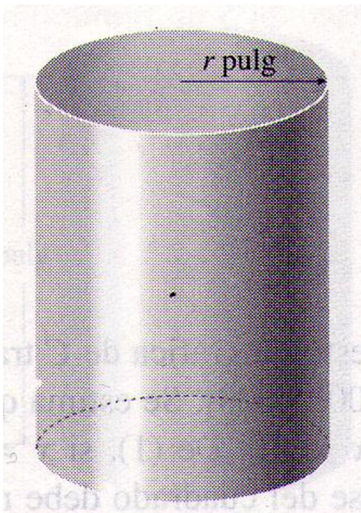
- ✓ **TEOREMA:** Sí $f(x)$ es una función continua en un intervalo "I" que contiene a "c". Si $f(c)$ es un "extremo relativo" de $f(x)$ en el intervalo "I" y "c" es el único número en el intervalo "I" para la cual $f(x)$ tiene un extremo relativo, entonces $f(c)$ es un "extremo absoluto" de $f(x)$ en el intervalo "I".





Ejemplos

1. Un envase de hojalata cerrado de $60\, pulg^3$ de volumen tiene forma de un "*cilindro circular recto*", determinar el "*radio de la base*" de dicho envase si se emplea la "*mínima*" cantidad de hojalata en su elaboración.



Sea "r" el radio de la base a determinar. El área de la superficie lateral es $S_1(r) = 2\pi rh\, pulg^2$ y el área de las dos tapas circulares es $S_2(r) = 2\pi r^2$, entonces el área superficial total del envase es:

$$S(r) = S_1(r) + S_2(r)$$
$$S(r) = 2\pi rh + 2\pi r^2$$

El Volumen de un "*cilindro circular recto*" es:

$$V = \pi r^2 h \rightarrow h = \frac{V}{\pi r^2} \rightarrow h = \frac{60}{\pi r^2}$$

Luego el área superficial $S(r)$ en función del radio "r"

$$S(r) = 2\pi r \frac{60}{\pi r^2} + 2\pi r^2 \rightarrow S(r) = \frac{120}{r} + 2\pi r^2$$

$$S'(r) = -\frac{120}{r^2} + 4\pi r \rightarrow S''(r) = -\frac{240}{r^3} + 4\pi$$

$S''(r)$ no existe si $r = 0$ pero este valor no pertenece al dominio de la función $S(r)$ entonces los únicos números críticos son:

$$S''(r) = 0 \rightarrow -\frac{240}{r^3} + 4\pi = 0 \rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{30}{\pi}}$$

El único número crítico es $r = \sqrt[3]{\frac{30}{\pi}}$. Aplicando el "*criterio de la segunda derivada*" obtenemos:

Tabla

	$S'(r)$	$S''(r)$	*Conclusión*
$r = \sqrt[3]{\frac{30}{\pi}}$	0	+	S tiene un valor mínimo relativo