

UNIVERSIDAD DE GUADALAJARA
CENTRO UNIVERSITARIO DE CIENCIAS EXACTAS E INGENIERÍAS
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS



Introducción al álgebra homológica

Lorena M. Noh Canul
Alejandro Vázquez Aceves
Jorge Alfredo Álvarez Contreras

Notas del curso de:
Dr. Luis Ángel Zaldívar Corichi

Guadalajara, Jalisco, Noviembre, 2021

Todo list

SES 4	27
help	40
SES 7	40
SES 10	53
SES 13	68
SES 16	75
SES 19	84
Exposición Alejandro	85

Índice general

1. Complejos de cadenas en R-Mód	4
1.1. La categoría de complejos	4
1.2. La funtorialidad de la homología	9
1.3. Sucesión exacta larga de Homología	11
1.4. Homotopía entre morfismos de complejos	24
2. Funtores derivados	27
2.1. Funtores derivados izquierdos	27
2.2. Funtores derivados derechos (covariantes)	46
3. Los funtores Tor y Ext	54
3.1. Propiedades del Tor	54
3.2. El teorema de Chase	62
3.3. Localización	68
3.4. Propiedades del Ext	70
3.4.1. Extensiones y Ext	71
4. Cohomología de gavillas	76
4.1. Gavillas	76
4.1.1. Fibras	78
4.2. La categoría de gavillas	79
4.3. Núcleos, imágenes y conúcleos	81
4.4. Cohomología de Čech	85
4.4.1. Sucesión exacta larga en cohomología	85
4.4.2. El homomorfismo de conexión	85
4.4.3. Axiomas de cohomología	88

Capítulo 1

Complejos de cadenas en $R\text{-Mód}$

1.1. La categoría de complejos

Definición 1 (Complejo). Un **complejo de cadenas** (o simplemente un complejo) en $R\text{-Mód}$ es una pareja (C_\bullet, d_\bullet) donde $C_\bullet = (C_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ es una sucesión de objetos en $R\text{-Mód}$ y $d_\bullet = (d_n : C_n \rightarrow C_{n-1})_{n \in \mathbb{Z}}$ es una sucesión de morfismos, llamados diferenciales, que satisfacen $d_n d_{n+1} = 0$ para toda $n \in \mathbb{Z}$.

Notemos que la condición $d_n d_{n+1} = 0$ es equivalente a

$$\text{Im}(d_{n+1}) \subseteq \text{Ker}(d_n).$$

Definición 2 (Exactitud). Decimos que un complejo C_\bullet

$$\cdots \rightarrow C_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} C_{n-2} \rightarrow \cdots$$

es exacto en grado n si $\text{Ker } d_n = \text{Im } d_{n+1}$ o, equivalentemente, si $\text{Coim } d_n = \text{Coker } d_{n+1}$.

También decimos que el complejo C_\bullet es exacto, o bien, una sucesión exacta, si es exacto en grado n para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Definición 3 (Morfismo de complejos). Sean (C_\bullet, d_\bullet) , $(C'_\bullet, \delta_\bullet)$ dos complejos. Un morfismo

$$f_\bullet : (C_\bullet, d_\bullet) \rightarrow (C'_\bullet, \delta_\bullet)$$

es una sucesión de morfismos en $R\text{-Mód}$

$$(f'_n : C_n \rightarrow C'_n)_{n \in \mathbb{Z}}$$

tal que el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & C_{n+1} & \xrightarrow{d_{n+1}} & C_n & \xrightarrow{d_n} & C_{n-1} & \xrightarrow{d_{n-1}} & C_{n-2} & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \cdots & \longrightarrow & C'_{n+1} & \xrightarrow{\delta_{n+1}} & C'_n & \xrightarrow{\delta_n} & C'_{n-1} & \xrightarrow{\delta_{n-1}} & C'_{n-2} & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

conmuta en $R\text{-Mód}$ (o en una categoría abstracta μ).

Así obtenemos la categoría de complejos sobre μ , a la cual denotamos por $\text{Com}(\mu)$. Si $\mu = R\text{-Mód}$, entonces escribimos $\text{Com}(R) = \text{Com}(R\text{-Mód})$.

Ejemplo 1 (Módulos como complejos). *Fijemos $A \in R\text{-Mód}$ y $k \in \mathbb{Z}$. Definimos el complejo $\rho^k(A)$ cuyo k -ésimo término es A y las diferenciales son cero*

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow A \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

a este complejo se le llama el complejo k -centrado en A .

Además, si A, B son R -módulos, los morfismos de complejos $\rho^k(A) \rightarrow \rho^k(B)$ están en correspondencia uno a uno con los morfismos de R -módulos $A \rightarrow B$.

Ejemplo 2 (Morfismos como complejos). *Sea $f : A \rightarrow B$. Definimos el complejo $\Sigma^k(f)$ cuyo k -ésimo diferencial es f y todos los demás diferenciales son cero. En particular $\Sigma^k(f)_k = A$ y $\Sigma^k(f)_{k-1} = B$.*

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

Ejemplo 3 (Sucesiones exactas como complejos). *Recordemos que una sucesión de morfismos y módulos*

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$$

es exacta cuando f es inyectiva, g es suprayectiva y $\text{Ker } g = \text{Im } f$. En este caso, el diagrama

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

es un complejo exacto.

Definición 4 (Resoluciones). *Si M es un módulo, una **resolución proyectiva** de M es un complejo P_M*

$$P_M : \cdots \longrightarrow P_3 \xrightarrow{d_3} P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \longrightarrow 0$$

donde cada P_i es proyectivo, junto con un morfismo $\varepsilon : P_0 \rightarrow M$, tales que la sucesión

$$\cdots \longrightarrow P_3 \xrightarrow{d_3} P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0$$

es exacta. En particular, ε debe ser suprayectivo.

Si cada P_i es libre, decimos que (P_M, ε) es una resolución libre de M . Si cada P_i es plano, decimos que (P_M, ε) es una resolución plana de M . Así,

$$\text{Resolución libre} \implies \text{Resolución proyectiva} \implies \text{Resolución plana}.$$

Supongamos que (P_M, ε) es una resolución de un módulo M . Si solo tenemos el complejo P_M , podemos recuperar el morfismo $\varepsilon : P_0 \rightarrow M$ como el conúcleo de d_1 , ya que la exactitud de

$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdots & \longrightarrow & P_2 & \xrightarrow{d_2} & P_1 & \xrightarrow{d_1} & P_0 \longrightarrow \text{Coker}(d_1) \longrightarrow 0 \\
 & & & & & \varepsilon \downarrow & \swarrow \cong \\
 & & & & & M & \\
 & & & & & \downarrow & \\
 & & & & & 0 &
 \end{array}$$

Proposición 1. *Todo módulo tiene una resolución proyectiva.*

$$0 \longrightarrow K_1 \xrightarrow{\iota_1} F_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0$$
$$\text{Libre} \implies \text{Proyectivo} \implies \text{Plano}$$
$$0 \longrightarrow K_2 \xrightarrow{\iota_2} F_1 \xrightarrow{\varepsilon_1} K_1 \longrightarrow 0$$
$$0 \longrightarrow K_{n+1} \xrightarrow{\iota_{n+1}} F_n \xrightarrow{\varepsilon_n} K_n \longrightarrow 0$$
$$\begin{array}{ccccccc}
& & 0 & & 0 & & 0 \\
& & \searrow & & \searrow & & \searrow \\
& & & K_3 & & & K_1 \\
& & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow \\
& & 0 & & 0 & & 0 \\
\cdots & \longrightarrow & F_3 & \longrightarrow & F_2 & \longrightarrow & F_1 & \longrightarrow & F_0 \\
& & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & & \searrow \\
& & K_3 & & & & K_2 & & \\
& & \nearrow & & \nearrow & & \searrow & & \\
0 & & & & 0 & & & & 0 \\
& & & & & & & & \searrow \\
& & & & & & & & M \\
& & & & & & & & \searrow \\
& & & & & & & & 0
\end{array}$$

Notemos que

$$\begin{aligned}\text{Im}(d_1) &= K_1 = \text{Ker}(\varepsilon), \\ \text{Ker}(d_1) &= \text{Ker}(\varepsilon_1) = K_2,\end{aligned}$$

lo que prueba que la sucesión

$$\cdots \longrightarrow F_3 \longrightarrow F_2 \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

es exacta en el primer nivel y así tenemos la resolución proyectiva. \square

Definición 5. Una *resolución inyectiva* de un módulo M es una sucesión exacta

$$E_M : \quad 0 \longrightarrow M \xrightarrow{\delta} E^0 \xrightarrow{d^0} E^1 \xrightarrow{d^1} \cdots$$

donde cada E^i es inyectivo.

La resolución omitida

$$0 \longrightarrow E^0 \xrightarrow{d^0} E^1 \xrightarrow{d^1} \cdots$$

es tal que, ya que $\text{Im}(d^1) = \text{Ker}(d^0) = M$, entonces no perdemos información, nuevamente

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & E^0 & \xrightarrow{d^0} & E^1 & \xrightarrow{d^1} & E^2 \longrightarrow \cdots \\ & \searrow & \uparrow & & & & \\ & & M = \text{Ker}(d^0) & & & & \end{array}$$

y así tenemos el siguiente resultado:

Proposición 2. Todo módulo tiene resolución inyectiva

Demostración. Si M es inyectivo se cumple trivialmente. De lo contrario, existe $\eta_0 : M \rightarrow E$ tal que

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\eta_0} E^0 \xrightarrow{\delta} \text{Coker}(\eta_0) \longrightarrow 0$$

de aquí

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 0 & & 0 \\ & & & & \searrow & & \nearrow \\ & & & & \text{Coker}(\eta_1) & & \\ & & & \nearrow & & \searrow & \\ 0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & E^0 & \longrightarrow & E^1 \longrightarrow E^2 \longrightarrow \cdots \\ & & \searrow & & \nearrow & & \\ & & \text{Coker}(\eta_0) & & & & \\ & \nearrow & & & & & \\ & 0 & & & & & \end{array}$$

lo que prueba que la sucesión es exacta. \square

Notemos que, dado un complejo

$$C_{\bullet} : \quad \cdots \longrightarrow C_{n-1} \longrightarrow C_n \longrightarrow C_{n+1} \longrightarrow \cdots$$

y un funtor aditivo covariante

$$F : R\text{-Mód} \rightarrow R\text{-Mód}$$

la sucesión de módulos y morfismos

$$FC_{\bullet} : \quad \cdots \longrightarrow FC_{n-1} \longrightarrow FC_n \longrightarrow FC_{n+1} \longrightarrow \cdots$$

sigue siendo un complejo. Si P_M es una resolución proyectiva de un módulo M tenemos que FP_M es un complejo, pero no es necesariamente exacto. Por ejemplo, $\text{Hom}(-, -)$ no preserva la exactitud. En el caso de que F sea contravariante entonces solo hacemos un cambio en los índices de la resolución y lo que obtenemos es similar.

Definición 6. Un complejo C_{\bullet} es **positivo** si $C_n = 0$ para toda $n < 0$.

Un complejo C_{\bullet} es **negativo** si $C_n = 0$ para toda $n > 0$.

Denotamos por $\text{Com}_{\geq 0}(R)$ a los complejos positivos y por $\text{Com}_{\leq 0}(R)$ a los complejos negativos.

Definición 7. Dado un complejo

$$\cdots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

definimos:

- **n -cadenas:** C_n ,
- **n -ciclos:** $Z_n(C_{\bullet}) = \text{Ker } d_n$,
- **n -fronteras:** $B_n(C_{\bullet}) = \text{Im } d_{n+1}$.

Notemos que de la condición

$$d_n d_{n+1} = 0$$

tenemos que

$$B_n(C_{\bullet}) \subseteq Z_n(C_{\bullet})$$

y el complejo es exacto en grado n si esta contención es una igualdad. Para medir la falta de exactitud en grado n , podemos formar el cociente. Tenemos la siguiente definición.

Definición 8. Si C_{\bullet} es un complejo en $\text{Com}(R)$, para $n \in \mathbb{Z}$ su **n -ésima homología** es

$$H_n(C_{\bullet}) = \frac{Z_n(C_{\bullet})}{B_n(C_{\bullet})},$$

y a los elementos de $H_n(C_{\bullet})$ se les llama **clases de homología**, y las denotamos por $[z]$.

Así, para cada n , un complejo $C_\bullet \in \text{Com}(R)$ tiene asociadas dos sucesiones exactas cortas

$$0 \longrightarrow Z_n(C_\bullet) \longrightarrow C_n \longrightarrow B_{n-1}(C_\bullet) \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow B_n(C_\bullet) \longrightarrow Z_n(C_\bullet) \longrightarrow H_n(C_\bullet) \longrightarrow 0.$$

Éstas encajan en el diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \searrow & & \swarrow & & \\
 & 0 & \longrightarrow & B_n & \longrightarrow & Z_n & \longrightarrow & H_n & \longrightarrow & 0 \\
 & & \nearrow & & \searrow & & & & & \\
 \cdots & \longrightarrow & C_{n+1} & \longrightarrow & C_n & \longrightarrow & C_{n-1} & \longrightarrow & \cdots \\
 & \searrow & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & & \nearrow & \cdots \\
 0 & \longrightarrow & B_{n+1} & \longrightarrow & Z_{n+1} & \longrightarrow & H_{n+1} & \longrightarrow & 0 & \\
 & & \searrow & & \swarrow & & & & & \\
 & & 0 & & 0 & & & & & \\
 & & \searrow & & \swarrow & & & & & \\
 & 0 & \longrightarrow & B_{n-1} & \longrightarrow & Z_{n-1} & \longrightarrow & H_{n-1} & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

Ejemplo 4 (La homología de un morfismo). Como todo morfismo define un complejo $\Sigma^n(f)$ entonces para $n = 1$, tenemos

$$\Sigma^1(f) : \quad \cdots \longrightarrow 0 \xrightarrow{d_2} A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{d_0} 0 \longrightarrow \cdots$$

de donde podemos notar que $\text{Im} d_2 = 0$ y como $d_0 = 0$, entonces $\text{Ker } d_0 = B$, y de aquí

$$H_1(\Sigma^1(f)) = \text{Ker } f$$

$$H_0(\Sigma^1(f)) = B / \text{Im } f = \text{Coker}(f).$$

Por lo tanto,

$$H_n(\Sigma^1(f)) = \begin{cases} \text{Ker } f & n = 1 \\ \text{Coker } f & n = 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

1.2. La functorialidad de la homología

Para cada n , la construcción H_n convierte un complejo C_\bullet en un objeto $H_n(C_\bullet)$ de \mathcal{A} . Ahora veremos que cada H_n es un funtor $\text{Com}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{A}$. Es decir, dado un morfismo de complejos $f_\bullet : C_\bullet \rightarrow C'_\bullet$, tenemos un morfismo $H_n f_\bullet : H_n(C_\bullet) \rightarrow H_n(C'_\bullet)$ y esta asignación $f_\bullet \mapsto H_n f_\bullet$ respeta composiciones e identidades.

Recordemos que un morfismo f_\bullet de complejos

$$f_\bullet : (C_\bullet, d_\bullet) \rightarrow (C'_\bullet, d'_\bullet)$$

consiste en morfismos (f_n) en cada nivel $n \in \mathbb{Z}$, tales que cada cuadrado del siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & C_{n+1} & \xrightarrow{d_{n+1}} & C_n & \xrightarrow{d_n} & C_{n-1} \longrightarrow \cdots \\ & & \downarrow f_{n+1} & & \downarrow f_n & & \downarrow f_{n-1} \\ \cdots & \longrightarrow & C'_{n+1} & \xrightarrow{d'_{n+1}} & C'_n & \xrightarrow{d'_n} & C'_{n-1} \longrightarrow \cdots \end{array}$$

Queremos producir un morfismo $H_n \rightarrow H'_n$, para lo cual primero obtendremos un morfismo $Z_n \rightarrow H'_n$ y veremos que se factoriza a través de $Z_n \rightarrow H_n$.

Tomemos un n -ciclo $z \in Z_n \subseteq C_n$. Así $f_n z \in C'_n$ y $d'_n f_n z \in C'_{n-1}$, pero como el diagrama conmuta, entonces

$$d'_n f_n z = f_{n-1} d_n z = 0,$$

ya que $d_n z = 0$. En otras palabras, si $z \in Z_n$, entonces $f_n z \in Z'_n$. Es decir, el morfismo compuesto $Z_n \hookrightarrow C_n \xrightarrow{f_n} C'_n$ se factoriza a través de la inclusión $Z'_n \hookrightarrow C'_n$. Así, obtenemos el diagrama

$$\begin{array}{ccc} C_n & \xrightarrow{f_n} & C'_n \\ \uparrow & & \uparrow \\ Z_n & \longrightarrow & Z'_n \longrightarrow H'_n. \end{array}$$

donde la flecha compuesta $Z_n \rightarrow Z'_n \rightarrow H'_n$ manda $z \mapsto [f_n z]$. Par ver que esta flecha pasa al cociente H_n , basta ver que su núcleo contiene a $B_n = B_n(C_\bullet)$. Dado $d_{n+1}x \in B_n$ (con $x \in C_{n+1}$), al aplicar la flecha $Z_n \rightarrow H'_n$ obtenemos

$$[f_n d_{n+1}x] = [d'_{n+1} f_{n+1}x] = 0$$

pues $d'_{n+1} f_{n+1}x \in B'_n$. Así, en efecto tenemos un paso al cociente, al cual llamamos $H_n f$.

$$\begin{array}{ccccc} C_n & \xrightarrow{f_n} & C'_n & & \\ \uparrow & & \uparrow & & \\ Z_n & \longrightarrow & Z'_n & \longrightarrow & H'_n \\ \downarrow & & & \nearrow & \\ H_n & \xrightarrow{H_n f} & & & \end{array}$$

Por lo tanto, $H_n : \text{Com}(R) \rightarrow R\text{-Mód}$ es un funtor, veamos:

- $H_n(1) = 1$ es obvio.

- Tomemos (C_\bullet, d_\bullet) , (C'_\bullet, d'_\bullet) , $(C''_\bullet, d''_\bullet) \in \text{Com}(R)$ tal que

$$\begin{array}{ccccc} (C_\bullet, d_\bullet) & \xrightarrow{f_\bullet} & (C'_\bullet, d'_\bullet) & \xrightarrow{g_\bullet} & (C''_\bullet, d''_\bullet) \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & (fg)_\bullet & & \end{array}$$

$$\begin{aligned} H_n(gf)[z] &= [(gf)_n(z)] \\ &= [g_n(f_n(z))] \\ &= H_n(g)[f_n(z)] \\ &= H_n(g)H_n(f)[z] \end{aligned}$$

Más aún, H_n es un funtor aditivo, ya que

$$\begin{aligned} H_n(g + f)[z] &= [(g_n + f_n)(z)] \\ &= [f_n(z) + g_n(z)] \\ &= [f_n(z)] + [g_n(z)] \\ &= H_n(f)[z] + H_n(g)[z] \end{aligned}$$

Denotamos por f^* ó f_* a $H_n(f)$, dependiendo de si estamos hablando de cohomología u homología.

1.3. Sucesión exacta larga de Homología

Arriba probamos que cada H_n es un funtor $\text{Com}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{A}$, para lo cual vimos la acción de H_n en complejos y en morfismos de complejos. En particular, al aplicar cada funtor H_n a una sucesión exacta corta en $\text{Com}(\mathcal{A})$

$$0 \rightarrow C'_\bullet \rightarrow C_\bullet \rightarrow C''_\bullet \rightarrow 0$$

obtenemos sucesiones en \mathcal{A}

$$0 \longrightarrow H_{n+1}(C'_\bullet) \longrightarrow H_{n+1}(C_\bullet) \longrightarrow H_{n+1}(C''_\bullet) \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow H_n(C'_\bullet) \longrightarrow H_n(C_\bullet) \longrightarrow H_n(C''_\bullet) \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow H_{n-1}(C'_\bullet) \longrightarrow H_{n-1}(C_\bullet) \longrightarrow H_{n-1}(C''_\bullet) \longrightarrow 0$$

pero estas no son exactas, en general. Sin embargo, nuestro objetivo ahora es ver que todas estas encajan en una sola sucesión exacta larga.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & \cdots & \longrightarrow & H_{n+2}(C''_{\bullet}) \\
 & & & & & \swarrow & \\
 H_{n+1}(C'_{\bullet}) & \longrightarrow & H_{n+1}(C_{\bullet}) & \longrightarrow & H_{n+1}(C''_{\bullet}) & & \\
 & & & & \swarrow & & \\
 H_n(C'_{\bullet}) & \longrightarrow & H_n(C_{\bullet}) & \longrightarrow & H_n(C''_{\bullet}) & & \\
 & & & & \swarrow & & \\
 H_{n-1}(C'_{\bullet}) & \longrightarrow & H_{n-1}(C_{\bullet}) & \longrightarrow & H_{n-1}(C''_{\bullet}) & & \\
 & & & & \swarrow & & \\
 H_{n-2}(C'_{\bullet}) & \longrightarrow & \cdots & & & &
 \end{array}$$

Esta construcción le asigna, a cada sucesión exacta corta en $\text{Com}(\mathcal{A})$, una sucesión exacta (larga) en \mathcal{A} . Después veremos que esta asignación se extiende a un funtor $\text{SEC}(\text{Com}\mathcal{A}) \rightarrow \text{SE}(\mathcal{A})$, donde $\text{SEC}(\mathcal{A})$ y $\text{SE}(\mathcal{A})$ denotan las categorías de sucesiones exactas cortas y sucesiones exactas en \mathcal{A} , respectivamente.

Lo primero que haremos será construir los morfismos que aparecen diagonalmente en el diagrama de arriba. A cada uno de estos morfismos se les llama “morfismo de conexión”.

Proposición 3 (Descripción del morfismo de conexión). *Sea*

$$0 \longrightarrow C'_{\bullet} \xrightarrow{\iota} C_{\bullet} \xrightarrow{\rho} C''_{\bullet} \longrightarrow 0$$

una sucesión exacta corta en $\text{Com}(R)$. Entonces para toda $n \in \mathbb{Z}$ tenemos un morfismo

$$\begin{aligned}
 \partial_n : H_n(C''_{\bullet}) &\rightarrow H_{n-1}(C'_{\bullet}) \\
 [z''_n] &\rightarrow [\iota_{n-1}^{-1} d_n \rho_n^{-1} z''_n]
 \end{aligned}$$

Demostración. Consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & C'_{n+1} & \xrightarrow{\iota_{n+1}} & C_{n+1} & \xrightarrow{\rho_{n+1}} & C''_{n+1} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow d'_{n+1} & & \downarrow d_{n+1} & & \downarrow d''_{n+1} \\
 0 & \longrightarrow & C'_n & \xrightarrow{\iota_n} & C_n & \xrightarrow{\rho_n} & C''_n \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow d'_n & & \downarrow d_n & & \downarrow d''_n \\
 0 & \longrightarrow & C'_{n-1} & \xrightarrow{\iota_{n-1}} & C_{n-1} & \xrightarrow{\rho_{n-1}} & C''_{n-1} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow
 \end{array}$$

Tomemos $z \in Z_n(C''_\bullet) \subseteq C''_n$ como ρ_n es sobreyectiva, entonces existe $c \in C_n$ tal que $\rho_n(c) = z$. Aplicando el diferencial y por la conmutatividad del diagrama tenemos

$$\begin{aligned}\rho_{n-1}d_n c &= d''_n \rho_n c \\ &= d''_n z \\ &= 0\end{aligned}$$

por lo tanto, $d_n c \in \text{Ker } \rho_{n-1} = \text{Im } \iota_{n-1}$; así existe $c' \in C'_{n-1}$ tal que

$$\iota_{n-1}c' = d_n c$$

y c' es único ya que ι_{n-1} es inyectiva.

Así,

$$c' = \iota_{n-1}^{-1} d_n c = \iota_{n-1}^{-1} d_n \rho_n^{-1} z.$$

Ahora probemos que ∂_n está bien definida y es un morfismo. Llamemos $c \in C_n$ tal que $\rho_n c = z$ un *levantamiento*. Y demostremos que es único. Tomemos $\check{c} \in C_n$ tal que $\rho_n \check{c} = z$ así

$$\check{c} - c \in \text{Ker } \rho_n = \text{Im } \iota_n$$

por tanto, existe $u' \in C'_n$ tal que

$$\iota_n u' = \check{c} - c$$

como los cuadros conmutan, entonces

$$\begin{aligned}\iota_{n-1}d'_n u' &= d_n \iota_n u' \\ &= d_n (\check{c} - c) \\ &= d_n \check{c} - d_n c.\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\iota_{n-1}^{-1}(d_n \check{c} - d_n c) = d'_n u' \in B_{n-1}(C'_\bullet) = \text{Im } d_n$$

entonces tomando el módulo en homología concluimos que determinan la misma clase y, por tanto, está bien definida. Así ∂ no depende del levantamiento.

Ahora, tomemos

$$\begin{aligned}Z_n(C''_\bullet) &\rightarrow C'_{n-1}/B_{n-1}(C'_\bullet) \\ z''_n &\mapsto [c'_{n-1}]\end{aligned}$$

que está bien definida por lo anterior. Más aún, sean $z'', z \in Z_n(C''_\bullet)$ tales que

$$\rho_n c' = z''$$

$$\rho_n c_1 = z$$

nos fijamos en

$$\begin{aligned}\rho_n c' + \rho_n c_1 &= z'' + z \\ \rho_n(c' + c_1) &= z'' + z\end{aligned}$$

y como el levamiento es único, entonces

$$z + z'' \mapsto [c' + c_1] = [c'] + [c_1].$$

Ahora, mostremos de $\iota_{n-1}c' = d_n c'$ que c' es un ciclo único. Así,

$$d_{n-1}\iota_{n-1}c' = \iota_{n-2}d'_{n-1}c'$$

por un lado tenemos que $d_{n-1}\iota_{n-1}c' = 0$, por tanto, $d'_{n-1}c' = 0$, ya que ι_{n-2} es inyectiva. Por tanto c' es un ciclo y

$$B''_n \subseteq Z''_n \rightarrow Z'_{n-1}/B'_{n-1}$$

ahora tomemos $z'' = d_{n+1}c'' \in B''_n$ tal que $c'' \in C''_{n+1}$ y $\rho_{n+1}u = c''$ con $u \in C_{n+1}$ de donde

$$\begin{aligned}\rho_n d_{n+1}u &= d''_{n+1}\rho_{n+1}u \\ &= d''_{n+1}c'' \\ &= z''\end{aligned}$$

como $\partial(z'')$ no depende del levantamiento elegimos $d_{n+1}u$ tal que

$$\rho_n d_{n+1}u = z'' \in B_n(C'')$$

entonces

$$\begin{aligned}\partial[z] &= [\iota_{n-1}\underline{d_n d_{n+1}u}] \\ &= [0],\end{aligned}$$

es decir, tenemos un paso al cociente

$$\begin{array}{ccc} Z''_n & \longrightarrow & H_{n-1}(C_\bullet) \\ \downarrow & & \nearrow \partial \\ Z''_n/B''_n = H_n(C'') & & \end{array}$$

□

Definición 9. La familia $(\partial_n : H_n(C'') \rightarrow H_{n-1}(C'))$ lleva por nombre **morfismo de conexión**.

Observación 1. La caza de elementos a través de un diagrama tiene la desventaja de que luego hay que revisar si las asignaciones obtenidas son morfismos bien definidos. A continuación, damos un ejemplo de una demostración del resultado anterior sin cazar elementos. En lugar de esto, cazamos propiedades universales, lo que nos garantiza que siempre tratamos con morfismos.

Demostración con propiedades universales. Consideremos la preimagen $I_n = \rho_n^{-1}(Z_n'')$. Como las inclusiones $I_n \rightarrow C_n$ y $Z_n'' \rightarrow C_n''$ son monomorfismos, tenemos que $\text{Ker}(I_n \rightarrow Z_n'') = \text{Ker}(C_n \rightarrow C_n'') = C_n'$ con inclusión dada por la restricción de $C_n' \xrightarrow{\iota_n} C_n$. Además, como $C_n \xrightarrow{\rho_n} C_n''$ es epi, entonces $I_n \rightarrow Z_n''$ también lo es. Por lo tanto, tenemos un diagrama con renglones exactos

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & C_n' & \longrightarrow & I_n & \longrightarrow & Z_n'' & \longrightarrow & 0 \\
& & \parallel & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & C_n' & \xrightarrow{\iota_n} & C_n & \xrightarrow{\rho_n} & C_n'' & \longrightarrow & 0 \\
& & \downarrow d_n' & & \downarrow d_n & & \downarrow d_n'' & & \\
0 & \longrightarrow & C_{n-1}' & \xrightarrow{\iota_{n-1}} & C_{n-1} & \xrightarrow{\rho_{n-1}} & C_{n-1}'' & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

aunque solo la tercera columna es exacta, por lo cual la conmutatividad del diagrama nos dice que el morfismo

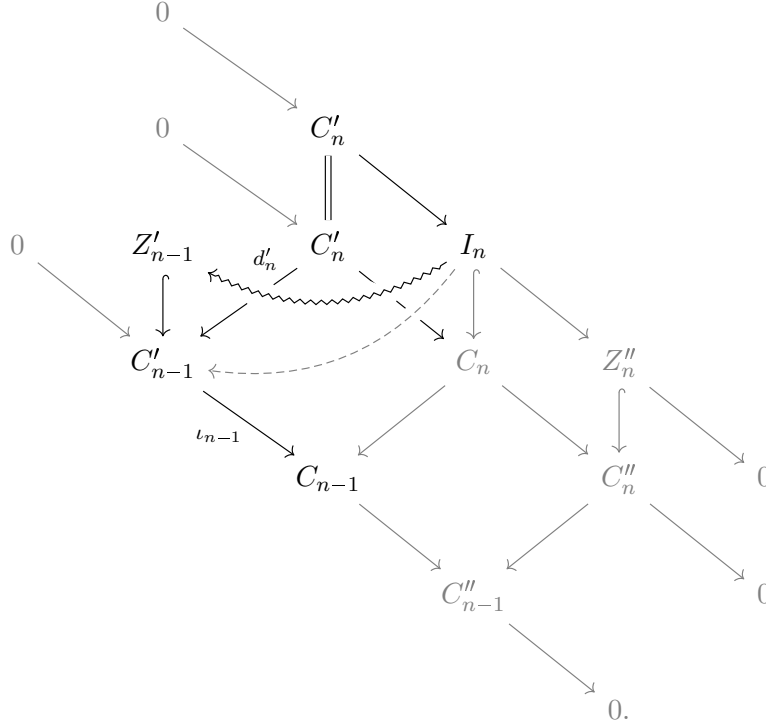
$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & C_n' & \longrightarrow & I_n & \longrightarrow & Z_n'' & \longrightarrow & 0 \\
& & \parallel & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & C_n' & \longrightarrow & C_n & \longrightarrow & C_n'' & \longrightarrow & 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow d_n & & \downarrow d_n'' & & \\
0 & \longrightarrow & C_{n-1}' & \longrightarrow & C_{n-1} & \xrightarrow{\rho_{n-1}} & C_{n-1}'' & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

es cero, así que $C_{n-1} \leftarrow C_n \leftarrow I_n$ se factoriza de manera única a través de ι_{n-1} (por la flecha intermitente en el siguiente diagrama). De nuevo por conmutatividad, el morfismo

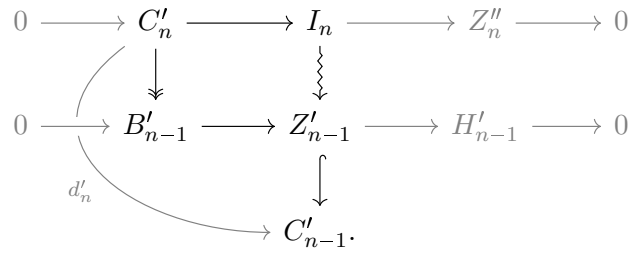
$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & C_n' & \longrightarrow & I_n & \longrightarrow & Z_n'' & \longrightarrow & 0 \\
& & \parallel & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & C_n' & \longrightarrow & C_n & \longrightarrow & C_n'' & \longrightarrow & 0 \\
& & \downarrow & \swarrow & \downarrow d_n & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & C_{n-1}' & \longrightarrow & C_{n-1} & \longrightarrow & C_{n-1}'' & \longrightarrow & 0 \\
& & \downarrow d_{n-1}' & & \downarrow d_{n-1} & & & & \\
0 & \longrightarrow & C_{n-2}' & \xrightarrow{\iota_{n-2}} & C_{n-2} & & & &
\end{array}$$

es cero. Como ι_{n-2} es mono, esto implica que $C_{n-2}' \xleftarrow{d_{n-1}'} C_{n-1}' \leftarrow I_n$ es cero. Luego, $C_{n-1}' \leftarrow I_n$ se factoriza de manera única a través de $Z_{n-1}' = \text{Ker}(d_{n-1}')$. Así, tenemos el siguiente diagrama

conmutativo con diagonales exactas. Por conmutatividad, los caminos resaltados son iguales:



Cancelando el mono ι_{n-1} , vemos que la composición $C'_n \rightarrow I_n \rightsquigarrow Z'_{n-1}$ es $C'_n \xrightarrow{d'_n} C'_{n-1}$. Así, factorizando d'_n a través de B'_{n-1} y Z'_{n-1} , vemos que los dos caminos marcados en el siguiente diagrama son iguales.



Cancelando el mono $Z'_{n-1} \hookrightarrow C'_{n-1}$, obtenemos la conmutatividad del cuadrado y, como los renglones son exactos, el diagrama se puede completar de manera única con un morfismo $Z''_n \rightarrow H'_{n-1}$. Para obtener el morfismo deseado $H''_n \rightarrow H'_{n-1}$, basta ver que el morfismo recién obtenido $Z''_n \rightarrow H'_{n-1}$ anula a B''_n y aplicar un paso al cociente $H''_n = Z''_n/B''_n$. Para esto, consideremos el grado $n+1$. Factorizando el diferencial $d''_{n+1} : C''_{n+1} \rightarrow C''_n$ como $C''_{n+1} \rightarrow B''_n \rightarrow Z''_n \rightarrow C''_n$, tenemos el siguiente

$$\begin{array}{ccccc}
C_{n+1} & \xrightarrow{\rho_{n+1}} & C''_{n+1} & & \\
\downarrow d_{n+1} & & \downarrow & \nearrow & \\
I_n & \xrightarrow{\quad} & Z''_n & \xleftarrow{\quad} & B''_n \\
\downarrow & \lrcorner & \downarrow & & \\
C_n & \xrightarrow{\rho_n} & C''_n & &
\end{array}$$

es cero. Cancelando los monos $Z'_{n-1} \hookrightarrow C'_{n-1} \hookrightarrow C_{n-1}$, se sigue que $(Z'_{n-1} \rightsquigarrow I_n \leftarrow C_{n+1}) = 0$.

Luego, por conmutatividad, la flecha

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & C_{n+1} & \longrightarrow & C''_{n+1} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & B''_n & & \\
 & & & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & C'_n & \longrightarrow & I_n & \longrightarrow & Z''_n \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & B'_{n-1} & \longrightarrow & Z'_{n-1} & \longrightarrow & H'_{n-1} \longrightarrow 0
 \end{array}$$

es cero. Cancelando los epis $C_{n+1} \rightarrow C''_{n+1} \rightarrow B''_n$ se sigue que $(B''_n \rightarrow Z''_n \rightarrow H'_{n-1}) = 0$, que es lo que queríamos. Por lo tanto, la flecha $Z''_n \rightarrow H'_{n-1}$ pasa al cociente H''_n :

$$\begin{array}{ccc}
 B''_n & & \\
 \downarrow & & \\
 Z''_n & \longrightarrow & H'_{n-1} \\
 \downarrow & \nearrow \partial_n & \\
 H''_n & &
 \end{array}$$

y esta es la flecha buscada.

También de esta descripción se puede observar que ∂_n se calcula como $[z''_n] \mapsto [\iota_{n-1}^{-1} d_n \rho_n^{-1} z''_n]$ \square

Ahora veremos que el morfismo de conexión, en efecto, conecta las sucesiones dadas por cada funtor H_n para formar una sucesión exacta larga.

Teorema 4. *Si*

$$0 \longrightarrow C'_\bullet \xrightarrow{\iota_\bullet} C_\bullet \xrightarrow{\rho_\bullet} C''_\bullet \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta en $\text{Com}(R)$, entonces las sucesiones $H_n(C'_\bullet) \rightarrow H_n(C_\bullet) \rightarrow H_n(C''_\bullet)$ junto con los morfismos de conexión $\partial_n : H_n(C''_\bullet) \rightarrow H_{n-1}(C'_\bullet)$ forman una sucesión exacta larga

en $R\text{-Mód}$ (o μ)

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & \cdots & \longrightarrow & H_{n+2}(C''_{\bullet}) \\
 & & & & & \swarrow & \\
 H_{n+1}(C'_{\bullet}) & \longrightarrow & H_{n+1}(C_{\bullet}) & \longrightarrow & H_{n+1}(C''_{\bullet}) & & \\
 & & & & \swarrow & & \\
 H_n(C'_{\bullet}) & \longrightarrow & H_n(C_{\bullet}) & \longrightarrow & H_n(C''_{\bullet}) & & \\
 & & & & \swarrow & & \\
 H_{n-1}(C'_{\bullet}) & \longrightarrow & H_{n-1}(C_{\bullet}) & \longrightarrow & H_{n-1}(C''_{\bullet}) & & \\
 & & & & \swarrow & & \\
 H_{n-2}(C'_{\bullet}) & \longrightarrow & \cdots & & & &
 \end{array}$$

Demostración. Probemos la exactitud de la sucesión en cada paso. Primero veamos que $\text{Im } \iota_* = \text{Ker } \rho_*$. Sabemos que

$$\iota_* \rho_* = (\iota \rho)_* = 0,$$

por lo que

$$\text{Im } \iota_* \subseteq \text{Ker } \rho_*.$$

Para probar la otra contención, notemos que si $\rho_*[z] = [\rho_n z] = 0$ entonces

$$\rho_n z = d''_{n+1} c'' \quad c'' \in C''_{n+1} \quad (1.1)$$

y así, por sobreyectividad de ρ , existe $c \in C_{n+1}$ tal que

$$\rho_{n+1} c = c'',$$

de (1.1) y de la conmutatividad del diagrama tenemos que

$$\rho_n z = d_{n+1} \rho_{n+1} c = \rho_n d_{n+1} c$$

entonces

$$\rho_n(z - d_{n+1} c) = 0$$

por lo tanto,

$$z - d_{n+1} c = 0 \in \text{Ker } \rho_n = \text{Im } \iota_n.$$

Por exactitud existe $c' \in C'_n$ con $\iota_n c' = z - d_{n+1} c$. Como c' es un ciclo para

$$\begin{aligned}
 d_n \iota_n c' &= \iota_{n-1} d'_n c' = 0 \\
 d_n(z - d_{n+1} c) &= d_n z - d_n d_{n+1} c \\
 &= d_n z
 \end{aligned}$$

Ya que z es un ciclo y ι es inyectivo, entonces

$$\iota_{n-1}d_n c' = 0.$$

Por lo tanto, $d'_n c' = 0$ y c' es un n -ciclo. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \iota_*[c'] &= [\iota_n c'] \\ &= [z - d_{n+1}c] \\ &= [z] - [d_{n+1}c] \\ &= [z] \end{aligned}$$

Por lo tanto, $[z] \in \text{Im} \iota_*$.

Veamos ahora que $\text{Im} \rho_* = \text{Ker } \partial$. Sea $\rho_*[c] = [\rho_n c] \in \text{Im} \rho_*$ entonces

$$\partial \rho_*[c] = [c'],$$

donde $\iota_* c' = d_n \rho_n^{-1} \rho_n c$. Ya que se ha demostrado que esta fórmula no depende del levantamiento, entonces podemos elegir a $\rho_n^{-1} \rho_n c = c$ y así $d_n c = 0$ ya que c es un ciclo, entonces

$$\iota_n c' = d_n c = 0$$

por lo tanto, $c' = 0$ y $\partial[\rho_n c] = 0$. Luego, $\rho_*[c] \in \text{Ker } \partial$

Tomemos $\partial[z''] = [0]$ con el levantamiento correspondiente

$$z' = [\iota^{-1} d_n \rho_n^{-1} z''] \in B'_n(C'_\bullet)$$

entonces

$$z' = d'_n c' \quad c' \in C'_n.$$

Pero

$$\iota z' = \iota d'_n c' = d_n \iota c' \tag{1.2}$$

y por otro lado,

$$\iota z' = \iota \iota^{-1} d_n \rho_n^{-1} z'' = d_n \rho_n^{-1} z''$$

así que sustituyendo en (1.2) tenemos

$$\begin{aligned} d_n \rho_n^{-1} z'' &= d_n \iota c' \\ d_n(\rho_n^{-1} z'' - \iota c') &= 0 \end{aligned}$$

y

$$\iota z' = \iota d'_n c' = d_n \iota c' = d_n \rho_n^{-1} z''$$

por lo tanto, $\iota c' - \rho_n^{-1} z''$ es un ciclo y por exactitud de la sucesión original

$$\rho_*[\rho_n^{-1} z'' - \iota c'] = \rho_*[\rho_n^{-1} z''] - \rho_*[\iota c'] = [z''].$$

Finalmente, probemos $\text{Im } \partial = \text{Ker } \iota_*$. Para ver que $\text{Im } \partial \subseteq \text{Ker } \iota_*$, tenemos que

$$\iota_* \partial[z''] = [\iota_{n+1} z']$$

pero $\iota_n z' = d_{n+1} \rho_n^{-1} z'' \in B_n(C_\bullet)$; por lo tanto, $\iota_* \partial[z''] = 0$.

Para la otra contención, si $\iota_*[z'] = 0 = [\iota_n z'']$, entonces $\iota_n z' = d_{n+1} c$ para algún $c \in d_{n+1}$. Ya que es una cadena,

$$\begin{aligned} d_{n+1} \rho_{n+1} c &= \rho_n d_{n+1} c \\ &= \rho_n \iota_n z'' \\ &= 0, \end{aligned}$$

por exactitud. Por lo tanto, $\rho_{n+1} c$ es un ciclo. Pero

$$\begin{aligned} \partial[\rho_* c] &= [\iota^{-1} d_{n+1} \rho_n \rho_n^{-1} c] \\ &= [\iota d_n c] \\ &= [\iota_n^{-1} \iota_n z'] \\ &= [z']. \end{aligned}$$

Lo que demuestra lo deseado. □

Lo anterior se suele expresar diciendo que el siguiente triángulo es exacto:

$$\begin{array}{ccc} H_\bullet(C'_\bullet) & \xrightarrow{\iota_*} & H_\bullet(C_\bullet) \\ & \searrow \partial_* \quad \swarrow \rho_* & \\ & H_\bullet(C''_\bullet) & \end{array}$$

Esto completa la construcción que, a cada sucesión exacta corta en $\text{Com}(\mathcal{A})$, le asigna una sucesión exacta en \mathcal{A} . Antes de mostrar que esta asignación es funtorial, veremos dos resultados que se obtienen inmediatamente.

Corolario 5 (Lema de la serpiente). *Dado el siguiente diagrama en $R\text{-Mód}$*

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A'' \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow h \\ 0 & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & B & \longrightarrow & B'' \longrightarrow 0 \end{array}$$

entonces existe una sucesión exacta en $R\text{-Mód}$

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Ker } f & \longrightarrow & \text{Ker } g & \longrightarrow & \text{Ker } h \\ & & & & & \swarrow & \\ & & \text{Coker } f & \longrightarrow & \text{Coker } g & \longrightarrow & \text{Coker } h \longrightarrow 0 \end{array}$$

Demostración. Recordemos que f, g y h tienen asociados sus complejos correspondientes:

$$\begin{aligned}\Sigma^1 f : \cdots \rightarrow 0 \rightarrow A' \xrightarrow{f} B' \rightarrow 0 \rightarrow \cdots \\ \Sigma^1 g : \cdots \rightarrow 0 \rightarrow A \xrightarrow{g} B \rightarrow 0 \rightarrow \cdots \\ \Sigma^1 h : \cdots \rightarrow 0 \rightarrow A'' \xrightarrow{h} B'' \rightarrow 0 \rightarrow \cdots .\end{aligned}$$

Entonces notemos que el diagrama con renglones exactos

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A'' \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow h \\ 0 & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & B & \longrightarrow & B'' \longrightarrow 0 \end{array}$$

es una sucesión exacta corta entre estos complejos:

$$0 \rightarrow \Sigma^1 f \rightarrow \Sigma^1 g \rightarrow \Sigma^1 h \rightarrow 0.$$

Por lo tanto, el teorema anterior nos da una sucesión exacta larga en homología:

$$\begin{array}{ccccccc} & & \cdots & \longrightarrow & H_2(\Sigma^1 h) & & \\ & & & \swarrow & & & \\ H_1(\Sigma^1 f) & \longleftarrow & H_1(\Sigma^1 g) & \longrightarrow & H_1(\Sigma^1 h) & & \\ & & & \swarrow & & & \\ H_0(\Sigma^1 f) & \longleftarrow & H_0(\Sigma^1 g) & \longrightarrow & H_0(\Sigma^1 h) & & \\ & & & \swarrow & & & \\ H_{-1}(\Sigma^1 f) & \longleftarrow & \cdots & , & & & \end{array}$$

es decir (ver el ejemplo 4)

$$\begin{array}{ccccccc} & & \cdots & \longrightarrow & 0 & & \\ & & & \swarrow & & & \\ \text{Ker } f & \longleftarrow & \text{Ker } g & \longrightarrow & \text{Ker } h & & \\ & & & \swarrow & & & \\ \text{Coker } f & \longleftarrow & \text{Coker } g & \longrightarrow & \text{Coker } h & & \\ & & & \swarrow & & & \\ 0 & \longleftarrow & \cdots & , & & & \end{array}$$

que es la sucesión deseada. □

Podemos pensar en las sucesiones exactas cortas en \mathcal{B} como objetos de una categoría, donde los morfismos son diagramas

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A'' \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & B & \longrightarrow & B'' \longrightarrow 0. \end{array}$$

En otras palabras, ya que toda sucesión exacta corta es un complejo, la categoría $\text{SEC}(\mathcal{B})$ de sucesiones exactas cortas en \mathcal{B} es una subcategoría plena de $\text{Com}(\mathcal{B})$. Del mismo modo, podemos pensar en las sucesiones exactas (no necesariamente cortas) como otra subcategoría $\text{SE}(\mathcal{B})$ de $\text{Com}(\mathcal{B})$. Así, tenemos inclusiones $\text{SEC}(\mathcal{B}) \hookrightarrow \text{SE}(\mathcal{B}) \hookrightarrow \text{Com}(\mathcal{B})$.

Hasta ahora, dada una sucesión exacta corta en $\text{Com}(\mathcal{A})$, los funtores H_n y los morfismos de conexión nos dan una sucesión exacta larga en \mathcal{A} . Ahora veremos que esta asignación se puede extender a un funtor $\text{SEC}(\text{Com}\mathcal{A}) \rightarrow \text{SE}(\mathcal{A})$.

Teorema 6 (Naturalidad del morfismo de conexión. Funtorialidad de la sucesión exacta larga). *Dado un diagrama en $\text{Com}(R)$*

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A'_\bullet & \xrightarrow{i_\bullet} & A_\bullet & \xrightarrow{p_\bullet} & A''_\bullet \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow f_\bullet & & \downarrow g_\bullet & & \downarrow h_\bullet \\ 0 & \longrightarrow & B'_\bullet & \xrightarrow{j_\bullet} & B_\bullet & \xrightarrow{q_\bullet} & B''_\bullet \longrightarrow 0 \end{array}$$

con renglones exactos, entonces el cuadrado en R -Mód

$$\begin{array}{ccc} H_n(A''_\bullet) & \xrightarrow{\partial_n} & H_{n-1}(A'_\bullet) \\ \downarrow h_* & & \downarrow f_* \\ H_n(B''_\bullet) & \xrightarrow{\partial'_n} & H_{n-1}(B'_\bullet). \end{array}$$

es conmutativo. Esto significa que los morfismos de conexión ∂_n dan una transformación natural entre los funtores $\text{SEC}(\text{Com}(\mathcal{A})) \rightarrow \mathcal{A}$ que mandan una sucesión exacta corta de complejos $0 \rightarrow A'_\bullet \rightarrow A_\bullet \rightarrow A''_\bullet \rightarrow 0$ a $H_n(A''_\bullet)$ y a $H_{n-1}(A'_\bullet)$.

Por lo tanto, el diagrama entre las sucesiones exactas largas en homología

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & H_n(A'_\bullet) & \xrightarrow{i_*} & H_n(A_\bullet) & \xrightarrow{p_*} & H_n(A''_\bullet) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A'_\bullet) \longrightarrow \cdots \\ & & \downarrow f_* & & \downarrow g_* & & \downarrow h_* \\ \cdots & \longrightarrow & H_n(B'_\bullet) & \xrightarrow{j_*} & H_n(B_\bullet) & \xrightarrow{q_*} & H_n(B''_\bullet) \xrightarrow{\partial'} H_{n-1}(B'_\bullet) \longrightarrow \cdots \end{array}$$

es conmutativo, ya que el cuadrado izquierdo y el central conmutan por la funtorialidad de H_n . Esto significa que la construcción de la sucesión exacta larga en R -Mód a partir de una sucesión exacta corta en $\text{Com}(R)$ es funtorial.

Demostración. Consideremos el diagrama en grados n y $n-1$:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 0 & \longrightarrow & A'_n & \xrightarrow{i_n} & A_n & \xrightarrow{p_n} & A''_n & \longrightarrow & 0 \\
 & & \swarrow d'_n & & \swarrow d_n & & \swarrow d''_n & & \\
 0 & \longrightarrow & A'_{n-1} & \xrightarrow{i_{n-1}} & A_{n-1} & \xrightarrow{p_{n-1}} & A''_{n-1} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow f_{n-1} & & \downarrow f_n & & \downarrow g_n & & \\
 0 & \longrightarrow & B'_n & \xrightarrow{j_n} & B_n & \xrightarrow{q_n} & B''_n & \longrightarrow & 0 \\
 & & \swarrow \delta'_n & & \swarrow \delta_n & & \swarrow \delta''_n & & \\
 0 & \longrightarrow & B'_{n-1} & \xrightarrow{j_{n-1}} & B_{n-1} & \xrightarrow{q_{n-1}} & B''_{n-1} & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

Dado $[z''] \in H_n(A''_n)$ (donde $z'' \in Z_n(A''_n) \subseteq A''_n$), debemos mostrar que $f_*\partial[z''] = \partial'h_*[z'']$.

Por un lado, recordemos que $\partial[z'']$ se define como $[i_{n-1}^{-1}d_na]$, donde $a \in A_n$ cumple $p_na = z''$. Así, $f_*\partial[z''] = f_*[i_{n-1}^{-1}d_na] = [f_{n-1}i_{n-1}^{-1}d_na]$.

Similarmente, $\partial'h_*[z''] = \partial'[h_nz'']$ se define como $[j_{n-1}^{-1}\delta_nb]$, donde $b \in B_n$ cumple $q_nb = h_nz''$. Notando que $q_ng_na = h_np_na = h_nz''$, podemos tomar $b = g_na$. La situación se muestra en el siguiente diagrama.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & a & \xrightarrow{\quad} & z'' \\
 & & \swarrow & & \downarrow \\
 i_{n-1}^{-1}d_na & \xrightarrow{\quad} & d_na & & g_na \\
 \downarrow & & \downarrow & \swarrow & \downarrow \\
 j_{n-1}^{-1}\delta_ng_na & \xrightarrow{\quad} & \delta_ng_na & & h_nz''
 \end{array}$$

donde $j_{n-1}^{-1}\delta_ng_na = f_{n-1}i_{n-1}^{-1}d_na$ porque $j_{n-1}f_{n-1} = g_{n-1}i_{n-1}$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}
 f_*\partial[z''] &= [f_{n-1}i_{n-1}^{-1}d_na] \\
 &= [j_{n-1}^{-1}\delta_ng_na] \\
 &= \partial'h_*[z''],
 \end{aligned}$$

finalizando la prueba. □

1.4. Homotopía entre morfismos de complejos

Definición 10. Sean los complejos C_\bullet y C'_\bullet , fijemos un entero $p \in \mathbb{Z}$ y sea una familia de morfismos

$$(C_n \xrightarrow{s_n} C'_{n+p})_{n \in \mathbb{Z}}$$

entonces decimos que $C_{\bullet} \xrightarrow{s_{\bullet}} C'_{\bullet}$ es un morfismo de grado p .

Definición 11. Sean dos morfismos de complejos $C_{\bullet} \xrightarrow[g_{\bullet}]{f_{\bullet}} C'_{\bullet}$, decimos que son homotópicos si existe un morfismo $C_{\bullet} \xrightarrow{s_{\bullet}} C'_{\bullet}$ de grado 1, tal que

$$f_n - g_n = d'_{n+1}s_n + s_{n-1}d_n \text{ para todo } n \in \mathbb{Z}$$

y escribimos $f_{\bullet} \sim g_{\bullet}$.

Veamos un diagrama que ilustra de mejor manera los morfismos involucrados en la definición anterior.

$$\begin{array}{ccccccccc} \dots & \xrightarrow{\dots} & C_{n+1} & \xrightarrow{d_{n+1}} & C_n & \xrightarrow{d_n} & C_{n-1} & \xrightarrow{\dots} & \dots \\ & \searrow & \downarrow & \swarrow & \downarrow & \swarrow & \downarrow & \searrow & \\ \dots & \xrightarrow{\dots} & C'_{n+1} & \xrightarrow{d'_{n+1}} & C'_n & \xrightarrow{d'_n} & C'_{n-1} & \xrightarrow{\dots} & \dots \end{array}$$

(Note: The diagram also includes diagonal arrows labeled s_n, g_n, f_n, s_{n-1} connecting the two rows of complexes.)

y recordemos que en general el diagrama no es conmutativo, solo se pide que satisfaga

$$f_n - g_n = d'_{n+1}s_n + s_{n-1}d_n$$

Definición 12. Decimos que un morfismo de complejos $C_{\bullet} \xrightarrow{f_{\bullet}} C'_{\bullet}$ es nulhomotópico si

$$f_{\bullet} \sim 0.$$

Teorema 7. Sean $C_{\bullet} \xrightarrow[g_{\bullet}]{f_{\bullet}} C'_{\bullet}$ dos morfismos de complejos. Si $f_{\bullet} \sim g_{\bullet}$, entonces los morfismos inducidos en homología son iguales, e.i.

$$f_* = g_* : H_{\bullet}(C_{\bullet}) \rightarrow H_{\bullet}(C'_{\bullet})$$

Demostración. Por la funtorialidad de la homología, tenemos los morfismos $f_*, g_* : H_n(C_{\bullet}) \rightarrow H_n(C'_{\bullet})$ para cada $n \in \mathbb{Z}$, entonces sea $[z] \in H_n(C_{\bullet})$, entonces $z \in Z_n(C_{\bullet}) \subseteq C_n$. Luego, como tenemos que $f_{\bullet} \sim g_{\bullet}$, existe un morfismo $C_{\bullet} \xrightarrow{s_{\bullet}} C'_{\bullet}$ de grado 1, tal que $f_n - g_n = d'_{n+1}s_n + s_{n-1}d_n$, entonces tenemos que

$$\begin{aligned} f_n z - g_n z &= d'_{n+1}s_n z + s_{n-1}d_n z \\ &= d'_{n+1}s_n z \in B_n(C'_{\bullet}) \end{aligned}$$

lo que significa que $f_*[z] - g_*[z] = [f_n z] - [g_n z] = [f_n z - g_n z] = [0]$ y por lo tanto $f_* = g_*$ \square

Definición 13. Decimos que un complejo C_{\bullet} es contraíble si el morfismo identidad es homotópico al morfismo cero, e.i.

$$1_{C_{\bullet}} \sim 0$$

Aunque nos gustaría que fuera cierto, el teorema 6 no es válido salvo homotopía, como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5. Sea k un campo y consideremos la sucesión exacta corta de complejos

$$0 \longrightarrow A_{\bullet} \longrightarrow B_{\bullet} \longrightarrow C_{\bullet} \longrightarrow 0$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \text{grado} & & & & & & \\
 3 & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 \\
 & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 2 & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 \\
 & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 1 & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & k & \xrightarrow{1} & k & \longrightarrow & 0 \\
 & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & & 1 & & & & \\
 0 & 0 & \longrightarrow & k & \xrightarrow{1} & k & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 \\
 & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 -1 & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 \\
 & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 -2 & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 \\
 & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & \vdots & & \vdots & & \vdots & &
 \end{array}$$

Entonces el primer cuadrado del diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & A_{\bullet} & \longrightarrow & B_{\bullet} & \longrightarrow & C_{\bullet} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow 1 & & \downarrow 1 & \curvearrowright & \downarrow 0 & & \\
 0 & \longrightarrow & A_{\bullet} & \longrightarrow & B_{\bullet} & \longrightarrow & C_{\bullet} & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

es conmutativo, pero el segundo solo es conmutativo salvo homotopía. Sin embargo, el diagrama en homología

$$\begin{array}{ccc}
 H_1(C_{\bullet}) & \xrightarrow{\partial} & H_0(A_{\bullet}) \\
 0_* \downarrow & & \downarrow 1_* \\
 H_1(C_{\bullet}) & \xrightarrow{\partial'} & H_0(A_{\bullet})
 \end{array}
 \quad \text{es} \quad
 \begin{array}{ccc}
 k & \xrightarrow{1} & k \\
 0 \downarrow & & \downarrow 1 \\
 k & \xrightarrow{1} & k,
 \end{array}$$

el cual no conmuta.

Capítulo 2

Funtores derivados

SES 4

Teorema 8 (Lema de comparación). *Sea \mathcal{A} una categoría abeliana, dado un morfismo $A \xrightarrow{f} A'$, consideremos el siguiente diagrama*

$$\begin{array}{ccccccccc} P_A : \cdots & \longrightarrow & P_2 & \xrightarrow{d_2} & P_1 & \xrightarrow{d_1} & P_0 & \xrightarrow{\varepsilon} & A & \longrightarrow & 0 \\ & & & & & & f_0 \downarrow & & f \downarrow & & \\ P_{A'} : \cdots & \longrightarrow & P'_2 & \xrightarrow{d'_2} & P'_1 & \xrightarrow{d'_1} & P'_0 & \xrightarrow{\varepsilon'} & A' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Si cada P_n es proyectivo y $P_{A'}$ es un complejo exacto, entonces existe un morfismo de complejos $\tilde{f} : P_A \rightarrow P_{A'}$ único salvo homotopía, tal que

Y el dual.

2.1. Funtores derivados izquierdos

Sea $T : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$ un funtor covariante aditivo entre categorías abelianas donde \mathcal{A} tiene suficientes proyectivos. Construiremos sus *funtores derivados izquierdos* $L_n T : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$.

Sea $A \in \mathcal{A}$, fijamos una resolución proyectiva;

$$P_A : \longrightarrow P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} A \longrightarrow 0$$

recordemos que las resoluciones viven en la misma clase de homotopía por el lema de comparación. De aquí se deriva el complejo

$$TP_A : \longrightarrow TP_2 \longrightarrow TP_1 \longrightarrow TP_0 \longrightarrow TA \longrightarrow 0$$

tomamos la homología de TP_A y así

$$(L_n T)A = H_n(TP_A).$$

Sea $f : A \rightarrow A'$ un morfismo y tomemos

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots & \longrightarrow & P_2 & \longrightarrow & P_1 & \longrightarrow & P_0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow f & & \\ \cdots & \longrightarrow & TP_2 & \longrightarrow & TP_1 & \longrightarrow & TP_0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

entonces por el Lema de Comparación, tenemos un morfismo $\tilde{f} : P_A \rightarrow P'_A$ sobre f . Por lo tanto, definimos

$$(L_n T)f : (L_n T)A \rightarrow (L_n T)A'$$

mediante

$$(L_n T)f = H_n(Tf) = (T\tilde{f})_{n*},$$

para cada n . Es decir,

$$\begin{array}{ccc} (L_n T)f : H_n(TP_A) & \rightarrow & H_n(TP'_A) \\ z + \text{Img } d_{n+1} & \mapsto & (T\tilde{f})(z) + \text{Img } Td'_{n+1} \end{array}$$

que es,

$$(L_n T)(f)[z] = [T\tilde{f}_n z]$$

y así tenemos una familia de funtores $(L_n T : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C})_{n \in \mathbb{Z}}$.

Veamos ahora que no depende de la homotopía: Para ello tomemos $h : P_A \rightarrow P'_A$ un morfismo sobre f entonces $h \cong f$ por el Lema de Comparación, como se muestra en el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots & \longrightarrow & P_2 & \longrightarrow & P_1 & \longrightarrow & P_0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & 0 \\ & & \searrow h_2 & & \searrow h_1 & & \searrow f_1 s_0 & & \searrow f_0 s_1 & & \searrow h & & \searrow f \\ \cdots & \longrightarrow & P'_2 & \longrightarrow & P'_1 & \longrightarrow & P'_0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

ya que

$$f_n - h_n = d'_{n+1} s_n + s_{n-1} d_n$$

y al aplicarle T , tenemos

$$Tf_n - Th_n = Td_{n+1} T s_n + T s_{n-1} T d_n$$

donde $\tilde{s}_n = T s_n$ para toda n , por lo tanto,

$$Th \cong T\tilde{f} \quad \text{y} \quad L_n Th = L_n T\tilde{f}.$$

Por otro lado, si $\mathcal{A} = R\text{-Mód}$, tomemos $r \in Z(R)$ un elemento en el centro de R , entonces

$$\mu_r : M \rightarrow M \quad \forall M \in R\text{-Mód}$$

es un morfismo (multiplicar por r). Un functor aditivo, $T : R\text{-Mód} \rightarrow R\text{-Mód}$ preserva multiplicación si

$$T(\mu_r) : TM \rightarrow TM$$

es también multiplicar por r .

Proposición 9. Si $T : R\text{-Mód} \rightarrow R\text{-Mód}$ es un funtor aditivo y preserva multiplicación entonces

$$L_n T : R\text{-Mód} \rightarrow R\text{-Mód}$$

también es aditivo y preserva multiplicación.

Demostración. Tomemos una resolución proyectiva en A

$$P_A = \cdots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} A \longrightarrow 0$$

así, por el Lema de Comparación μ_0 induce los morfismos μ_i que también son multiplicar por r :

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & P_2 & \longrightarrow & P_1 & \longrightarrow & P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0 \\ & & \mu_2 \downarrow & & \mu_1 \downarrow & & \mu_0 \downarrow \\ \cdots & \longrightarrow & P_2 & \longrightarrow & P_1 & \longrightarrow & P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0 \end{array}$$

Esto quiere decir que

$$\mu_r \varepsilon = \varepsilon \mu_0$$

y así $m_0(m) = r_m$ y es también multiplicar por r . Finalmente

$$M \cong P_0 / \text{Ker } \varepsilon$$

$$\tilde{\mu}_r(m) = \tilde{\mu}_0(m)$$

y como T preserva multiplicaciones entonces queda demostrado. \square

Definición 14. Los funtores $(L_n T : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C})_{n \in \mathbb{Z}}$ son llamados **funtores derivados izquierdos** de T .

Proposición 10. Sea T un funtor aditivo entonces

$$(L_n T)M = 0 \quad \forall n < 0 \forall M.$$

Demostración. Ya que los n -ésimos términos de P_A son cero, entonces $(L_n T)A = 0$ cuando n es negativo. \square

Es por esta razón que los funtores $L_n T$ son llamados funtores derivados *izquierdos*.

Definición 15. Decimos que una categoría abeliana \mathcal{A} tiene suficientes proyectivos cuando, para todo $A \in \mathcal{A}$, existe un objeto proyectivo $P \in \mathcal{A}$ junto con un epimorfismo $P \rightarrow A$.

Si una categoría abeliana \mathcal{A} tiene suficientes proyectivos, entonces podemos escoger una resolución proyectiva para cada objeto y definir el funtor derivado de cualquier funtor aditivo con dominio \mathcal{A} .

Pero ¿qué pasaría si escogiéramos resoluciones proyectivas distintas? ¿cambiarían los valores del funtor derivado? Ahora veremos que la respuesta es no: los funtores derivados son naturalmente isomorfos.

Proposición 11. *Sea \mathcal{A} una categoría abeliana con suficientes proyectivos. Supongamos que, para cada objeto A de \mathcal{C} , tenemos dos resoluciones proyectivas P_A y \tilde{P}_A .*

Entonces para cualquier funtor aditivo $T : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$, las familias de morfismos de complejos $(P_A \rightarrow \tilde{P}_A \mid A \in \mathcal{A})$ y $(\tilde{P}_A \rightarrow P_A \mid A \in \mathcal{A})$ dados por el lema de comparación inducen un isomorfismo natural entre los funtores derivados $L_n T$ y $\tilde{L}_n T$ con respecto a las familias de resoluciones proyectivas P_A y \tilde{P}_A .

Demostración. Recordemos, de la sección 2.1, que dado un funtor aditivo $T : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$, sus funtores derivados izquierdos $L_n T, \tilde{L}_n T : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ están dados en objetos como

$$L_n T(A) = H_n(TP_A) \quad \text{y} \quad \tilde{L}_n T(A) = H_n(T\tilde{P}_A).$$

y en morfismos como

$$\begin{array}{ccc} L_n T(A) = H_n(TP_A) & & \tilde{L}_n T(A) = H_n(T\tilde{P}_A) \\ \downarrow (TF)_* & & \downarrow (T\tilde{F})_* \\ L_n T(B) = H_n(TP_B) & & \tilde{L}_n T(B) = H_n(T\tilde{P}_B) \end{array}$$

donde $F : P_A \rightarrow P_B$ y $\tilde{F} : \tilde{P}_A \rightarrow \tilde{P}_B$ son los morfismos de complejos inducidos por f gracias al lema de comparación (lema 8). En particular, F y \tilde{F} están sobre f . Es decir, los diagramas

$$\begin{array}{ccc} P_A & \longrightarrow & A \\ F \downarrow & & \downarrow f \\ \tilde{P}_B & \longrightarrow & B \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \tilde{P}_A & \longrightarrow & A \\ \tilde{F} \downarrow & & \downarrow f \\ P_B & \longrightarrow & B \end{array}$$

son conmutativos.

Para ver la equivalencia $L_n T \simeq \tilde{L}_n T$, primero construiremos una transformación natural $L_n T \rightarrow \tilde{L}_n T$. Usando de nuevo el lema de comparación, para cada objeto A de \mathcal{A} tenemos un morfismo de complejos $\iota_A : P_A \rightarrow \tilde{P}_A$ sobre id_A :

$$\begin{array}{ccc} P_A & \longrightarrow & A \\ \iota_A \downarrow & & \downarrow \text{id}_A \\ \tilde{P}_A & \longrightarrow & A. \end{array}$$

Ahora, acomodando estos cuadrados en un cubo, obtenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} & & \tilde{P}_A & \xleftarrow{\iota_A} & P_A \\ & \swarrow \tilde{F} & \downarrow & \swarrow F & \downarrow \\ \tilde{P}_B & \xleftarrow{\iota_B} & P_B & & A \\ \downarrow & & \downarrow & \xleftarrow{\text{id}_A} & \downarrow \\ & \swarrow f & A & & A \\ & \downarrow & \downarrow & \swarrow f & \\ B & \xleftarrow{\text{id}_B} & B & & \end{array}$$

Nótese que la base y las caras laterales del cubo conmutan, pero la tapa del cubo no necesariamente conmuta. Sin embargo, dado que ambos morfismos de complejos $\tilde{F}\iota_A$ y $\iota_B F$ están sobre $\text{id}_A = f = \text{id}_B f$, el lema de comparación nos da una homotopía $(\tilde{F}\iota_A) \sim (\iota_B F)$. Así, la tapa del cubo “conmuta salvo homotopía”, lo cual está indicado en el diagrama de arriba con un \sim dentro del cuadrado correspondiente.

Ahora, al aplicar el funtor T , los cuadros conmutativos siguen conmutando y la tapa sigue conmutando salvo homotopía:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & T\tilde{P}_A & \xleftarrow{T\iota_A} & TP_A \\
 & \swarrow T\tilde{F} & \downarrow & \nwarrow TF & \downarrow \\
 T\tilde{P}_B & \xleftarrow{T\iota_B} & TP_B & & TP_A \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & \swarrow Tf & TA & \xleftarrow{T\text{id}_A} & TA \\
 & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\
 TB & \xleftarrow{T\text{id}_B} & TB & & TP_A
 \end{array}$$

Como morfismos homótopos inducen el mismo morfismo en homología (teorema 7), al tomar homología en la tapa obtenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 H_n(T\tilde{P}_A) & \xleftarrow{(T\iota_A)_*} & H_n(TP_A) \\
 (T\tilde{F})_* \downarrow & & \downarrow (TF)_* \\
 H_n(T\tilde{P}_B) & \xleftarrow{(T\iota_B)_*} & H_n(TP_B),
 \end{array}$$

es decir:

$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{L}_n TA & \xleftarrow{(T\iota_A)_*} & L_n TA \\
 L_n Tf \downarrow & & \downarrow L_n Tf \\
 \tilde{L}_n TB & \xleftarrow{(T\iota_B)_*} & L_n TB
 \end{array}$$

lo cual muestra que los morfismos $\tau_A = (T\iota_A)_* : L_n TA \rightarrow \tilde{L}_n TA$ son los componentes de una transformación natural $\tau : L_n T \rightarrow \tilde{L}_n T$.

Ahora veamos que τ es un isomorfismo, para lo cual basta ver que cada componente τ_A es un isomorfismo. Recordemos que obtuvimos τ_A a partir de la familia de morfismos de complejos $(\iota_A : P_A \rightarrow \tilde{P}_A \mid A \in \mathcal{A})$. Similarmente, el lema de comparación nos da otra familia de morfismos $(\kappa_A : \tilde{P}_A \rightarrow P_A \mid A \in \mathcal{A})$, donde cada κ_A está sobre la identidad $\text{id}_A : A \rightarrow A$. En diagramas:

$$\begin{array}{ccc}
 P_A & \longrightarrow & A \\
 \iota_A \downarrow & & \downarrow \text{id}_A \\
 \tilde{P}_A & \longrightarrow & A
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 \tilde{P}_A & \longrightarrow & A \\
 \kappa_A \downarrow & & \downarrow \text{id}_A \\
 P_A & \longrightarrow & A.
 \end{array}$$

Pegando estos cuadrados verticalmente, obtenemos

$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{P}_A & \longrightarrow & A \\
 \downarrow \kappa_A & & \downarrow \text{id}_A \\
 P_A & \longrightarrow & A \\
 \downarrow \iota_A & & \downarrow \text{id}_A \\
 \tilde{P}_A & \longrightarrow & A
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 P_A & \longrightarrow & A \\
 \downarrow \iota_A & & \downarrow \text{id}_A \\
 \tilde{P}_A & \longrightarrow & A \\
 \downarrow \kappa_A & & \downarrow \text{id}_A \\
 P_A & \longrightarrow & A
 \end{array}$$

Luego, el morfismo de complejos $\iota_A \kappa_A : \tilde{P}_A \rightarrow \tilde{P}_A$ está sobre id_A . Por el lema de comparación, obtenemos una homotopía $\iota_A \kappa_A \sim \text{id}_{\tilde{P}_A}$. Similarmente, como el morfismo de complejos $\kappa_A \iota_A : P_A \rightarrow P_A$ está sobre id_A , tenemos una homotopía $\kappa_A \iota_A \sim \text{id}_{P_A}$.

$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{P}_A & & P_A \\
 \downarrow \kappa_A \iota_A & \sim & \downarrow \iota_A \kappa_A \\
 \tilde{P}_A & & P_A
 \end{array}$$

Al aplicar T , los morfismos siguen siendo homótopos

$$\begin{array}{ccc}
 T\tilde{P}_A & & TP_A \\
 \downarrow T(\kappa_A \iota_A) & \sim & \downarrow T(\iota_A \kappa_A) \\
 T\tilde{P}_A & & TP_A
 \end{array}$$

Finalmente, como morfismos homótopos inducen el mismo morfismo en homología, tenemos

$$\begin{array}{ccc}
 H_n(T\tilde{P}_A) & & H_n(TP_A) \\
 \downarrow (T(\kappa_A \iota_A))_* = \text{id}_{H_n(TP_A)} & & \downarrow (T(\iota_A \kappa_A))_* = \text{id}_{H_n(T\tilde{P}_A)} \\
 H_n(T\tilde{P}_A) & & H_n(TP_A).
 \end{array}$$

Esto es:

$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{L}_n T A & & L_n T A \\
 \downarrow (T\kappa_A)_* (T\iota_A)_* = \text{id}_{\tilde{L}_n T A} & & \downarrow (T\iota_A)_* (T\kappa_A)_* = \text{id}_{L_n T A} \\
 \tilde{L}_n T A & & L_n T A.
 \end{array}$$

Luego, cada $\tau_A = (T\iota_A)_*$ es un isomorfismo, con inverso $(T\kappa_A)_*$. Se sigue que el funtor $\tau : L_n T \rightarrow \tilde{L}_n T$ es un isomorfismo natural y, de hecho, su inverso $\sigma : \tilde{L}_n T \rightarrow L_n T$ tiene componentes $\sigma_A = (T\kappa_A)_*$. \square

Corolario 12. Si $T : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ es un funtor aditivo y $L_n T$ son sus funtores derivados, entonces

$$L_n T P = 0$$

para $n \geq 1$ y cualquier proyectivo P , ya que el complejo P_\bullet con $P_0 = P$ y $P_k = 0$ para $k \neq 0$ es una resolución proyectiva de P .

Definición 16 (El funtor Tor). Si B es un R -módulo izquierdo, consideramos el funtor aditivo

$$T = - \otimes_R B : \text{Mód-}R \rightarrow \mathbb{Z}\text{-Mód}$$

y definimos

$$\text{Tor}_n^R(-, B) = L_n T.$$

De esta manera, si tomamos una resolución proyectiva (P_A, ε) de un R -módulo derecho A

$$P_A : \cdots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} 0$$

y aplicamos $- \otimes_R B$

$$P_A \otimes_R B : \cdots \longrightarrow P_2 \otimes_R B \xrightarrow{d_2 \otimes \text{id}_B} P_1 \otimes_R B \xrightarrow{d_1 \otimes \text{id}_B} P_0 \otimes_R B \xrightarrow{d_0 \otimes \text{id}_B} 0,$$

tenemos

$$\text{Tor}_n^R(A, B) = H_n(P_A \otimes B) = \frac{\text{Ker}(d_n \otimes \text{id}_B)}{\text{Img}(d_{n+1} \otimes \text{id}_B)}.$$

Observación 2. ■ Dado que tomamos un R -módulo izquierdo B , derivamos el funtor $- \otimes_R B : \text{Mód-}R \rightarrow \mathbb{Z}\text{-Mód}$ y obtuvimos los funtores

$$T\text{Tor}_n^R(-, B) : \text{Mód-}R \rightarrow \mathbb{Z}\text{-Mód}.$$

■ Si B es un bimódulo ${}_R B_S$, entonces $- \otimes_R B$ es un funtor $\text{Mód-}R \rightarrow \text{Mód-}S$. Así, sus funtores derivados son

$$\text{Tor}_n^R(-, B) : \text{Mód-}R \rightarrow \text{Mód-}S.$$

- Si comenzamos con un R -módulo derecho A , podemos derivar el funtor $A \otimes_R - : R\text{-Mód} \rightarrow \mathbb{Z}\text{-Mód}$ para obtener funtores

$$\text{tor}_n^R(A, -) : R\text{-Mód} \rightarrow \mathbb{Z}\text{-Mód}.$$

Es decir, para cada R -módulo izquierdo B , $\text{tor}_n^R(A, B)$ se calcula tomando una resolución proyectiva (R_B, ε) de B :

$$\cdots \rightarrow R_3 \xrightarrow{d_3} R_2 \xrightarrow{d_2} R_1 \xrightarrow{d_1} R_0 \xrightarrow{d_0} 0,$$

aplicando $A \otimes_R -$

$$\cdots \rightarrow A \otimes_R R_3 \xrightarrow{\text{id}_A \otimes d_3} A \otimes_R R_2 \xrightarrow{\text{id}_A \otimes d_2} A \otimes_R R_1 \xrightarrow{\text{id}_A \otimes d_1} A \otimes_R R_0 \xrightarrow{\text{id}_A \otimes d_0} 0,$$

y tomando homología

$$\begin{aligned} \text{tor}_n^R(A, B) &= H_n(A \otimes_R R_B) \\ &= \frac{\text{Ker}(\text{id}_A \otimes d_n)}{\text{Img}(\text{id}_A \otimes d_{n+1})} \end{aligned}$$

Por los resultados anteriores, los módulos $\text{Tor}_n^R(A, B)$ son independientes de la elección de resolución proyectiva de A_R , mientras que los módulos $\text{tor}_n^R(A, B)$ son independientes de la elección de resolución proyectiva de ${}_R B$. Además, $\text{Tor}_n(P, B) = 0$ y $\text{tor}(A, Q) = 0$ para cualesquiera módulos proyectivos $P_R, {}_R Q$.

Corolario 13. Sea $T : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ un funtor aditivo, y sea (P_A, ε) una resolución proyectiva de $A \in \mathcal{A}$. Tomando $K_n = \text{Ker}(P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1})$ para $n \geq 1$ y $K_0 = \text{Ker}(P_0 \xrightarrow{\varepsilon} A)$, tenemos

$$\begin{aligned} L_{n+1}TA &\simeq L_nTK_0 \\ &\simeq L_{n-1}TK_1 \\ &\simeq L_{n-2}TK_2 \\ &\vdots \\ &\simeq L_1TK_{n-1} \\ &\simeq L_0TK_n. \end{aligned}$$

En particular, si $\mathcal{A} = \text{Mód-}R$, entonces para cualquier módulo ${}_R B$ se tiene

$$\begin{aligned} \text{Tor}_{n+1}^R(A, B) &\simeq \text{Tor}_n^R(K_0, B) \\ &\simeq \text{Tor}_{n-1}^R(K_1, B) \\ &\simeq \text{Tor}_{n-2}^R(K_2, B) \\ &\vdots \\ &\simeq \text{Tor}_1^R(K_{n-1}, B) \\ &\simeq \text{Tor}_0^R(K_n, B). \end{aligned}$$

o, si $\mathcal{A} = R\text{-Mód}$, entonces para cualquier módulo B_R se tiene

$$\begin{aligned} \operatorname{tor}_{n+1}^R(B, A) &\simeq \operatorname{tor}_n^R(B, K_0) \\ &\simeq \operatorname{tor}_{n-1}^R(B, K_1) \\ &\simeq \operatorname{tor}_{n-2}^R(B, K_2) \\ &\vdots \\ &\simeq \operatorname{tor}_1^R(B, K_{n-1}) \\ &\simeq \operatorname{tor}_0^R(B, K_n). \end{aligned}$$

Demostración. Sea $r \geq 0$. Como la sucesión

$$\cdots \rightarrow P_3 \xrightarrow{d_3} P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} A \rightarrow 0$$

es exacta, entonces

$$\cdots \rightarrow P_{r+3} \xrightarrow{d_{r+3}} P_{r+2} \xrightarrow{d_{r+2}} P_{r+1} \xrightarrow{d_{r+1}} K_r \rightarrow 0$$

es exacta, ya que $\operatorname{Im}(d_{r+1}) = \operatorname{Ker}(d_r) = K_r$. Por lo tanto, reetiquetando como $Q_s = P_{r+s+1}$, $\delta_r = d_{r+s+1}$ y poniendo $\eta = d_{r+1}$, la sucesión exacta anterior

$$\cdots \rightarrow Q_2 \xrightarrow{\delta_2} Q_1 \xrightarrow{d_1} Q_0 \xrightarrow{\eta} K_n \rightarrow 0$$

nos da una resolución proyectiva (Q_\bullet, η) de K_r . Luego, para cada $s \geq 0$ tenemos

$$\begin{aligned} L_s TK_r &\simeq H_s(TQ_\bullet) \\ &= \frac{\operatorname{Ker}(\delta_s)}{\operatorname{Im}(\delta_{s+1})} \\ &= \frac{\operatorname{Ker}(d_{r+s+1})}{\operatorname{Im}(d_{r+s+2})} \\ &= H_{r+s+1}(TP_A) \\ &= L_{r+s+1}TA. \end{aligned}$$

En particular, dado $n \geq 0$, tenemos

$$\begin{aligned} L_{n+1}TA &\simeq L_n TK_0 && \text{con } s = n, r = 0 \\ &\simeq L_{n-1} TK_1 && \text{con } s = n-1, r = 1 \\ &\simeq L_{n-2} TK_2 && \text{con } s = n-2, r = 2 \\ &\vdots \\ &\simeq L_1 TK_{n-1} && \text{con } s = 1, r = n-1 \\ &\simeq L_0 TK_n && \text{con } s = 0, r = n. \end{aligned}$$

□

Lema 14. *Dado un diagrama*

$$\begin{array}{ccccccc} & & P' & & P'' & & \\ & & \downarrow f' & & \downarrow f'' & & \\ 0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{i} & A & \xrightarrow{q} & A'' \longrightarrow 0 \end{array}$$

donde las dos flechas verticales son epimorfismos, entonces existe un epimorfismo $f : P' \oplus P'' \twoheadrightarrow A$ tal que el siguiente diagrama conmuta y tiene renglones exactos.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & P' & \longrightarrow & P' \oplus P'' & \longrightarrow & P'' \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow f' & & \downarrow f & & \downarrow f'' \\ 0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{i} & A & \xrightarrow{q} & A'' \longrightarrow 0. \end{array}$$

Demostración. Sea $P = P' \oplus P''$ y consideremos los morfismos del coproducto $P' \xrightarrow{i'} P \xleftarrow{i''} P''$. Como q es epi y P'' es proyectivo, f'' se factoriza a través de q , digamos $f'' = q\sigma$. Por la propiedad del coproducto, existe un único morfismo $f : P \rightarrow A$ (explícitamente dado como $f(x, y) = i'f'x + \sigma y$) tal que el diagrama siguiente es conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccc} P' & \xrightarrow{i'} & P & \xleftarrow{i''} & P'' & & \\ \downarrow f' & \searrow & \downarrow f & \swarrow \sigma & \downarrow f'' & & \\ 0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{i} & A & \xrightarrow{q} & A'' \longrightarrow 0 \end{array}$$

Recordemos que las proyecciones $P' \xleftarrow{q'} P \xrightarrow{q''} P''$ y las inclusiones $P' \xrightarrow{i'} P \xleftarrow{i''} P''$ cumplen la ecuación $\text{id}_P = i'q' + i''q''$. De la conmutatividad del diagrama anterior, tenemos $qfi' = 0$ y $qfi'' = f''$. Luego, $0 = qfi'q'$ y $f''q'' = qfi''q''$. Sumando, tenemos

$$\begin{aligned} f''q'' &= qfi'q' + qfi''q'' \\ &= qf(i'q' + i''q'') \\ &= qf, \end{aligned}$$

por lo cual el diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & P' & \xrightarrow{i'} & P & \xrightarrow{q''} & P'' \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow f' & & \downarrow f & & \downarrow f'' \\ 0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{i} & A & \xrightarrow{q} & A'' \longrightarrow 0 \end{array}$$

es conmutativo. La exactitud del primer renglón se verifica directamente, así que, del lema de la serpiente, se sigue que ε es epi. \square

Lema 15 (Lema de la herradura). *Dada una sucesión exacta corta*

$$0 \rightarrow A' \xrightarrow{i} A \xrightarrow{q} A'' \rightarrow 0$$

y resoluciones proyectivas $(P'_{A'}, \varepsilon')$ de A' y $(P''_{A''}, \varepsilon'')$ de A'' , existe una resolución proyectiva (P_A, ε) y morfismos de complejos tales que

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & P'_{A'} & \longrightarrow & P_A & \longrightarrow & P''_{A''} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \varepsilon' & & \downarrow \varepsilon & & \downarrow \varepsilon'' \\ 0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{i} & A & \xrightarrow{q} & A'' \longrightarrow 0 \end{array}$$

es conmutativo y tiene renglones exactos.

Demostración. Por hipótesis, tenemos el diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} & & P'_0 & & P''_0 & & \\ & & \downarrow \varepsilon' & & \downarrow \varepsilon'' & & \\ 0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{i} & A & \xrightarrow{q} & A'' \longrightarrow 0. \end{array}$$

Poniendo $P_0 = P'_0 \oplus P''_0$ y aplicando el lema anterior, tenemos un epi $\varepsilon : P_0 \rightarrow A$ tal que el siguiente diagrama conmuta y tiene renglones exactos.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & P'_0 & \longrightarrow & P_0 & \longrightarrow & P''_0 \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \varepsilon' & & \downarrow \varepsilon & & \downarrow \varepsilon'' \\ 0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{i} & A & \xrightarrow{q} & A'' \longrightarrow 0. \end{array}$$

Además, $P_0 = P'_0 \oplus P''_0$ es proyectivo porque P'_0 y P''_0 lo son. Del lema de la serpiente, tenemos una sucesión exacta corta $0 \rightarrow \text{Ker } \varepsilon' \rightarrow \text{Ker } \varepsilon \rightarrow \text{Ker } \varepsilon'' \rightarrow 0$. Este es el caso $n = 0$ de un argumento por inducción.

Ahora hagamos inducción sobre $n \geq 0$. Supongamos que tenemos la sucesión central construida hasta el grado n y que, definiendo

$$K'_n = \begin{cases} \text{Ker } \varepsilon' & n = 0 \\ \text{Ker } d'_n & n \geq 1 \end{cases} \quad K_n = \begin{cases} \text{Ker } \varepsilon & n = 0 \\ \text{Ker } d_n & n \geq 1 \end{cases} \quad K''_n = \begin{cases} \text{Ker } \varepsilon'' & n = 0 \\ \text{Ker } d''_n & n \geq 1 \end{cases}$$

tenemos una sucesión exacta $0 \rightarrow K'_n \rightarrow K_n \rightarrow K''_n \rightarrow 0$. Por exactitud, d'_{n+1} y d''_{n+1} se factorizan a través de sus respectivas imágenes K'_n y K''_n . Así, obtenemos el diagrama con renglones exactos

$$\begin{array}{ccccccc} & & P'_{n+1} & & P''_{n+1} & & \\ & & \downarrow d'_{n+1} & & \downarrow d''_{n+1} & & \\ 0 & \longrightarrow & K'_n & \longrightarrow & K_n & \longrightarrow & K''_n \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & P'_n & \longrightarrow & P_n & \longrightarrow & P''_n \longrightarrow 0. \end{array}$$

Poniendo $P_{n+1} = P'_{n+1} \oplus P''_{n+1}$ y aplicando el lema anterior, obtenemos un epimorfismo $P_{n+1} \rightarrow \text{Ker } d_n$ que hace que el siguiente diagrama sea conmutativo y que el primer renglón también sea exacto:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & P'_{n+1} & \longrightarrow & P_{n+1} & \longrightarrow & P''_{n+1} \longrightarrow 0 \\
 & & \searrow & & \downarrow \text{dotted} & & \searrow \\
 0 & \longrightarrow & K'_n & \longrightarrow & K_n & \longrightarrow & K''_n \longrightarrow 0 \\
 & & \searrow & & \downarrow \text{dashed} & & \searrow \\
 0 & \longrightarrow & P'_n & \longrightarrow & P_n & \longrightarrow & P''_n \longrightarrow 0.
 \end{array}$$

d'_{n+1} (vertical arrow from P'_{n+1} to K'_n)
 d''_{n+1} (vertical arrow from P''_{n+1} to K''_n)

Definiendo d_{n+1} como la flecha intermitente $P_{n+1} \rightarrow P_n$, tenemos que $\text{Img}(d_{n+1}) = \text{Ker}(d_n)$, así que la sucesión central es exacta en grado n . Ahora definamos

$$\begin{aligned}
 K'_{n+1} &= \text{Ker } d'_{n+1} = \text{Ker}(P'_{n+1} \twoheadrightarrow K'_n) \\
 K_{n+1} &= \text{Ker } d_{n+1} = \text{Ker}(P_{n+1} \twoheadrightarrow K_n) \\
 K''_{n+1} &= \text{Ker } d''_{n+1} = \text{Ker}(P''_{n+1} \twoheadrightarrow K''_n).
 \end{aligned}$$

Aplicando el lema del 9 al diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & K'_{n+1} & \longrightarrow & K_{n+1} & \longrightarrow & K''_{n+1} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & P'_{n+1} & \longrightarrow & P_{n+1} & \longrightarrow & P''_{n+1} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & K'_n & \longrightarrow & K_n & \longrightarrow & K''_n \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0,
 \end{array}$$

obtenemos la exactitud del primer renglón, lo cual concluye la inducción. \square

Observación 3. En el teorema anterior, para cada $n \geq 0$, la sucesión exacta

$$0 \rightarrow P'_n \rightarrow P_n \rightarrow P''_n \rightarrow 0$$

se escinde como $P_n = P'_n \oplus P''_n$. Esto puede parecer especial, pero en realidad no lo es, ya que cualquier sucesión exacta $P \rightarrow P'' \rightarrow 0$ con P'' proyectivo se escinde.

Corolario 16. *Si en una sucesión exacta corta de módulos*

$$0 \rightarrow A' \rightarrow A \rightarrow A'' \rightarrow 0$$

tanto A' como A'' son finitamente presentados, entonces A también lo es.

Demostración. Por hipótesis, tenemos un diagrama con columnas exactas

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \vdots & & \vdots & & & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & & \\
 & 0 & & 0 & & & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & & \\
 & R^n & & R^k & & & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & & \\
 & R^m & & R^l & & & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & & \\
 0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A'' \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & & & \downarrow \\
 & & 0 & & & & 0
 \end{array}$$

Por el lema de la herradura, tenemos un diagrama con columnas y renglones exactos

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & R^n & \longrightarrow & R^{n+k} & \longrightarrow & R^k \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & R^m & \longrightarrow & R^{m+l} & \longrightarrow & R^l \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A'' \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

lo cual muestra que A es finitamente presentado, como se quería. \square

Teorema 17. *Dado un diagrama de R -módulos derechos con renglones exactos*

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A'' \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & C & \longrightarrow & C'' \longrightarrow 0, \end{array}$$

para cada R -módulo izquierdo B hay un diagrama conmutativo entre las sucesiones exactas:

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots & \rightarrow & \mathrm{Tor}_{n+1}^R(A'', B) & \rightarrow & \mathrm{Tor}_n^R(A', B) & \rightarrow & \mathrm{Tor}_n^R(A, B) & \rightarrow & \mathrm{Tor}_n^R(A'', B) & \rightarrow & \mathrm{Tor}_{n-1}^R(A', B) \rightarrow \cdots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \cdots & \rightarrow & \mathrm{Tor}_{n+1}^R(A'', B) & \rightarrow & \mathrm{Tor}_n^R(C', B) & \rightarrow & \mathrm{Tor}_n^R(C, B) & \rightarrow & \mathrm{Tor}_n^R(C'', B) & \rightarrow & \mathrm{Tor}_{n-1}^R(C', B) \rightarrow \cdots \end{array}$$

Demostración. Tomemos resoluciones proyectivas $P_{A'}$ y $P_{A''}$. Por el lema de la herradura, tenemos una sucesión exacta de resoluciones

$$0 \longrightarrow P_{A'} \longrightarrow P_A \longrightarrow P_{A''} \longrightarrow 0$$

al aplicar $(- \otimes_R B)$, la sucesión

$$0 \longrightarrow TP_{A'} \longrightarrow TP_A \longrightarrow TP_{A''} \longrightarrow 0$$

sigue siendo exacta, pues cada renglón

$$0 \rightarrow P'_n \rightarrow P_n \rightarrow P''_n \rightarrow 0$$

se escinde por la proyectividad de P''_n y los funtores aditivos mandan sucesiones exactas que se escinden en sucesiones exactas que se escinden. Dice Rotman que por el teorema 6, obtenemos el diagrama deseado. pero yo (Alfredo) no entiendo cómo puede aplicar ese teorema. .

Me sale un teorema parecido tomando una resolución proyectiva de B , pero eso es con el tor en vez del Tor. Para que me salga con el Tor también se puede uno tomar una resolución de B , pero el diagrama tiene que ser de módulos izquierdos y B tiene que ser derecho. \square

PENDIENTE: SESIÓN 7

Axiomas para el Tor.

En esta sección presentamos los axiomas que caracterizan la sucesión de funtores $\mathrm{Tor}_n^R(-, M)$.

Teorema 18 (Axiomas para Tor). *Sea $(T_n : \mathrm{Mód}\text{-}R \rightarrow \mathbb{Z}\text{-}\mathrm{Mód})$ una familia de funtores covariantes aditivos. Si,*

1. *para cada sucesión exacta corta $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ de R -módulos derechos, existe una sucesión exacta larga con homomorfismo de conexión natural*

$$\longrightarrow T_{n+1}(C) \xrightarrow{\Delta_{n+1}} T_n(A) \longrightarrow T_n(B) \longrightarrow T_n(C) \xrightarrow{\Delta_n} T_{n-1}(A) \longrightarrow ,$$

2. $T_0 \cong - \otimes_R M$ para algún R -módulo M ,
3. $T_n(P) = \{0\}$ para todo proyectivo P y para toda $n \geq 1$,

entonces

$$T_n \cong \text{Tor}_n^R(-, M) \quad \forall n \geq 0.$$

Demostración. Procedemos por inducción,

- $n = 0$ se sigue por el axioma (ii).
- $n = 1$, tenemos lo siguiente, sea $A \in \text{mód-}R$, lo cubrimos con un proyectivo,

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow P \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

con P proyectivo, y así por el axioma (i), tenemos el siguiente diagrama con renglones exactos

$$\begin{array}{ccccccc} \longrightarrow & T_1(P) & \longrightarrow & T_1(A) & \xrightarrow{\Delta_1} & T_0(K) & \longrightarrow & T_0(P) \\ & & & \downarrow \tau_1 A & & \downarrow \tau_0 K & & \downarrow \tau_0 P \\ \longrightarrow & \text{Tor}_1^R(P, M) & \longrightarrow & \text{Tor}_1^R(A, M) & \xrightarrow{\delta_1} & \text{Tor}_0^R(K, M) & \longrightarrow & \text{Tor}_0^R(P, M) \end{array}$$

donde $\tau_0 K$ y $\tau_0 P$ son los isomorfismos naturales dados por el axioma (ii). Mientras que por el axioma (iii) tenemos $T_1(P) = \{0\} = \text{Tor}_1^R(P, M)$, así Δ_1 y δ_1 son injectivos, por lo tanto $T_1(A) \cong \text{Tor}_1^R(A, M)$, con isomorfismo $\tau_1 A$, que hace conmutar el diagrama.

- Para $n \geq 1$. Tomemos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} \longrightarrow & T_{n+1}(P) & \longrightarrow & T_{n+1}(A) & \xrightarrow{\Delta_{n+1}} & T_n(K) & \longrightarrow & T_n(P) \\ & & & \downarrow \tau_n A & & \downarrow \tau_n K & & \downarrow \\ \longrightarrow & \text{Tor}_{n+1}^R(P, M) & \longrightarrow & \text{Tor}_{n+1}^R(A, M) & \xrightarrow{\delta_{n+1}} & \text{Tor}_n^R(K, M) & \longrightarrow & \text{Tor}_n^R(P, M) \end{array}$$

Por hipótesis,

$$\begin{array}{ll} T_n(K) \cong \text{Tor}_1^R(K, M) & \text{y} \quad T_n(P) \cong \text{Tor}_1^R(P, M) \\ T_{n+1}(P) = \{0\} = \text{Tor}_{n+1}^R(P, M) & \text{y} \quad T_n(P) = \{0\} = \text{Tor}_n^R(P, M) \end{array}$$

Así,

$$T_{n+1}(A) \cong T_n(K) \quad \text{y} \quad \text{Tor}_n^R(A, M) \cong \text{Tor}_n^R(K, M),$$

y definimos

$$\tau_{n+1} A = \delta_{n+1}^{-1} \tau_n K \Delta_{n+1}$$

que es un isomorfismo natural. □

Este teorema puede ser generalizado como sigue:

Corolario 19. Sean $(T_n)_{n \geq 0}$, $(T'_n)_{n \geq 0}$ sucesiones de funtores aditivos covariantes entre categorías abelianas \mathcal{A} y \mathcal{C} , donde \mathcal{A} tiene suficientes proyectivos. Si

1. para cada sucesión exacta corta $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ en \mathcal{A} , existe una sucesión exacta larga con homomorfismos de conexión naturales,
2. $T_0 \cong T'_0$,
3. $T_n(P) = \{0\} = T'_n(P)$ para todo P proyectivo y toda $n \geq 1$,

entonces $T_n \cong T'_n$ para toda $n \geq 0$.

La demostración se sigue de manera similar al Teorema 18. Notemos que en este Corolario no asumimos que $(T_n)_{n \geq 0}$ y $(T'_n)_{n \geq 0}$ sean sucesiones de funtores derivados.

∂ -Funtores homológicos

Definición 17. Si \mathcal{A} y \mathcal{C} son categorías abelianas entonces diremos que una sucesión de funtores aditivos covariantes $(T_n : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C})_{n \geq 0}$ es un **∂ -funtor homológico** si para cada sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

en \mathcal{A} se tiene una sucesión exacta larga

$$\begin{array}{ccccccc} \longrightarrow & T_n(A) & \longrightarrow & T_n(B) & \longrightarrow & T_n(C) & \\ & & & & \searrow & & \\ & & & & & T_{n-1}(A) & \longrightarrow T_{n-1}(B) \longrightarrow T_{n-1}(C) \longrightarrow \end{array}$$

y además termina en

$$T_0(A) \longrightarrow T_0(B) \longrightarrow T_0(C) \longrightarrow$$

con morfismos de conexión naturales

$$\partial_n : T_n(C) \rightarrow T_{n-1}(A),$$

es decir, si

$$0 \longrightarrow A' \longrightarrow B' \longrightarrow C' \longrightarrow 0$$

entonces el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} T_n(C) & \longrightarrow & T_{n-1}(A) \\ \downarrow & & \downarrow \\ T_n(C') & \longrightarrow & T_{n-1}(A') \end{array}$$

Definición 18. Un *morfismo de ∂ -funtores homológicos* es una familia

$$\tau : (T_n)_{n \geq 0} \rightarrow (H_n)_{n \geq 0}$$

de transformaciones naturales

$$\tau_n : T_n \rightarrow H_n$$

tales que los siguientes cuadrados son sólidos

$$\begin{array}{ccc} T_n(C) & \xrightarrow{\partial} & T_{n-1}(A) \\ \downarrow \tau_{n,C} & & \downarrow \tau_{n,A} \\ H_n(C) & \xrightarrow{\partial} & H_{n-1}(A) \end{array}$$

para cada sucesión exacta corta $(0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0)$ en \mathcal{A} .

Finalmente,

Definición 19. Si $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ es un funtor aditivo, un ∂ -funtor homológico $(T_n : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B})_{n \geq 0}$ es una **extensión homológica** de F si existe un isomorfismo natural

$$\tau_0 : F \rightarrow T_0$$

A manera de ejemplo, el funtor $(\text{Tor}_n(A, -))_{n \geq 0}$ es una extensión homológica de $A \otimes_R -$.

Teorema 20. Sea \mathcal{A} una categoría abeliana con suficientes proyectivos.

1. Si (T_n) y (H_n) son ∂ -funtores homológicos $\mathcal{A} \rightarrow \mathbb{Z}\text{-mód}$ con $H_n(P) = \{0\}$ para todo P proyectivo para toda $n \geq 1$, y si $\tau_0 : T_0 \rightarrow H_0$ es una transformación natural, entonces existe un único morfismo $\tau : (T_n) \rightarrow (H_n)$.

Más aún, si τ_0 es un isomorfismo natural, entonces τ_n es un isomorfismo natural para toda $n \geq 0$.

2. Si $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{Z}\text{-mód}$ es un funtor exacto izquierdo aditivo covariante entonces existe una extensión homológica $(H_n)_{n \geq 0}$ de F con $H_n(P) = \{P\}$ para todo P proyectivo y toda $n \geq 1$.

Demostración. 1. Si

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

es exacta, construimos $\tau_n : T_n \rightarrow H_n$ por inducción en $n \geq 0$.

- Para $n = 0$, se asume por hipótesis.
- Para $n \geq 1$ supones que hemos construido

$$\tau_{n-1} : T_{n-1} \rightarrow H_{n-1}.$$

Como hay suficientes proyectivos, entonces para C tenemos la siguiente sucesión exacta corta

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 0 & & \\
 & & & & \downarrow & & \\
 & & & & K & & \\
 & & & & \downarrow & & \\
 & & & & K & & \\
 & & & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C \longrightarrow 0 \\
 & & & & \downarrow & & \\
 & & & & 0 & &
 \end{array}$$

con P proyectivo. Ahora, obtenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc}
 T_n(C) & \xrightarrow{\partial} & T_{n-1}(K) & \longrightarrow & T_{n-1}(P) \\
 \vdots \downarrow & & \downarrow \tau_{n,K} & & \downarrow \tau_{n,P} \\
 H_n(P) & \longrightarrow & H_n(C) & \xrightarrow{\rho} & H_{n-1}(K) & \longrightarrow & H_{n-1}(P)
 \end{array}$$

como

$$H_n(P) = \{0\} = H_{n-1}(P) \quad \forall n \geq 1$$

entonces ρ es un isomorfismo y podemos definir la composición

$$\tau_{n,C} : T_n(C) \rightarrow H_n(C)$$

como

$$\tau_{n,C} = \rho^{-1} \tau_{n-1,K} \partial.$$

Afirmamos que

$$(\tau_{n,C}) : T_n(C) \rightarrow H_n(C))_{C \in \mathcal{A}}$$

es natural y está bien definida. Para ello notemos lo siguiente: dado el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & C & & \\
 & & & & \downarrow f & & \\
 0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A'' \longrightarrow 0
 \end{array}$$

donde el renglón es exacto, existe un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc}
 T_n(C) & \xrightarrow{T_n f} & T_n(A'') & \xrightarrow{\partial} & T_{n-1}(A') \\
 \tau_{n,C} \downarrow & & & & \downarrow \tau_{n-1,A} \\
 H_n(C) & \xrightarrow{H_n f} & H_n(A'') & \xrightarrow{\partial} & H_{n-1}(A')
 \end{array}$$

Si nos tomamos una cubierta proyectiva para C , tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & K & \longrightarrow & P & \longrightarrow & C \longrightarrow 0 \\ & & g \downarrow & & \downarrow & & \downarrow f \\ 0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A'' \longrightarrow 0 \end{array}$$

con P proyectivo. Considere el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccc} T_n(C) & \xrightarrow{\quad \partial \quad} & T_{n-1}(K) & & \\ \downarrow T_n f & \searrow \tau_{n,C} & \swarrow \tau_{n-1,K} & & \downarrow T_{n-1,K} \\ & H_n(C) & \xrightarrow{\quad \partial \quad} & H_{n-1}(K) & \\ & \downarrow H_n f & & \downarrow H_{n-1} g & \\ & H_n(A'') & \xrightarrow{\quad \partial \quad} & H_{n-1}(A') & \\ & \swarrow \tau_{n-1,A} & & \swarrow \tau_{n-1,A} & \\ T_n(A'') & \xrightarrow{\quad \partial \quad} & T_{n-1}(A') & & \end{array}$$

notemos que los trapecios de arriba y el lado derecho conmutan por naturalidad de τ_n y τ_{n-1} , así como el cuadrado del centro conmuta ya que (H_n) es un ∂ -functor homológico. El rectángulo restante conmuta por el diagrama anterior. Se sigue que el cuadrado completo conmuta.

Con esto tenemos la familia $(\tau_n) : (T_n) \rightarrow (H_n)$ para toda $n \geq 0$.

Para ver que es natural, tomemos $X_1, X_2 \in \mathcal{A}$ y tomemos la siguiente sucesión exacta

$$0 \longrightarrow K_i \longrightarrow P_i \longrightarrow X_i \longrightarrow 0$$

para cada $i = 1, 2$ y P_i proyectivo. Sea $f : X_1 \rightarrow X_2$, definamos

$$\tau_{n,X_i} : T_n(X_i) \rightarrow H_n(X_i),$$

para ello tomemos

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & X_1 & & \\ & & & & \downarrow f & & \\ 0 & \longrightarrow & K_2 & \longrightarrow & P_2 & \longrightarrow & X_2 \longrightarrow 0 \end{array}$$

coomo antes, así por lo ya visto, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} T_n(X_1) & \xrightarrow{T_n f} & T_n(X_2) & \xrightarrow{\quad \partial \quad} & T_{n-1}(X_2) \\ \tau_{n,X_1} \downarrow & & \downarrow \tau_{n,X_2} & & \downarrow \tau_{n-1,K_2} \\ H_n(X_1) & \xrightarrow{H_n f} & H_n(X_2) & \xrightarrow{\quad \partial \quad} & H_{n-1}(K_2) \end{array}$$

lo que nos da la naturalidad.

Ahora, veamos que no dependen de la resolución proyectiva. Tomemos $X_1 = X_2$ y $f = id_{X_1}$, así tenemos

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & K'_1 & \longrightarrow & P'_1 & \longrightarrow & X_1 \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow id_{X_1} \\ 0 & \longrightarrow & K_1 & \longrightarrow & P_1 & \longrightarrow & X_1 \longrightarrow 0 \end{array}$$

y hacemos lo mismo para

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & C & & \\ & & & & \downarrow id_C & & \\ 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C \longrightarrow 0 \end{array}$$

2. Se sigue de Proposición 4, del teorema 17 y CITAR SESION 7. □

2.2. Funtores derivados derechos (covariantes)

Como se ha visto anteriormente, los funtores derivados izquierdos satisfacen que si T es exacto derecho, entonces L_0T es naturalmente isomorfo a T . Es por esta razón que es natural tomar los funtores derivados izquierdos. En esta sección definimos los *funtores derivados derechos* R^nT , donde $T : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$ es un funtor covariante aditivo entre categorías abelianas. De esta manera, tenemos el análogo al Corolario REFERENCIA SESION 7, que dice que $R^0 \cong T$ cuando T es exacto. Esta construcción es propia para los funtores Hom . Sea $T : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$ un funtor covariante aditivo. Derivamos a T por la derecha, para eso fijamos $B \in \mathcal{A}$ con suficientes inyectivos y tomamos la resolución inyectiva

$$E = 0 \longrightarrow B \xrightarrow{\eta} E^0 \xrightarrow{d^0} E^1 \xrightarrow{d^1} E^2 \xrightarrow{d^2} E^3 \longrightarrow$$

y le aplicamos T para obtener el complejo TE^B , donde E^B es la resolución inyectiva omitida y tomamos la homología:

$$(R^nT)B = H^n(TE^B) = \frac{\text{Ker } Td^n}{\text{Img } Td^{n-1}}.$$

donde $E^n = E_{-n}$ y $d^n = d_{-n}$, de esta manera, lo anterior puede escribirse como

$$(R^nT)B = H_{-n}(TE^B) = \frac{\text{Ker } Td_{-n}}{\text{Img } Td_{-n+1}}.$$

Usando el dual al lema de Comparación, si $f : B \rightarrow B'$ es un homomorfismo, entonces existe un único morfismo, salvo homotopía, $\tilde{f} : E^B \rightarrow E'^B$ sobre f , y así en homología tenemos

$$(T\tilde{f})_{n*} = (R^nT)f : H^n(TE^B) \rightarrow H^n(TE'^B)$$

Teorema 21. Si \mathcal{A} y \mathcal{C} son categorías abelianas con \mathcal{A} con suficientes injectivos. Si $T : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$ es un funtor aditivo covariante, entonces

$$R^n T : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$$

también son aditivos para toda $n \in \mathbb{Z}$.

La demostración de este y los siguientes resultados son esencialmente duales a las demostraciones en los funtores derivados izquierdos. Por tanto, serán omitidas.

Definición 20. A los funtores $(R^n T)_{n \in \mathbb{Z}}$ contruidos se les llama **funtores derivados derechos** de T .

De manera similar a los funtores derivados izquierdos, para los derechos tenemos:

- Si T preserva multiplicación, entonces $R^n T$ también.
- $(R^n T)B = 0$ para toda n negativa y para toda $B \in \mathcal{A}$.

Definición 21. Si $T = \text{Hom}_R(A, -)$ entonces definimos $\text{Ext}_R^n(A, -) = R^n T$. Si la resolución proyectiva de B es

$$E = 0 \longrightarrow B \xrightarrow{\eta} E^0 \xrightarrow{d^0} E^1 \xrightarrow{d^1} E^2 \xrightarrow{d^2} E^3 \longrightarrow,$$

entonces

$$\begin{aligned} \text{Ext}_R^n(A, B) &= H^n(\text{Hom}_R(A, E^B)) \\ &= \frac{\text{Ker } d_*^n}{\text{Img } d_*^{n-1}}, \end{aligned}$$

donde $d_*^n : \text{Hom}_R(A, E^n) \rightarrow \text{Hom}_R(A, E^{n+1})$ se define como $d_*^n : f \mapsto d^n f$.

Corolario 22. Sea $T : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$ un funtor aditivo covariante, si E es injectivo, entonces

$$(R^n T)E = \{0\} \quad \forall n \geq 1.$$

En particular, si $E \in \text{mód-}R$ es injectivo,

$$\text{Ext}_R^n(A, E) = \{0\} \quad \forall n \geq 1, \forall A \in R - \text{mód}$$

Corolario 23. Sea \mathcal{A} una categoría abeliana con suficientes injectivos, sea $B \in \mathcal{A}$ y \mathbf{E} una resolución injectiva para B

$$\mathbf{E} = 0 \longrightarrow B \xrightarrow{\eta} E^0 \xrightarrow{d^0} E^1 \xrightarrow{d^1} E^2 \xrightarrow{d^2} E^3 \longrightarrow$$

Definimos,

$$V_0 = \text{Img } \eta \quad \text{y} \quad V_n = \text{Img } d^{n-1}$$

para toda $n \geq 1$. Entonces,

$$(R^{n+1}T)B \cong (R^n T)V_0 \cong (R^{n-1}T)V_1 \cong \cdots \cong (R^1 T)V_{n-1}.$$

En particular,

$$\text{Ext}_R^{n+1}(A, B) \cong \text{Ext}_R^n(A, V_0) \cong \cdots \text{Ext}_R^1(A, V_{n-1}).$$

Teorema 24. *Si*

$$0 \longrightarrow B' \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} B'' \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta en una categoría abeliana \mathcal{A} con suficientes inyectivos y $T : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$ un funtor covariante aditivo, con \mathcal{C} abeliana, entonces existe una sucesión exacta larga

$$\begin{array}{ccccccc} \longrightarrow & (R^n T)B' & \xrightarrow{(R^n T)i} & (R^n T)B & \xrightarrow{(R^n T)p} & (R^n T)B'' & \\ & & & \searrow \partial_n & & & \\ & (R^{n+1}T)B' & \xrightarrow{(R^{n+1}T)i} & (R^{n+1}T)B & \xrightarrow{(R^{n+1}T)p} & (R^{n+1}T)B'' & \longrightarrow \end{array}$$

que empieza en

$$0 \longrightarrow (R^0 T)B' \xrightarrow{(R^0 T)i} (R^0 T)B \xrightarrow{(R^0 T)p} (R^0 T)B'' \longrightarrow \dots$$

Corolario 25. *Si $T : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$ es un funtor covariante aditivo donde \mathcal{A} tiene suficientes inyectivos, entonces el funtor $R^0 T$ es exacto izquierdo.*

Teorema 26. 1. *Si un funtor covariante aditivo $T : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$ es exacto izquierdo, donde \mathcal{A} y \mathcal{C} son categorías abelianas con \mathcal{A} con suficientes inyectivos, entonces $T \cong R^0 T$.*

2. *Si $A \in R\text{-mód}$, entonces el funtor $\text{Hom}_R(A, -) \cong \text{Ext}_R^0(A, -)$. Así, para todo $B \in R\text{-mód}$, existe un isomorfismo*

$$\text{Hom}_R(A, B) \cong \text{Ext}_R^0(A, B).$$

Teorema 27. *Supongamos que \mathcal{A} es una categoría abeliana con suficientes inyectivos. Si*

$$0 \rightarrow B' \rightarrow B \rightarrow B'' \rightarrow 0$$

es una sucesión exacta en \mathcal{A} y $T : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$ es un funtor aditivo, entonces hay una sucesión exacta larga

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & R^0T(B') & \longrightarrow & R^0T(B) & \longrightarrow & R^0T(B'') \\
& & & & & \searrow & \\
& & R^1T(B') & \longrightarrow & \dots & & \\
& & & & & \nearrow & \\
& & & & \dots & \longrightarrow & R^{n-1}T(B'') \\
& & & & & \searrow & \\
& & R^nT(B') & \longrightarrow & R^nT(B) & \longrightarrow & R^nT(B'') \\
& & & & & \searrow & \\
& & R^{n+1}T(B') & \longrightarrow & R^{n+1}T(B) & \longrightarrow & R^{n+1}T(B'') \\
& & & & & \searrow & \\
& & R^{n+2}T(B') & \longrightarrow & \dots & &
\end{array}$$

Corolario 28. Si $T : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$ es un funtor aditivo entre categorías abelianas y \mathcal{A} tiene suficientes inyectivos, entonces $R^0T : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$ es exacto izquierdo.

Teorema 29. Sean \mathcal{A}, \mathcal{C} categorías abelianas y supongamos que \mathcal{A} tiene suficientes inyectivos. Si $T : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$ es exacto izquierdo, entonces

$$T \simeq R^0T.$$

En particular, si A es un R -módulo, entonces

$$\mathrm{Hom}(A, -) \simeq \mathrm{Ext}_R^0(A, -).$$

Corolario 30. Si A es un R -módulo y

$$0 \rightarrow B' \rightarrow B \rightarrow B'' \rightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta de R -módulos, entonces hay una sucesión exacta

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \text{Hom}(A, B') & \longrightarrow & \text{Hom}(A, B) & \longrightarrow & \text{Hom}(A, B'') \\
 & & & & & \searrow & \\
 & & \text{Ext}^1(A, B') & \longrightarrow & \dots & & \\
 & & & & & \searrow & \\
 & & & & \dots & \longrightarrow & \text{Ext}^{n-1}(A, B'') \\
 & & \text{Ext}^n(A, B') & \longrightarrow & \text{Ext}^n(A, B) & \longrightarrow & \text{Ext}^n(A, B'') \\
 & & & & & \searrow & \\
 & & \text{Ext}^{n+1}(A, B') & \longrightarrow & \text{Ext}^{n+1}(A, B) & \longrightarrow & \text{Ext}^{n+1}(A, B'') \\
 & & & & & \searrow & \\
 & & \text{Ext}^{n+2}(A, B') & \longrightarrow & \dots & &
 \end{array}$$

Teorema 31 (Axiomas para el Ext covariante). Sea $(F_n : R\text{-Mód} \rightarrow \mathbb{Z}\text{-Mód})_{n \geq 0}$ una sucesión de funtores aditivos covariantes. Si

(I) para toda sucesión exacta corta de R -módulos

$$0 \rightarrow B' \rightarrow B \rightarrow B'' \rightarrow 0$$

existe una sucesión exacta larga

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & F^0(B') & \longrightarrow & F^0(B) & \longrightarrow & F^0(B'') \\
 & & & & & \searrow & \\
 & & F^1T(B') & \longrightarrow & \dots & & \\
 & & & & & \searrow & \\
 & & & & \dots & \longrightarrow & F^{n-1}(B'') \\
 & & F^n(B') & \longrightarrow & F^n(B) & \longrightarrow & F^n(B'') \\
 & & & & & \searrow & \\
 & & F^{n+1}(B') & \longrightarrow & F^{n+1}(B) & \longrightarrow & F^{n+1}(B'') \\
 & & & & & \searrow & \\
 & & F^{n+2}(B') & \longrightarrow & \dots & &
 \end{array}$$

(II) existe un R -módulo M con

$$F^0 \simeq \text{Hom}(M, -)$$

y

(III)

$$F^n(E) = 0$$

para todo R -módulo inyectivo E y para cualquier $n \geq 1$

entonces

$$F^n = \text{Ext}^n(M, -)$$

para todo $n \geq 0$.

Corolario 32. Si $(F^n)_{n \geq 0}$ y $(F'^n)_{n \geq 0}$ son sucesiones de funtores que cumplen las condiciones (i) y (iii) de arriba y $F^0 \simeq F'^0$, entonces $F^n \simeq F'^n$ para todo $n \geq 0$.

Definición 22. Sean \mathcal{A} y \mathcal{B} categorías abelianas donde \mathcal{A} tiene suficientes inyectivos. Decimos que una sucesión $(T^n : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B})_{n \geq 0}$ de funtores aditivos es un ∂ -funtor cohomológico si para toda sucesión exacta en \mathcal{A}

$$0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$$

existe una sucesión exacta larga

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & T^0(A) & \longrightarrow & T^0(B) & \longrightarrow & T^0(C) \\ & & & & & \swarrow & \\ & & T^1(A) & \longrightarrow & \dots & & \\ & & & & & \swarrow & \\ & & & & \dots & \longrightarrow & T^{n-1}(C) \\ & & & & & \swarrow & \\ & & T^n(A) & \longrightarrow & T^n(B) & \longrightarrow & T^n(C) \\ & & & & & \swarrow & \\ & & T^{n+1}(A) & \longrightarrow & T^{n+1}(B) & \longrightarrow & T^{n+1}(C) \\ & & & & & \swarrow & \\ & & T^{n+2}(A) & \longrightarrow & \dots & & \end{array}$$

con morfismos de conexión $\partial_n : T^n(C) \rightarrow T^{n+1}(A)$ naturales en la sucesión. Es decir, dado un diagrama con renglones exactos

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

el diagrama

$$\begin{array}{ccc} T^n(C) & \xrightarrow{\partial_n} & T^{n+1}(A) \\ \downarrow & & \downarrow \\ T^n(C') & \xrightarrow{\partial_n} & T^{n+1}(A') \end{array}$$

es conmutativo.

Definición 23. Si $(T^n)_{n \geq 0}$ y $(F^n)_{n \geq 0}$ son ∂ -funtores cohomológicos, un morfismo de ∂ -funtores cohomológicos

$$\tau : (T^n)_{n \geq 0} \rightarrow (F^n)_{n \geq 0}$$

es una sucesión de transformaciones naturales

$$(\tau^n : T^n \rightarrow F^n)_{n \geq 0}$$

tales que, para toda sucesión exacta

$$0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$$

los diagramas

$$\begin{array}{ccc} T^n(C) & \xrightarrow{\partial_n} & T^{n+1}(A) \\ \tau_C \downarrow & & \downarrow \tau_A \\ F^n(C) & \xrightarrow{\partial_n} & F^{n+1}(A) \end{array}$$

sean conmutativos para todo $n \geq 0$.

Dadas dos categorías abelianas \mathcal{A}, \mathcal{B} , si \mathcal{A} tiene suficientes inyectivos, los ∂ -funtores cohomológicos, junto con sus morfismos, forman una categoría.

Definición 24. Una extensión cohomológica de un funtor $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ es un ∂ -funtor cohomológico $(T^n : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B})_{n \geq 0}$ junto con un isomorfismo natural

$$F \xrightarrow{\cong} T^0.$$

Ejemplo 6. La sucesión $(\text{Ext}^n(A, -) : R\text{-Mód} \rightarrow Z\text{-Mód})_{n \geq 0}$ es un ∂ -funtor cohomológico equipado con un isomorfismo natural

$$\text{Hom}(A, -) \xrightarrow{\cong} \text{Ext}^0(A, -).$$

Así, $(\text{Ext}^n(A, -))_{n \geq 0}$ es una extensión cohomológica de $\text{Hom}(A, -)$.

Teorema 33. Sean \mathcal{A} y \mathcal{B} son categorías abelianas, donde \mathcal{A} tiene suficientes inyectivos. Si $(T^n : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B})_{n \geq 0}$, $(F^n : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B})_{n \geq 0}$ son ∂ -funtores cohomológicos tales que

$$T^n E = 0 = F^n E$$

para todo inyectivo $E \in \mathcal{A}$, entonces cada transformación natural

$$\tau^0 : T^0 \rightarrow F^0$$

induce un morfismo de ∂ -funtores homológicos

$$\tau : (T^n)_{n \geq 0} \rightarrow (F^n)_{n \geq 0}.$$

Más aún, si τ^0 es un isomorfismo, entonces τ también lo es.

Teorema 34. Si $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ es un funtor aditivo exacto izquierdo, donde \mathcal{A} tiene suficientes inyectivos, entonces existe una única extensión cohomológica $(F^n : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B})_{n \geq 0}$ de F tal que

$$F^n E = 0$$

para todo inyectivo $E \in \mathcal{A}$ y toda $n \geq 1$.

Capítulo 3

Los funtores Tor y Ext

3.1. Propiedades del Tor

Resoluciones planas y Tor

Teorema 35. *Los funtores $\text{Tor}_n^R(A, -)$ y $\text{Tor}_n^R(-, B)$ pueden calcularse usando resoluciones planas de cualquiera de las variables; más precisamente, para toda resolución plana F_A y G_B de A y B respectivamente, y para toda $n \geq 0$,*

$$H_n(F_A \otimes_R B) \cong \text{Tor}_n^R(A, B) \cong H_n(A \otimes_R G_B).$$

Demostración. Sea $F_A \rightarrow A$ una resolución libre para A y $P_B \rightarrow B$ una resolución plana entonces basta probar que

$$\begin{aligned} H_n(F_A \otimes_R B) &\cong \text{Tor}_n^R(A, B) \\ &\cong \text{Tor}_n^R(B, A) \\ &\cong H_n(P_B \otimes A) \end{aligned}$$

Entonces, procedemos por inducción sobre $n \geq 0$, tomemos

$$\longrightarrow F_2 \xrightarrow{d_2} F_1 \xrightarrow{d_1} F_0 \longrightarrow 0$$

una resolución plana de A que al tensorizar por B resulta

$$\longrightarrow F_2 \otimes B \xrightarrow{d_2 \otimes id_B} F_1 \otimes B \xrightarrow{d_1 \otimes id_B} F_0 \otimes B \longrightarrow 0$$

de donde

$$\begin{aligned} H_n(F_A \otimes B) &= F_0 / \text{Im}(d_1 \otimes id_B) \\ &= \text{Coker}(d_1 \otimes id_B) \\ &\cong F_0 \otimes B / \text{Ker}(d_0 \otimes id_B) \\ &\cong A \otimes B \end{aligned}$$

Para $n = 1$, tomemos

$$\longrightarrow F_2 \xrightarrow{d_2} F_1 \xrightarrow{d_1} F_0 \longrightarrow 0$$

como antes, así, podemos factorizar de la siguiente manera,

$$\begin{array}{ccccc} F_2 & \xrightarrow{d_2} & F_1 & \xrightarrow{d_1} & F_0 \\ & & \searrow & \nearrow & \\ & & F_1/\text{Ker } d_1 & & \end{array}$$

y aplicando el producto tensorial tenemos

$$\begin{array}{ccccc} F_2 \otimes B & \xrightarrow{d_2 \otimes id_B} & F_1 \otimes B & \xrightarrow{d_1 \otimes id_B} & F_0 \otimes B \\ & & \searrow & \nearrow & \\ & & F_1/\text{Ker } d_1 \otimes B & & \end{array}$$

Notemos que,

$$\text{Img}(d_1 \otimes id) = \text{Img}(i \otimes id)$$

de hecho,

$$\frac{F_1}{\text{Ker } d_1} \otimes B \cong \text{Img } d_1 \otimes id$$

ahora, $d_1 \otimes id$ es suprayectivo por lo que tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccc} F_2 \otimes B & \xrightarrow{d_1 \otimes id_B} & F_1 \otimes B & \xrightarrow{d_2 \otimes id_B} & F_0 \otimes B \\ & & \downarrow \alpha & & \\ & & F_1 \otimes B / \text{Img}(d_1 \otimes id_B) & & \\ & & \downarrow \beta & & \\ & & F_1 \otimes B / \text{Ker}(d_1 \otimes id_B) & & \end{array}$$

ya que $\text{Img}(d_1 \otimes id) \subseteq \text{Ker}(d_1 \otimes id)$, β es sobreyectivo y así

$$F_1 \otimes B / \text{Ker}(d_1 \otimes id_B) \xrightarrow{\gamma} F_0 \otimes B$$

tal que γ es isomorfa en su imagen; en particular, es inyectiva y definimos $\eta = \gamma\beta$. De esta manera podemos observar que

$$\text{Ker } \eta = \frac{\text{Ker}(d_1 \otimes id)}{\text{Img}(d_2 \otimes id)} = H_1(F_A \otimes_R B)$$

y $\text{Img } \eta = \text{Img } \gamma$, pero $d_1 \otimes id = \gamma\beta\alpha$, entonces

$$\text{Img } d_1 \otimes id = \text{Img } \gamma$$

ya que α y β son sobreyectivos. Por lo tanto,

$$H_1(F_A \otimes B) \cong \text{Img } \gamma = \text{Img } d_1 \otimes id = \text{Img } i \otimes id.$$

Ahora consideremos,

$$\text{Tor}_1^R(F_0, B) \longrightarrow \text{Tor}_1^R(A, B) \longrightarrow Y \otimes B \longrightarrow F_0 \otimes B$$

como F es plano, entonces

$$\text{Tor}_1^R(F_0, B) = \{0\},$$

sustituyendo en la sucesión anterior tenemos,

$$0 \longrightarrow \text{Tor}_1^R(A, B) \longrightarrow Y \otimes B \longrightarrow F_0 \otimes B$$

como la sucesión es exacta, entonces

$$\begin{aligned} \text{Tor}_1^R(A, B) &\cong \text{Ker}(i \otimes id) \\ &\cong H_1(F_A \otimes B) \\ &\cong \text{Ker}\left(\frac{F_1 \otimes B}{\text{Img } d_1 \otimes id} \rightarrow F_0 \otimes B\right) \\ &\cong H_1(F_A \otimes B) \end{aligned}$$

y de aquí llegamos a que

$$\text{Tor}_1^R(A, B) \cong H_1(F_A \otimes B).$$

Para $n \geq 1$, tomemos

$$\text{Tor}_{n+1}^R(F_0, B) \longrightarrow \text{Tor}_{n+1}^R(A, B) \longrightarrow \text{Tor}_{n+1}(Y, B) \longrightarrow \text{Tor}_0(F_0, B) \longrightarrow$$

Por hipótesis de inducción, tenemos

$$\begin{aligned} \text{Tor}_n^R(F_0, B) &= 0, \\ \text{Tor}_{n+1}^R(F_0, B) &= 0, \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\text{Tor}_{n+1}(A, B) \cong \text{Tor}_{n+1}(Y, B).$$

Si tomamos una resolución plana F' para Y , entonces por hipótesis $H_n(F' \otimes B) \cong \text{Tor}_n(Y, B)$, pero $H_n(F' \otimes B) = H_{n+1}(F_A \otimes B)$. \square

Sumas directas y Tor

Proposición 36. Si $(B_k)_{k \in K}$ es una familia de R -módulos, entonces existe un isomorfismo natural

$$\mathrm{Tor}_n^R(A, \bigoplus_{k \in K} B_k) \cong \bigoplus_{k \in K} \mathrm{Tor}_n^R(A, B_k) \quad \forall n \geq 0.$$

Demostración. Para $n = 0$ sabemos que $\mathrm{Tor}_0^R(A, -) \cong A \otimes_R -$. Ahora para el paso inductivo, para cada i tenemos

$$0 \longrightarrow N_i \longrightarrow P_i \longrightarrow B_i \longrightarrow 0$$

con $\{B_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subseteq R\text{-mód.}$ Es decir, tenemos proyectivos que cubren a cada B_i . Además, tenemos la siguiente sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \bigoplus_i N_i \longrightarrow \bigoplus_i P_i \longrightarrow \bigoplus_i B_i \longrightarrow 0$$

y dado que la suma de proyectivos es proyectiva, entonces

$$\mathrm{Tor}_1(A, \bigoplus_i P_i) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1(A, \bigoplus_i B_i) \longrightarrow A \otimes \bigoplus_i N_i \longrightarrow A \otimes \bigoplus_i P_i$$

Por otro lado, tomemos,

$$\bigoplus_i \mathrm{Tor}_1(A, P_i) \longrightarrow \bigoplus_i \mathrm{Tor}_1(A, B_i) \longrightarrow \bigoplus_i (A \otimes N_i) \longrightarrow \bigoplus_i (A \otimes P_i)$$

de donde podemos notar que

$$\begin{aligned} A \otimes \bigoplus_i N_i &\cong \bigoplus_i (A \otimes N_i) \\ A \otimes \bigoplus_i P_i &\cong \bigoplus_i (A \otimes P_i) \end{aligned}$$

Sin embargo, $\mathrm{Tor}_1(A, \bigoplus_i P_i) = 0$ por ser $\bigoplus_i P_i$ proyectivo, de la misma manera $\bigoplus_i \mathrm{Tor}_1(A, P_i) = 0$. Por lo tanto, del lema del 5to tenemos,

$$\mathrm{Tor}_1(A, \bigoplus_i B_i) \cong \bigoplus_i \mathrm{Tor}_1(A, B_i).$$

□

Ejemplo 7. Ahora tomemos $B \in \mathbb{Z}\text{-mód.}$, $n \in \mathbb{Z}$ y

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\mu_n} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

donde μ_n es multiplicar por n . Aplicando el producto tensorial por B , tenemos

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \otimes B \xrightarrow{\mu_n \otimes id_B} \mathbb{Z} \otimes B \longrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \otimes B \longrightarrow 0$$

del cual resulta la siguiente sucesión,

$$0 \longrightarrow \mathrm{Tor}_1(\mathbb{Z}, B) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, B) \longrightarrow \mathbb{Z} \otimes B \xrightarrow{\mu_n \otimes id_B} \mathbb{Z} \otimes B$$

así $\text{Tor}_1(\mathbb{Z}, B) = 0$ y dado que son grupos abelianos $\mathbb{Z} \otimes B = B$, por lo tanto $\mu_n \otimes id_B = id_B$.

Definimos

$$B[n] = \{b \in B : nb = 0\},$$

así de lo anterior resulta la siguiente sucesión

$$0 \longrightarrow B[n] \longrightarrow B \longrightarrow B$$

y

$$0 \longrightarrow \text{Tor}_1(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, B) \longrightarrow \mathbb{Z} \otimes B \longrightarrow \mathbb{Z} \otimes B$$

por lo tanto,

$$B[n] \cong \text{Tor}_1(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, B)$$

.

Ahora, si A y B son \mathbb{Z} -módulos finitamente generados, entonces

$$\begin{aligned} A &\cong C_i \\ B &\cong C'_j \end{aligned}$$

para algunos C_i y C'_j . Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \text{tor}_1(A, B) &\cong \text{Tor}(\oplus_i C_i, \oplus_j C'_j) \\ &\cong \oplus_{i,j} \text{Tor}_1(C_i, C'_j) \end{aligned}$$

ya que C_i y C'_j son cíclicos, entonces son cíclicos finitos y aplicando el ejemplo anterior, tenemos $\text{Tor}_1(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ para alguna componente, de esta manera ,

$$\begin{aligned} \text{Tor}_1(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) &= \{x \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} : nx = 0\} \\ &= \{\bar{x} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} : nx \in m\mathbb{Z}\} \\ &= [n : m\mathbb{Z}] \\ &= \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}[d] \end{aligned}$$

donde $d = \text{mcd}(m, n)$.

Límites dirigidos y Tor

Tomemos un R -módulo derecho A . Si (B_i, ϕ_j^i) es un sistema dirigido de R -módulos izquierdos, entonces los morfismos $B_i \rightarrow \varinjlim_i B_i$ inducen morfismos $A \otimes B_i \rightarrow A \otimes \varinjlim_i B_i$. Así, tenemos un único morfismo

$$A \otimes_R \varinjlim_i B_i \rightarrow \varinjlim_i (A \otimes_R B_i)$$

que hace conmutar el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 A \otimes B_i & & \\
 \downarrow & \searrow & \\
 & A \otimes \varinjlim_i B_i & \\
 & \swarrow & \\
 \varinjlim_i A \otimes B_i & &
 \end{array}$$

para todo i (dado en los generadores como $a \otimes [b] \mapsto [a \otimes b]$). Este morfismo es, de hecho, un isomorfismo. Expresamos esto diciendo que el funtor $A \otimes_R -$ preserva colímites dirigidos. Ahora probaremos que sus funtores derivados $\text{Tor}_n^R(A, -)$ tienen la misma propiedad.

Teorema 37. *Sean A un R -módulo derecho y (I, \leq) un conjunto dirigido. Entonces las transformaciones naturales*

$$t_n : \text{Tor}_n^R(A, \varinjlim -) \rightarrow \varinjlim \text{Tor}_n^R(A, -)$$

entre los funtores $(\text{Mód}_R)^{(I, \leq)} \rightarrow \text{Mód}_\mathbb{Z}$ son, de hecho, isomorfismos naturales. Los componentes de estas transformaciones naturales están dadas, para cualquier sistema dirigido (B_i, ϕ_j^i) de R -módulos izquierdos, como el único morfismo

$$\text{Tor}_n^R(A, \varinjlim_i B_i) \rightarrow \varinjlim_i \text{Tor}_n^R(A, B_i)$$

que hace conmutar el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Tor}_n^R(A, B_i) & & \\
 \downarrow & \searrow & \\
 & \text{Tor}_n^R(A, \varinjlim_i B_i) & \\
 & \swarrow & \\
 \varinjlim_i \text{Tor}_n^R(A, B_i) & &
 \end{array}$$

Demostración. Procederemos por inducción sobre $n \geq 0$. El caso base $n = 0$ es el del producto tensorial, el cual se trató antes de enunciar el teorema.

Ahora tomemos $n \geq 1$ y supongamos que

$$t_{n-1} : \text{Tor}_{n-1}^R(A, \varinjlim -) \rightarrow \varinjlim \text{Tor}_{n-1}^R(A, -)$$

es un isomorfismo.

Para cualquier sistema dirigido (B_i, ϕ_j^i) , consideremos un nuevo sistema dirigido (P_i, ψ_j^i) , donde P_i son los módulos libres $P_i = R^{(B_i)}$ para cada $i \in I$, mientras que los $\psi_j^i : P_i \rightarrow P_j$ son los morfismos inducidos por las funciones $\phi_j^i : B_i \rightarrow B_j$. Así, siempre que $i \leq j \leq k$, tenemos $\phi_j^i \phi_k^j = \phi_k^i$, por lo

cual $\psi_i^j \psi_k^j = \psi_i^k$. Además, para cada i tenemos un morfismo suprayectivo natural $P_i \rightarrow B_i$, lo cual nos da un morfismo de sistemas dirigidos $(P_i) \rightarrow (B_i)$. Los núcleos $K_i = \text{Ker}(P_i \rightarrow B_i)$ forman otro sistema dirigido con un morfismo a (P_i) de tal modo que obtenemos una sucesión exacta de sistemas dirigidos indicados por I :

$$0 \rightarrow (K_i) \rightarrow (P_i) \rightarrow (B_i) \rightarrow 0.$$

Dado que el funtor \varinjlim es exacto, obtenemos una sucesión exacta

$$0 \rightarrow \varinjlim_i K_i \rightarrow \varinjlim_i P_i \rightarrow \varinjlim_i B_i \rightarrow 0.$$

Aplicando $A \otimes_R -$, obtenemos una sucesión exacta larga

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \cdots & \longrightarrow & \text{Tor}_3(A, \varinjlim_i B_i) & \\ & & & & \swarrow & & \\ \text{Tor}_2(A, \varinjlim_i K_i) & \longrightarrow & \text{Tor}_2(A, \varinjlim_i P_i) & \longrightarrow & \text{Tor}_2(A, \varinjlim_i B_i) & & \\ & & & \swarrow & & & \\ \text{Tor}_1(A, \varinjlim_i K_i) & \longrightarrow & \text{Tor}_1(A, \varinjlim_i P_i) & \longrightarrow & \text{Tor}_1(A, \varinjlim_i B_i) & & \\ & & & \swarrow & & & \\ A \otimes \varinjlim_i K_i & \longrightarrow & A \otimes \varinjlim_i P_i & \longrightarrow & A \otimes \varinjlim_i B_i & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Por otro lado, al aplicar $A \otimes -$ a cada sucesión

$$0 \rightarrow K_i \rightarrow P_i \rightarrow B_i \rightarrow 0$$

obtenemos una sucesión exacta larga

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \cdots & \longrightarrow & \text{Tor}_3(A, B_i) & \\ & & & & \swarrow & & \\ \text{Tor}_2(A, K_i) & \longrightarrow & \text{Tor}_2(A, P_i) & \longrightarrow & \text{Tor}_2(A, B_i) & & \\ & & & \swarrow & & & \\ \text{Tor}_1(A, K_i) & \longrightarrow & \text{Tor}_1(A, P_i) & \longrightarrow & \text{Tor}_1(A, B_i) & & \\ & & & \swarrow & & & \\ A \otimes K_i & \longrightarrow & A \otimes P_i & \longrightarrow & A \otimes B_i & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

y, por la funtorialidad de $\text{Tor}_n(A, -)$, obtenemos morfismos que convierten a estas sucesiones exactas largas en una sucesión exacta larga de sistemas dirigidos indicados por I . De nuevo por la exactitud

de \varinjlim , tenemos

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & \cdots & \longrightarrow & \varinjlim_i \operatorname{Tor}_3(A, B_i) \\
 & & & & & \swarrow & \\
 \varinjlim_i \operatorname{Tor}_2(A, K_i) & \longrightarrow & \varinjlim_i \operatorname{Tor}_2(A, P_i) & \longrightarrow & \varinjlim_i \operatorname{Tor}_2(A, B_i) & & \\
 & & & & \swarrow & & \\
 \varinjlim_i \operatorname{Tor}_1(A, K_i) & \longrightarrow & \varinjlim_i \operatorname{Tor}_1(A, P_i) & \longrightarrow & \varinjlim_i \operatorname{Tor}_1(A, B_i) & & \\
 & & & & \swarrow & & \\
 \varinjlim_i A \otimes K_i & \longrightarrow & \varinjlim_i A \otimes P_i & \longrightarrow & \varinjlim_i A \otimes B_i & \longrightarrow & 0.
 \end{array}$$

En este punto es donde entran los morfismos $\operatorname{Tor}_n^R(A, \varinjlim_i B_i) \rightarrow \varinjlim_i \operatorname{Tor}_n^R(A, B_i)$ que aparecen en el enunciado del teorema. Éstos nos dan un morfismo entre estas dos sucesiones exactas

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 \cdots \rightarrow \operatorname{Tor}_1(A, \varinjlim_i P_i) & \rightarrow & \operatorname{Tor}_1(A, \varinjlim_i B_i) & \rightarrow & A \otimes \varinjlim_i K_i & \rightarrow & A \otimes \varinjlim_i P_i & \rightarrow & A \otimes \varinjlim_i B_i & \rightarrow & 0 \\
 \downarrow t_{1,P} & & \downarrow t_{1,B} & & \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq & & \\
 \cdots \rightarrow \varinjlim_i \operatorname{Tor}_1(A, P_i) & \rightarrow & \varinjlim_i \operatorname{Tor}_1(A, B_i) & \rightarrow & \varinjlim_i A \otimes K_i & \rightarrow & \varinjlim_i A \otimes P_i & \rightarrow & \varinjlim_i A \otimes B_i & \rightarrow & 0.
 \end{array}$$

Dado que cada P_i es plano (porque es libre) entonces $\varinjlim_i P_i$ es plano (porque el límite dirigido de módulos planos es plano). Así, tenemos

$$\forall n \geq 1, \quad \operatorname{Tor}_n(-, \varinjlim_i P_i) = \varinjlim_i \operatorname{Tor}_n(-, P_i) = 0.$$

Además, por hipótesis, $t_{n,K}, t_{n,P}$ son isomorfismos. Luego, la exactitud del diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdots \rightarrow \operatorname{Tor}_n(A, \varinjlim_i P_i) & \xrightarrow{0} & \operatorname{Tor}_n(A, \varinjlim_i B_i) & \rightarrow & \operatorname{Tor}_{n-1}(A, \varinjlim_i K_i) & \rightarrow & \operatorname{Tor}_{n-1}(A, \varinjlim_i P_i) \\
 \downarrow t_{n,P} & & \downarrow t_{n,B} & & \simeq \downarrow t_{n-1,K} & & \simeq \downarrow t_{n-1,K} \\
 \cdots \rightarrow \varinjlim_i \operatorname{Tor}_n(A, P_i) & \xrightarrow{0} & \varinjlim_i \operatorname{Tor}_n(A, B_i) & \rightarrow & \varinjlim_i \operatorname{Tor}_{n-1}(A, K_i) & \rightarrow & \varinjlim_i \operatorname{Tor}_{n-1}(A, P_i).
 \end{array}$$

implica que $t_{n,B} : \operatorname{Tor}_n(A, \varinjlim_i B_i) \rightarrow \varinjlim_i \operatorname{Tor}_n(A, B_i)$ es un isomorfismo. Como el sistema dirigido (B_i, ϕ_i^j) era arbitrario, tenemos que

$$t_n : \operatorname{Tor}_1^R(A, \varinjlim -) \rightarrow \varinjlim \operatorname{Tor}_n^R(A, -)$$

es un isomorfismo. Esto concluye el paso de inducción. \square

3.2. El teorema de Chase

Ahora queremos demostrar el teorema de Chase, que relaciona algunas propiedades de un anillo R con propiedades de su categoría de módulos.

Antes, necesitamos dos lemas.

Sean M un R -módulo derecho y $(L_i \mid i \in X)$ una familia de R -módulos izquierdos. Notemos que, para cada $i \in X$, la función $M \times \prod_i L_i \rightarrow M \otimes L_i$ dada por $(m, l) \mapsto m \otimes l_i$ es bilineal, por lo cual induce un morfismo de \mathbb{Z} -módulos $\phi_i : M \otimes \prod_i L_i \rightarrow M \otimes L_i$ dado en $x \otimes l$ como $\phi(x \otimes l) = x \otimes l_i$. Por la propiedad universal del producto, los ϕ_i inducen un morfismo $\phi : M \otimes \prod_i L_i \rightarrow \prod_i (M \otimes L_i)$ dado en los generadores como $\phi(x \otimes l) = (x \otimes l_i \mid i \in X)$. Notemos que ϕ es un iso en el caso $M = R^n$, pues tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} R^n \otimes \prod_i L_i & \xrightarrow{\phi} & \prod_i (R^n \otimes L_i) \\ \simeq \downarrow & & \downarrow \simeq \\ (\prod_i L_i)^n & \xrightarrow{\simeq} & \prod_i L_i^n \end{array}$$

en el cual la flecha inferior está dada por $(q_1, \dots, q_n) \mapsto ((q_{1i}, \dots, q_{ni}) \mid i \in X)$, donde q_{ji} son los componentes de q_j ; es decir: $q_j = (q_{ji} \mid i \in X) \in \prod_i L_i$ para $j = 1, \dots, n$.

Sin embargo, esto no siempre ocurre. Los dos lemas siguientes relacionan propiedades de finitud de M con propiedades de ϕ .

Lema 38. *Para un R -módulo derecho M son equivalentes*

1. *M es finitamente generado.*
2. *Para toda familia $(L_i \mid i \in X)$ de R -módulos izquierdos, el morfismo*

$$\phi : M \otimes \prod_i L_i \rightarrow \prod_i (M \otimes L_i)$$

es suprayectivo.

3. *Para todo conjunto X , el morfismo*

$$M \otimes R^X \rightarrow M^X$$

es suprayectivo.

Demostración. ■ $1 \implies 2$. Por hipótesis, tenemos una sucesión exacta $R^m \rightarrow M \rightarrow 0$. Luego, obtenemos un cuadrado

$$\begin{array}{ccc} R^n \otimes \prod_i L_i & \xrightarrow{\simeq} & \prod_i (R^n \otimes L_i) \\ \downarrow & & \downarrow \\ M \otimes \prod_i L_i & \xrightarrow{\phi} & \prod_i (M \otimes L_i) \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 & & 0 \end{array}$$

donde las columnas son exactas porque el producto tensorial y el producto directo son exactos derechos. Como la flecha superior es iso, concluimos que la flecha inferior también es epi.

- $2 \implies 3$. Tómesese $L_i = R$ para todo $i \in X$.
- $3 \implies 1$. Tómesese $X = M$, el conjunto subyacente de M . Por hipótesis, el morfismo de \mathbb{Z} -módulos

$$\psi : M \otimes R^M \rightarrow M^M$$

dado en los generadores como $\psi(m \otimes t) = (mt_m \mid m \in M)$, es suprayectivo, así que para el elemento $u = (m \mid m \in M) \in M^M$ existe una suma finita $\sum_{i=1}^n m_i \otimes t_i \in M \otimes R^M$ tal que $\psi(\sum_{i=1}^n m_i \otimes t_i) = u$. Esto es,

$$\left(\sum_{i=1}^n m_i t_{im} \mid m \in M \right) = (m \mid m \in M),$$

de modo que, para cada $m \in M$, tenemos

$$m = \sum_{i=1}^n m_i t_{im}.$$

Luego, los $m_1, \dots, m_n \in M$ generan a M .

□

Lema 39. *Para un R -módulo derecho M son equivalentes*

1. *M es finitamente presentado.*
2. *Para toda familia $(L_i \mid i \in X)$ de R -módulos izquierdos, el morfismo*

$$\phi : M \otimes \prod_i L_i \rightarrow \prod_i (M \otimes L_i)$$

es un iso.

3. *Para todo conjunto X , el morfismo*

$$M \otimes R^X \rightarrow M^X$$

es un iso.

Demostración. ■ $1 \implies 2$. Por hipótesis, M es finitamente presentado, así que tenemos una sucesión exacta

$$R^n \rightarrow R^m \rightarrow M \rightarrow 0.$$

Como el producto tensorial y el producto directo son exactos, el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 R^n \otimes \prod_i L_i & \xrightarrow{\simeq} & \prod_i (R^n \otimes L_i) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 R^m \otimes \prod_i L_i & \xrightarrow{\simeq} & \prod_i (R^m \otimes L_i) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 M \otimes \prod_i L_i & \xrightarrow{\phi} & \prod_i (M \otimes L_i) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 0 & & 0
 \end{array}$$

tiene columnas exactas. Como los dos morfismos superiores son isos, ϕ también lo es.

- $2 \implies 3$. Tómesese $L_i = R$ para todo $i \in X$.
- $3 \implies 1$. Por el lema anterior, la hipótesis implica que M es finitamente generado, así que tenemos una sucesión exacta

$$0 \rightarrow K \rightarrow R^m \rightarrow M \rightarrow 0.$$

Veamos que K es finitamente generado, para lo cual usaremos el lema anterior. Sea X un conjunto. Como el producto directo es exacto y el producto tensorial es exacto derecho, el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 & & 0 \\
 & & \downarrow \\
 K \otimes R^X & \longrightarrow & K^X \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 R^m \otimes R^X & \xrightarrow{\simeq} & (R^m)^X \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 M \otimes R^X & \xrightarrow{\simeq} & M^X \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 0 & & 0
 \end{array}$$

tiene columnas exactas. Además, el renglón inferior es iso por hipótesis y el renglón de en medio es iso por la observación antes del lema anterior. Cazando un elemento $a \in K^X$, se muestra que $K \otimes R^X \rightarrow K^X$ es suprayectiva. Como X es arbitrario, se sigue que K es finitamente generado. Así, M es finitamente presentado. □

Finalmente, antes de probar el teorema que queremos, haremos una definición más.

Definición 25 (Módulos coherentes). *Un módulo es coherente si es finitamente presentado y todos sus módulos finitamente generados son finitamente presentados.*

Ahora sí, el teorema que queremos es el siguiente.

Teorema 40 (Chase). *Sea R un anillo. Son equivalentes:*

- (a) *Todo producto directo de módulos planos es plano.*
- (b) *R^I es plano para cualquier conjunto I .*
- (c) *Todo módulo derecho finitamente presentado es coherente.*
- (d) *Para todo $a \in R$, el anulador derecho $\text{Ann}(a) \in \Lambda(R_R)$ es finitamente generado y la intersección de ideales derechos finitamente generados de R es un ideal derecho finitamente generado.*
- (e) *R_R es coherente.*

Demostración. ■ (a) \implies (b). Es inmediato, pues R es plano.

- (b) \implies (c). Supongamos que M_R es finitamente presentado. Mostraremos que M es coherente. Para esto, tomemos un submódulo $L \leq M$ finitamente generado. Para cualquier conjunto I , consideremos los lados del cuadrado conmutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccc} L \otimes R^I & \longrightarrow & M \otimes R^I \\ \downarrow & & \downarrow \\ L^I & \longrightarrow & M^I. \end{array}$$

Como L es finitamente generado, y M es finitamente presentado, el lado izquierdo del cuadrado es epi y el lado derecho es iso, por los lemas anteriores. Por hipótesis, R^I es plano, así que la flecha superior es mono. Se sigue que $L \otimes R^I \rightarrow L^I \rightarrow M^I$ es un monomorfismo, pues es composición de dos monomorfismos. Luego, $L \otimes R^I \rightarrow L^I$ es mono, así que es iso. Como I es un conjunto arbitrario, se sigue que L es finitamente presentado.

- (c) \implies (d). Sea $a \in R$. Notemos que el anulador derecho $\text{Ann}(a)$ es el núcleo del morfismo $R \rightarrow aR$. Es decir, tenemos la sucesión exacta

$$0 \rightarrow \text{Ann}(a) \rightarrow R \rightarrow aR \rightarrow 0.$$

Como aR es un submódulo finitamente generado de R_R , la hipótesis (c) nos dice que es finitamente presentado. Por lo tanto, existe una sucesión exacta $R^n \rightarrow R^m \rightarrow aR \rightarrow 0$. Como R^m es libre, también es proyectivo, así que obtenemos una flecha $R^m \rightarrow R$ que hace conmutar el cuadrado derecho del siguiente diagrama.

$$\begin{array}{ccccccc} R^n & \longrightarrow & R^m & \longrightarrow & aR & \longrightarrow & 0 \\ \vdots \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \text{id} & & \\ 0 & \longrightarrow & \text{Ann}(a) & \longrightarrow & R & \longrightarrow & aR \longrightarrow 0 \end{array}.$$

Esto produce la flecha punteada $R^n \rightarrow R$ que hace conmutar el cuadrado de la izquierda. Por el lema de la serpiente tenemos una sucesión exacta

$$0 \rightarrow \text{Coker}(R^n \rightarrow \text{Ann}(a)) \rightarrow \text{Coker}(R^m \rightarrow R) \rightarrow 0,$$

así que $\text{Coker}(R^n \rightarrow \text{Ann}(a)) \simeq \text{Coker}(R^m \rightarrow R)$. En particular, $\text{Coker}(R^m \rightarrow \text{Ann}(a))$ es finitamente generado, pues es un cociente de R^m . Luego, $\text{Ann}(a)$ es finitamente generado, pues tenemos la sucesión exacta

$$0 \rightarrow \text{Img}(R^n \rightarrow \text{Ann}(a)) \rightarrow \text{Ann}(a) \rightarrow \text{Coker}(R^n \rightarrow \text{Ann}(a)) \rightarrow 0.$$

Ahora sean $I, J \leq R$ dos ideales derechos finitamente generados. Notemos que $I \cap J$ es el núcleo del morfismo $R \rightarrow R/I \oplus R/J$, así que tenemos la sucesión exacta

$$0 \rightarrow I \cap J \rightarrow R \xrightarrow{\beta} \frac{R}{I} \oplus \frac{R}{J}.$$

Como la suma directa es exacta y $R/I, R/J$ son finitamente presentados, se sigue que $R/I \oplus R/J$ es finitamente presentado, así que es coherente, por la hipótesis (c). Luego, la imagen $\text{Img } \beta$, siendo un submódulo finitamente generado de $R/I \oplus R/J$ (pues es cociente de R), es un módulo finitamente presentado. Así, tenemos una sucesión exacta

$$0 \rightarrow I \cap J \rightarrow R \xrightarrow{\beta'} \text{Img } \beta \rightarrow 0,$$

donde β' es la (co)restricción de β a su imagen. Haciendo el mismo argumento que con la sucesión $0 \rightarrow \text{Ann}(a) \rightarrow R \rightarrow aR \rightarrow 0$, concluimos que $I \cap J$ es finitamente generado.

- (d) \implies (e). La sucesión $0 \rightarrow R \rightarrow R \rightarrow 0$ muestra que R es finitamente presentado. Ahora sea $I \leq R$ un ideal derecho finitamente generado, digamos $I = a_1R + a_2R + \cdots + a_nR$. Por inducción sobre n , veremos que I es finitamente presentado. Para $n = 1$, tenemos la sucesión exacta

$$0 \rightarrow \text{Ann}(a_1) \rightarrow R \rightarrow a_1R \rightarrow 0$$

con $\text{Ann}(a_1)$ finitamente generado por hipótesis (d), lo cual muestra que $a_1R = I$ es finitamente presentado.

Ahora supongamos que $I_1 = a_1R + a_2R + \cdots + a_{n-1}R$ es finitamente presentado. Si $I_2 = a_nR$, mostremos que $I = I_1 + I_2$ es finitamente presentado. Consideremos la sucesión exacta

$$0 \rightarrow I_1 \cap I_2 \rightarrow I_1 \oplus I_2 \rightarrow I \rightarrow 0$$

donde $I_1 \oplus I_2$ es finitamente presentado porque I_1 e I_2 lo son, mientras que $I_1 \cap I_2$ es finitamente

generado por la hipótesis (d). Luego, tenemos un diagrama con renglones y columnas exactas

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & R^n & & & \\
 & & & \downarrow & & & \\
 & R^k & \cdots \cdots \cdots & R^m & & & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & & \\
 0 & \longrightarrow & I_1 \cap I_2 & \longrightarrow & I_1 \oplus I_2 & \longrightarrow & I \longrightarrow 0, \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & &
 \end{array}$$

donde la existencia del morfismo punteado $R^k \rightarrow R^m$ que hace conmutar el diagrama se debe a la proyectividad de R^k . Notemos que el morfismo compuesto $R^m \rightarrow I$ es epi, pues es composición de epis. Además, si $x \in R^m$ tiene imagen 0 en I , entonces está en el núcleo de $I_1 \oplus I_2 \rightarrow I$, por lo cual tiene un levantamiento en $I_1 \cap I_2$ y así tiene un levantamiento en R^k . Esto muestra que la sucesión

$$R^k \rightarrow R^m \rightarrow I \rightarrow 0$$

es exacta y, por lo tanto, es una presentación finita de I .

- (e) \implies (a). Supongamos que $(L_i \mid i \in S)$ es una familia de R -módulos izquierdos planos. Sea $I \leq R$ es un ideal derecho finitamente generado. Como cada L_i es plano, cada functor $- \otimes L_i$ preserva monomorfismos. Así, de la sucesión exacta $0 \rightarrow I \rightarrow R$ obtenemos la exactitud de

$$0 \rightarrow I \otimes L_i \rightarrow L_i$$

para cada $i \in S$. Luego, por la exactitud del producto directo, la sucesión

$$0 \rightarrow \prod_i (I \otimes L_i) \rightarrow \prod_i L_i$$

es exacta. Ahora, por la hipótesis (e), I es finitamente presentado, así que el morfismo

$$I \otimes \prod_i L_i \rightarrow \prod_i (I \otimes L_i)$$

es un iso. Como el cuadrado del diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
 0 & \cdots \cdots \cdots & I \otimes \prod_i L_i & \longrightarrow & \prod_i L_i \\
 & & \simeq \downarrow & & \downarrow \text{id} \\
 0 & \longrightarrow & \prod_i (I \otimes L_i) & \longrightarrow & \prod_i L_i
 \end{array}$$

es conmutativo, donde el morfismo superior del cuadrado se obtiene de $0 \rightarrow I \rightarrow R$ al aplicar $- \otimes \prod_i L_i$, se sigue que el primer renglón, incluyendo la flecha punteada, también es exacto. Así, $\prod_i L_i$ es plano.

□

Observación 4. En el transcurso de la demostración del teorema anterior, probamos dos resultados útiles acerca sucesiones exactas, así que vale la pena ponerlos por separado. Supongamos que

$$0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0.$$

es una sucesión exacta.

- Si C es finitamente presentado y B es finitamente generado, entonces A es finitamente generado. La prueba es como en (c) \implies (d).
- Si B es finitamente presentado y A es finitamente generado, entonces C es finitamente presentado. La prueba es como en (d) \implies (e).

PENDIENTE SESIÓN 13

Bla bla bla

3.3. Localización

Proposición 41. Sean R y A anillos y sea $T : R\text{-Mód} \rightarrow A\text{-Mód}$ un funtor aditivo exacto. Entonces para cada complejo $C_\bullet, d) \in \text{Com}(R)$ y para cada $n \in \mathbb{Z}$ existe un isomorfismo

$$H_n(TC_\bullet, Td) \rightarrow TH_n(C_\bullet, d).$$

Demostración. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc} C_{n+1} & \xrightarrow{d_{n+1}} & C_n & \xrightarrow{d_n} & C_{n-1} & & \\ d'_{n+1} \downarrow & & \uparrow k & & & & \\ \longrightarrow & \text{Img } d_{n+1} & \xrightarrow{j} & \text{Ker } d_n & \longrightarrow & H_n(C) & \longrightarrow 0 \end{array}$$

aplicando T tenemos

$$\begin{array}{ccccccc} TC_{n+1} & \xrightarrow{Td_{n+1}} & TC_n & \xrightarrow{Td_n} & TC_{n-1} & & \\ Td'_{n+1} \downarrow & & \uparrow Tk & & & & \\ \longrightarrow & T(\text{Img } d_{n+1}) & \xrightarrow{Tj} & T(\text{Ker } d_n) & \longrightarrow & TH_n(C) & \longrightarrow 0 \end{array}$$

y $T(\text{Img } d_{n+1}) = \text{Img } T(d_{n+1})$, ya que T es exacto, y el último renglón del último diagrama puede reescribirse de la siguiente manera:

$$\text{Img } Td_{n+1} \xrightarrow{Tj} \text{Ker } Td_n \longrightarrow TH_n(C) \longrightarrow 0$$

Luego,

$$\frac{\text{Ker } Td_n}{\text{Img } Td_n} = H_n(TC_\bullet) \cong TH_n(C_\bullet)$$

□

Ahora, tomando un subconjunto multiplicativamente cerrado S de un anillo R , veamos que el Tor conmuta con localización a través del siguiente resultado:

Proposición 42. *Si $S \subseteq R$ es un subconjunto multiplicativo, entonces existen isomorfismos*

$$S^{-1}(\mathrm{Tor}_n^R(A, B)) \cong \mathrm{Tor}_n^{S^{-1}R}(S^{-1}A, S^{-1}B) \quad \forall n \geq 0$$

para todos $A, B \in R - \text{Mód}$.

Demostración. Procedemos por inducción:

- $n = 0$. Para $A, B \in R\text{-mód}$ fijos, existe un isomorfismo natural

$$\tau_{A,B} : S^{-1}(A \otimes_R B) \rightarrow S^{-1}A \otimes_{S^{-1}R} S^{-1}B$$

ya que

$$\begin{aligned} S^{-1}(A \otimes_R B) &\cong S^{-1}R \otimes_R (A \otimes_R B) \\ &\cong (S^{-1}A \otimes_R A) \otimes_{S^{-1}R \otimes_R B} \\ &\cong S^{-1}A \otimes_{S^{-1}R} S^{-1}B \end{aligned}$$

- $n \geq 0$. Ya que la localización es un funtor aditivo exacto, entonces

$$H_n(S^{-1})(A \otimes_R P_B) \cong S^{-1}(H_n(A \otimes P_B)) \cong S^{-1}(\mathrm{Tor}_n^R(A, B)).$$

□

De lo anterior, notemos que si R es conmutativo, \mathfrak{m} maximal y si $A_{\mathfrak{m}}$ es plano, entonces $\mathrm{Tor}_n^{R_{\mathfrak{m}}}(A_{\mathfrak{m}}, B_{\mathfrak{m}}) = 0$ para toda $n \leq 1$. Pero $\mathrm{Tor}_n^{R_{\mathfrak{m}}}(A_{\mathfrak{m}}, B_{\mathfrak{m}}) = \mathrm{Tor}_n^R(A, B)_{\mathfrak{m}} = 0$. Así $\mathrm{Tor}_n^R(A, B) = 0$, ya que ser cero es una propiedad local. Y así, obtenemos el siguiente resultado:

Corolario 43. *(Ser plano es una propiedad local) Sea $A \in R\text{-Mód}$, con R un anillo conmutativo. Si $A_{\mathfrak{m}}$ es plano como $R_{\mathfrak{m}}$ -módulo para todo $\mathfrak{m} \in \max\mathrm{Spec}(R)$, entonces A es plano.*

Demostración. Como cada $A_{\mathfrak{m}}$ es plano, entonces $\mathrm{Tor}_n^{R_{\mathfrak{m}}}(A_{\mathfrak{m}}, B_{\mathfrak{m}}) = 0$ para cualesquiera $n \geq 1$, $B \in R\text{-Mód}$, $\mathfrak{m} \in \max\mathrm{Spec}(R)$. Luego, $\mathrm{Tor}_n^R(A, B)_{\mathfrak{m}} = 0$ para cualesquiera $n \geq 1$, $B \in R\text{-Mód}$ y $\mathfrak{m} \in \max\mathrm{Spec}(R)$. Como ser cero es una propiedad local, se sigue que $\mathrm{Tor}_n^R(A, B) = 0$ para todo $n \geq 1$ y $B \in R\text{-Mód}$. Luego, A es plano. □

Lema 44. *Si R es un anillo noetheriano izquierdo y M es finitamente generado, entonces existe una resolución proyectiva P de M donde cada P_n es finitamente generado.*

Demostración. Ya que M es finitamente generado, existe un R -mpdulo libre finitamente generado P_0 tal que

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

como P_0 es finitamente generado, entonces $P_0 \cong R^{(n)}$ entonces K es finitamente generado, pues R es noetheriano. □

Finalizamos esta sección con el siguiente resultado acerca de módulos finitamente generados sobre un anillo noetheriano.

Teorema 45. *Si R es un anillo noetheriano conmutativo y si A y B son R -módulos finitamente generados, entonces $\text{Tor}_n^R(A, B)$ es finitamente generado, para toda $n \leq 0$.*

Demostración. Procedemos por inducción.

- $n = 0$. Notemos que $A \otimes_R B$ es finitamente generado ya que A y B lo son en el anillo conmutativo R .
- $n \leq 0$. Sea P_A una resolución proyectiva de A , ya que $P_n \otimes B$ es finitamente generado por el resultado anterior, entonces $\text{Ker}(d_n \otimes id_B)$ es finitamente generado y $\text{Tor}_n^R(A, B)$ también lo es.

□

3.4. Propiedades del Ext

En esta sección estudiamos algunos resultados y propiedades con el Ext.

Proposición 46. *Si $(A_k)_{k \in K}$ es una familia de módulos, entonces existe un isomorfismo natural*

$$\text{Ext}_R^n(\oplus_k A_k, B) \cong \prod \text{Ext}_R^n(A_k, B).$$

Demostración. ■ $n = 0$. Del teorema 26 tenemos $\text{Ext}_R^0(-, B) \cong \text{Hom}_R(-, B)$.

- $n = 1$. Para $k \in K$ tenemos

$$0 \longrightarrow L_k \longrightarrow P_k \longrightarrow A_k \longrightarrow 0$$

con P_k proyectivo. De aquí, obtenemos la siguiente sucesión:

$$0 \longrightarrow \oplus_k L_k \longrightarrow \oplus_k P_k \longrightarrow \oplus_k A_k \longrightarrow 0$$

donde $\oplus_k P_k$ es proyectivo ya que la suma directa de proyectivos lo es. Por lo tanto, existe el siguiente diagrama conmutativo con renglones exactos

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Hom}(\oplus_k P_k, B) & \longrightarrow & \text{Hom}(\oplus_k L_k, B) & \xrightarrow{\partial} & \text{Ext}^1(\oplus_k A_k, B) & \longrightarrow & \text{Ext}^1(\oplus_k P_k, B) \\ \downarrow \tau & & \downarrow \sigma & & \downarrow & & \downarrow \\ \prod \text{Hom}(P_k, B) & \longrightarrow & \prod \text{Hom}(L_k, B) & \xrightarrow{d} & \prod \text{Ext}^1(A_k, B) & \longrightarrow & \prod \text{Ext}^1(P_k, B) \end{array}$$

pero,

$$\text{Ext}^1(\oplus_k P_k, B) = 0 = \prod \text{Ext}^1(P_k, B)$$

puesto que P_k y $\oplus_k P_k$ son proyectivos. Así, ∂ y d son sobreyectivos. Luego, existe un isomorfismo

$$\text{Ext}^1(\oplus_k A_k, B) \cong \prod \text{Ext}^1(A_k, B).$$

- $n \leq 1$. Tomamos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
 \text{Ext}^n(\oplus_k P_k, B) & \longrightarrow & \text{Ext}^n(\oplus_k L_k, B) & \xrightarrow{\partial} & \text{Ext}^{n+1}(\oplus_k A_k, B) & \longrightarrow & \text{Ext}^{n+1}(\oplus_k P_k, B) \\
 & & \downarrow \sigma & & \downarrow & & \\
 \prod \text{Ext}^n(P_k, B) & \longrightarrow & \prod \text{Ext}^n(L_k, B) & \xrightarrow{d} & \prod \text{Ext}^{n+1}(A_k, B) & \longrightarrow & \prod \text{Ext}^{n+1}(P_k, B)
 \end{array}$$

donde σ es un isomorfismo por hipótesis de inducción.

Ya que

$$\text{Ext}^n(\oplus_k P_k, B) = 0 = \prod \text{Ext}^n(P_k, B)$$

puesto que P_k y $\oplus_k P_k$ son proyectivos entonces ∂ y d son isomorfismos. Finalmente, $d \circ \partial^{-1} : \text{Ext}^{n+1}(\oplus_k A_k, B) \rightarrow \prod \text{Ext}^{n+1}(A_k, B)$ es un isomorfismo. \square

Tenemos el resultado análogo.

Proposición 47. Si $(B_k)_{k \in K}$ es una familia de módulos, entonces existe un isomorfismo natural

$$\text{Ext}_R^n(A, \prod_k B_k) \cong \prod \text{Ext}_R^n(A, B_k).$$

3.4.1. Extensiones y Ext

Definición 26. Dados $A, C \in R\text{-mód}$, una extensión de A por C es una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C \longrightarrow 0.$$

Una extensión se escinde si existe un mapeo $s : C \rightarrow A$ con $ps = \text{id}_C$.

Proposición 48. Si $\text{Ext}_R^1(C, A) = 0$, entonces cada extensión de A por C se escinde.

Demostración. Tomemos

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C.$$

aplicando $\text{Hom}(C, -)$ tenemos

$$0 \longrightarrow \text{Hom}(C, A) \xrightarrow{p_*} \text{Hom}(C, B) \xrightarrow{\partial} \text{Ext}^1(C, A).$$

Por hipótesis, $\text{Ext}^1(C, A) = 0$ y así p_* es sobyectiva. Y existe $s \in \text{Hom}(C, A)$ tal que $\text{id}_C = p_*(s)$, es decir, $ps = \text{id}_C$ \square

El siguiente corolario se sigue inmediatamente de la proposición anterior.

Corolario 49. 1. $P \in R\text{-mód}$ es proyectivo si y solo si $\text{Ext}_R^1(P, B) = 0$ para todo $B \in R\text{-mód}$.

2. $E \in R\text{-mód}$ es inyectivo si y solo si $\text{Ext}_R^1(A, E) = 0$ para todo $A \in R\text{-mód}$.

Definición 27. *Dados dos módulos C y A , dos extensiones de A por C*

$$\xi : 0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0, \quad \xi' : 0 \longrightarrow A \longrightarrow B' \longrightarrow C \longrightarrow 0.$$

decimos que un isomorfismo $\varphi : B \rightarrow B'$ es un isomorfismo de extensiones $\varphi : \xi \simeq \xi'$ si el siguiente diagrama es conmutativo.

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \text{id}_A & & \downarrow \varphi & & \downarrow \text{id}_C & & \\ 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

(de hecho, por el lema del 5, cualquier morfismo ϕ que haga conmutar el diagrama es, necesariamente, un isomorfismo). Se verifica inmediatamente que la existencia de un isomorfismo $\xi \simeq \xi'$ es una relación de equivalencia en la clase de extensiones de A por C . Entonces definimos

$$e(C, A) = \{ \text{extensiones de } A \text{ por } C \} / \simeq$$

Nuestro objetivo ahora es construir una biyección

$$e(C, A) \simeq \text{Ext}^1(C, A).$$

El primer paso será construir una función $e(C, A) \rightarrow \text{Ext}^1(C, A)$. Sea (P_C, ε) una resolución proyectiva de C , de modo que $\text{Ext}^n(C, A)$ es la homología del complejo

$$\dots \leftarrow \text{Hom}(P_3, A) \xleftarrow{d_3^*} \text{Hom}(P_2, A) \xleftarrow{d_2^*} \text{Hom}(P_1, A) \xleftarrow{d_1^*} \text{Hom}(P_0, A) \xleftarrow{d_0^*} 0.$$

En particular, $\text{Ext}^1(C, A) = \text{Ker}(d_2^*) / \text{Im}(d_1^*)$.

Ahora tomemos una extensión ξ de A por C :

$$\xi = (0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0).$$

Dado que $\varepsilon : P_C \rightarrow C$ es una resolución proyectiva y la sucesión $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C$ es exacta, el lema de comparación nos da un morfismo de complejos $\alpha : (P_C, \varepsilon) \rightarrow \xi$ sobre id_C :

$$\begin{array}{ccccccccccc} \dots & \longrightarrow & P_3 & \xrightarrow{d_3} & P_2 & \xrightarrow{d_2} & P_1 & \xrightarrow{d_1} & P_0 & \xrightarrow{\varepsilon} & C & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \alpha_3 & & \downarrow \alpha_2 & & \downarrow \alpha_1 & & \downarrow \alpha_0 & & \downarrow \text{id}_C & & \\ \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Nótese que $\alpha_n = 0$ para $n \geq 2$. Así, $\alpha_1 d_2 = 0$ por la conmutatividad del diagrama. Esto es, $d_2^*(\alpha_1) = 0$, por lo cual $\alpha_1 \in \text{Ker}(d_2^*)$. De este modo, obtenemos $[\alpha_1] \in \text{Ext}^1(C, A)$. Para ver que esto define una función $e(C, A) \rightarrow \text{Ext}^1(C, A)$, probaremos que la asignación no depende del morfismo de complejos α ni del representante de la clase de ξ en $e(C, A)$. Primero, si $\alpha' : (P_C, \varepsilon) \rightarrow \xi$

es otro morfismo sobre id_C , entonces el lema de comparación nos da una homotopía $s : \alpha' \sim \alpha$. En grado 1, tenemos el diagrama (no conmutativo)

$$\begin{array}{ccccc} P_2 & \xrightarrow{d_2} & P_1 & \xrightarrow{d_1} & P_0 \\ & \searrow s_1 & \downarrow \alpha_1 & \downarrow \alpha'_1 & \nearrow s_0 \\ 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B \end{array}$$

con $\alpha'_1 - \alpha_1 = 0s_1 + s_0d_1 = s_0d_1 = d_1^*(s_0)$. Es decir, $\alpha'_1 - \alpha_1 \in \text{Im}(d_1^*)$, por lo cual $[\alpha'_1] = [\alpha_1]$.

Ahora supongamos que $\xi' = (0 \rightarrow A \rightarrow B' \rightarrow C \rightarrow 0)$ es una extensión isomorfa a ξ . Tomando de nuevo el morfismo de complejos $\alpha : (P_C, \varepsilon) \rightarrow \xi$ dado por el lema de comparación, podemos componerlo con el isomorfismo $\xi \simeq \xi'$ para obtener un morfismo de complejos $(P_C, d_0) \rightarrow \xi'$ sobre id_C .

$$\begin{array}{ccccccccccc} \dots & \longrightarrow & P_3 & \xrightarrow{d_3} & P_2 & \xrightarrow{d_2} & P_1 & \xrightarrow{d_1} & P_0 & \xrightarrow{\varepsilon} & C & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \alpha_3 & & \downarrow \alpha_2 & & \downarrow \alpha_1 & & \downarrow \alpha_0 & & \downarrow \text{id}_C & & \\ \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \text{id}_A & & \downarrow \beta & & \downarrow \text{id}_C & & \\ \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Así, a ξ' le corresponde en $\text{Ext}^1(C, A)$ la clase de $\text{id}_A \alpha_1 = \alpha_1$, que es el mismo elemento que le corresponde a ξ . Por lo tanto, la asignación $[\xi] \mapsto [\alpha_1]$ es una función bien definida

$$\psi : e(C, A) \rightarrow \text{Ext}^1(C, A).$$

Observación 5. Notemos que, si $\xi : 0 \rightarrow A \rightarrow B \xrightarrow{p} C \rightarrow 0$ se escinde, entonces $\psi([\xi]) = 0$. En efecto, si p tiene una sección $j : C \rightarrow B$ (es decir, $pj = \text{id}_C$), entonces $pj\varepsilon = \varepsilon$, así que el siguiente diagrama es un morfismo de complejos

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & P_2 & \xrightarrow{d_2} & P_1 & \xrightarrow{d_1} & P_0 & \xrightarrow{\varepsilon} & C & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow 0 & & \downarrow 0 & & \downarrow j\varepsilon & & \downarrow \text{id}_C & & \\ \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \xrightarrow{p} & C & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

\xleftarrow{j}

con $\alpha_1 = 0$. Luego, $\psi([\xi]) = [\alpha_1] = [0]$.

Ahora vamos a construir la función $\text{Ext}^1(C, A) \rightarrow e(C, A)$ inversa a ψ . Para esto, consideremos primero el siguiente lema.

Lema 50. Dada una extensión $\Xi : 0 \rightarrow X_1 \xrightarrow{j} X_0 \xrightarrow{\varepsilon} C \rightarrow 0$ y un morfismo $h : X_1 \rightarrow A$, existe una única extensión (salvo isomorfismo) $0 \rightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{\eta} C \rightarrow 0$ tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & X_1 & \xrightarrow{j} & X_0 & \xrightarrow{\varepsilon} & C & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow h & & \downarrow \beta & & \downarrow \text{id}_C & & \\ 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{i} & B & \xrightarrow{\eta} & C & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

es conmutativo.

Demostración. Sea $B = A \oplus_{X_1} X_0 = \text{Coeq}(j \oplus 0, -h \oplus 0)$ el coproducto fibrado de h y j . Definiendo i, β como los morfismos canónicos,

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{j} & X_0 \\ h \downarrow & & \downarrow \beta \\ A & \xrightarrow{i} & B \end{array}$$

tenemos que i es mono porque j lo es. Dado que $\varepsilon j = 0 = 0h : X_1 \rightarrow C$, la propiedad del coproducto fibrado, nos da una única flecha $\eta : B \rightarrow C$ que hace conmutar el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} X_1 & \xrightarrow{j} & X_0 & & \\ h \downarrow & & \downarrow \beta & \searrow \varepsilon & \\ A & \xrightarrow{i} & B & \xrightarrow{\eta} & C \\ & \searrow 0 & & & \end{array}$$

Notemos que η es epi, pues si $f : C \rightarrow Z$ cumple $f\eta = 0$, tenemos $0 = f\eta\beta = f\varepsilon$, así que $f = 0$ porque ε es epi. Por lo tanto, el diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & X_1 & \xrightarrow{j} & X_0 & \xrightarrow{\varepsilon} & C \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow h & & \downarrow \beta & & \downarrow \text{id}_C \\ 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{i} & B & \xrightarrow{\eta} & C \longrightarrow 0. \end{array}$$

es conmutativo y solo queda revisar la exactitud del segundo renglón en B . Para esto, veamos que $\eta : B \rightarrow C$ cumple la propiedad del conúcleo de i . Consideremos un morfismo $g : B \rightarrow Z$ con $gi = 0$. Entonces $g\beta j = gi h = 0$. Como $X_0 \xrightarrow{\varepsilon} C$ es el conúcleo de j , la composición $g\beta$ se factoriza de manera única a través de ε , digamos como $g\beta = u\varepsilon$.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & X_1 & \xrightarrow{j} & X_0 & \xrightarrow{\varepsilon} & C \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow h & & \downarrow \beta & \nearrow u & \downarrow \text{id}_C \\ 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{i} & B & \xrightarrow{\eta} & C \longrightarrow 0 \\ & & \searrow 0 & & \downarrow g & & \\ & & & & Z & & \end{array}$$

Notemos que tanto g como $u\eta$ hacen conmutar el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 X_1 & \xrightarrow{j} & X_0 \\
 h \downarrow & & \downarrow \beta \\
 A & \xrightarrow{i} & B \\
 & \searrow 0 & \searrow u\eta \\
 & & Z
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \nearrow g\beta \\
 \nearrow g \\
 \nearrow u\eta
 \end{array}$$

Por la propiedad universal del producto fibrado, se sigue que $g = u\eta$. Más aún, esta u es la única factorización de g a través de η , ya que η es epi. Esto muestra que $B \xrightarrow{\eta} C$ es el conúcleo de $A \xrightarrow{i} B$, así que el diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & X_1 & \xrightarrow{j} & X_0 & \xrightarrow{\varepsilon} & C \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow h & & \downarrow \beta & & \downarrow \text{id}_C \\
 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{i} & B & \xrightarrow{\eta} & C \longrightarrow 0.
 \end{array}$$

tiene renglones exactos.

Ahora supongamos que $0 \rightarrow A \rightarrow B' \rightarrow C \rightarrow 0$ es otra extensión que hace conmutar el diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & X_1 & \xrightarrow{j} & X_0 & \xrightarrow{\varepsilon} & C \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow h & & \downarrow \beta' & & \downarrow \text{id}_C \\
 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{i'} & B' & \xrightarrow{\eta'} & C \longrightarrow 0.
 \end{array}$$

Como B es el coproducto de h y j , tenemos una única flecha $\phi : B \rightarrow B'$ que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 X_1 & \xrightarrow{j} & X_0 \\
 h \downarrow & & \downarrow \beta \\
 A & \xrightarrow{i} & B \\
 & \searrow i' & \searrow \phi \\
 & & B'
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \nearrow \beta' \\
 \nearrow \phi
 \end{array}$$

Luego, tenemos el diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & X_1 & \xrightarrow{j} & X_0 & \xrightarrow{\varepsilon} & C \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow h & & \downarrow \beta & & \downarrow \text{id}_C \\
 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{i} & B & \xrightarrow{\eta} & C \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \text{id}_A & & \downarrow \phi & & \downarrow \text{id}_C \\
 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{i'} & B' & \xrightarrow{\eta'} & C \longrightarrow 0.
 \end{array}$$

Por el lema del 5, ϕ es un isomorfismo y, por lo tanto, las extensiones de B y B' son isomorfas. \square

Capítulo 4

Cohomología de gavillas

4.1. Gavillas

Existen muchos tipos de categorías de gavillas, en particular, nosotros nos enfocaremos en gavillas abelianas. En todo momento X será un espacio topológico y denotaremos por ΩX al conjunto de abiertos de X . El objetivo de las gavillas es estudiar a X en términos de sus invariantes topológicos, para ello le asociamos un funtor contravariante que va de ΩX a Ab , las categorías abelianas, formalmente:

Definición 28. Una **pregavilla** en X es un funtor contravariante

$$\mathcal{F} : \Omega X \rightarrow \text{Ab}$$

tal que si $U \subseteq V$ en X , entonces tenemos las flechas

$$\mathcal{F}(V) \rightarrow \mathcal{F}(U)$$

llamadas **restricciones** y denotadas por res_U^V .

A los elementos de $\mathcal{F}(V)$ se les llama secciones. Así, sea $s \in \mathcal{F}(V)$, entonces $\text{res}_U^V(s) = s|_U$.

Definición 29. Un **morfismo de pregavillas** es una transformación natural $\eta : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$, es decir, para toda $U \in \Omega X$,

$$\eta_U : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$$

es un morfismo de grupos, y de hecho, si $U \subseteq V$, entonces el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(V) & \xrightarrow{\eta_V} & \mathcal{G}(V) \\ \text{res}_U^V \downarrow & & \downarrow \text{res}_U^V \\ \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\eta_U} & \mathcal{G}(U) \end{array}$$

Es claro que esto forma una categoría, llamada categoría de pregavillas abelianas del espacio topológico X , denotada por $\text{Psh}(X, \text{Ab})$.

Definición 30 (Axioma de gavilla). *Una pregavilla $\mathcal{F} \in \text{Psh}(X, \text{Ab})$ es una gavilla si para todo $U \in \Omega X$ tal que $\mathcal{U} = \{U_i\}$ es una cubierta de U se cumple que:*

1. *para cualesquiera dos secciones $s, s' \in \mathcal{F}(U)$ tales que*

$$s|_{U_i} = s'|_{U_j} \quad \forall i, j$$

entonces $s = s'$.

2. *si $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ y $s_j \in \mathcal{F}(U_j)$ con $U_i, U_j \in \mathcal{U}$ tal que*

$$s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j} \quad \forall i, j$$

entonces existe una sección $s \in \mathcal{F}(U)$ tal que $s|_{U_i} = s_i$.

Algunas observaciones que se siguen directamente de la definición son las siguientes:

- Observemos que la sección global de (ii) es única por (i).
- $\mathcal{F}(\emptyset) = 0$. Ya que si $\emptyset = \cup U_i$ con $j \in \emptyset$ y si $s, s' \in \mathcal{F}(\emptyset)$ entonces por vacuidad

$$s|_{U_i} = s'|_{U_j}$$

para toda i, j y por lo tanto, $s = s'$.

- Si hay un elemento en $\mathcal{F}(\emptyset)$ es único. En efecto, si $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ tal que

$$s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j} \quad \forall i, j$$

entonces por (ii) existe una única sección global tal que $s|_{U_i} = s_i$.

Ejemplo 8. *Sea X un espacio topológico. Para cada $U \in \Omega X$, definimos $\mathcal{C}(U) = \{f : U \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ es continua}\}$. Así, \mathcal{C} es una gavilla con valores en \mathbb{C} -espacios vectoriales.*

$$\mathcal{C} : \Omega X \rightarrow \mathbb{C}\text{-Mód.}$$

Ejemplo 9. *Si S es una superficie de Riemann, entonces para todo $U \in \Omega S$ definimos*

$$\mathcal{O}(U) = \{f : U \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ es holomorfa}\}.$$

Este es un funtor contravariante

$$\mathcal{O}(-) : \Omega S \rightarrow \text{Rings.}$$

Además, $\mathcal{C}^\infty(U)$ es una gavilla de funciones diferenciables. En particular, podemos construir el haz tangente como una gavilla.

4.1.1. Fibras

Dado un espacio topológico X y un punto $p \in X$, denotemos como $\mathcal{U}(p)$ al sistema de vecindades abiertas de p en X :

$$\mathcal{U}(p) = \{U \in \Omega X : p \in U\}.$$

Notemos que $\mathcal{U}(p)$, ordenado con la contención usual, es un conjunto codirigido (dirigido hacia abajo), pues si $U_\alpha, U_\beta \in \mathcal{U}(p)$, entonces $U_\alpha \cap U_\beta \in \mathcal{U}(p)$. Al aplicar \mathcal{F} , la familia $\mathcal{F}(\mathcal{U}(p))$ es un conjunto dirigido (hacia arriba), pues las inclusiones

$$\iota_\alpha^\beta : U_\alpha \rightarrow U_\beta$$

se convierten en morfismos

$$\varphi_\alpha^\beta = \mathcal{F}(\iota_\alpha^\beta) : \mathcal{F}(U_\beta) \rightarrow \mathcal{F}(U_\alpha).$$

Así, tenemos el límite directo $\lim_{U \in \mathcal{U}(p)} \mathcal{F}(U)$.

Definición 31. La *fibra* de \mathcal{F} en el punto p es el límite directo

$$\mathcal{F}_p := \varinjlim \mathcal{F}(\mathcal{U}(p)) = \varinjlim_{p \in U} \mathcal{F}(U).$$

Notemos que, como $\mathcal{F}(\mathcal{U}(p))$ es un conjunto dirigido, entonces \mathcal{F}_p tiene la descripción

$$\mathcal{F}_p = \left(\bigsqcup_{U \in \mathcal{U}(p)} \mathcal{F}(U) \right) / \sim$$

donde dos secciones $s \in \mathcal{F}(U), s' \in \mathcal{F}(U')$, definidas en vecindades abiertas U, U' de p , son equivalentes ($s \sim s'$) si existe una vecindad abierta U'' de p con $U'' \subseteq U \cap U'$, tal que $s|_{U''} = s'|_{U''}$. La clase de $s \in \mathcal{F}(U)$ en \mathcal{F}_p se llama germen de s en p , y la podemos denotar como

$$s(p) = [s]_p = \langle U, s \rangle_p.$$

Cuando el punto p es claro por contexto, podemos omitirlo de la notación, para escribir $[s]$ o $\langle U, s \rangle$.

Ejemplo 10. Sea S una superficie de Riemann. Tomamos $\mathcal{O} : \Omega S \rightarrow \text{Ab}$ tal que $\mathcal{O}_p = \lim_{\rightarrow U} \mathcal{O}(U)$ y tomemos $s \in \mathcal{O}(U_\alpha)$ una función holomorfa definida en U_α , $s : U_\alpha \rightarrow \mathbb{C}$. Si elegimos cartas (V, z) al rededor de p y V es una carta de $z(p)$ en \mathbb{C} , entonces

$$s(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z(p))^n$$

Tomando el límite directo en p , obtenemos

$$\mathcal{O}_p \mapsto \mathbb{C}\{z - z(p)\}$$

es decir, la fibra en p es isomorfo al anillo en series de Taylor en los complejos al rededor del punto $z(p)$.

De manera similar, tomando la gavilla $\mathcal{M} : \Omega S \rightarrow \text{Campos}$, vemos que la fibra es isomorfa al anillo en series de potencias al rededor del punto $z(p) \in \mathbb{C}$:

$$\mathcal{M}_p \mapsto \mathbb{C}[[z - z(p)]].$$

Lema 51. *Sea F una gavilla en un espacio topológico S y $u \in \Omega S$ cualquier abierto. Dadas secciones $s, t \in Fu$, si $s_p = t_p$ para todo $p \in u$, entonces $s = t$.*

Demostración. Para cada $p \in u$ tenemos $[s]_p = [t]_p$. Por la descripción de F_p , esto significa que, para cada $p \in u$, existe un abierto $u_p \subseteq u$, con $p \in u_p$, donde las restricciones de s y t coinciden:

$$s|_{u_p} = t|_{u_p}.$$

Como para cada $p \in u$ tenemos $p \in u_p \subseteq u$, la colección $\{u_p \mid p \in u\}$ es una cubierta de u . Por el axioma de localidad (primer axioma de gavilla), se sigue que $s = t$. \square

4.2. La categoría de gavillas

Dado un espacio topológico S , las pregavillas y las gavillas sobre S forman categorías, donde los morfismos son las transformaciones naturales.

Lema 52. *Un morfismo de (pre)gavillas $\eta : F \rightarrow G$ es un isomorfismo si, y solo si, para todo abierto $u \in \Omega S$, el morfismo $\eta_u : Fu \rightarrow Gu$ es un isomorfismo.*

Ahora tomemos un morfismo de gavillas $\eta : F \rightarrow G$. Dado un punto $p \in S$, consideremos el sistema de vecindades abiertas de p . Si u, v son vecindades de p con $v \leq u$, tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} Fu & \longrightarrow & Fv \\ \downarrow & & \downarrow \\ Gu & \longrightarrow & Gv \\ & \searrow & \swarrow \\ & G_p & \end{array}$$

así, la familia de morfismos $Fu \rightarrow G_p$ nos da un único morfismo $F_p \rightarrow G_p$ que hace conmutar todos los diagramas de la forma

$$\begin{array}{ccc} Fu & \longrightarrow & Gu \\ \downarrow & & \downarrow \\ F_p & \longrightarrow & G_p. \end{array}$$

con $p \in u$.

Proposición 53. *Un morfismo de gavillas $\eta : F \rightarrow G$ es un isomorfismo si, y solo si, para todo $p \in S$ el morfismo entre las fibras $\eta_p : F_p \rightarrow G_p$ es un isomorfismo.*

Demostración. Por un lado si η es un isomorfismo, entonces cada $\eta_u : Fu \rightarrow Gu$ es un isomorfismo, así que $\eta_p : F_p \rightarrow G_p$ es un isomorfismo para cada $p \in S$.

Por otro lado, supongamos que, para cada $p \in S$, el morfismo η_p es iso. Sea $u \in \Omega S$ y mostremos que $\eta_u : Fu \rightarrow Gu$ es un iso. Tomando $s, t \in Fu$, con $\eta_u s = \eta_u t$, para cada $p \in u$ los gérmenes

$[\eta_u s]_p = [\eta_u s]_p$ son $\eta_p[s]_p = \eta_p[t]_p$. Como cada η_p es un isomorfismo, tenemos $[s]_p = [t]_p$ para todo p . Como F es gavilla, esto implica que $s = t$. Así, η_u es inyectiva.

Ahora consideremos una sección $r \in Gu$. Como cada η_p es suprayectiva, para cada $p \in U$ existe una sección $t_p \in F(v_p)$ definida en una vecindad v_p de p tal que $\eta_p[t_p]_p = [r]_p$.

Nos gustaría pegar estas secciones t_p en la cubierta $\{v_p \mid p \in u\}$. Lamentablemente, pueden no coincidir en las intersecciones $v_p \cap v_q$. Por eso, necesitamos restringirnos más.

Para cada $p \in u$, tenemos $\eta_p[t_p]_p = [r]_p$, esto es: $[\eta_{v_p} t_p]_p = [r]_p$, lo cual significa que existe un abierto u_p con $p \in u_p \subseteq v_p \subseteq u$ tal que las restricciones de $\eta_{v_p} t_p \in G(v_p)$ y $r \in Gu$ coinciden:

$$r|_{u_p} = (\eta_{v_p} t_p)|_{u_p} = \eta_{u_p}(t_p|_{u_p})$$

Ahora sí, definamos $s_p = (t_p|_{u_p}) \in F(u_p)$ para cada $p \in u$, de modo que

$$r|_{u_p} = \eta_{u_p} s_p.$$

Esta familia de secciones s_p sí las podremos pegar. Para esto, veamos que coinciden en las intersecciones $u_p \cap u_q$ para cualesquiera dos puntos $p, q \in u$. Tomando cualquier punto $x \in u_p \cap u_q$, tenemos

$$\begin{aligned} \eta_x[s_p|(u_p \cap u_q)]_x &= \eta_x[s_p]_x \\ &= [\eta_{u_p} s_p]_x \\ &= [r|_{u_p}]_x \\ &= [r|_{u_q}]_x \\ &= [\eta_{u_q} s_q]_x \\ &= \eta_x[s_q]_x \\ &= \eta_x[s_q|(u_p \cap u_q)]_x. \end{aligned}$$

Como cada η_x es inyectiva, se sigue que $[s_p|(u_p \cap u_q)]_x = [s_q|(u_p \cap u_q)]_x$. Por el principio de localidad, tenemos $s_p|(u_p \cap u_q) = s_q|(u_p \cap u_q)$. Notando que $\{u_p \mid p \in u\}$ es una cubierta de u , el axioma de pegado (segundo axioma de gavilla) nos permite obtener una sección $s \in Fu$ que coincida con $s_p \in F(u_p)$ en cada u_p :

$$s|_{u_p} = s_p.$$

Luego, $s \in Fu$ cumple $\eta_u s = r$, dado que, para todo $p \in u$, tenemos

$$\begin{aligned} [\eta_u s]_p &= [(\eta_u s)|_{u_p}]_p \\ &= [\eta_{u_p}(s|_{u_p})]_p \\ &= [\eta_{u_p} s_p]_p \\ &= [r|_{u_p}]_p \\ &= [r]_p. \end{aligned}$$

□

4.3. Núcleos, imágenes y conúcleos

Definición 32. Sea $\phi : F \rightarrow G$ un morfismo de pregavillas sobre S . Las construcciones en $\text{Psh}(S)$ se hacen abierto por abierto:

1. El núcleo $\text{Ker } \phi$ es la pregavilla dada para todo $u \in \Omega S$ como $(\text{Ker } \phi)(u) = \text{Ker}(\phi_u : Fu \rightarrow Gu)$.
2. La imagen $\text{Img } \phi$ es la pregavilla dada para todo $u \in \Omega S$ como $(\text{Img } \phi)(u) = \text{Img}(\phi_u : Fu \rightarrow Gu)$.
3. El conúcleo $\text{Coker } \phi$ es la pregavilla dada para todo $u \in \Omega S$ como $(\text{Coker } \phi)(u) = \text{Coker}(\phi_u : Fu \rightarrow Gu)$.

Definición 33. Si $F, G \in \text{Psh}(S)$, diremos que F es una subpregavilla de G , $F \leq G$, si

1. $\forall u \in \Omega S, Fu \leq Gu$
2. Para toda contención $u \leq v$, el morfismo $Fv \rightarrow Fu$ es la restricción de $Gv \rightarrow Gu$.

Si $F \leq G$, entonces la pregavilla cociente, denotada como G/F , es la pregavilla dada por $(G/F)(u) = (Gu)/(Fu)$ para todo $u \in \Omega S$ y, para toda contención $u \leq v$, el morfismo $(G/F)(v) \rightarrow (G/F)(u)$ es el único que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 Fv & \longrightarrow & Fu \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 Gv & \longrightarrow & Gu \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 (G/F)(v) & \longrightarrow & (G/F)(u).
 \end{array}$$

Proposición 54. Si $\phi : F \rightarrow G$ es un morfismo de gavillas, entonces $\text{Ker } \phi$ es una gavilla.

Demostración. Sea $\mathcal{U} \subseteq \Omega X$ una familia de abiertos y definamos $U = \bigcup \mathcal{U}$. Supongamos que tenemos secciones $s, t \in (\text{Ker } \phi)U$ que coinciden en cada $u \in \mathcal{U}$:

$$s|_u = t|_u.$$

Dado que $s, t \in (\text{Ker } \phi)(U) = \text{Ker}(\phi_U) \subseteq FU$ y F es una gavilla, esto implica que $s = t$, así que $\text{Ker } \phi$ cumple el axioma de localidad.

Ahora supongamos que tenemos una familia de secciones $\{s_u \mid u \in \mathcal{U}\}$ que coinciden en las intersecciones $u \cap v$ para cada $u, v \in \mathcal{U}$:

$$s_u|(u \cap v) = s_v|(u \cap v).$$

Dado que $s_u \in (\text{Ker } \phi)(u) = \text{Ker}(\phi_u) \subseteq Fu$, el axioma de pegado nos da una sección $s \in FU$ que coincide con s_u en cada u

$$s|_u = s_u,$$

pero falta probar que $s \in (\text{Ker } \phi)(U)$. Para cada $u \in \mathcal{U}$, tenemos $s_u \in \text{Ker}(\phi_u)$. Denotando los elementos neutros como $0_u \in Fu$ y $0_U \in FU$, tenemos

$$\begin{aligned} (\phi_U s)|_u &= \phi_u s_u \\ &= 0_u \\ &= 0_U|_u \end{aligned}$$

Por el axioma de localidad, se sigue que $\phi_U s = 0_U \in FU$. Así, $s \in \text{Ker}(\phi_U) = (\text{Ker } \phi)(U)$, por lo cual $\text{Ker } \phi$ cumple el axioma de pegado.

Se sigue que $\text{Ker } \phi$ es una gavilla. \square

Ejemplo 11. Sea S una superficie de Riemann. Entonces tenemos las gavillas \mathcal{O} , \mathcal{O}^* , dadas para cada $u \in \Omega S$ como

$$\begin{aligned} \mathcal{O}u &= \{s : u \rightarrow \mathbb{C} \mid s \text{ holomorfa} \} \\ \mathcal{O}^*u &= \{s : u \rightarrow \mathbb{C}^* \mid s \text{ holomorfa} \}, \end{aligned}$$

Si \mathcal{O} tiene estructura aditiva y \mathcal{O}^* , entonces tenemos un morfismo de gavillas abelianas

$$\exp : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}^*$$

dado, para cada $u \in \Omega S$, como

$$\begin{aligned} \exp_u : \mathcal{O}u &\rightarrow \mathcal{O}^*u \\ s &\mapsto e^{2\pi i s} \end{aligned}$$

donde $(e^{2\pi i s})(p) = e^{2\pi i s(p)}$ para todo $p \in S$.

Para cada $u \in \Omega S$, tenemos

$$\begin{aligned} \exp_u(s) = 1 &\iff e^{2\pi i s} = 1 \\ &\iff \forall p \in u, \quad s(p) \in \mathbb{Z} \\ &\iff s \in \{f : u \rightarrow \mathbb{Z} \mid f \text{ localmente constante} \} \\ &\iff s \in \underline{\mathbb{Z}}u. \end{aligned}$$

donde $\underline{\mathbb{Z}}$ es la notación para la gavilla de funciones localmente constantes. Así,

$$\text{Ker}(\exp) = \underline{\mathbb{Z}}.$$

Ejemplo 12. Sea S una superficie de Riemann. Tenemos las gavillas \mathcal{C} y \mathcal{C}^∞ de funciones continuas y funciones lisas, con estructura aditiva.

Sabemos que una función $f = u + iv : U \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa si, y solo si, cumple las ecuaciones de Cauchy-Riemann:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x}, \end{aligned}$$

lo cual sucede si, y solo si,

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + i \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) = 0.$$

Esto se puede escribir como

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)(u + iv) = 0.$$

La linealidad de la derivada nos dice que

$$\bar{\partial} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) : \mathcal{C}^\infty \rightarrow \mathcal{C}^\infty$$

es un morfismo de gavillas abelianas. Por lo tanto, tenemos que $f = u + iv \in \mathcal{C}^\infty(U)$ es holomorfa si, y solo si, $\bar{\partial}f = 0$, así que

$$\mathcal{O} = \text{Ker } \bar{\partial}.$$

A pesar de que el núcleo de un morfismo de gavillas es una gavilla, la imagen de un morfismo de gavillas no es, en general, una gavilla, como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 13. Consideremos la superficie de Riemann $S = \mathbb{C}^*$ y el morfismo de gavillas abelianas

$$\exp : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}^*$$

definido como en el ejemplo anterior, donde vimos que $\text{Ker}(\exp) = \mathbb{Z}$.

Veremos que la pregavilla $\text{Img}(\exp)$ no satisface el axioma de pegado. Para esto, consideremos la cubierta de S por los dos abiertos

$$U_1 = \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^- \quad U_2 = \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^+.$$

Notemos que U_1 y U_2 son simplemente conexos, por lo cual tenemos ramas del logaritmo $\log_j \in \mathcal{O}(U_j)$ tales que Por si acaso, esto no denota el logaritmo base 1 y base 2, sino funciones holomorfas $\log_j : U_j \rightarrow \mathbb{C}$ que cumplen

$$e^{\log_j(z)} = z$$

para todo $z \in U_j$.

Ahora consideremos las secciones $s_j \in \mathcal{O}^*(U_j)$ dadas por $s_j(z) = z$. Estas secciones están en $\text{Img}(\exp)(U_j)$, ya que

$$\begin{aligned} s_j(z) &= z \\ &= e^{\log_j(z)} \\ &= e^{2\pi i \log_j(z)/(2\pi i)} \\ &= \exp(f_j)(z), \end{aligned}$$

donde $f_j(z) = \log_j(z)/(2\pi i)$. En particular, $f_j \in \mathcal{O}(U_j)$, así que $s_j = \exp(f_j) \in \text{Img}(\exp)$.

Además, tenemos $U_1 \cap U_2 = \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}$, por lo cual

$$s_1|(U_1 \cap U_2) = s_2|(U_1 \cap U_2),$$

sin embargo, el pegado de s_1 y s_2 es la sección global $s \in \mathcal{O}(S)$ dada por $s(z) = z$ para todo $z \in S$, la cual no está en $\text{Img}(\exp)(S)$, pues no se puede escribir como $s = \exp(f)$ porque el logaritmo no se puede definir en todo S , ya que éste no es simplemente conexo.

Se sigue que la pregavilla $\text{Img}(\exp)$ no es una gavilla.

PENDIENTE SESIÓN 19

Tenemos un morfismo natural

$$\theta : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^+,$$

que definimos $U \in \Omega X$ tal que $\theta_U : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}^+(U)$, tomamos una sección $s^+ = \theta_U(s) : U \rightarrow |F|$ tal que $s^+(x) = [s]_x \in \mathcal{F}_x$.

De la observación REFERENCIA tenemos que si \mathcal{F} es gavilla entonces $\mathcal{F}^+ \cong \mathcal{F}$.

Proposición 55. Si \mathcal{F} es pregavilla y \mathcal{G} gavilla tomemos dos morfismos

$$\mathcal{F} \begin{array}{c} \xrightarrow{\varphi} \\ \xrightarrow{\psi} \end{array} \mathcal{G}$$

tal que $\varphi_x = \psi_x$ para toda $x \in X$ entonces $\varphi = \psi$

Demostración. Basta ver que para toda $U \in \Omega X$, $\varphi_U = \psi_U$. Sea $U \in \Omega X$ y $s \in \mathcal{F}(U)$, tomemos $[s]_x \in \mathcal{F}_x$ para $x \in U$. Notemos ahora que

$$\begin{aligned} [\varphi s]_x &= \varphi_x[s]_x \\ &= \psi_x[s]_x \\ &= [\psi s]_x \end{aligned}$$

como coinciden, entonces existe W una vecindad de x tal que $\varphi s|_W = \psi s|_W$, como esto es para toda $x \in U$, entonces $\{W_x\}$ forman una cubierta de U . Como \mathcal{G} es gavilla, existe una única sección que las representa en $\mathcal{G}(U)$. \square

Si \mathcal{F} es gavilla, $\theta : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^+$ es biyectiva.

Para ver la inyectividad tomemos dos secciones s, s' tal que $\theta(s) = \theta(s')$, es decir, $s^+(x) = s'^+(x)$ para toda $x \in U \in \Omega X$, o bien, $[s]_x = [s']_x$ y así $s|_W = s'|_W$ para una vecindad W de x , como \mathcal{F} es gavilla $s = s'$. Probemos la sobreyectividad, sea $s' \in \mathcal{F}^+(U)$ y $x \in U$, tomemos U_x una vecindad de x y $s(x) \in \langle U_x, s' \rangle$, como U_x forman una cubierta para U , entonces existe una sección $s \in \mathcal{F}(U)$ tal que $s|_{U_x} = s$ y así $\theta(s) = s(x) = s'(x)$.

Por lo tanto, θ es isomorfismo.

Ahora, supongamos que si \mathcal{F} es una pregavilla en X y \mathcal{G} es una gavilla en X y además tenemos

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{G} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{F}^+ & \xrightarrow{\varphi^+} & \mathcal{G}^+ \end{array}$$

que es un diagrama conmutativo. Entonces como θ_G es un isomorfismo, existe una flecha de $\varphi^* := \theta_G^{-1}\varphi^+ : \mathcal{F}^+ \rightarrow \mathcal{G}$ que factoriza a φ , es decir, $\varphi = \theta_G^{-1}\varphi^+\theta_F$ ya que $\theta_G\varphi = \varphi^+\theta_F$. Y además, φ^* es único.

4.4. Cohomología de Čech

Exposición A

4.4.1. Sucesión exacta larga en cohomología

Notemos que si $\phi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ es un morfismo de gavillas, entonces ϕ induce un morfismo en los grupos de cohomología de Čech.

$$\phi_* : \check{H}^n(X, \mathcal{F}) \rightarrow \check{H}^n(X, \mathcal{G})$$

tal que:

- $id_* = id$
- $(\phi \circ \psi)_* = \phi_* \circ \psi_*$

4.4.2. El homomorfismo de conexión

Tomemos $\phi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ un homomorfismo de gavillas sobreyectivo entonces

$$0 \longrightarrow \mathcal{K} \xrightarrow{i} \mathcal{F} \xrightarrow{\phi} \mathcal{G} \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta de gavillas en X , donde \mathcal{K} , denota la gavilla kernel de ϕ . Definamos un homomorfismo llamado *homomorfismo de conexión*

$$\Delta : \check{H}^0(X, \mathcal{G}) \rightarrow \check{H}^1(X, \mathcal{K}),$$

que debido al RESULTADO REFERENCIA se puede escribir como

$$\Delta : \mathcal{G}(X) \rightarrow \check{H}^1(X, \mathcal{K}),$$

para definirlo tomemos $g \in \mathcal{G}(X)$, ya que ϕ es sobreyectivo para cada punto p existe una vecindad U_p de p y un elemento $f_p \in \mathcal{F}(U_p)$ tal que $g|_{U_p} = \phi(f_p)$. Note que $\mathcal{U} = \{U_p\}$ es una cubierta abierta de X ; sea $h_{pq} = f_q - f_p \in \mathcal{U}_{pq}$, es claro que (h_{pq}) es un 1-cociclo para la gavilla \mathcal{F} ; además $\phi(h_{pq}) = 0$, ya que la diferencia en la intersección $U_p \cap U_q$ es $g - g$. Por tanto, (h_{pq}) es un 1-cociclo para la gavilla kernel \mathcal{K} , y representa una clase de cohomología en $\check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{K})$. Esta imagen en $\check{H}^1(X, \mathcal{K})$ es denotada por $\Delta(g)$ ([1]), además se prueba que no depende de las preimágenes ni de la cubierta elegida para X como podemos apreciar en el siguiente resultado (ver [2]).

Lema 56. *La construcción de $\Delta(g)$ es independiente de \mathcal{U} y de las preimágenes f_p*

Demostración. Primero demostremos la independencia de las preimágenes. Fijemos \mathcal{U} . Supongamos que existen, para cada p , f_p y $f'_p \in \mathcal{F}(U_p)$ tales que

$$\phi(f_p) = \phi(f'_p) = g|_{U_p}.$$

Sean $h_{pq} = f_q - f_p$ y $h'_{pq} = f'_q - f'_p$. Definamos $k_i = f_i - f' - i \in \mathcal{F}(U_i)$; note que en efecto $k_i \in \mathcal{K}(U_i)$ para cada i , así que (k_i) es una 0-cocadena para \mathcal{K} . Además, $d(k_i) = (l_{pq})$, donde

$$l_{pq} = k_q - k_p = (f_q - f'_q) - (f_p - f'_p) = h_{pq} - h'_{pq}.$$

Por lo tanto, la diferencia $(h_{pq}) - (h'_{pq}) = (l_{pq})$ es una cofrontera, y ambos representan el mismo elemento en el grupo de cohomología $\check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{K})$.

Para demostrar la independencia de la cubierta abierta podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $\mathcal{V} < \mathcal{U}$, de lo contrario, consideramos un refinamiento común, y sean $f_p \in \mathcal{F}(U_p)$ preimágenes de $g|_{U_p}$ y r una aplicación de refinamiento. En V_q definimos $f'_q = f_{r(q)}|_{V_q}$ y obtenemos preimágenes de g en los V_q . Acabamos de demostrar que podemos usar los f'_q para calcular $\Delta(g)$ a través de \mathcal{V} , tal como podríamos usar cualquier otro conjunto de preimágenes de g en \mathcal{V} . Como $\tilde{r}((f_p)) = (f'_p)$ tenemos que su imagen por el homomorfismo canónico en $\check{H}^1(X, \mathcal{F})$ será la misma. \square

Este homomorfismo de conexión nos ayuda para saber cuándo una sección global $g \in \mathcal{G}(X)$ es la imagen de una sección global de $\mathcal{F}(X)$ mediante ϕ .

Teorema 57. *Sea $\phi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ un epimorfismo de gavillas y $g \in \mathcal{G}(X)$ una sección global de \mathcal{G} . Existe una sección global $s \in \mathcal{F}$ tal que $\phi(s) = g$ si y solo si $\Delta(g) = 0$.*

Demostración. (\Rightarrow) Supongamos que $\phi(s) = g$. Entonces en la construcción del homomorfismo de conexión podemos tomar para todo $p \in X$, una vecindad $U_p = X$ y una sección $f_p = s$, en este caso tendríamos para todo p, q , usando la notación anterior, $h_{pq} = 0$ que inducen el elemento cero en la cohomología.

(\Leftarrow) Supongamos que $\Delta(g) = 0$ en $\check{H}^1(X, \mathcal{F})$, entonces para la cubierta \mathcal{U} , tenemos que (h_{pq}) es una cofrontera, es decir, $h_{pq} = k_q - k_p$ para cierta (k_p) 1-cocadena de \mathcal{K} . Sea $s_p = f_p - k_p$, siendo f_p la preimagen de g en U_p . En U_{pq} tenemos

$$s_p - s_q = (f_p - k_p) - (f_q - k_q) = (k_q - k_p) - (f_q - f_p) = k_q - k_p - h_{pq} = 0,$$

así por el axioma de gavilla, las secciones $\{s_p\}$ juntas son la sección $s \in \mathcal{F}(X)$ tal que $s|_{U_p} = s_p$ y como

$$g|_{U_p} = \phi(f_p) = \phi(s_p + k_p) = \phi(s_p) = \phi(s|_{U_p}),$$

y nuevamente por el axioma de gavilla se obtiene lo deseado. \square

Un resultado del Teorema anterior es el siguiente:

Corolario 58. *Sea $\phi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ un homomorfismo de gavillas con gavilla kernel \mathcal{K} . Si $\check{H}^1(X, \mathcal{K}) = 0$ la correspondencia entre secciones globales $\phi_X : \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{G}(X)$ es sobreyectiva.*

Observemos que el teorema anterior puede expresarse diciendo que la sucesión

$$\mathcal{F}(X) \xrightarrow{\phi_X} \mathcal{G}(X) \xrightarrow{\Delta} \check{H}^1(X, \mathcal{K}). \quad (4.1)$$

es exacta. Además, podemos notar que es una pequeña parte de una sucesión exacta más grande como se muestra a continuación:

Proposición 59. *Sea $\phi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ un epimorfismo de gavillas con kernel \mathcal{K} . Entonces la sucesión*

$$0 \longrightarrow \mathcal{K}(X) \xrightarrow{i} \mathcal{F}(X) \xrightarrow{\phi_X} \mathcal{G}(X) \xrightarrow{\Delta} \check{H}^1(X, \mathcal{K}) \xrightarrow{i_*} \check{H}^1(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{\phi_*} \check{H}^1(X, \mathcal{G}) \quad (4.2)$$

es exacta en cada paso.

Demostración. La exactitud de \mathcal{K} y \mathcal{F} se da por definición; mientras que la exactitud de \mathcal{G} es justamente el Teorema 57.

Ahora comprobemos la exactitud en el resto. Veamos primero que $\text{Im}(\Delta) \subset \text{Ker}(i_*)$, supongamos que $g \in \mathcal{G}(X)$. Por construcción de $\Delta(g)$ tomamos una cubierta abierta $\mathcal{U}_{i \in I}$ y buscamos elementos $f_i \in \mathcal{F}(U_i)$ con $\phi_{U_i}(f_i) = g|_{U_i}$; entonces $\Delta(g)$ es definido por un 1-cociclo $k_{ij} = f_j - f_i$ para la gavilla \mathcal{K} . Pero este 1-cociclo es una cofrontera en la gavilla \mathcal{F} .

Para finalizar la exactitud en $\check{H}^1(X, \mathcal{K})$, veamos que $\text{Ker}(i_*) \subset \text{Im}(\Delta)$. Suponga que (k_{ij}) es un 1-cociclo para la gavilla \mathcal{K} que representa una clase en el kernel de i_* . Entonces (k_{ij}) es una cofrontera, considerada como un 1-cociclo para la gavilla \mathcal{F} , así existe una 0-cocadena (f_i) tal que $k_{ij} = f_j - f_i$ en U_{ij} para toda i, j . Consideremos la 0-cocadena (g_i) para \mathcal{G} , donde $g_i = \phi(f_i)$. Note que

$$g_i - g_j = \phi(f_i - f_j) = \phi(k_{ij}) = 0 \quad \text{en } U_{ij},$$

así por el axioma de gavilla para \mathcal{G} existe una sección global $g \in \mathcal{G}(X)$ tal que $g|_{U_i} = g_i$ para toda i . Además de la construcción de Δ tenemos que $\Delta(g)$ es una clase de (k_{ij}) .

Finalmente, mostramos la exactitud en $\check{H}^1(X, \mathcal{F})$. Es claro que $i_* \circ \phi_* = 0$, por lo que solamente necesitamos probar que $\text{Ker}(\phi_*) \subset \text{Im}(i_*)$. Sea c una clase en $\text{Ker}(\phi_*)$ representada por un 1-cociclo (f_{ij}) con respecto a la cubierta \mathcal{U} tal que $\phi(f_{ij}) = g_j - g_i$ para todo $i, j \in J$. Después de refinar \mathcal{U} (si fuera necesario) ya que ϕ es un epimorfismo de gavillas, que cada $g_i = \phi(f_i)$ para cada elemento $f_i \in \mathcal{F}(U_i)$.

Sea $h_{ij} = f_{ij} - f_j + f_i \in \mathcal{F}(U_{ij})$; es claramente un 1-cociclo ya que (f_{ij}) lo es. Aplicando ϕ , vemos que $\phi(h_{ij}) = \phi(f_{ij}) - g_j + g_i = 0$, así que (h_{ij}) es actualmente un 1-cociclo para la gavilla kernel \mathcal{K} . Ya que difiere del cociclo (f_{ij}) por la cofrontera de la 0-cocadena (f_i) , esto también da la clase original c en cohomología. Así c está en la imagen de i_* . \square

Así, notamos que una sucesión exacta corta de gavillas nos brinda una sucesión exacta larga en cohomología.

Teorema 60. *Sea X un espacio paracompacto y sea*

$$0 \longrightarrow \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow 0$$

una sucesión exacta corta de gavillas en X . Entonces existe un homomorfismo de conexión $\Delta : \check{H}^n(X, \mathcal{G}) \rightarrow \check{H}^{n+1}(X, \mathcal{G})$ para cada $n \geq 0$ tal que la sucesión de grupos de cohomología

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \check{H}^0(X, \mathcal{K}) &\xrightarrow{i_*} \check{H}^0(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{\phi_*} \check{H}^0(X, \mathcal{G}) \xrightarrow{\Delta} \longrightarrow \\ &\longrightarrow \check{H}^1(X, \mathcal{K}) \xrightarrow{i_*} \check{H}^1(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{\phi_*} \check{H}^1(X, \mathcal{G}) \xrightarrow{\Delta} \longrightarrow \\ &\longrightarrow \check{H}^2(X, \mathcal{K}) \xrightarrow{i_*} \check{H}^2(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{\phi_*} \check{H}^2(X, \mathcal{G}) \xrightarrow{\Delta} \longrightarrow \end{aligned}$$

es exacta.

4.4.3. Axiomas de cohomología

Definición 34. Una gavilla \mathcal{F} sobre X es fina si para cada cubierta abierta localmente finita $\mathcal{U} = \{U_i\}$ de X existe para cada i un endomorfismo f_i de \mathcal{F} tal que:

1. $\text{Supp}(f_i) \in U_i$
2. $\sum_i f_i = \text{id}$

o bien, decimos que \mathcal{F} es fina si para dos conjuntos disjuntos $A \cap B \neq \emptyset$ cerrados de X , existe un endomorfismo $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ cuya restricción a la identidad está en una vecindad de A y el endomorfismo cero en una vecindad de B .

Ejemplo 14. La gavilla de funciones continuas \mathcal{C}_X es una gavilla fina sobre un espacio topológico Hausdorff paracompacto. Ya que para cualquier cubierta abierta finita $\mathcal{U} = \{U_i\}$ de X existe una partición de la unidad $\{\varphi_i\}$ subordinada a dicha cubierta. Usando estas φ_i definimos $\eta_i : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ tal que $\eta_i(U) : \mathcal{C}(U) \rightarrow \mathcal{C}(U)$ está dado por $\varphi_i \cdot s$, para todo $U \in \mathcal{U}$. Claramente es un morfismo de gavillas para cada η_i es un morfismo de gavillas para cada i . Además,

1. Si $x \in X - U_i$, entonces $\eta_i(\mathcal{C}_x) = 0$, ya que para cualquier $[s]_x \in \mathcal{C}_x$, representado por $\langle s, U \rangle$, con $x \in U$ podemos elegir U tal que $U \subseteq X - U_i$ y así,

$$\eta_i[s]_x = [\eta_i(U)(s)]_x = [\varphi_i \cdot s]_x = 0$$

2. Sea $s \in \mathcal{C}(X)$ una sección global, entonces para cada $x \in X$ se tiene

$$\sum_i \eta_i(s)(x) = \sum_i (\varphi_i \cdot s)(x) = \sum_i (\varphi_i(x)) \cdot (s(x)) = s(x) \sum_i \varphi_i(x) = s(x)$$

Con esta nueva definición en mente y lo que hemos visto hasta el momento de teoría de cohomología de Čech, veamos que en efecto es una teoría de cohomología.

Una teoría de cohomología de gavillas \mathcal{M} para un espacio topológico X con gavillas en R -módulos sobre X consta de:

1. Un R -módulo $H^q(X, \mathcal{F})$ para cada gavillas \mathcal{F} y para cada entero q .
2. Un homomorfismo $H^q(X, \mathcal{F}) \rightarrow H^q(X, \mathcal{G})$ para cada homomorfismo $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ y para cada entero q .
3. Un homomorfismo $H^q(X, \mathcal{F}'') \rightarrow H^{q+1}(X, \mathcal{F})$ para cada sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}' \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}'' \longrightarrow 0$$

y para cada entero q . Tal que las siguientes propiedades se cumplen:

- a) $H^q(X, \mathcal{F}) = 0$ para $q < 0$, y existe un isomorfismo

$$H^0(X, \mathcal{F}) \cong \mathcal{F}(X)$$

tal que para cada homomorfismo $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'$ el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} H^0(X, \mathcal{F}) & \xrightarrow{\cong} & \mathcal{F}(X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^0(X, \mathcal{F}') & \xrightarrow{\cong} & \mathcal{F}'(X) \end{array}$$

- b) $H^q(X, \mathcal{F}) = 0$ para toda $q > 0$ si \mathcal{F} es una gavilla fina.

- c) Si

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}' \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}'' \longrightarrow 0$$

es exacta, entonces la siguiente sucesión es exacta

$$\cdots \longrightarrow H^q(X, \mathcal{F}) \longrightarrow H^q(X, \mathcal{F}'') \longrightarrow H^{q+1}(X, \mathcal{F}') \longrightarrow H^{q+1}(X, \mathcal{F}) \longrightarrow \cdots$$

- d) El homomorfismo identidad $\text{id} : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ induce el morfismo identidad $\text{id}_* : H^q(X, \mathcal{F}) \rightarrow H^q(X, \mathcal{F})$.

- e) Si el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathcal{F}' \\ & \searrow & \downarrow \\ & & \mathcal{F}'' \end{array}$$

conmuta, entonces para cada q también lo hace el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} H^q(X, \mathcal{F}) & \longrightarrow & H^q(X, \mathcal{F}') \\ & \searrow & \downarrow \\ & & H^q(X, \mathcal{F}'') \end{array}$$

f) Para cada homomorfismo de sucesiones exactas de gavillas

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{F}' & \longrightarrow & \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathcal{F}'' \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{G}' & \longrightarrow & \mathcal{G} & \longrightarrow & \mathcal{G}'' \longrightarrow 0 \end{array}$$

el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} H^q(X, \mathcal{F}'') & \longrightarrow & H^{q+1}(X, \mathcal{F}') \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^q(X, \mathcal{G}'') & \longrightarrow & H^{q+1}(X, \mathcal{G}') \end{array}$$

El módulo $H^q(X, \mathcal{F})$ es llamado q -ésimo módulo de la cohomología de X relativo a la cohomología \mathcal{M} .

En todo momento tomemos $\mathcal{U} = \{U_i\}$ una cubierta abierta de X . una colección (U_0, \dots, U_q) de elementos de \mathcal{U} tal que $U_0 \cap \dots \cap U_q \neq \emptyset$ es llamado q -simplejo y denotado por $|\sigma|$. Denotamos, además, por $\sigma^i = (U_0, \dots, U_{i-1}, U_{i+1}, \dots, U_q)$. Tomemos $C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ para $q \geq 0$, el R -módulo que consiste en funciones que asignan a cada q -simplejo un elemento de $\mathcal{F}(|\sigma|)$ y $C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = 0$ para cada $q < 0$. Los elementos de $C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ son llamados q -cocadenas. Además, tenemos un homomorfismo cofrontera

$$d : C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow C^{q+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F}),$$

con el cual obtenemos un complejo de cadenas cuyo q -ésimo módulo de cohomología de Čech es denotado por $\check{H}^q(X, \mathcal{F})$.

Hemos visto por el RESULTADO REFERENCIA que $C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = 0$ para todo $q < 0$ y por lo tanto $\check{H}^q(X, \mathcal{F}) = 0$, lo cual prueba el inciso (a).

Además, el homomorfismo $\check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow \check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}')$ para toda q inducido por $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'$ conmuta con los homomorfismos de refinamiento

$$\check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow \check{H}^q(\mathcal{V}, \mathcal{F})$$

y así induce homomorfismos en

$$\check{H}^q(X, \mathcal{F}) \rightarrow \check{H}^q(X, \mathcal{F}')$$

los cuales satisfacen (d) y (e).

Para probar (b), tomemos $\eta_i : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ en la cubierta \mathcal{U} , es suficiente probar que $\check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = 0$. Sea $f \in C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$, tomemos $\sigma = (U_0, \dots, U_{p-1})$ un $(p-1)$ - simplejo, entonces

$$f_i = \eta_i(f(U_i, U_0, \dots, U_{p-1})) = \eta_i f(U_i, U_0, \dots, U_{p-1}) \in \mathcal{F}(U_i \cap U_0 \cap \dots \cap U_{p-1}).$$

Como $\eta_i = 0$ en $X - U_i$, entonces $\eta_i = 0$ en $U - (U \cap U_i)$ con soporte $\text{Supp}(f_i) \subset U_i \cap U$. Así, podemos extender por cero a f_i a una sección continua de \mathcal{F} sobre $U_0 \cap \dots \cap U_{p-1}$ de la siguiente forma:

- El abierto $U = U_0 \cap \cdots \cap U_{p-1}$ tiene una cubierta abierta dada por $U_1 = U - \text{Supp}(f_i)$ y $U_2 = U \cap U_i$.
- Tenemos secciones $f_i \in \mathcal{F}(U_2)$, $0 \in \mathcal{F}(U_1)$ tales que coinciden, es decir, $f_i = 0 \in \mathcal{F}(U_1 \cap U_2)$.

entonces como \mathcal{F} es gavilla existe una única sección, denotada

$$F|_{|\sigma|}(\eta_i f) \in \mathcal{F}(U)$$

, llamada *extensión por cero* de f_i a U , tal que

$$F|_{|\sigma|}(\eta_i f)|_{U \cap U_i} = f_i \in \mathcal{F}(U \cap U_i)$$

Ahora, estas secciones, definen una $(q-1)$ -cocadena denotada $g_i \in C^{q-1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$. Tal que para cualquier q -simplejo $\sigma = (U_0, \dots, U_q)$:

$$\begin{aligned} dg_i(\sigma) &= \sum_{j=0}^q (-1)^j g_i(\sigma^j)|_{\sigma} \\ &= \sum_{j=0}^q (-1)^j F_{\sigma^j}(\eta_i f)(U_i \cap U_j)|_{\sigma} \\ &= \eta_i f(\sigma) - F_{\sigma} d\eta_i f(U_i \cap U_0 \cap \cdots \cap U_q). \end{aligned}$$

Así, $dg_i(\sigma) = \eta_i f(\sigma)$ ya que $d\eta_i f = 0$ porque f es un cociclo. Finalmente, concluimos que $dg_i = \eta_i f$ para toda i .

Definimos ahora, $g = \sum_i g_i \in C^{q-1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$, la suma es finita ya que para cada i y cada $(q-1)$ -simplejo σ se tiene que $g_i(\sigma) = 0$ fuera de U_i , así para cualquier $x \in X$ existe un número finito de abiertos U_i que lo contienen, ya que \mathcal{U} es localmente finita. Entonces, solo en esos U_i , $g_i \neq 0$.

Finalmente, para todo $(q-1)$ -simplejo σ , tenemos

$$\begin{aligned} dg(\sigma) &= d\left(\sum_i g_i(\sigma)\right) \\ &= \sum_i dg_i(\sigma) \\ &= \sum_i \eta_i f(\sigma) \\ &= f(\sigma). \end{aligned}$$

Así, todo q -ciclo f con $q > 0$ es una cofrontera y $\check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = 0$.

Bibliografía

- [1] Kato, G. (2006). *The heart of cohomology*. Springer Science & Business Media.
- [2] Miranda, R. (2003). *Riemann Curves and Algebraic curves*. Cambridge studies in advanced mathematics.
- [3] Rotman, J. J. (2008). *An introduction to homological algebra*. Springer Science & Business Media.
- [4] Warner, F. W. (2013). *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*. Springer Science & Business Media.
- [5] Weibel, C., & Butler, M. C. R. (1996). *An introduction to homological algebra*. Bulletin of the London Mathematical Society.