1. Dos activos riesgosos

Aunque en clase ya se ha dado una expresión para la ponderación del portafolio de mínima varianza, se dará una expresión para $n = 2$, que **no** utiliza la elaborada notación matricial que se ha usado.
Como antes, se considerará un portafolio con 2 activos riesgosos, es decir, $r = \alpha r_1 + (1-\alpha)r_2$.
Ya se vío anteriormente que $Var(r) = \alpha^2\sigma_1^2 + (1-\alpha)^2\sigma_2^2 + 2\alpha(1-\alpha)\rho\sigma_1\sigma_2$.
Entonces para encontrar el portafolio de mínima varianza tendremos que resolver lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\frac{\delta}{\delta\alpha}Var(r) &= \frac{\delta}{\delta\alpha}(\alpha^2\sigma_1^2 + (1-\alpha)^2\sigma_2^2 + 2\alpha(1-\alpha)\rho\sigma_1\sigma_2) \\
&= 2\alpha\sigma_1^2 + 2(1-\alpha)(-1)\sigma_2^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2(1-2\alpha) \\
&= 2[\alpha\sigma_1^2 - (1-\alpha)\sigma_2^2 + \rho\sigma_1\sigma_2(1-2\alpha)] \\
&= 2[\alpha(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2) - \sigma_2^2 + \rho\sigma_1\sigma_2]
\end{aligned}$$

De aquí que

$$\frac{\delta}{\delta\alpha}Var(r) = 0$$

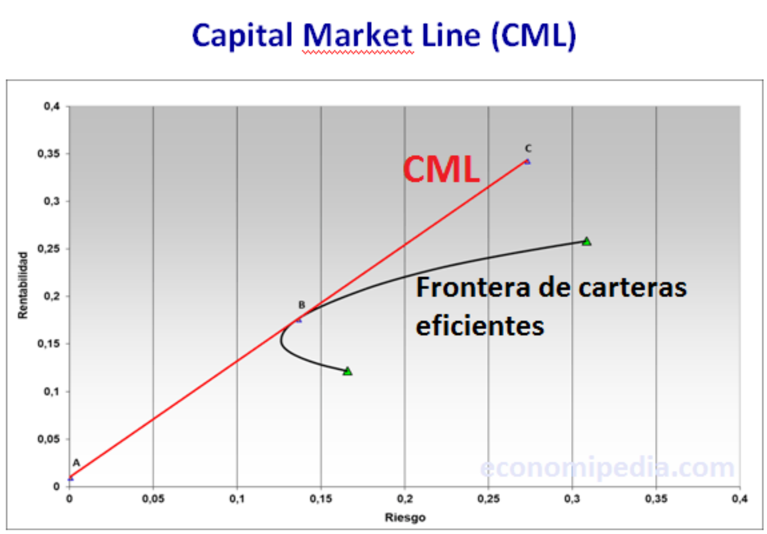
si y solo sí

$$\alpha = \frac{\sigma_2^2 - \rho\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2\sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2} = \frac{\sigma_2^2 - \rho\sigma_1\sigma_2}{Var(r_1 - r_2)}$$

Nótese que $\frac{\delta^2}{\delta\alpha^2}Var(r) = 2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2) = 2Var(r_1 - r_2) \geq 0$**. Por lo que dicho** α **es mínimo.**

2. n activos riesgosos y uno libre de riesgo

- Un portafolio puede ser la combinación de cualquier portafolio en la bala (de activos puramente riesgosos) con el activo libre de riesgo.
- En este framework de combinación, la frontera eficiente esta formada por los pórtafolios que están en la línea recta que satisface:
  1. Pasa por el punto libre de riesgo $(0, r_f)$
  2. Es tangencial a la frontera eficiente formada sólo por los activos puramente riesgosos.



- La pendiente de la CML es $\frac{\mathbb{E}(r_m)-r_f}{SD(r_m)} = SR(r_m)$
- Cualquier inversionista racional seleccionará un portafolio en la CML. El punto exacto dependerá de la preferencia de riesgo del inversionista.
- Cada punto en la CML es una combinación del activo libre de riesgo y M (el portafolio puramente riesgoso con el Sharpe-Ratio más alto)
- Todo inversionista racional posee M y se conoce como **portafolio riesgo optimo** o **portafolio de tangencia**
- El hecho de que la selección de la combinación de activos riesgosos para formar el potafolio riesgoso optimo sea independiente de la preferencia de riesgo se conoce como **Mutual Fund Separation Theorem**

Ahora, para obtener el portafolio riesgoso optimo necesitamos encontrar las ponderaciones del portafolio tal que el logaritmo del Sharpe-Ratio se máximice.

$$r_M = \alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2, \alpha_1 + \alpha_2 = 1$$

Entonces

$$\mathbb{E}(r_M) - r_f = \alpha_1 \mathbb{E}(r_1) + \alpha_2 \mathbb{E}(r_2) - r_f = \alpha_1[\mathbb{E}(r_1) - r_f] + \alpha_2[\mathbb{E}(r_2) - r_f]$$

Y,

$$Var(r_M) = \alpha_1 \sigma_1^2 + \alpha_2^2 \sigma_2^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2\alpha_1\alpha_2$$

De esta forma, tenemos que el Sharpe-Ratio es:

$$SR(r_M) = \frac{\alpha_1[\mathbb{E}(r_1) - r_f] + \alpha_2[\mathbb{E}(r_2) - r_f]}{(\alpha_1^2\sigma_1^2 + \alpha_2^2\sigma_2^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2\alpha_1\alpha_2)^{\frac{1}{2}}}$$

Y el logaritmo del Sharpe-Ratio es:

$$h(\alpha_1, \alpha_2) := log(\mathbb{E}(r_M) - r_f) - \frac{1}{2} log(Var(r_M))$$

$$= log(\alpha_1[\mathbb{E}(r_1) - r_f] + \alpha_2[\mathbb{E}(r_2) - r_f]) - \frac{1}{2} log(\alpha_1^2\sigma_1^2 + \alpha_2^2\sigma_2^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2\alpha_1\alpha_2)$$

Proposición: Para cualquier $c > 0$, y para cualesquiera $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}, h(c\alpha_1, c\alpha_2) = h(\alpha_1, \alpha_2)$

- En virtud de esta proposición, si (α_1, α_2) es un maximo de $h(*, *)$, entonces $(c\alpha_1, c\alpha_2)$ también es un máximo de $h(*, *)$.
- Esto significa que si se puede encontrar una solución (α_1, α_2) que maximice $h(*, *)$, dicha solución se puede reescalar para que se satisfaga la restriccón $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$

Se puede maximizar $h(*, *)$ con técnicas de cálculo tradicionales:

$$\frac{\delta}{\delta\alpha_1} h(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{\mathbb{E}(r_1) - r_f}{\alpha_1[\mathbb{E}(r_1) - r_f] + \alpha_2[\mathbb{E}(r_2) - r_f]} - \frac{1}{2} \frac{2\alpha_1\sigma_1^2 + 2\alpha_2\rho\sigma_1\sigma_2}{\alpha_1^2\sigma_1^2 + \alpha_2^2\sigma_2^2 + 2\alpha_1\alpha_2\rho\sigma_1\sigma_2}$$

$$= \frac{\mathbb{E}(r_1) - r_f}{\mathbb{E}(r_M) - r_f} - \frac{\alpha_1\sigma_1^2 + \alpha_2\rho\sigma_1\sigma_2}{Var(r_M)}$$

Análogamente,

$$\frac{\delta}{\delta\alpha_2} h(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{\mathbb{E}(r_2) - r_f}{\mathbb{E}(r_M) - r_f} - \frac{\alpha_1\rho\sigma_1\sigma_2 + \alpha_2\sigma_2^2}{Var(r_M)}$$

Entonces, para que α_1, α_2 sean máximos, necesitamos

$$\begin{cases} \frac{\delta}{\delta\alpha_2} = 0 ... (I) \\ \frac{\delta h}{\delta\alpha_2} = 0 ... (II) \end{cases}$$

Para la ecuación (I),

$$\frac{\mathbb{E}(r_1) - r_f}{\mathbb{E}(r_M) - r_f} = \frac{\alpha_1 Cov(r_1, r_1) + \alpha_2 Cov(r_1, r_2)}{Var(r_M)} = \frac{Cov(r_1, \alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2)}{Var(r_M)} = \frac{Cov(r_1, r_M)}{Var(r_M)}$$

Es decir,

$$\frac{\mathbb{E}(r_1) - r_f}{Cov(r_1, r_M)} = \frac{\mathbb{E}(r_M) - r_f}{Var(r_M)} ... (I*)$$

Análogamente, para la ecuación (II),

$$\frac{\mathbb{E}(r_2) - r_f}{Cov(r_2, r_M)} = \frac{\mathbb{E}(r_M) - r_f}{Var(r_M)} .. (II*)$$

De $(I*)$ y $(II*)$ observese que:

$$\frac{\mathbb{E}(r_1) - r_f}{Cov(r_1, r_M)} = \frac{\mathbb{E}(r_M) - r_f}{Var(r_M)} = \frac{\mathbb{E}(r_2) - r_f}{Cov(r_2, r_M)}$$

¿Este arugumento se puede urilizar para n activos riesgosos?

Notemos que en la expresión $\frac{\mathbb{E}(r_i) - r_f}{Cov(r_i, r_M)}$ sólo $Cov(r_i, r_M)$ depende de las ponderaciones del portafolio, entonces para obtener las ponderaciones del portafolio optimo:

1. Se encuentran las ponderaciones (que no necesariamente suman 1) tales que $Cov(r_i, r_M) = \mathbb{E}(r_i) - r_f$, para $i = \{1, 2, ..., n\}$, es decir $\frac{\mathbb{E}(r_i) - r_f}{Cov(r_i, r_M)} = cte = 1$
2. Se reescalan las ponderaciones para que sumen 1.

. Veamos el caso cuando $n = 2$:

$$\begin{cases} Cov(r_1, r_M) = \mathbb{E}(r_1) - r_f \\ Cov(r_2, r_M) = \mathbb{E}(r_2) - r_f \end{cases} \rightarrow \begin{cases} Cov(r_1, \alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2) = \mathbb{E}(r_1) - r_f \\ Cov(r_2, \alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2) = \mathbb{E}(r_2) - r_f \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \alpha_1 \sigma_1^2 + \alpha_1 \rho \sigma_1 \sigma_2 = \mathbb{E}(r_1) - r_f \\ \alpha_1 \rho \sigma_1 \sigma_2 + \alpha_2 \sigma_2^2 = \mathbb{E}(r_2) - r_f \end{cases}$$

Nos da un sistema de ecuaciones de $2x2$. Resolviendo este sistema por el método de Cramer tenemos lo siguiente:

$$\alpha_1 = \frac{\begin{vmatrix} \mathbb{E}(r_1) - r_f & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \mathbb{E}(r_2) - r_f & \sigma_2^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{vmatrix}} = \frac{\sigma_2^2(\mathbb{E}(r_1) - r_f) - \rho\sigma_1\sigma_2(\mathbb{E}(r_2) - r_f)}{\sigma_1^2\sigma_2^1 - \rho^2\sigma_1^2\sigma_2^2}$$

y,

$$\alpha_2 = \frac{\begin{vmatrix} \sigma_1^2 & \mathbb{E}(r_1) - r_f \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \mathbb{E}(r_2) - r_f \end{vmatrix}}{\sigma_1^2\sigma_1^2(1 - \rho)} = \frac{\sigma_1^2(\mathbb{E}(r_2) - r_f) - \rho\sigma_1\sigma_2(\mathbb{E}(r_1) - r_f)}{\sigma_1^2\sigma_2^2(1 - \rho)}$$

Y posteriormente se escalan los valores de α_1 y α_2, dando como resultado:

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} \rightarrow \alpha_1, \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} \rightarrow \alpha_2$$

Ejemplo. Las acciones 1 y 2 tienen las siguientes caracteristicas:

Acción	Rendimiento medio	Volatilidad
1	9 %	30 %
2	15 %	50 %

La correlación entre los rendimientos de las acciones es de 60 %, la tasa de interés libre de riesgo es del 3 %. Encontrar el **portafolio riesgoso optimo.**