INSTITUTO FEDERAL
Santa Catarina

Sistemas de Equações Lineares: Método de Cholesky

Eduardo Paz Putti, Gabriel E. Dettenborn

Chapecó, Novembro de 2024

Introdução

- $Ax = B$

- $A = GG^T$

Onde G é uma matriz triangular inferior com elementos da diagonal principal estritamente positivos.

Aplicações do método de Cholesky

- Sistemas Lineares:

Tópico do estudo;

- Determinantes:

$A = GG^T$

$det(A) = det(G).det(G^T)$ - (teorema de Binet)

Objetivos

Apresentação do Método de Cholesky para resolução de sistemas lineares simétricos definidos positivos. Além disso, a implementação computacional do método.

Decomposição de Cholesky

Uma matriz simétrica A é definida positiva se, e somente se, pode ser fatorada como GG^T, onde G é uma matriz triangular inferior com elementos positivos na diagonal.

Decomposição de Cholesky

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \vdots & 0 \\ l_{k1} & l_{k2} & \dots & l_{kk} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\ l_{n1} & l_{n2} & .. & l_{nk} & \dots & l_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & \dots & l_{k1} & \dots & l_{n1} \\ 0 & l_{22} & \dots & l_{k2}\dots & \dots & l_{n2} \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0. & 0 & \dots & l_{kk}\dots & \dots & l_{nk} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & l_{nn} \end{bmatrix}$$

Fonte: Doherty Andrade (2020)

Decomposição de Cholesky

$$g_{11} = \sqrt{a_{11}} \qquad g_{ii} = \left(a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} g_{ik}^2\right)^{1/2}$$

$$g_{i1} = \frac{a_{i1}}{g_{11}} \qquad g_{ij} = \frac{\left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} g_{ik} g_{jk}\right)}{g_{ij}}$$

Fonte: Autoria própria (2024)

Decomposição de Cholesky

$$\begin{pmatrix} g_{11} & & & & \\ g_{21} & g_{22} & & & \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \\ g_{n1} & g_{n2} & g_{n3} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix}$$

Fonte: Marina Andretta (2011)

INSTITUTO FEDERAL
Santa Catarina

Solução de Cholesky

- $A = GG^T$
- $Ax=b$
- $(GG^T)x=b$

- (i) $Gy = b$
- (ii) $G^Tx = y$

Metodologia

Após o estudo teórico, foi realizado a implementação do código em c++;

Em seguida, realizados os testes, que comprovaram o sucesso do algoritmo para os sistemas testados;

Implementação

Resultados

- Foi implementado um código orientado a objetos, que atenda uma matriz simétrica definida positiva de ordem MxM, com M podendo ser qualquer número natural maior que 2.

Considerações Finais

O método de Cholesky pode ser usado tanto para resolver sistemas lineares, quanto para resolver determinantes.

O método depende da matriz dos coeficientes seja simétrica e definida positiva.

INSTITUTO FEDERAL
Santa Catarina

Referências

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ. **Tópicos Especiais - Cholesky**. Disponível em: <https://dma.uem.br/kit/topicos-especiais/cholesky.pdf>. Acesso em: 27 out. 2024.

CONTE, S. D. **Elementary Numerical Analysis**. MacGraw-Hill, 1965.

ANDRETTA, Marina. **Sistemas Lineares - Cholesky**. Disponível em: <https://sites.icmc.usp.br/andretta/ensino/aulas/sme0301-1-11/SistemasLinearesCholesky.pdf>. Acesso em: 1 nov. 2024.

DOS SANTOS, Camila Elnatana Ramos et al. **Comparativo entre os métodos numéricos exatos fatoração Cholesky e método de eliminação de Gauss, Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics**, v. 5, n. 1, 2017.

THIBES, Hélia Valério; FACHIN, Maria Paula Goncalves; CUNHA, Rudnei Dias da. **Fatoração incompleta LU e Cholesky como pré-condicionadores**. Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional (25.: 2002: Nova Friburgo, RJ).[Resumos].[Sl]: SBMAC, 2002. 2002.