Forward

¿Cuánto cuesta un Forward?
Supongamos que el plazo del Forward es T, el precio pactado es K y la tasa libre de riesgo con composición continua es r.

- **Caso 1:** La acción subyacente, NO paga dividendos.
  Consideremos 2 potafolios:
  $$\pi^{(1)} : Una\, accion\, del\, subyacente$$
  $$\pi^{(2)} : Un\, forward\, large\, y\, una\, inversion\, a\, la\, tasa\, libre\, de\, riesgo\, de\, Ke^{-rT}$$
  En T, ¿cuánto vale $\pi^{(1)}$?
  $$\pi_T^{(1)} = S_T$$
  En T, ¿cuánto vale $\pi^{(2)}$?
  $$\begin{aligned}\pi_T^{(2)} &= S_T - K + (Ke^{-rT})e^{rT} \\ &= S_T - K + K \\ &= S_T\end{aligned}$$
  ¡Wow! Tengo 2 portafolios que en T valen lo mismo.
  Por ley del precio unico
  $$\pi_0^{(1)} = \pi_0^{(2)} .... :)$$
  ¿Cuánto vale hoy el portafolio 1?
  $$\pi_0^{(1)} = S_0$$
  ¿Cuánto vale hoy el portafolio 2?
  $$\pi_0^{(2)} = f + Ke^{-rT}$$
  Entonces, por :) tenemos que
  $$\begin{aligned}f + Ke^{-rT} &= S_0 \\ f &= S_0 - Ke^{-rT}\end{aligned}$$
  Este es el precio de un forward en el caso de una acción que no paga dividendos.

- **Caso 2:** La acción subyacente paga dividendos continuos a la tasa δ.
  1 unidad de acción hoy $\rightarrow e^{\delta T}$ unidades de acción en T.
  Consideremos 2 portafolios
  $$\pi^{(1)} : Una\, unidad\, de\, accion$$
  $$\pi^{(2)} : e^{\delta T}\, forwards\, largos\, sobre\, la\, accion\, y\, una\, inversion\, a\, la\, tasa\, libre\, de\, riesgo\, de\, Ke^{-(r-\delta)T}$$
  En T, ¿cuánto vale el portafolio 1 ?
  $$\pi_T^{(1)} = e^{\delta T} S_T$$
  En T, ¿cuánto vale el portafolio 2?
  $$\begin{aligned}\pi_T^{(2)} &= e^{\delta T}(S_T - K) + (Ke^{-(r-\delta)T})e^{rT} \\ &= e^{\delta T}(S_T - K) + Ke^{\delta T}\end{aligned}$$

$$= e^{\delta T} S_T - e^{\delta T} K + ke^{\delta T}$$
$$= e^{\delta T} S_T$$

¡Wow! Tengo 2 portafolios que al tiempo T tienen el mismo valor.

$$\pi_T^{(1)} = \pi_T^{(2)} = e^{\delta T} S_T$$

Por ley del precio único

$$\pi_0^{(1)} = \pi_0^{(2)} ... : S$$

¿Cuánto vale hoy el portafolio 1?

$$\pi_0^{(1)} = S_0$$

¿Cuánto vale hoy el portafolio 2?

$$\pi_0^{(2)} = e^{\delta T} f + Ke^{-(r-\delta)T}$$

Entonces, por :S tenemos que

$$e^{\delta T} f + Ke^{-(r-\delta)T} = S_0$$

Despejando f,

$$S_0 - Ke^{-(r-\delta)T} = e^{\delta T} f$$
$$f = S_0 e^{-\delta T} - Ke^{-rT}$$

Esto es, el preco del forward en el caso de una acción que paga dividendo continuos.

- **Caso 3:** La acción subyacente paga dividendos discretos.
  ¿Qué significa que la acción pague dividendos dicretos?
  Significa que el poseedor de la acción recibirá un Div_j al tiempo t_j
  Se supondrá que las fichas de pagos de dividendos son conocidas y también el monto de cada dividendo.
  Considerando 2 portafolios.

$$\pi^{(1)} : Una\, unidad\, de\, accion$$

$\pi^{(2)} : Un\, forward\, largos\, sobre\, la\, accion\, y\, una\, inversion\, a\, la\, tasa\, libre\, de\, riesgo\, de\, Ke^{-rT}\, y\, un\, bono\, libre\, de\, riesgo\, que\, p$

¿Cuánto vale el portafolio 1 al tiempo T?

$$\pi_T^{(1)} = S_T + \sum_{j=1}^{m} Div_j e^{r(T-t_j)}$$

En T, ¿cuánto vale el portafolio 2?

$$\pi_T^{(2)} = S_T - K + (ke^{-rT})e^{rT} + \sum_{j=1}^{m} Div_j e^{r(T-t_j)}$$

$$= S_T + \sum_{j=1}^{m} Div_j e^{r(T-t_j)}$$

¡Wow! Tengo 2 portafolios que al tiempo T coincien en el valor.
Por ley del precio único

$$\pi_0^{(1)} = \pi_0^{(2)} ... : V$$

¿Cuánto vale hoy el portafolio 1?

$$\pi_0^{(1)} = S_0$$

¿Cuánto vale hoy el portafolio 2?

$$\pi_0^{(2)} = f + Ke^{-rT} + \sum_{j=1}^{m} Div_j e^{-rt_j}$$

Entonces, por :V tenemos que

$$S_0 = f + Ke^{-rT} + \sum_{j=1}^{m} Div_j e^{-rt_j}$$

Despejando f,

$$f = S_0 - ke^{-rT} - \sum_{j=1}^{m} Div_j e^{-rt_j}$$

Precio de un forward para el caso de una acción que paga dividendos discretos.

¿Cuánto vale el **precio forward**?
El precio forward es el valor de K que hace que f sea 0.

- Caso 1: $f = S_0 - ke^{-rT}$

$$0 = S_0 - ke^{-rT}$$
$$K = S_0 e^{rT}$$

  Notación: $F_{0,T}(S)$

- Caso 2: $f = S_0 e^{-\delta T} - ke^{-rT}$

$$0 = S_0 e^{-\delta T} - ke^{-rT}$$
$$K = S_0 e^{(r-\delta)T}$$

  Notación: $F_{0,T}(S_0)$

- Caso 3: Tareita

Recordatorio

Notación:

Definición: $F_{0,T}^{P}(S) := F_{0,T}(S)e^{-rT}$
A $F_{0,T}^{P}(S)$ se le conoce como prepaid forward price.
A $F_{0,T}(S)$ se le conoce como forward price o precio forward.
Claramente,

Recordatorio: Paridad put-call.

$$Call - Put = Forward$$

Ya podemos dar 3 versiones de esta paridad.

- Acción no paga dividendos.

$$C(S,K,T) - P(S,K,T) = S_0 - Ke^{-rT} ...(< 3)$$
$$= F_{0,T}^{P}(S) - Ke^{-rT}$$

- Acción que paga dividendos continuos

$$C(S,K,T) - P(S,K,T) = S_0 e^{-\delta T} - Ke^{-rT}$$
$$= F_{0,T}^{P}(S) - Ke^{-rT}$$

- Acción que paga dividendos discretos.

$$C(S,K,T) - P(S,K,T) = S_0 - \sum_{j=1}^{m} Div_j e^{-rt_j} - Ke^{-rT}$$

$$= F^P_{0,T}(S) - Ke^{-rT}$$

Podemos reescribir la ec. (< 3)

$$C(S,K,T) - P(S,K,T) = S_0 - Ke^{-rT}$$

$$C(S,K,T) + Ke^{-rT} = P(S,K,T) = S_0$$

Si yo compro una call, más me vale tener el dinero para poder ejercerla, i.e., necesito tener K en T si decido ejercerla. Si yo compro un aput (estoy comprando el derecho a vender) más me vale tener algo que vender (la acción) en casi de que decida hacerlo.

Definición: Opcion chooser
Una opción chooser con un plazo de T es una opción que tiene la caracteristica de que al tiempo $t_0 < T$ (t_0 es fijo y contractualmente) el poseedor de ésta puede elegir si la opción es una put o una call con vencimiento en T.
¿Cuánto cuesta en 0 una opción chooser?
¿Cuánto vale en t_0 una opción chooser?

$$max\{C(S_{t_0}, K, T - t_0), P(S_{t_0}, K, T - t_0)\}$$

Observación: Usando la paridad put-call $C - P = f, P = C - f$

$$max\{C(S_{t_0}, K, T - t_0), P(S_{t_0}, K, T - t_0)\}$$
$$= max\{C(S_{t_0}, K, T - t_0), C(S_{t_0}, K, T - t_0) - F^P_{0,T-t_0}(S) + ke^{-r(T-t_0)}\}$$

Recordatorio:
Para $a, b, c \in \mathbb{R}_+$

$$max\{a, b\} = c + max\{a - c, b - c\}$$

Entonces,

$$= C(S_{t_0}, K, T - t_0) + max\{0, ke^{-r(T-t_0)} - F^P_{0,T-t_0}(S)\}$$

Para una acción que no paga dividendos

$$= C(S_{t_0}, K, T - t_0) + max\{0, ke^{-r(T-t_0)} - S_{t_0}\}$$

Así pues,

$$V_0 = C(S_0, K, T) + P(S_0, Ke^{-r(T-t_0)}, t_0)$$

Considere un portafolio que contiene lo siguiente.

1. Una call con strike K y plazo T
2. Una put con strike $ke^{-r(T-t_0)}$ y plazo t_0

¿Cuánto vale este portafolio al tiempo t_0?

1. Simplemete $C(S_{t_0}, K, T - t_0)$
2. El payoff $(Ke^{-r(T-t_0)} - S_{t_0})$

Por lo tanto, podemos concluir que el precio de la chooser option al tiempo 0 es,

$$V_0 = C(S_0, K, T) + P(S_0, Ke^{-r(T-t_0)}, t_0)$$

Este valor también lo pudimos obtener de la siguiente forma.
Al tiempo t_0, dijimso que el valor de esta opción es

$$max\{C(S_{t_0}, K, T - t_0), P(S_{t_0}, K, T - t_0)\}$$
$$= P(S_{t_0}, K, T - t_0) + max\{C(S_{t_0}, K, T - t_0) - P(S_{t_0}, K, T - t_0), 0\}$$
$$= P(S_{t_0}, K, T - t_0) + max\{F_{T-t_0}(S) - Ke^{-r(T-t_0)}, 0\}$$
$$= P(S_{t_0}, K, T - t_0) + max\{S_{t_0} - Ke^{-r(T-t_0)}, 0\}$$
$$= P(S_{t_0}, K, T - t_0) + (S_{t_0} - Ke^{-r(T-t_0)})_+$$

Con el mismo razonamiento que se utilizo anteriormente

$$V_0 = P(S_0, K, T) + C(S_0, Ke^{-r(T-t_0)}, t_0)$$

Las expresiones anteriores son para el valor de la opción chooser.
En todo lo que hemos visto esta semana, aparecen $C(*)$ y $P(*)$, i.e., las primas de una call y una put. ¡Necesitamos saber cuanto valen estas!
Afortunada o desafortunadamente, para encontrarlas necesitamos alguna hpt con respecto a la distribución de S_t

- Framework B&S.
- árboles binomiales.