* Un comentario sobre árboles (volatilidad)

→ Hasta el momento se han escogido $\boxed{u \text{ y } d}$ arbitrariamente. Sin embargo no son arbitrarios

- no se puede hacer a u demasiado bajo
- no se puede hacer a d demasiado alto

→ De hecho, debe ocurrir que $S_u > S_0 e^{(r-\delta)h}$ y $S_d < S_0 e^{(r-\delta)h}$ (i.e. $\boxed{S_d < S_0 e^{(r-\delta)h} < S_u}$) ya que si ocurriera lo contrario, habría oportunidades de arbitraje

→ En particular, en un árbol multiplicativo

$$\boxed{d < e^{(r-\delta)h} < u}$$

} mientras más alejados estén u y d más grande será la varianza del precio de la acción

→ Obsérvese que $S_0 e^{(r-\delta)h}$ es el precio forward de la acción así que se debe cumplir que

$$\boxed{S_d < F_{0,h}(S) < S_u}$$

y en un árbol multiplicativo

$$d S_0 < F_{0,h}(S) < u \cdot S_0$$

$$\boxed{d < \frac{F_{0,h}(S)}{S_0} < u}$$

... (ت)

→ Una primera propuesta para garantizar que u y d satisfagan esta propiedad se hace

$$u := \frac{F_{0,h}}{S_0} e^{\sigma\sqrt{h}}$$

$$d := \frac{F_{0,h}(S)}{S_0} e^{-\sigma\sqrt{h}}$$

con esta elección se satisface la condición (¡!)

y como $F_{0,h}(S) = e^{(r-\delta)h}$, entonces

$$u = \frac{F_{0,h}(S)}{S_0} e^{\sigma\sqrt{h}} = \frac{S_0 e^{(r-\delta)h}}{S_0} e^{\sigma\sqrt{h}}$$

$$= e^{(r-\delta)h+\sigma\sqrt{h}}$$

$$d = \frac{F_{0,h}(S)}{S_0} e^{-\sigma\sqrt{h}} = \frac{S_0 e^{(r-\delta)h}}{S_0} e^{-\sigma\sqrt{h}}$$

$$= e^{(r-\delta)h-\sigma\sqrt{h}}$$

ie
$$\boxed{\begin{aligned} u &= e^{(r-\delta)h+\sigma\sqrt{h}} \\ d &= e^{(r-\delta)h-\sigma\sqrt{h}} \end{aligned}}$$

árbol forward ó

árbol binomial estándar.

→ En este caso, la probabilidad riesgo neutro

$$p^* = \frac{e^{(r-\delta)h} - d}{u-d} = \frac{e^{(r-\delta)h} - e^{(r-\delta)h-\sigma\sqrt{h}}}{e^{(r-\delta)h+\sigma\sqrt{h}} - e^{(r-\delta)h-\sigma\sqrt{h}}}$$

$$= \frac{1-e^{-\sigma\sqrt{h}}}{e^{\sigma\sqrt{h}} - e^{-\sigma\sqrt{h}}} = \frac{1-\omega^{-1}}{\omega-\omega^{-1}} \quad \text{con} \quad \omega := e^{\sigma\sqrt{h}}$$

$$= \frac{1-\frac{1}{\omega}}{\omega-\frac{1}{\omega}} = \frac{\frac{\omega-1}{\omega}}{\frac{\omega^2-1}{\omega}} = \frac{\omega-1}{\omega^2-1} = \frac{\omega-1}{(\omega-1)(\omega+1)}$$

$$= \frac{1}{1+\omega} = \frac{1}{1+e^{\sigma\sqrt{h}}}$$

$$\boxed{\therefore p^* = \frac{1}{1+e^{\sigma\sqrt{h}}}}$$ ··· probabilidad riesgo neutro para un árbol forward.

* Observación:

$$1-p^* = 1-\frac{1}{1+e^{\sigma\sqrt{h}}} = \frac{1+e^{\sigma\sqrt{h}}-1}{1+e^{\sigma\sqrt{h}}} = \frac{e^{\sigma\sqrt{h}}}{1+e^{\sigma\sqrt{h}}}$$

$$= \frac{1}{e^{-\sigma\sqrt{h}}+1} = \frac{1}{1+e^{-\sigma\sqrt{h}}}$$

* Otras propuestas son hacer

$$\underbrace{u := e^{\sigma\sqrt{h}} \quad y \quad d := e^{-\sigma\sqrt{h}}}_{}$$

árbol de Cox-Ross-Rubinstein

ó bien

$$\underbrace{u := e^{(r-\delta-\frac{1}{2}\sigma^2)h+\sigma\sqrt{h}} \quad y \quad d := e^{(r-\delta-\frac{1}{2}\sigma^2)h-\sigma\sqrt{h}}}_{}$$

árbol de Jarrow-Rudd ó árbol lognormal

Tarcita: Verificar que las especificaciones de Cox-Ross-Rubinstein y Jarrow-Rudd satisfacen (¡!)