# Arboles

- Ya vimos el marco continuo o de $B\&S$.
  En este marco, la suposición más contundente es la de la distribución log-normal.
- Ahora veremos un marco de valuación en tiempo discreto que permita valuar opciones.

Supongamos que tenemos una call con cubyacente S , Strike K y vencimiento T.
Supongamos, que al tiempo T, la acción subyacente puede tomar sólo 2 valores $S_u$ o $S_d$, con $S_u > S_d$ y $S_u, S_d$ conocidos.

$$\begin{tikzcd} & S_u \\ S_0 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & S_d \end{tikzcd}$$

**Ejemplo:**

$$\begin{tikzcd} & 75 \\ 50 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & 15 \end{tikzcd}$$

¿Cuál es el precio de la call?

$$\begin{tikzcd} & (S_u - K)_+ \ Escenario 1 \\ C \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & (S_d - K)_+ \ Escenario 2 \end{tikzcd}$$

Vamos a construir un portafolio que replique el comportamiento de la call sin importar el escenario en el que nos encontremos.
$\pi$ : $\alpha$ unidades del subyacente y una inversión de $\beta$ pero a la tasa libre de riesgo.
¿Cuánto vale este portafolio hoy?

$$\pi_0 = \alpha S_0 + \beta$$

¿Cuánto vale este portafolio en T?

$$\pi_T = \begin{cases} \alpha S_u + \beta e^{rT} \\ \\ \alpha S_d + \beta e^{rT} \end{cases}$$

Siqueremos que este portafolio replique el comportamiento de la call tiene que ocurrir:

$$\begin{cases} \alpha S_u+\beta e^{rT}=(S_u-K)_+ \\ \\ \alpha S_d+\beta e^{rT}=(S_d-k)_+ \end{cases}$$

Para que esto ocurra, tenemos que escoger $\alpha$ y $\beta$ de manera adecuada, es decir, $\alpha$ y $\beta$ que resuelvan el sistema de ecuaciones anterior.
Entonces, para encontrar $\alpha$:

$$\alpha = \frac{\begin{vmatrix} (S_u-k)_+ & e^{rT} \\ (S_d-K)_+ & e^{rT} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} S_u & e^{rT} \\ S_d & e^{rT} \end{vmatrix}} = \frac{e^{rT}((S_u-K)_+ - (S_d-K)_+)}{e^{rT}(S_u-S_d)}$$

$$= \frac{(S_u-K)_+ - (S_d-K)_+}{S_u-S_d}$$

Ahora, para encontrar $\beta$:

$$\beta = \frac{\begin{vmatrix} S_u & (S_u-K)_+ \\ S_d & (S_d-K)_+ \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} S_u & e^{rT} \\ S_d & e^{rT} \end{vmatrix}} = \frac{S_u((S_d-K)_+ - S_d(S_u-K)_+}{e^{rT}(S_u-S_d)}$$

Entonces con estos $\alpha\, y\, \beta$ el portafolio replica al payoff de la call.
¡WOW! Tengo 2 portafolios que al tiempo T valen lo mismo
$\Rightarrow$ Ambos portafolios deben valer hoy lo mismo (Ley del precio)

$$\pi_0 = c \Rightarrow c = \alpha S_0 + \beta$$

$$c = (\frac{(S_u-K)_+ - (S_d-K)_+}{S_u-S_d})S_0 + \frac{S_u((S_d-K)_+ - S_d(S_u-K)_+}{e^{rT}(S_u-S_d}$$

Vamos a intentar generalizar esta idea para cualquier derivado (Estilo Europeo).
Considere un derivado con subyacente S, donde S es una acción que paga dividendos continuos con una tasa $\delta$. Supongamos al tiempo T, la acción solo puede valer $S_d$ o $S_u$

$$\begin{tikzcd} & S_u \\ S_0 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & S_d \end{tikzcd}$$

Sea $V_0$ el valor del derivado hoy (es lo que estamos buscando), entonces:

- $V_u$ es el valor del derivado en caso de que el precio de la acción sea $S_u$
- $V_d$ es el valor del derivado en caso de que el precio de la acción sea $S_d$

$$\begin{tikzcd} & V_u \\ V_0 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & V_d \end{tikzcd}$$

Como antes, considere el siguiente portafolio:

- $\pi$: $\alpha$ unidades del subyacente y $\beta$ pesos a invertir a la tasa libre de riesgo.

¿Cuánto vale hoy $\pi$?

$$\pi_0 = \alpha S_0 + \beta$$

**Recordatorio:** Una unidad hoy se vuelve $e^{rT}$ unidades en T.

¿Cuánto vale $\pi$ en T?

$$\pi = \begin{cases} \alpha e^{\delta T} S_u + \beta e^{rT} \\ \\ \alpha e^{\delta T} S_d + \beta e^{rT} \end{cases}$$

Si pretendemos que este portafolio replique al derivado tiene que ocurrir que

$$\begin{cases} \alpha e^{\delta T} S_d + \beta e^{rT} = V_u \\ \\ \alpha e^{\delta T} S_d + \beta e^{rT} = V_d \end{cases}$$

La expresión anterior representa un sistema de ecuaciones, entonces:

$$\alpha = \frac{\begin{vmatrix} V_u & e^{rT} \\ V_d & e^{rT} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{\delta T} S_u & e^{rT} \\ e^{\delta T} S_d & e^{rT} \end{vmatrix}} = \frac{e^{rT}(V_u - V_d}{e^{\delta T} e^{rT}(S_u - S_d)}$$

$$= e^{-\delta T} \frac{V_u - V_d}{S_u - S - d}$$

Y para $\beta$

$$\beta = \frac{\begin{vmatrix} e^{\delta T} S_u & V_u \\ e^{\delta T} S_d & V_d \end{vmatrix}}{e^{\delta T} e^{rT}(S_u - S_d)} = \frac{e^{\delta T}(S_u V d_d - S_d V_u}{e^{\delta T} e^{rT}(S_u - S_d)}$$

$$= e^{-rT} \frac{S_u V_d - S_d V_u}{S_u - S_d}$$

Así entonces,

$$\alpha = e^{-\delta T} \frac{V_u - V_d}{S_u - S - d} \quad \beta = e^{-rT} \frac{S_u V_d - S_d V_u}{S_u - S_d}$$

Para que el portafolio replique al derivado hoy debe comprar $\alpha = e^{-\delta T} \frac{V_u - V_d}{S_u - S - d}$ unidades del activo subyacente e invertir $\beta = e^{-rT} \frac{S_u V_d - S_d V_u}{S_u - S_d}$ a la tasa libre de riesgo.

Entonces,

$$V_0 = \pi_0 = \alpha S_o + \beta$$
$$= e^{-\delta T} \frac{V_u - V_d}{S_u - S_d} S_0 + e^{-rT} \frac{S_u V_d - S_d V_u}{S_u - S_d}$$

Esto es la prima del derivado usando el modelo de árbol.

**Ejemplo:** Considérese una call con Strike K=55, con plazo de un año, sobre una acción que **NO** paga dividendos y al final del año puede valer 40 o 60. El precio actual de la acción es de \$50. Si la tasa libre de riesgo es del 5 %, ¿cuánto vale la call?

$$\begin{tikzcd}
 & S_u = 60 \\
S_0 = 50 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & S_d = 40
\end{tikzcd}$$

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & V_u = (60-K)_+ = (60-55)_+ \\
C \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & V_d = (40-K)_+ = (40-55)_+
\end{tikzcd}
$$

Como la acción no pada dividendos, entonces $\delta = 0$. Sustituyendo en la expresión anterior

$$\alpha = e^{-\delta T}\frac{V_u - V_d}{S_u - S - d} = e^{-0*T}\frac{5-0}{60-40} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$$

$$\beta = e^{-rT}\frac{S_u V_d - S_d V_u}{S_u - S_d} = e^{-0.05(1)}\frac{60(0)-40(5)}{60-40} = e^{-0.05}\frac{200}{20} = -10e^{-0.05}$$

Recordando que

$$C = \alpha S_0 + \beta$$

Tenemos entonces que,

$$
\begin{aligned}
C &= \frac{1}{4}S_0 - 10e^{-0.05} \\
&= \frac{1}{4}(50) - 10e^{-0.05} \\
&= 2.98
\end{aligned}
$$

**Observación:**

$$
\begin{aligned}
V_0 &= e^{-\delta T}\frac{V_u - V_d}{S_u - S_d}S_0 + e^{-rT}\frac{S_u V_d - S_d V_u}{S_u - S_d} \\
&= \frac{e^{-rT}}{S_u - S_d}[e^{(r-\delta)T}(V_u - V_d)S_0 + S_u V_d - S_d V_u] \\
&= \frac{e^{-rT}}{S_u - S_d}[V_u(S_0 e^{(r-\delta)T} - S_d) + V_d(S_u - e^{(r-\delta)T}S_0)] \\
&= e^{-rT}[V_u\frac{S_0 e^{(r-\delta)T} - S_d}{S_u - S_d} + V_d(1 - \frac{S_0 e^{(r-\delta)T} S_d}{S_u - S_d})] \\
&= e^{-rT}(p^* V_u + (1-p^*)V_d) \;\; separeceaunaesperanza
\end{aligned}
$$

$$p^* = \frac{S_0 e^{(r-\delta)T} - S_d}{S_u - S_d}$$

Si logro garantizar que $p^* \in (0,1)$ entonces podré escribir

$$V_0 = e^{-rT}\mathbb{E}^*(V)$$

Donde V es una v.a.,

$$V = \begin{cases} V_u \;\; con\, proba\, p^* \\ \\ V_d \;\; con\, proba\, 1-p^* \end{cases}$$

¿Cómo garantizamos que $p^* = \frac{S_0 e^{(r-\delta)T} - S_d}{S_u - S_d}$ este entre 0 y 1?

$$0 < \frac{S_o e^{(r-\delta)T} - S_d}{S_u - S_d} \;\; y \frac{S_o e^{(r-\delta)T} - S_d}{S_u - S_d} < 1$$

$$\Leftrightarrow$$

$$0 < S_0e^{(r-\delta)T} - S_d \ \ yS_0e^{(r-\delta)T} - S_d < 1$$
$$\Leftrightarrow$$
$$S_d < S_0e^{(r-\delta)T} \ \ y \ \ S_0e^{(r-\delta)T} < S_u$$
$$\Leftrightarrow$$
$$S_d < S_0e^{(r_\delta)T} < S_u$$

Es decir,

$$p^* \in (0,1) \Leftrightarrow S_d < S_oe^{(r-\delta)T} < S_u$$

**Proposición:** Si no hay oportunidades de arbitaje, entonces $S_d < S_oe^{(r-\delta)T} < S_u$

**Demostración:**
Por reducción al absurdo, supongamos $S_d \geq S_0e^{(r-\delta)T}$ $o$ $S_u \leq S_0e^{(r-\delta)T}$
CASO 1: $S_d \geq S_0e^{(r-\delta)T}$
Considérese la siguiente estrategia: Venda en corto hoy la acción y lo obtenido inviertalo a la tasa libre de riesgo. ¿Cuánto desembolasamos hoy? Nada. ¿En T qué compromisos tenemos? Tengo que devolver la acción, i.e., tengo que devolver $S_de^{\delta T}$ pesos, pero yo tengo $S_0e^{rT}$ de mi inversión. ¿Me alcanza para comprar la acción? ¿$S_0e^{(rT} > S_de^{\delta T}$
$\Leftrightarrow$
$S_0e^{(r-\delta)T} > S_d$ se cumple por hip.
Es decir, construí una estrategía en la que hoy no desembolso nada y en el futuro tuve una ganancia positiva.
$\nabla$ Contradice a la hipotesis de no arbitraje.
CASO 2: $S_u \leq S_0e^{(r-\delta)T}$
Análogo. ■

**Conclusión:** Si no hay oportunidad de arbitraje entonces,

$$S_d < S_0e^{(r-\delta)T} < S_u$$

Entonces,

$$p^* := \frac{S_0e^{(r-\delta)T} - S_d}{S_u - S_d} \in (0,1)$$

Entonces, puede escribir como una esperanza legitima

$$V_0 = e^{-rT}\mathbb{E}^*(V)$$

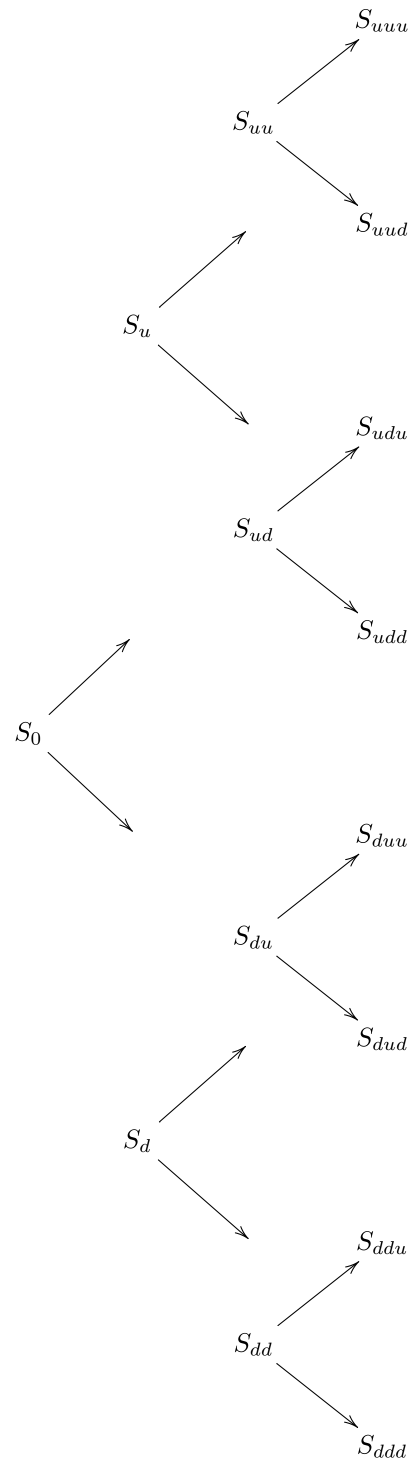
$$V = \begin{cases} V_u & p^* \\ \\ V_d & 1-p^* \end{cases}$$

A $p^*$ se le conoce como probabilidad de riesgo neutro.

¿Qué opinan del modelo de árbol hasta el momento?

- Así como está lleva a una formula muy sencilla de valuación :)
- Suponer que en el futuro una acción sólo dos valores puede ser dificil de creer :(

Vamos a intentar arreglar este asunto




En este caso, se supondrá que la acción puede tomar 8 valores al tiempo T ($2^3 = 8$)
Haciendo un refinamiento en 3 subpates de este arbol llegamos a 8 posibles valores en T. Para un refinamiento del intervalo $[0, T]$ en n subpartes, ¿cuántos posibles valores puede tomar $S_T$? $2^n$

$2^n$ es un número de posibilidades grande. Es decir, con este refinamiento tenemos $2^n$ escenarios.

- $2^n$ es bueno porque es grande.
- $2^n$ es malo porque es grande

Vamos a considerar árboles no tan grandes. A un árbil de este estilo se le conoce como árbol que recombina valores. Para un refinamiento de [o,T] en n subdivisiones de un arbol que recombina, ¿cuántos escenarios finales tendremos? n+1.
¿Para qué nos servirán estos arboles refinados?
Para fijar ideas, consideremos un refinamiento en 2 subperiodos.

Y el correspondiente árbol para el derivado

¿Cuánto vale $V_u$?
Entonces,

$$\begin{aligned} V_0 &= \pi_0 = \alpha S_0 + \beta \\ &= e^{-\delta T}\frac{V_u - V_d}{S_u - s_d} S_0 + e^{-rT}\frac{S_u V_d - S_d V_u}{S_u - S_d} \end{aligned}$$

Esto es la prima del derivado usando el modelo de árbol.

$$V_u = e^{-\delta \frac{T}{2}}\frac{V_{uu} - V_{ud}}{S_{uu} - S_{ud}} S_u + e^{-r\frac{T}{2}}\frac{S_{uu} V_{ud} - S_{ud} V_{uu}}{S_{uu} - S_{ud}}$$

¿Cuánto vale $V_d$?

$$V_d = e^{-\delta \frac{T}{2}}\frac{V_{ud} - V_{dd}}{S_{ud} - S_{ud}} S_u + e^{-r\frac{T}{2}}\frac{S_{ud} V_{dd} - S_{dd} V_{ud}}{S_{ud} - S_{dd}}$$

¿Cuánto vale $V_0$?

$$V_0 = e^{-\delta \frac{T}{2}}\frac{V_u - V_d}{S_u - S_d} S_0 + e^{-r\frac{T}{2}}\frac{S_u V_d - S_d V_u}{S_u - S_d}$$

**Para un periodo**

$$\begin{tikzcd} & S_u \\ S_0 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & S_d \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} & V_u \\ V_0 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & V_d \end{tikzcd}$$

$$V_0 = \alpha S_0 + \beta = e^{-\delta T}\frac{V_u - V_d}{S_u - S_d} S_0 + e^{-rT}\frac{S_u V_d - S_d V_u}{S_u - S_d}$$

También,

$$V_0 = e^{-rT}[p^* V_u + (1 - p^*) V_d]$$

$$p^* = \frac{S_0 e^{(r-\delta)T} - S_d}{S_u - S_d} \in (0,1)$$

Según lo que vimos para un periodo

$$V_u = e^{-\delta\frac{T}{2}} \frac{V_{uu} - V_{ud}}{S_{uu} - S_{ud}} S_u + e^{-r\frac{T}{2}} \frac{S_{uu}V_{ud} - S_{ud}V_{uu}}{S_{uu} - S_{ud}}$$

$$V_d = e^{-\delta\frac{T}{2}} \frac{V_{ud} - V_{dd}}{S_{ud} - S_{ud}} S_u + e^{-r\frac{T}{2}} \frac{S_{ud}V_{dd} - S_{dd}V_{ud}}{S_{ud} - S_{dd}}$$

$$V_0 = e^{-\delta\frac{T}{2}} \frac{V_u - V_d}{S_u - S_d} S_0 + e^{-r\frac{T}{2}} \frac{S_u V_d - S_d V_u}{S_u - S_d}$$

Si quisieramos ponercomo como valores esperados:

$$V_u = e^{-r\frac{T}{2}} [V_{uu} p_1^* + V_{ud}(1 - p_1^*)] \; p_1^* = \frac{S_u e^{r\frac{T}{2}} - S_{ud}}{S_{uu} - S_{dd}}$$

$$V_d = e^{-r\frac{T}{2}} [V_{du} p_2^* + V_{dd}(1 - p_2^*)] \; p_2^* = \frac{S_d e^{r\frac{T}{2}} - S_{dd}}{S_{du} - S_{dd}}$$

$$V_0 = e^{-r\frac{T}{2}} [V_u p^* + V_d(1 - p^*)] \; p^* = \frac{S_0 e^{r\frac{T}{2}} - S_d}{S_u - S_d}$$

**Ojo:** $p_1^*, p_2^*, p^*$ son diferentes.
Vamos a suponer también:

- $S_u = uS_o$
- $S_d = dS_o$
- $S_{uu} = uuS_o = u^2 S_0$
- $S_{dd} = ddS_o = d^2 S_0$
- $S_{ud} = S_{du} = udS_0$

Decimos que el árbol es multiplicativo.

$$V_u = e^{-r\frac{T}{2}} [V_{uu} p_1^* + V_{ud}(1 - p_1^*)] \; p_1^* = \frac{uS_0 e^{r\frac{T}{2}} - S_{ud}}{S_{uu} - S_{dd}} = \frac{uS_0 e^{r\frac{T}{2}} - udS_0}{uuS_0 - udS_0} = \frac{e^{r\frac{T}{2}} - d}{u - d}$$

$$V_d = e^{-r\frac{T}{2}} [V_{du} p_2^* + V_{dd}(1 - p_2^*)] \; p_2^* = \frac{S_d e^{r\frac{T}{2}} - S_{dd}}{S_{du} - S_{dd}} = \frac{dS_0 e^{r\frac{T}{2}} - ddS_0}{udS_0 - ddS_0} = \frac{e^{r\frac{T}{2}} - d}{u - d}$$

$$V_0 = e^{-r\frac{T}{2}} [V_u p^* + V_d(1 - p^*)] \; p^* = \frac{S_0 e^{r\frac{T}{2}} - S_d}{S_u - S_d} = \frac{S_0 e^{r\frac{T}{2}} - dS_0}{uS_0 - dS_0} = \frac{e^{r\frac{T}{2}} - d}{u - d}$$

**Moraleja:** Si el árbol NO es multiplicativo, tendremos diferentes $p^*$ en cada sub-árbol. Si el árbol sí es multiplicativo, tendremos una única $p^*$

$$p^* = \frac{e^{rh} - d}{u - d}$$

Donde h es la longitud de cada subintervalo, i.e, dividimos a T en n intervalos, cada uno de longitud h.

**Ejemplo:** Considérese una put Europea con plazo de T=6 meses, sobre una acción que no paga dividendos ($\delta = 0$) cuya dinamica estocastica tiene el siguiente comportamiento Si la tasa libre de riesgo es del 6 % anual. Determine la prima de la call.
**Solución:** Observese que el árbol recombina valores. ¿Es multiplicativo?

- $195 = u150$

- $105 = d150$
- $253.5 = u^2 150$
- $136.5 = ud150$
- $73.5 = d^2 150$

$$u = \frac{195}{150} = 1.3 \ \ , d = \frac{105}{150} = 0.7$$

- $150ud = 150(1.3)(0.7) = 136.5$
- $150d^2 = 150(0.7)^2 = 73.5$
- $150u^2 = 150(1.3)^2 = 253.5$

$\therefore$El árbol sí es multiplicativo

$$p^* = \frac{e^{rh} - d}{u - d} = \frac{e^{0.06\frac{3}{12}} - 0.7}{1.3 - 07} = 0.525188$$

$$V_u = e^{-0.06\frac{3}{12}}[p^* V_{uu} + (1 - p*)V_{du}] = e^{-0.06\frac{3}{12}}[p^* 0 + (1 - p*)23.5] = 10.99195$$
$$V_d = e^{-0.06\frac{3}{12}}[p^* V_{ud} + (1 - p*)V_{dd}] = e^{-0.06\frac{3}{12}}[p^* 23.5 + (1 - p*)86.5] = 52.61791$$
$$V_0 = e^{-0.06\frac{3}{12}}[p^* V_u + (1 - p*)V_d] = e^{-0.06\frac{3}{12}}[p^* 10.9195 + (1 - p*)52.6179] = 30.2985$$

$$\therefore V_0 = 30.2985$$