# Browniano

**Definiión:** Se dice que un proceso estocastico $(B_t)_{t\geq 0}$ es un movimiento Browniano estandar si:

1. $B_0 = 0$ c.s
2. $B_{t+s}|B_t = b \sim N(b, s)$
3. Tiene incrementos independientes, i.e, $B_{t+s_1} - B_t \perp B_t - B_{t-s_2}$ para cualesquiera $t, s_1, s_2 \in \mathbb{R}_+$

**Observación:** Se puede demostrar que para casi todo $w \in \Omega$, la aplicación $t \mapsto B_t(w)$ es continua
**Ejemplo:** El precio de una acción sigue un movimiento Browniano. El precio de la acción al tiempo 3 es de \$52. Calcule la probabilidad de que el precio de la acción sea de al menos \$55 al tiempo 12.

¿Hace sentido que el movimiento Browniano sea un modelo para precios de activos?
NO, por muchas razones, la principal es que $B_t$ puede tomar cualquier valor real, y los precios en principio, son no negativos.

## 1. Movimiento Browniano Aritmetico

**Definición:** Un movimiento Browniano aritmetico $(X_t)_{t\geq 0}$ es un proceso estocastico que se puede escribir como

$$X_t = X_0 + \alpha t + \sigma B_t$$

Donde $(B_t)_{t\geq 0}$ es un movimiento Browniano estandar.
Nótese que:

- $$\begin{aligned} X_{t+s} - X_t &= (X_0 + \alpha(t+s) + \sigma B_{t+s}) + (X_0 + \alpha t + \sigma B_t) \\ &= \alpha s + \sigma(B_{t+s} - B_t) \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_{t+s} - X_s) &= \alpha s + \sigma \mathbb{E}(B_{t+s} - B_t) \\ &= \alpha s + \sigma 0 = \alpha s \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} Var(X_{t+s} - X_s) &= Var(\alpha s + \sigma(B_{t+s} - B_t) \\ &= Var(\sigma(B_{t+s} - B_t)) \\ &= \sigma^2 Var(B_{t+s} - B_t) \\ &= \sigma^2 s \end{aligned}$$

Entonces,

$$X_{t+s} - X_t \sim N(\alpha s, \sigma^2 s)$$

Al parametro $\alpha$ se le conoce como **drift** del proceso.
Tambien nótese que:

$$X_{t+s}|X_t = x \sim N(x + \alpha s, \sigma^2 s)$$

**Ejemplo:** El precio de un acción sigue un movimiento Browniano aritmetico de la forma $X_t = X_0 + t + 0.2B_t$. Si el precio actual de la acción es de $40, calcule la probabilidad de que el precio de la acción al tiempo 4 sea menor de $43.

¿Hace sentido que el movimiento Browniano Aritmetico sea un modelo para precios de activos?
NO. Por lo mismo que un movimiento Browniano estandar.

## 2. Movimiento Browniano Geométrico

**Definición:** Se dice que el proceso $(X_t)_{t\geq 0}$ es un movimiento Browniano geométrico si $(log(X_t))_{t\geq 0}$ es un movimiento Browniano aritmético.
Si,

$$log(\frac{X_t}{X_0}) \sim N(\mu t, \sigma^2 t)$$

Entonces,

$$X_t \sim logN(\mu t, \sigma^2 t)$$

Y por lo tanto,

$$\mathbb{E}(\frac{X_t}{X_0}) = e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t}$$

$$Var(\frac{X_t}{X_0}) = e^{2\mu t + \sigma^2 t}(e^{\sigma^2 t} - 1)$$

Pero también se puede escribir $log(\frac{X_t}{X_0}) = \mu t + \sigma\sqrt{t}Z$, donde $Z \sim N(0, 1)$
$\Rightarrow \frac{X_t}{X_0} = exp\{\mu t + \sigma\sqrt{t}Z\}$
$\Rightarrow X_t = X_0 e^{\mu t + \sigma\sqrt{t}Z}$

El movimiento Browniano geometrico es un modelo popular para modelar precios de acciones.

- Si $(S_t)_{t\geq 0}$ sigue un movimiento Browniano geometrico, entonces $\frac{S_{t+n}}{S_0}$ se distribuye log-normal.
- Tambien $\frac{S_{t+n}}{S_t}$ se distribuye log-normal, cuyos parámetros no dependen de t.

***Disclaimer:** A partir de este momento, seré muy muy muy informal en la manera que escribo matematicas. Me interesan las ideas que la formalidad.
En cálculo clásico se sabe que si $y(t) = e^{rt}$, entonces

$$\frac{dy}{dt} = ce^{ct}$$

Escrito en forma de "diferenciales"

$$dy = ce^{rt}dt = cydt$$

Es decir, $\frac{dy}{y} = cdt$ (que ya se parecea alguna de las ecuaciones diferenciales que conocemos)
Supongase que hay cierta incertidumbre en esta tasa de cambio, i.e., se escribirá $\frac{dy}{y} = cdt + \sigma dB_t$, donde $\sigma dB_t$ es el "término de error".
En este momento se puede decir que $dB_t$ es la "diferencial"de un movimiento **Browniano Estandar**, que se puede pensaer como el límite ciando $n \to 0$, de una variabe aleatoria igual a $h$ con probabilidad $\frac{1}{2}$ e igual a $-h$ con probabilidad $\frac{1}{2}$

**Ejemplo:** En un movimiento Browniano aritmetico $X_t = X_0 + \mu t + \sigma B_t$ se escribe la "diferencial"de éste como

$$dX_t = \mu dt + \sigma dB_t$$

Ün pequeño cambio en X es igual a $\mu$ veces un pequeño cambio en el tiempo más $\sigma$ veces un pequeño cambio en el movimiento Browniano"
**Ejemplo:** En un movimiento Browniano Estandar $(B_t)_t \geq 0$, $B_t \sim N(0,t)$, por lo tanto $dB_t \sim N(0, dt)$
El valor al tiempo t de un movimiento Browniano geometrico $(X_t)t \geq 0$ se puede expresar en términos de su logaritmo

$$log(X_t) = log(X_0) + (\zeta - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma B_t$$

La "diferencial"de esta expresión es

$$d(log(X_t)) = (\zeta - \frac{1}{2}\sigma^2)dt + \sigma dB_t$$

Y se dijo que este movimiento Browniano geometrico se puede expresar como

$$X_t = X_0 exp(\zeta - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma B_t$$

Más adelante se probará que la dferencial de este movimiento Browniano es

$$dX_t = \zeta X_t dt + \sigma X_t dB_t$$

$$\Rightarrow \frac{dX_t}{X_t} = \zeta dt + \sigma dB_t$$

**Ejemplo:** Supongase que el proceso de precios de una acción sigue la dinamica $dS_t = 0.25 S_t dt + 0.10 S_t dB_t$, calcular la probabildad de que $S_t$ sea al menos 5 % más grande que $S_0$ en:

- t=1
- t=0.1

**Solución:** La dinamica de la acción es un movimiento Browniano geometrico con $\zeta = 0.25$ y $\sigma = 0.10$, por lo tanto $\mu = \zeta - \frac{1}{2}\sigma^2$ es el parametro correspondiente al movimiento Browniano Arirmetico, entonces

$$d(log(S_t)) = (0.25 - \frac{1}{2}(0.1)^2)dt + 0.1dB_t$$

$$= 0.245dt + 0.1dB_t$$

Entonces

$$\mathbb{P}(\frac{S_t}{S_0} \geq 1.05) = \mathbb{P}(log(S_t) - log(S_0) \geq log(1.05))$$

- Para $t = 1$, $m = 0.245$ y $v = 0.1$

$$\mathbb{P}(log(S_t) - log(S_0) \geq log(1.05))$$

$$= \mathbb{P}(\frac{log(S_t) - log(S_0) - 0.245}{0.1} \geq \frac{log(1.05) - 0.245}{0.1})$$

$$= 1 - \Phi(\frac{log(1.05) - 0.245}{0.1}) = 1 - \Phi(-1.96210)$$

$$= \Phi(1.96210) = 0.97512 = \mathbb{P}(S_1 \geq S_0(1.05))$$

- Para $t = 0.1$, $m = 0.245(0.1)$, $v = 0.1\sqrt{0.1}$

$$\mathbb{P}(log(S_t) - log(S_0) \geq Log(1.05))$$

$$= \mathbb{P}(\frac{log(S_t) - log(S_0) - 0.0245}{0.1\sqrt{0.1}} \geq \frac{log(1.05) - 0.0245}{0.1\sqrt{0.1}}$$

$$= 1 - \Phi(0.26812) = 0.22121 = \mathbb{P}(S_{0.1} > S_0(1.05))$$

**Ejemplo:** Se sabe que $(S_t)_{t>0}$ sigue una dinamica estocastisca definida mediante $\frac{dS_t}{S_t} = 0.15dt + 0.2dB_t$, dado que $S_0 = 40$, calcular la probabilidad de que $S_{13} \in (40, 50)$
**Solucion:**
$(S_t)_{t>0}$ sigue un movimiento Browniano geometrico.

$$\mathbb{P}(10 < S_13 < 50 | S_q = 40) = \mathbb{P}(40 < S_{13-9} < 50 | S_{9-9} = 40)$$

$$\mathbb{P}(40 < S_4 < 50 | S_0 = 40)$$

Los parámetros asociados a la variable aleatoria normal son:

$$\mu t = 4(0.15 - \frac{1}{2}(0.2)^2) = 0.52$$

$$\sigma\sqrt{t} = 0.2\sqrt{4} = 0.4$$

Así que,

$$\mathbb{P}(\frac{40}{40} < \frac{S_4}{S_0} < \frac{50}{40}) = \mathbb{P}(log(1) < log(\frac{S_4}{S_0}) < log(\frac{5}{4})$$

$$= \mathbb{P}(\frac{log(1) - 0.52}{0.4} \leq \frac{log(\frac{S_4}{S_0}) - 0.52}{0.4} \leq \frac{log(\frac{5}{4}) - 0.52}{0.4})$$

$$\Phi(\frac{log(\frac{5}{4}) - 0.52}{0.4}) - \Phi(\frac{-0.52}{0.4})$$

$$\Phi(-0.74214) - \Phi(-13)$$

$$= 0.1322$$

Formalmente, cuando se escribe la expresión

$$dX_1 = a(t, X_t) + b(t, X_t)dB_t$$

Se esta haciendo referencia a la siguiente ecuación

$$X_t = X_0 + \int_0^t a(u, X_u)\, du + \int_0^t b(u, X_u)\, dB_u$$

**El lema de Ito**

**Definición:** Un proceso de Ito es un proceso estocástico $(X_t)_{0 \leq t}$ cuya diferencial se puede expresar como:

$$dX_t = a(t, X_t)dt + b(t, X_t)dB_t$$

- El movimiento Browniano aritmetico es un proceso de Ito con $a(t, X_t) = \alpha$ y $b(t, X_t) = \sigma X_t$

- El movimiento Browniano geometrico es un proceso de Ito, con $a(t, X_t) = cX_t$ y $b(t, X_t) = \sigma X_t$

Un ejemplo importante es:

$$dX_t = \lambda(\alpha - X_t)dt + \sigma dB_t$$

i.e., $a(t, X_t) = \lambda(\alpha - X_t)$ y $b(t, X_t) = \sigma$.

"La"solución a esta ecuaciónse conoce como proceso de **Ornstein-Uhlenbeck**

- A $a(t, X_t)$ se le conoce como funcion de **drift** y a $b(t, X_t)$ se le conoce como función de volatilidad o función de difusión.
- El lema de Ito es una fórmula para çalcular"$dg(S, t)$, i.e., la "diferencial"de una función S y t donde S es estocastico.

**Proposición (lema de Ito)**:

$$dg = \frac{\delta g}{\delta S}ds + \frac{\delta g}{\delta t}dt + \frac{1}{2}\frac{\delta^2 g}{\delta S^2}(dS)^2$$

Donde para obtener $(dS)^2$ se utiliza la siguiente tabla:

| | dt | $dB_t$ |
|---|---|---|
| dt | 0 | 0 |
| $dB_t$ | 0 | dt |

**Observaciones:** Según esta tabla de "multiplicación"

- $dB_t(dB_t) = dt$
- $(dB_t)^3 = dB_t(dB_t)(dB_t) = dt(dB_t) = 0$
- $(dB_t)^4 = (dB_t)^3(dB_t) = 0(dB_t) = 0$

**Ejemplo:**
Si $X_t = \alpha t + \sigma B_t$, calcular $dX_t$ usando el lema de Ito.
**Solución:**
$X_t$ es una función de $B_t$, por tanto X juega el papel de g y B juega el papel de S en el lema de Ito.

- $\frac{\delta X}{\delta B} = \frac{\delta}{\delta B}(\alpha t + \sigma B) = \sigma$
- $\frac{\delta^2 X}{\delta B^2} = \frac{\delta}{\delta B}\sigma = 0$
- $\frac{\delta X}{\delta t} = \frac{\delta}{\delta t}(\alpha t + \sigma B) = \alpha$

Etronces, según el lema de Ito,

$$dX_t = \frac{\delta X}{\delta B}dB_t + \frac{\delta X}{\delta t}dt + \frac{1}{2}\frac{\delta^2 X}{\delta B^2}(dB)^2$$

$$= \sigma dB_t 6\alpha dt + \frac{1}{2}0dt$$

$$= \alpha dt + \sigma dB_t$$

**Ejemplo:** Suponga que $X_t = X_0 exp(c - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma B_t$, calcular $sX_t$ usando el lema de Ito.

$$\frac{\delta X}{\delta B} = \frac{\delta}{\delta B}(X_0 exp(c - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma B)$$

$$= X_0 exp(c * - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma B\sigma$$

$$= \sigma X$$

$$\frac{\delta^2 X}{\delta B^2} = \frac{\delta}{\delta B}(\sigma X)$$
$$= \sigma \frac{\delta X}{\delta B}$$
$$= \sigma(\sigma X) = \sigma^2 X$$
$$\frac{\delta X}{\delta t} = \frac{\delta}{\delta t}(X_0 exp(c - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma B)$$
$$= X_0 exp(c - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma B_t)(c - \frac{1}{2})$$
$$= (c - \frac{1}{2}\sigma^2)X$$

Entonces, por el lema de Ito

$$dX_t = \frac{\delta X}{\delta B} dB_t + \frac{\delta X}{\delta t} dt + \frac{1}{2}\frac{\delta^2 X}{\delta B^2}(dB)^2$$
$$= \sigma X_t dB_t + (c - \frac{1}{2}\sigma^2)X_t dt + \frac{1}{2}\sigma^2 X_t (dB_t)^2$$
$$= \sigma X_t dB_t + (c - \frac{1}{2}\sigma^2)X_t dt + \frac{1}{2}\sigma^2 X_t dt$$
$$= \sigma X_t dB_t + cX_t dt$$
$$= cX_t dt + \sigma X dB_t$$
$$\Rightarrow \frac{dX_t}{X_t} = cdt + \sigma dB_t$$

**Ejemplo:** Se sabe que $\frac{dX_t}{X_t} = \zeta dt + \sigma dB_t$. Calcular $d(log(X_t))$ utilizando el lema de Ito.
**Solución:**
Sea $Y_t := log(X_t)$.

$$\Rightarrow \frac{\delta y}{\delta X} = \frac{1}{X}$$
$$\frac{\delta^2 Y}{\delta X^2} = -\frac{1}{X^2}$$
$$\frac{\delta Y}{\delta t} = 0$$

Entonces,

$$dY_t = \frac{1}{X_t} dX_t + 0dt + \frac{1}{2}(-\frac{1}{X^2})(dX_t)^2$$
$$= \zeta dt + \sigma dBt + \frac{1}{2}(-\frac{1}{X_t^2}(dX_t)^2$$
$$= \zeta dt + \sigma dB_t - \frac{1}{2}(\frac{dX_t}{X_t})^2$$
$$= \zeta dt + \sigma dBt - \frac{1}{2}[\zeta^2 dtdt + \sigma^2 dB_t dB_t + 2\zeta\sigma dtBt]$$
$$= \zeta dt + \sigma dB_t - \frac{1}{2}\sigma^2 dt$$

**Ejemplo:** Se sabe que el precio de una acción sigue un proceso de Ito $dSt = \zeta S_t dt + \sigma S_t dB_t$. Considere un derivado sobre S que al tiempo t paga $S_t^5$ i.e., $C(S_t, t) = S_t^5$. Demuestre que $(Log(C(S_t, t)))_{0 \leq t}$ es un proceso de Ito.

**Solución:**

$$\frac{\delta C}{\delta S} = \frac{\delta}{\delta S}(S^5) = 5S^4$$
$$\frac{\delta^2 C}{\delta S^2} = \frac{\delta}{\delta S}(5S^4) = 20S^3$$
$$\frac{\delta C}{\delta t} = \frac{\delta}{\delta t}(S^5) = 0$$

Entonces, por el lema de Ito:

$$dC = 5S_t^4 dS_t + 0dB_t + \frac{1}{2}20S_t^3(dS_t)^2$$
$$= 5S_t^4 ds + \frac{1}{2}20S_t^3(dS_t)^2 ...(*)$$

Pero,

$$(dS_t)^2 = (\zeta S_t dt + \sigma S_t dB_t)^2$$
$$= \zeta^2 S_t^2 dtdt + 2\zeta\sigma S_t^2 dtB_t + \sigma^2 S_t^2 dB_t dB_t$$
$$= \zeta^2 S_t^2(0) + 2\zeta\sigma S_t^2(0) + \sigma^2 S_t^2 dt$$
$$= \sigma^2 S_t^2 dt$$

Así, sustituyendo en (*) tenemos que:

$$dC = 5S_t^4 dS_t + 10S_t^3\sigma^2 S_t^2 dt$$
$$= 5S_t^4(\zeta S_t dt + \sigma S_t dB_t) + 10\sigma^2 S_t^5 dt$$
$$= 5\zeta S_t^5 + 5\sigma S_t^5 dB_t + 10\sigma^2 S_t^2 dt$$
$$= (5\zeta S_t^5 + 10\sigma S_t 5)dt + 5\sigma S_t^5 dB_t$$
$$= S_t^5[(5\zeta + 10\sigma^2)dt + 5\sigma dB_t]$$
$$= C(S,t)[(5\zeta + 10\sigma^2)dt + 5\sigma dB_t]$$

Por el ejemplo 3,

$$d(log(C_t)) = (5\zeta + 10\sigma^2 - \frac{1}{2}(5\sigma)^2)dt + (5\sigma)dB_t$$
$$= (5\zeta - \frac{5}{2}\sigma^2)dt + 5\sigma dB_t$$

Haciendo $(5\zeta - \frac{5}{2}\sigma^2) = a$ y $5\sigma = b$

$$\Rightarrow dlog(C_t) = adt + bdt$$

$\therefore (log(C_t))_{0\leq t}$ es un proceso de Ito.

→ **Más adelante veremos más ejemplos**