Opciones Binarias

- Ya la clase pasada les presente a las opciones all-or-nothing o binarias o digitales.
- Una call cash-or-nothing paga \$1 al tiempo T si $S_T > K$ y nada en otro caso, i.e.,

$$Payoff = \begin{cases} \$1 & \text{si } S_T > K \\ 0 & \text{si } S_T \leq K \end{cases} = \mathbb{I}_{S_T > K}$$

- Una put cash-or-nothing paga \$ al tiempo T si $S_T < K$ y nada en otro caso, i.e.,

$$Payoff = \begin{cases} \$1 & \text{si } S_T < K \\ 0 & \text{si } S_T \geq K \end{cases} = \mathbb{I}_{S_T < K}$$

- Una call asset-or-nothing paga S_T (i.e., una unidad de acción) si $S_T > K$ y nada en otro caso, i.e.,

$$Payoff = \begin{cases} S_T & \text{si } S_T > K \\ 0 & \text{si } S_T \leq K \end{cases} = S_T \mathbb{I}_{S_T > K}$$

- Una put asset-opr-nothing paga S_T (i.e., una unidad de acción) si $S_T < K$ y nada en otro caso, i.e.,

$$Payoff = \begin{cases} \$0 & \text{si } S_T \geq K \\ S_T & \text{si } S_T < K \end{cases} = \mathbb{I}_{S_T < K}$$

1. Observaciones importantes

1.
$$\begin{aligned}(S_T - K)_+ &= max\{S_T - K, 0\}\\ &= (S_T - K)\mathbb{I}_{(S_T > K)}\\ &= S_T\mathbb{I}_{S_T > K} - K\mathbb{I}_{S_T > K}\end{aligned}$$
i.e.,
$$(S_T - K)_+ = S_T\mathbb{I}_{S_T > K} - K\mathbb{I}_{S_T > K}$$
Es decir que comprar una call Europea es equivalente a comprar una call asset-or-nothing y vender K calls cash-or-nothing.

2.
$$\begin{aligned}(K - S_T)_+ &= max\{K - S_T, 0\}\\ &= (K - S_T)\mathbb{I}_{(S_T < K)}\\ &= K\mathbb{I}_{S_T < K} - S_T\mathbb{I}_{S_T < K}\end{aligned}$$
i.e.,
$$(K - S_T)_+ = K\mathbb{I}_{S_T < K} - S_T\mathbb{I}_{S_T < K}$$
Es decir que comprar una put Europea es equivalente a comprar K puts cash-or-nothing y vender una put asse- or-nothing.

Esta observación será muy importante más adelante, cuando tengamos un marco de valuación.

2. Opciones GAP

- Recuérdese que para call y puts vainilla los payoff son
$$Payoff_{call} = \begin{cases} 0 & \text{si } S_T \leq K \\ S_T - K & \text{si } S_T > K \end{cases} = (S_T - K)_+$$
$$Payoff_{put} = \begin{cases} K - S_T & \text{si } S_T \geq K \\ 0 & \text{si } S_T > K \end{cases} = (K - S_T)_+$$
- Para opciones gap se tienen 2 K´s.
$$Payoff_{callgap} = \begin{cases} 0 & \text{si } S_T \leq K_2 \\ S_T - K_1 & \text{si } S_T > K_2 \end{cases}$$
$$Payoff_{putgap} = \begin{cases} K_1 - S_T & \text{si } S_T \leq K_2 \\ 0 & \text{si } S_T > K_2 \end{cases}$$
→ A K_1 se le conoce como strike price (como antes)
→ A K_1 se le conoce como trigger price, especifica la región donde la opción estará forzada a ejercer.
¿Por qué se dice que K_2 especifica la región donde la opción estará forzada a ejercer?
En principio no se dijo nada con respecto a K_1 , K_2, puede ser que $K_1 < K_2$ o $K_1 > K_2$.
- El Payoff de una $(K_1, K_2) - callgap$ es
$$Payoff = \begin{cases} 0 & \text{si} S_T \geq K_2 \\ S_T - K_1 & \text{si} S_T > K_2 \end{cases}$$
- El payoff de una $(K_1, K_2) - put\, gap$ es
$$Payoff = \begin{cases} K_1 - S_T & \text{si} S_T \geq K_2 \\ 0 & \text{si} S_T > K_2 \end{cases}$$

3. Valuación de opciones gap

- Obsérvese que

$$
\begin{aligned}
Payoff_{call\,gap} &= \begin{cases} 0 & \text{si} S_T \geq K_2 \\ S_T - K_1 & \text{si} S_T \geq K_2 \end{cases} \\
&= (S_T - K_1) \begin{cases} 0 & \text{si} S_T \geq K_2 \\ 1 & \text{si} S_T > K_2 \end{cases} \\
&= (S_T - K_1)\mathbb{I}_{S_T > K_2} \\
&= (S_T - K_1)\mathbb{I}_{S_T > K_2} - K_1\mathbb{I}_{S_T > K_2}
\end{aligned}
$$

- Obsérvese también que

$$
\begin{aligned}
Payoff_{put\,gap} &= \begin{cases} K_1 - S_T & \text{si} S_T \geq K_2 \\ 0 & \text{si} S_T > K_2 \end{cases} \\
&= (K_1 - S_T) \begin{cases} 1 & \text{si} S_T \geq K_2 \\ 0 & \text{si} S_T > K_2 \end{cases} \\
&= (K_1 - S_T)\mathbb{I}_{S_T \geq K_2} \\
&= K_1\mathbb{I}_{S_T \geq K_2} - S_T\mathbb{I}_{S_T \geq K_2}
\end{aligned}
$$

4. Paridad con opciones Gap

- Nótese que

$$
\begin{aligned}
Payoff_{call\,gap} - Payoff_{put\,gap} &= S_T\mathbb{S}_{\mathbb{T}} > \mathbb{K}_{\not\succeq} - K_1\mathbb{S}_{\mathbb{T}} > \mathbb{K}_{\not\succeq} - (K_1\mathbb{S}_{\mathbb{T}} \geq \mathbb{K}_{\not\succeq} - S_T\mathbb{I}_{S_T \geq K_2}) \\
&= S_T(\mathbb{I}_{S_T > K_2}) + \mathbb{I}_{S_T \geq K_2}) - K_1(\mathbb{I}_{S_T > K_2} + \mathbb{I}_{S_T \geq K_2}) \\
&= S_T * 1 - K_1 * 1 \\
&= S_T - K_1
\end{aligned}
$$

Es decir,

$$Payoff_{call\,gap} - Payoff_{put\,gap} = S_T - K_1$$

Esto es el payoff de un forward largo con strike K_1.
Esto quiere decir que

$$C_{gap}(S_T, t, K_1, K_2) - P_{gap}(S_T, t, K_1, K_2) = f(S_t, K_1)$$

¿Por qué?

5. Relaciones entre opciones gap y opciones vainilla

- Ya se dijo que el payoff de una $(K_1, K_2 - \mathit{call\ gap}$ es $(S_T - K_1)\mathbb{I}_{S_T > K_2}$, sin embargo,

$$
\begin{aligned}
(S_T - K_1)\mathbb{I}_{S_T > K_2} &= (S_T - K_2 + K_2 - K - 1)\mathbb{I}_{S_T > K_2} \\
&= (S_T - K_2)\mathbb{I}_{S_T > K_2} + (K_2 - K_1)\mathbb{I}_{S_T > K_2} \\
&= (S_T - K_2)_+ + (K_2 - K - 1)\mathbb{I}_{S_T > K_2}
\end{aligned}
$$

Es decir,

$$Payoff_{call\,gap} = payoff_{call} + payoff\, de(K_2 - K_1)\, calls$$

De aquí que,

$$C_{gap}(S_T, T, K_1, K_2) = C(S_T, K_2, T) + (K_2 - K_1)C(S_T, K - 2, T)$$

¿Por qué?

- Ya se dijo también que el payoff de una $(K_1, K_2) - put\,gap$ es

$$(K_1 - S_T)\mathbb{I}_{S_T \geq K_2}$$

Sin embargo,

$$\begin{aligned}(K_1 - S_T)\mathbb{I}_{S_T \geq K_2} &= (K_1 - K_2 + K - 2 - S_T)\mathbb{I}_{S_T \geq K_2} \\ &= (K_1 - K - 2)\mathbb{I}_{S_T \geq K_2} + (K_2 - S_T)\mathbb{I}_{S_T \geq K_2} \\ &= (K_1 - K - 2)\mathbb{I}_{S_T \geq K_2} + (K_2 - S_T)_+\end{aligned}$$

Es decir,

$$Payoff_{put\,gap} = Payoff\,de\,K_2 - K - 1 puts + Payyoff\,de\,una\,put\,con\,strike\,K_2$$

De aquí que

$$P_{gap}(S_T, T, K_1, K_2) = (K_2 - K - 1)P_{cash-or-nothing} + P(S_T, K_2, T)$$

¿Por qué?