Observación árboles

Un comentario sobre árboles (volatilidad).

- Hata el momento se han escogido **u** y **d** arbitrariamente. Sin embargo NO son arbitrarios.
  - No se puede hacer a u demasiado bajo.
  - No se puede hacer a d demasiado bajo.
- De hecho, debe ocurrir que $S_u > S_0 e^{(r-\delta)h}$ y $S_d < S_0 e^{(r-\delta)h}$, i.e., $S_d < S_0 e^{(r-\delta)h} < S_u$. Ya que si ocurriera lo contrario, habría oportunidades de arbitraje.
- En particular, en un árbol multiplicativo $d < S_0 e^{(r-\delta)h} < u$
  Mientras más alejadas estén u y d, más grande será la varianza del precio de la acción.
- Obsérvese que $S_0 e^{(r-\delta)h}$ es el precio forward de la acción, así que debe cumplir que

  $$S_d < F_{0,h}(S) < S_u$$

  Y en un árbol multiplicativo

  $$dS_0 < F_{0,h}(S) < S_0$$

  $$d < \frac{F_{0,h}(S)}{S_0} < u... :)$$
- Una primera propuesta para garantizar que u y d satisfagan esta propiedad e hace

  $$u := \frac{F_{0,h}(S)}{S_0} e^{\sigma\sqrt{h}}$$

  $$d := \frac{F_{0,h}(S)}{S_0} e^{-\sigma\sqrt{h}}$$

  Y como $F_{0,h}(S) = e^{(r-\delta)h}$, entonces

  $$u = \frac{F_{0,h}(S)}{S_0} e^{\sigma\sqrt{h}} = \frac{S_0 e^{(r-\delta)h}}{S_0} e^{\sigma\sqrt{j}}$$

  $$= e^{(r-\delta)h+\sigma\sqrt{h}}$$

  $$d = \frac{F_{0,h}(S)}{S_0} e^{-\sigma\sqrt{h}} = \frac{S_0 e^{(r-\delta)h}}{S_0} e^{-\sigma\sqrt{h}}$$

  $$= e^{(r-\delta)h-\sigma\sqrt{h}}$$

  Es decir,

  $$u = e^{(r-\delta)h+\sigma\sqrt{h}} \quad d = e^{(r-\delta)h-\sigma\sqrt{h}}$$

  Esto es al árbol Forward o árbol binomial estandar.

- En este caso, la probabilidad de riesgo neutro

$$p^* = \frac{e^{(r-\delta)h} - d}{u-d} = \frac{e^{(r-\delta)h} - e^{(r-\delta)h-\sigma\sqrt{h}}}{e^{(r-\delta)h+\sigma\sqrt{h}} - e^{(r-\delta)h-\sigma\sqrt{h}}}$$

$$= \frac{1 - e^{-\sigma\sqrt{h}}}{e^{\sigma\sqrt{h}} - e^{-\sigma\sqrt{h}}} = \frac{1-w^{-1}}{w-w^{-1}}$$

Con $w := e^{\sigma\sqrt{h}}$

$$= \frac{1-\frac{1}{w}}{w-\frac{1}{w}} = \frac{\frac{w-1}{w}}{\frac{w^2-1}{w}} = \frac{w-1}{w^2-1} = \frac{w-1}{(w-1)(w+1)}$$

$$= \frac{1}{1+w} = \frac{1}{1+e^{\sigma\sqrt{h}}}$$

$$\therefore p^* = \frac{1}{1+e^{\sigma\sqrt{h}}}$$

Esta es la probabilidad de riesgo neutro para un árbol forward.

Observación

$$1 - p^* = 1 - \frac{1}{1+e^{\sigma\sqrt{h}}} = \frac{1+e^{\sigma\sqrt{h}}-1}{1+e^{\sigma\sqrt{h}}} = \frac{e^{\sigma\sqrt{h}}}{1+e^{\sigma\sqrt{h}}}$$

$$= \frac{1}{e^{-\sigma\sqrt{h}}} = \frac{1}{1+e^{-\sigma\sqrt{h}}}$$

Otras propuestas son hacer

$$u := e^{\sigma\sqrt{h}} \quad d := e^{-\sigma\sqrt{h}}$$

Que sería el arbol de Cox-Ross-Rubinstein.
O bien,

$$u := e^{(r-\delta-\frac{1}{2}\sigma^2)h+\sigma\sqrt{h}} \quad d := e^{(r-\delta-\frac{1}{2}\sigma^2)h-\sigma\sqrt{h}}$$

Que sería el árbol de Jarrow-Rudd o árbol lognormal.

Tareita: Verificar que las esfecificaciones de Cox-Ross.Rubinstein y Jarrow-Rudd satisfacen :)