El Framework de Black & Scholes

Cuando se habla del framework de Black & Scholes, se está haciendo referencia a lo siguiente:

1. Para la ditribución del precio de la acción:
   - El precio al tiempo t del activo subyacente S_t sigue una distribución $log-normal$, es decir $S_t \sim LogN(*,*)$.
   - El activo subyacente no paga dividendos o paga dividendos a una tasa continua a un nivel proporcional a su precio.
2. Para el entorno economico:
   - La tasa de interes libre de riesgo con composición continua es **r** y es constante. Además, se puede prestar y pedir prestado a la misma tasa **r**
   - No hay costos de transacción ni impuestos.
   - Esposible comprar o vender en corto cualquier numero de unidades del activo subyacente.
   - **No hay oportunidades de arbitraje**

Notación: Para $t_1 < t_2$, $R(t_1,t_2) := log(\frac{S_{t_2}}{S_{t_1}})$ es la tasa de rendimiento con composición continua, no anualizada de la acción S de t_1 a t_2, i.e.,

$$S_{t_2} = S_{t_1} \cdot e^{R(t_1,t_2)}$$

¿Qué significa que un activo pague dividendos a una continua?
Significa que una unidad de subyacente hoy, se convertirá en $e^{\delta t}$ unidades de acción despues de t periodos.

$$1 \to e^{\delta t}$$

¿En términos de dinero esto que significa?

$$1 \cdot S_0 \to e^{\delta t} S_t$$

A δ se le conoce como *tasa de dividendos*

Se usan rendimientos no anualizados, ya que los rendimientos con composición contunia son aditivos:

$$log(\frac{S_{t_2}}{S_{t_1}}) = log(\frac{S_{t_2}}{S_{t_1}} \cdot \frac{S_{t_1}}{S_{t_0}}) = log(\frac{S_{t_2}}{S_{t_1}}) + log(\frac{S_{t_1}}{S_{t_0}})$$

Es decir, $R(t_0,t_2) = R(t_0,t_1) + R(t_1,t_2)$, $t_0 < t_1 < t_2$.
Inductivamente para $T \in \mathbb{N}_+$,

$$R(0,T) = R(0,1) + R(1,2) + ... + R(T-1,T)$$

Las suposiciones con respecto a la distribución del precio de la ación se puede dar en términos de los rendimientos correspondientes:

- Los rendimientos en dos periodos disjuntos son independientes
- La media y la varianza de $R(t_1,t_2)$ son proporcionales a $t_2 - t_1$

- En particular , $R(t_1,t_2) \sim N((\alpha-\delta-\frac{1}{2}\sigma^2), \sigma^2(t_2-t_1))$

IMPORTANTE: Por el momento esta es una suposición artificial, más adelante se verá como se llegó a ésta.

Entonces, la suposición anterior se puede reescribir como

$$R(t_1,t_2) = (\alpha-\delta-\frac{1}{2}(t_2-t_1)+\sigma\sqrt{t_2-t_1}Z, conZ \sim N(0,1)$$

Donde,

- α es la tasa de rendimiento anual esperado de la acción.
- δ es la tasa de dividendo continua
- σ es la volatlidad de la acción.

Notemos que $e^{R(t_1,t_2)}$ es el factor de acumulación de t_1 a t_2 **estocastico**

Proposición:

- $\mathbb{E}(e^{R(t_1,t_2)}) = e^{(\alpha-\delta)(t_2-t_1)}$
- $Var(e^{R(t_1,t_2)}) = e^{2(\alpha-\delta)(t_2-t_1)}(e^{\sigma^2(t_2-t_1)}-1)$

Demostración:

Proposición: $Corr(R(0,t_1), R(0,t_2)) = \sqrt{\frac{t_1}{t_2}}$
Demostración:

Sea S_t el precio de la acción al tiempo t. Ya se dijo que

$$S_t = S_0 e^{R(0,t)}$$

Nótese que S_t tiene distribución $log-normal$ pues $log(S_t) = log(S_0) + R(0,t)$ tiene distribución $log-normal$.

$$S_t \sim logN(log(S_0) + (\alpha-\delta-\frac{\sigma^2}{2}t), \sigma^2 t)$$

$$S_t = S_0 e^{(\alpha-\delta-\frac{\sigma^2}{2})t+\sigma\sqrt{t}Z}$$

Proposición:

- $\mathbb{E}(S_t) = S_0 e^{(\alpha-\delta)t}$

- Sea x_p el p-cuantil de S_t, i.e., $\mathbb{P}(S_t \leq x_p) = p$. Entonces $x_p = S_0 \cdot exp\{(\alpha - \delta - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma\sqrt{t}Z_p\}$ donde, Z_p es el p-cuantil de una v.a normal estandar.

- $Med(S_t) = S_0 e^{(\alpha-\delta-\frac{\sigma^2}{2})t}$

- $\mathbb{E}(S_t^k) = exp\{(\alpha - \delta - \frac{\sigma^2}{2})tk + \frac{t\sigma^2 k^2}{2}\}$

- $\mathbb{E}(S_t^2) = exp\{(\alpha - \delta)2t + \sigma^2 t\}$

- $Var(S_t) = \mathbb{E}^2(S_t)(e^{\sigma^2 t} - 1)$

Demostración:

Proposición: Para $t_1 \leq t_2$

- $Cov(S_{t_1}, S_{t_2}) = S_0 e^{(\alpha-\delta)(t_1+t_2)}(e^{t_1\sigma^2 - 1})$

- $Corr(S_{t_1}, S_{t_2}) = \sqrt{\frac{e^{\sigma^2 t_1} - 1}{e^{\sigma^2 t_2} - 1}}$

Deostración:

Lema: Si $Y \sim logN(\mu, \sigma^2)$ entonces:

- $\mathbb{E}(Y \cdot \nVdash_{(y>k)}) = \mathbb{E}(Y)\Phi(x_0)$

- $\mathbb{E}(Y \cdot \nVdash_{(y<k)}) = \mathbb{E}(Y)\Phi(-x_0)$

Donde $x_0 := \frac{log(\frac{\mathbb{E}(y)}{k} + \frac{\sigma^2}{2})}{\sigma}$
Demostración:

Observación: En la expresión para x_0, no depende de μ **Proposición:**

- $\mathbb{E}(S_t \nVdash_{(S_t>k)}) = \mathbb{E}(S_t)\Phi(\dot{d}_1)$.

- $\mathbb{E}((S_t \nVdash_{(S_t<k)}) = \mathbb{E}(S_t)\Phi(-\dot{d}_1)$

Donde, $\dot{d}_1 := \frac{log(\frac{S_0}{k}) + (\alpha - \delta - \frac{\sigma^2}{2})t}{\sigma\sqrt{t}}$
Demostración:

Recordatorio: Si A es un evento tal que $\mathbb{P}(A) > 0$ entonces,

$$\mathbb{E}(X|A) = \frac{\mathbb{E}(X\mathbb{1}_A)}{\mathbb{P}(A)}$$

Proposición: Si $\dot{d}_2 := \frac{log(\frac{S_0}{k})+(\alpha-\delta-\frac{sigma^2}{2})t}{\sigma\sqrt{t}}$

- $\mathbb{P}(S_t > k) = \Phi(\dot{d}_2)$
- $\mathbb{P}(S_t < k) = \Phi(-\dot{d}_2)$
- $\mathbb{E}(S_t|S_t > k) = S_0 e^{(\alpha-\delta)t}\frac{\Phi(\dot{d}_1)}{\Phi(\dot{d}_2)}$
- $\mathbb{E}(S_t|S_t < k) = S_0 e^{(\alpha-\delta)t}\frac{\Phi(-\dot{d}_1)}{\Phi(-\dot{d}_2)}$

Observación: $\dot{d}_2 = \dot{d}_1 - \sigma\sqrt{t}$
Proposición: Un intervalo del $100(1-\gamma)\,\%$ de confianza/predicción para S_t esta dado por,

$$S_0 \cdot exp\{(\alpha - \delta - \frac{\sigma^2}{2})t + Z_{\frac{\gamma}{2}}\sigma\sqrt{t}\}$$