CAPM

Recordatorio: Ya se dijo que, cuando hay n activos riesgosos y un activo libre de riesgo se cumple

$$\frac{\mathbb{E}(r_i) - r_f}{Cov(r_i, r_m)} = \frac{\mathbb{E}(r_m) - r_f}{Var(r_m)}$$

Equivalentemente,

$$\mathbb{E}(r_i) - r_f = \frac{Cov(r_i, r_m)}{Var(r_m)}[\mathbb{E}(r_m) - r_f]$$

Esto motiva que se haga la siguiente definición.

Definición: La beta del activo i se define como

$$\beta_i := \frac{Cov(r_i, r_m)}{Var(r_m)}$$

Con esta definición, se puede reescribir la ecuación anterior como:

$$\mathbb{E}(r_i) = r_f + \beta_i[\mathbb{E}(r_m) - r_f]$$

- El modelo completo (incluyendo las suposiciones detrás del modelo se establecerán más adelanate y el analisis media-varianza) que implica esta ecuación se conocme como **Capital Asset Pricing Model** (CAPM) y la ecuación que resume el resultado final se conoce como **Security Market Line** (SML).
- La SML establece que:
  Prima de riesgo esperado sobre la acción= Beta de la acción (Prima esperada de riesgo del mercado)
  $$\mathbb{E}(r_i) - r_f = \beta_i[\mathbb{E}(r_m) - r_f]$$
- Notese que $\beta_i = \frac{\mathbb{E}(r_i)-r_f}{\mathbb{E}(r_m)-r_f}$. Es decir, la beta de un security es el porcentaje de cambio esperado por unidad de rendimieno en el portafolio de mercado.
- Si se tienen r_f y $\mathbb{E}(r_m)$ fijos, se puede graficar β (eje horizontal)vs $\mathbb{E}(R)$ (eje vertical), que es precisamente la SML.
- La SML es la grafica de la aplicación $\beta \longmapsto \mathbb{E}(r) = r_f + \beta[\mathbb{E}(r_m) - r_f]$.
- Culaquier activo y portafolio, no importa si son eficientes o no, deben caer en la SML.
- La recta tiene pendiente positiva, i.e., $\mathbb{E}(r_m) > r_f$, lo que significa que un security con una **beta alta** tiene un rendimeinto **esperado alto**.
- Para resumir, el CAPM establece que el rendimiento esperado sobre un security está relacionado positiva y linealmente con β

Considérese una acción A cuyo rendimiento **no** está en la CML. Considérese el portafolio B con el mismo rendimiento esperado que A pero que si esta en la CML, i.e., $\mathbb{E}(r_B) = \mathbb{E}(r_A)\,\sigma_B < \sigma_A$ entonces $\sigma_A - \sigma_B = \mathbb{I}$ es el riesgo diversificable por el que los inversionistas de A no son compensados.
Matematicamente,

$$\frac{\mathbb{E}(r_B) - r_f}{\sigma_B} = pendiente\,de\,la\,CML = \frac{\mathbb{E}(r_m) - r_f}{\sigma_m}$$

De aquí que,

$$\sigma_B = \sigma_m(\frac{\mathbb{E}(r_B) - r_f}{\mathbb{E}(r_m) - r_f}) = \sigma_m(\frac{\mathbb{E}(r_A) - r_f}{\mathbb{E}(r_m) - r_f})$$

Pues, $\mathbb{E}(r_A) = \mathbb{E}(r_B)$

$$= \sigma_m(\beta_A)$$

es decir,

$$\sigma_B = \beta_A \sigma_m$$

$$\Rightarrow \beta_A = \frac{\sigma_B}{\sigma_m} < 1$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}(r_A) es\, pequena$$

1. Algunas aplicaciones del CAPM

Supongase un portafolio que tiene un Sharpe-Ratio $\frac{\mathbb{E}(r_\pi)-r_f}{\sigma_\phi}$, donde r_π es la tasade rendimiento del portafolio. Se está considerando hacer una inversión con tasa de rendimiento r_i. Como se está pidiendo prestado r_f para hacer esta inversión, el rendimiento incremental es $\mathbb{E}(r_i) - r_f$
La contribución a la volatilidad del portafolio es $Corr(r_\pi, r_i)\sigma_i$. Sin embargo,

$$Corr(r_\pi, r_i)\sigma_i = \frac{Cov(r_\pi, r_i)}{\sigma_\pi \sigma_i}\sigma_i = \frac{Cov(r_\pi, r_i}{\sigma_\pi}$$

Por lo tanto, el Sharpe-Ratio se incrementa sólo si

$$\frac{\mathbb{E}(r_i) - r_f}{Corr(r_\pi, r_i)\sigma_i} > \frac{\mathbb{E}(r_\pi) - r_f}{\sigma_\pi}$$

Es decir, si $Corr(r_\pi, r_i) > 0$, y entonces,

$$\mathbb{E}(r_i) - r_f > \frac{\mathbb{E}(r_\pi) - r_f}{\sigma_\pi} Corr(r_\pi, r_i)\sigma_i$$

$$= \frac{\mathbb{E}(r_\pi) - r_f}{\sigma_\pi} \frac{Cov(r_\pi, r_i)}{\sigma_\pi} = \frac{\sigma_{\pi,i}}{\sigma_\pi^2}[\mathbb{E}(r_\pi) - r_f]$$

Es decir, hay un incremento en el Sharpe-Ratio si,

$$\mathbb{E}(r_i) - r_f > frac\sigma_{\pi,i}\sigma_\pi^2[\mathbb{E}(r_\pi) - r_f]$$

Si se define la beta de la inversión i, con respecto al portafolio π como

$$\beta_i^\pi := \frac{Corr(r_\pi, r_i)\sigma_i}{\sigma_\pi} = \frac{Cov(r_\pi, r_i)}{\sigma_\pi^2}$$

Entonces, la inversión incrementa al Sharpe-Ratio sólo si:

$$\mathbb{E}(r_i) - r_f > \beta_i^\pi(\mathbb{E}(r_\pi) - r_f)$$

i.e.,

$$\mathbb{E}(r_i) > r_f + \beta_i^\pi(\mathbb{E}(r_\pi) - r_f)$$

En un portafolio eficiente, el rendimiento sobre cada inversión es el rendimiento requerido, i.e.,

$$\mathbb{E}(r_i) = r_f + \beta_i^\pi(\mathbb{E}(r_\pi) - r_f)$$

Ejemplo: Se tiene la siguiente información acerca de 2 acciones.

	Rendimiento Esperado	Volatilidad
A	0.1	0.2
B	0.2	0.5

Además, la correlación entre los rendimientos de las acciones es de 0.8, la tasa de interes libre de riesgo efectiva anual es del 2 %.
Se forma un portafolio con 50 % del activo A y 50 % del activo B.
La acción C tiene una volatilidad del 0.3, su correlación con el activo A es del 0.1 y con el activo B del 0.4.
Calcular el rendimiento requerido sobre la acción C para justificar agregarlo al portafolio.