SCC270 - Redes Neurais e Aprendizado Profundo

Aula 2 - *Perceptron*

Profa. Dra. Roseli Aparecida Francelin Romero
SCC - ICMC - USP

2022

Sumário

Perceptron

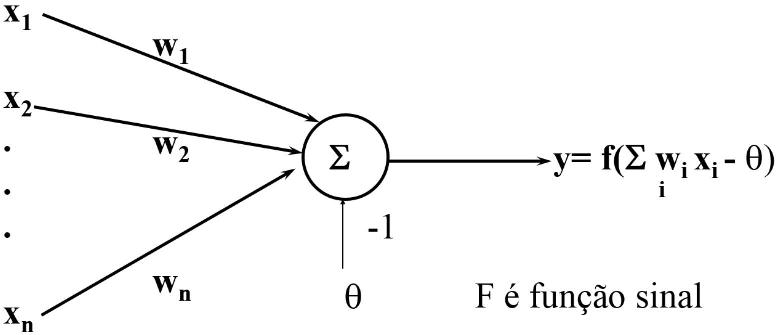


Figura 1: Modelo para representação do *Perceptron*.

Perceptron

- O algoritmo usado para ajustar os parâmetros livres desta rede apareceu num processo de aprendizado desenvolvido por Rosemblatt (1958, 1962) (Livro: Principles of Neurodynamics, 1962)
- Ele provou que se os padrões usados para treinar são **linearmente separáveis**, então o algoritmo converge e a superfície de decisão tem a forma de um hiperplano entre duas classes.

Perceptron

- É constituído de apenas 1 neurônio e, como tal, limita-se a classificar padrões envolvendo apenas 2 classes, que devem ser linearmente separáveis.
- A regra de decisão é designar x à classe $\mathcal{C}_1$, se a saída é $y = +1$, ou à classe $\mathcal{C}_2$, se a saída é $y = -1$.
- Existem duas regiões separadas pelo hiperplano:
  - $\sum w_i x_i - \theta = 0$
- Se o espaço for o $\mathbb{R}^2$, a região de separação é uma reta.

Sumário

Sumário

Estrutura básica de um neurônio artificial

- **Estado de ativação (saída):** s_j
- **Conexões entre processadores:** w_{ij}
  - a cada conexão existe um peso sináptico que determina o efeito da entrada sobre o processador.
- **Soma:** cada processador soma os sinais de entrada ponderado pelo peso sináptico das conexões
- **Função de ativação:** $s_j = F(net_j)$
  - determina o novo valor do *estado de ativação* do processador.

Funções de transferência

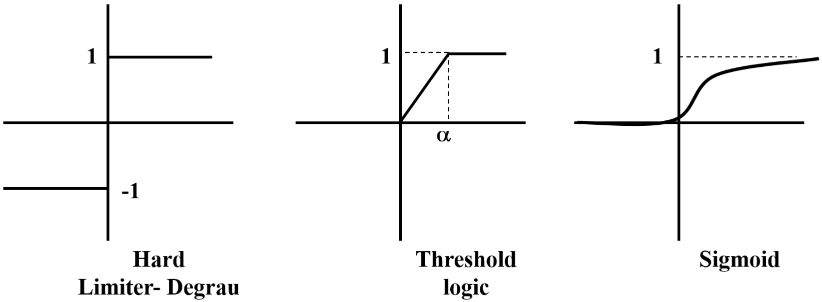


Figura 2: Exemplos de funções de transferência usadas em redes neurais artificiais.

Modelos de neurônios

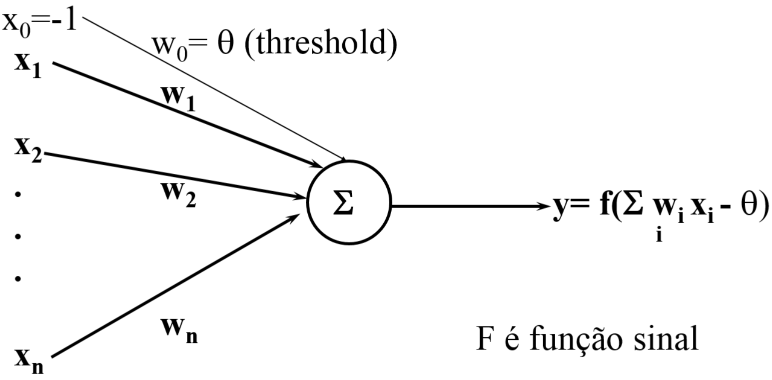


Figura 3: Modelo de um neurônio com $x_0 = -1$.

Modelos de neurônios

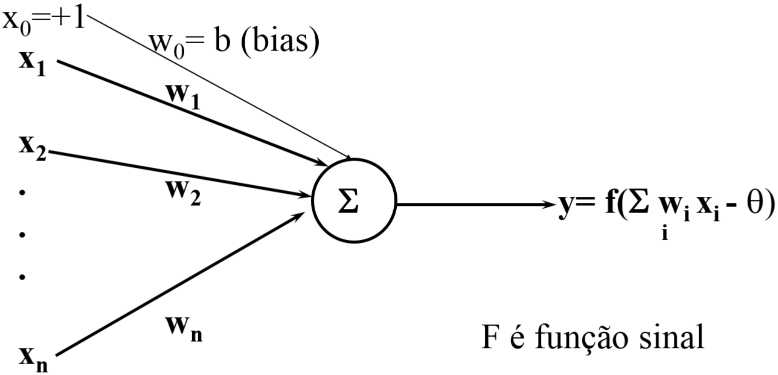


Figura 4: Modelo de um neurônio com $x_0 = +1$.

Sumário

Características básicas

- **Regra de propagação:** $y_j = sgn(\sum_i x_i w_{ij})$
- **Função de ativação:** função sinal
- **Topologia:** uma única camada de processadores.
- **Algoritmo de aprendizado:** $\Delta w_{ij} = \eta x_i (t_j - y_j)$
    - (é do tipo supervisionado)
- **Valores de entrada/saída:** binários $\rightarrow$ $t = 1$ ou $t = -1$

Finalidade do termo *bias*

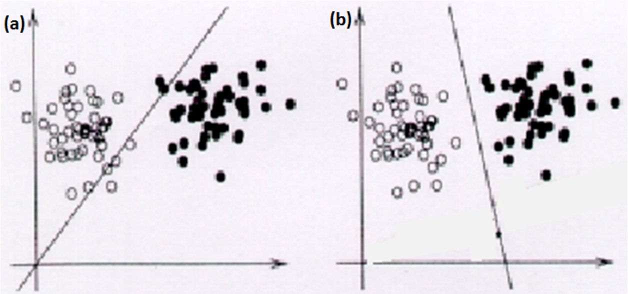


Figura 5: Hiperplano obtido: (a) sem *bias*; (b) com *bias*.

- $\sum_i x_i w_{ij} = 0 \rightarrow$ define um hiperplano passando pela origem.
- $\sum_i x_i w_{ij} + \theta_i = 0 \rightarrow$ desloca o hiperplano da origem.

Sumário

Perceptron

- O processo adaptativo do Perceptron consiste em utilizar a função de ativação *hard limiter* (saída +1 ou -1 (ou *Threshold step* saida +1 ou 0)) e minimizar os pesos usando o algoritmo LMS.

Regra Delta - LMS

1. Iniciar os pesos sinápticos com valores randômicos pequenos ou iguais a zero.
2. Aplicar um padrão com seu respectivo valor esperado de saída (t_j) e verificar a saída da rede (y_j).
3. Calcular o erro na saída: $E_j = t_j - y_j$
4. Se $E_j = 0$, voltar ao passo 2
   Se $E_j \neq 0$, atualizar os pesos: $\Delta w_{ij} = \eta x_i E_j$
5. Voltar ao passo 2.

Regra Delta - LMS

- **Importante:**
  - Não ocorre variação no peso se a saída estiver correta.
  - Caso contrário, cada peso é incrementado de η quando a saída é maior que o valor-alvo.

$$\Delta w_{ij} = \eta x_i e_j \tag{1}$$

Sumário

Gradiente de uma função

- **Gradiente:**

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial}{\partial x} f(x,y), \frac{\partial}{\partial y} f(x,y)\right)$$

- **Derivada direcional:**

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}} f(x,y) &= \nabla f(x,y) \cdot \mathbf{u} \\ &= ||\nabla f(x,y)|| \cdot \mathbf{u} \cdot ||\cos\gamma|| \\ &= ||\nabla f(x,y)|| \cdot ||\cos\gamma|| \end{aligned}$$

Gradiente de uma função

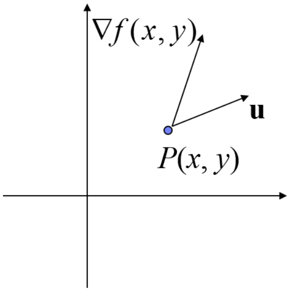


Figura 6: $D_{\mathbf{u}} f(x, y)$ é a taxa de variação de f(x,y) na direção definida por $\mathbf{u}$.

Gradiente de uma função

- **Teorema do gradiente:** seja f uma função de duas variáveis, diferenciáveis no ponto $P(x, y)$.
  - O máximo de $D_{\mathbf{u}}f(x, y)$ em $P(x, y)$ é $||\nabla f(x, y)||$.
  - O máximo da taxa de crescimento de $f(x, y)$ em $P(x, y)$ ocorre na direção de $\nabla f(x, y)$.
- **Corolário:** seja f uma função de duas variáveis, diferenciáveis no ponto $P(x, y)$.
  - O mínimo de $D_{\mathbf{u}}f(x, y)$ em $P(x, y)$ é $-||\nabla f(x, y)||$.
  - O máximo da taxa de *decrescimento* de $f(x, y)$ em $P(x, y)$ ocorre na direção de $-\nabla f(x, y)$.

Gradiente de uma função

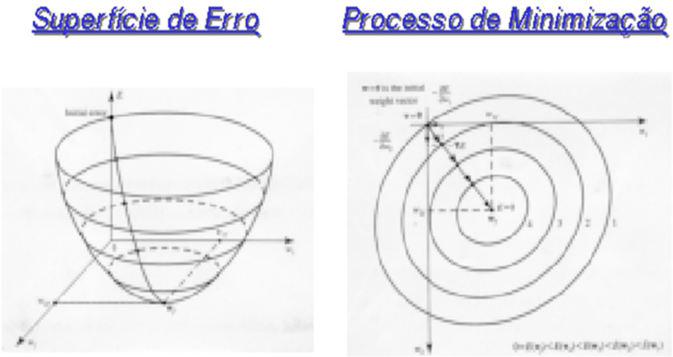


Figura 7: A direção do gradiente negativo é a de descida mais íngreme (*steepest descent*).

Método do gradiente descendente (GD)

$$\Delta w_{ij} = -\eta \frac{\delta E_j}{\delta w_{ij}}$$

- Cada *peso sináptico i* do elemento processador *j* é atualizado proporcionalmente ao *negativo da derivada parcial do erro* deste processador com relação ao peso.

Método do gradiente descendente (GD)

$$\Delta w_{ij} = -\eta \frac{\delta E_j}{\delta w_{ij}} = -\eta \frac{\delta E_j}{\delta y_j} \frac{\delta y_j}{\delta w_{ij}}$$

$$E_j = \frac{1}{2}(t_j - y_j)^2 \qquad y_j = \sum x_i w_{ij} + \theta_j$$

$$\boldsymbol{\Delta w_{ij}} = -\eta \cdot \left[2 \cdot \frac{1}{2}(t_j - y_j) \cdot (-1)\right] \cdot x_i$$

$$= -\eta \cdot \left[-(t_j - y_j)\right] \cdot x_i = \boldsymbol{\eta (t_j - y_j) x_i}$$

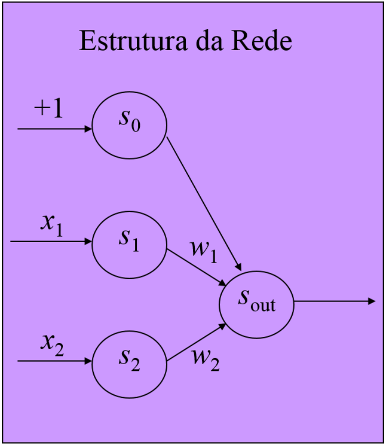
Sumário

Exemplo: simulação do operador lógico AND

AND	x_0	x_1	x_2	t
Entrada 1:	1	0	0	0
Entrada 2:	1	0	1	0
Entrada 3:	1	1	0	0
Entrada 4:	1	1	1	1

Peso inicial: $w_0 = 0$, $w_1 = 0$, $w_2 = 0$

Taxa de aprendizado: $\eta = 0.5$



Exemplo: simulação do operador lógico AND

- **1º ciclo**
  - Entrada 1: $s_{out} = f(w_0x_0 + w_1x_1 + w_2x_2)$
    $= f(0.0 \times 1 + 0.0 \times 0 + 0.0 \times 0) = f(0) = 0 \rightarrow s_{out} = t$
  - Entrada 2: $s_{out} = f(w_0x_0 + w_1x_1 + w_2x_2)$
    $= f(0.0 \times 1 + 0.0 \times 0 + 0.0 \times 1) = f(0) = 0 \rightarrow s_{out} = t$
  - Entrada 3: $s_{out} = f(w_0x_0 + w_1x_1 + w_2x_2)$
    $= f(0.0 \times 1 + 0.0 \times 1 + 0.0 \times 0) = f(0) = 0 \rightarrow s_{out} = t$
  - Entrada 4: $s_{out} = f(w_0x_0 + w_1x_1 + w_2x_2)$
    $= f(0.0 \times 1 + 0.0 \times 1 + 0.0 \times 1) = f(0) = 0 \rightarrow s_{out} \neq t$

$$w_0 = w_0 + \eta(t - s_{out})x_0 = 0.0 + 0.5 \times (1 - 0) \times 1 = 0.5$$
$$w_1 = w_1 + \eta(t - s_{out})x_1 = 0.0 + 0.5 \times (1 - 0) \times 1 = 0.5$$
$$w_2 = w_2 + \eta(t - s_{out})x_2 = 0.0 + 0.5 \times (1 - 0) \times 1 = 0.5$$

Exemplo: simulação do operador lógico AND

- **2º ciclo**
  - Entrada 1: $s_{out} = f(w_0x_0 + w_1x_1 + w_2x_2)$
    $= f(0.5 \times 1 + 0.5 \times 0 + 0.5 \times 0) = f(0.5) = 1 \rightarrow s_{out} \neq t$

$$w_0 = w_0 + \eta(t - s_{out})x_0 = 0.5 + 0.5 \times (0 - 1) \times 1 = 0.0$$
$$w_1 = w_1 + \eta(t - s_{out})x_1 = 0.5 + 0.5 \times (0 - 1) \times 0 = 0.5$$
$$w_2 = w_2 + \eta(t - s_{out})x_2 = 0.5 + 0.5 \times (0 - 1) \times 0 = 0.5$$

  - Entrada 2: $s_{out} = f(w_0x_0 + w_1x_1 + w_2x_2)$
    $= f(0.0 \times 1 + 0.5 \times 0 + 0.5 \times 1) = f(0.5) = 1 \rightarrow s_{out} \neq t$

$$w_0 = w_0 + \eta(t - s_{out})x_0 = 0 + 0.5 \times (0 - 1) \times 1 = -0.5$$
$$w_1 = w_1 + \eta(t - s_{out})x_1 = 0.5 + 0.5 \times (0 - 1) \times 0 = 0.5$$
$$w_2 = w_2 + \eta(t - s_{out})x_2 = 0.5 + 0.5 \times (0 - 1) \times 1 = 0.0$$

Exemplo: simulação do operador lógico AND

- **2º ciclo**
  - Entrada 3: $s_{out} = f(w_0x_0 + w_1x_1 + w_2x_2)$
    $= f(-0.5 \times 1 + 0.5 \times 1 + 0.0 \times 0) = f(0) = 0 \rightarrow s_{out} = t$
  - Entrada 4: $s_{out} = f(w_0x_0 + w_1x_1 + w_2x_2)$
    $= f(-0.5 \times 1 + 0.5 \times 1 + 0.0 \times 1) = f(0) = 0 \rightarrow s_{out} \neq t$

$$w_0 = w_0 + \eta(t - s_{out})x_0 = -0.5 + 0.5 \times (1 - 0) \times 1 = 0.0$$
$$w_1 = w_1 + \eta(t - s_{out})x_1 = 0.5 + 0.5 \times (1 - 0) \times 1 = 1.0$$
$$w_2 = w_2 + \eta(t - s_{out})x_2 = 0.0 + 0.5 \times (1 - 0) \times 1 = 0.5$$

Exemplo: simulação do operador lógico AND

- **3º ciclo**
  - Entrada 1: $s_{out} = f(w_0x_0 + w_1x_1 + w_2x_2)$
    $= f(0.0 \times 1 + 1.0 \times 0 + 0.5 \times 0) = f(0) = 0 \rightarrow s_{out} = t$
  - Entrada 2: $s_{out} = f(w_0x_0 + w_1x_1 + w_2x_2)$
    $= f(0.0 \times 1 + 1.0 \times 0 + 0.5 \times 1) = f(0.5) = 1 \rightarrow s_{out} \neq t$

$$
\begin{aligned}
w_0 &= w_0 + \eta(t - s_{out})x_0 = 0.0 + 0.5 \times (0 - 1) \times 1 = -0.5 \\
w_1 &= w_1 + \eta(t - s_{out})x_1 = 1.0 + 0.5 \times (0 - 1) \times 0 = 1.0 \\
w_2 &= w_2 + \eta(t - s_{out})x_2 = 0.5 + 0.5 \times (0 - 1) \times 1 = 0.0
\end{aligned}
$$

Exemplo: simulação do operador lógico AND

- **3º ciclo**
  - Entrada 3: $s_{out} = f(w_0x_0 + w_1x_1 + w_2x_2)$
    $= f(-0.5 \times 1 + 1 \times 1 + 0.0 \times 0) = f(0.5) = 1 \rightarrow s_{out} \neq t$

$$w_0 = w_0 + \eta(t - s_{out})x_0 = -0.5 + 0.5 \times (0 - 1) \times 1 = -1.0$$
$$w_1 = w_1 + \eta(t - s_{out})x_1 = 1.0 + 0.5 \times (0 - 1) \times 1 = 0.5$$
$$w_2 = w_2 + \eta(t - s_{out})x_2 = 0.0 + 0.5 \times (0 - 1) \times 0 = 0.0$$

  - Entrada 4: $s_{out} = f(w_0x_0 + w_1x_1 + w_2x_2)$

$$= f(-1.0 \times 1 + 0.5 \times 1 + 0.0 \times 1) = f(-0.5) = 0 \rightarrow s_{out} \neq t$$

$$w_0 = w_0 + \eta(t - s_{out})x_0 = -1.0 + 0.5 \times (1 - 0) \times 1 = -0.5$$
$$w_1 = w_1 + \eta(t - s_{out})x_1 = 0.5 + 0.5 \times (1 - 0) \times 1 = 1.0$$
$$w_2 = w_2 + \eta(t - s_{out})x_2 = 0.0 + 0.5 \times (1 - 0) \times 1 = 0.5$$

Exemplo: simulação do operador lógico AND

- **4º ciclo**
  - Entrada 1: $s_{out} = f(w_0x_0 + w_1x_1 + w_2x_2)$

    $= f(-0.5 \times 1 + 1.0 \times 0 + 0.5 \times 0) = f(-0.5) = 0 \rightarrow s_{out} = t$
  - Entrada 2: $s_{out} = f(w_0x_0 + w_1x_1 + w_2x_2)$
    $= f(-0.5 \times 1 + 1.0 \times 0 + 0.5 \times 1) = f(0) = 0 \rightarrow s_{out} = t$

Exemplo: simulação do operador lógico AND

- **4º ciclo**
  - Entrada 3: $s_{out} = f(w_0x_0 + w_1x_1 + w_2x_2)$

    $$= f(-0.5 \times 1 + 1.0 \times 1 + 0.5 \times 0) = f(0.5) = 1 \rightarrow s_{out} \neq t$$

    $$\begin{aligned} w_0 &= w_0 + \eta(t - s_{out})x_0 = -0.5 + 0.5 \times (0 - 1) \times 1 = -1.0 \\ w_1 &= w_1 + \eta(t - s_{out})x_1 = 1.0 + 0.5 \times (0 - 1) \times 1 = 0.5 \\ w_2 &= w_2 + \eta(t - s_{out})x_2 = 0.5 + 0.5 \times (0 - 1) \times 0 = 0.5 \end{aligned}$$

  - Entrada 4: $s_{out} = f(w_0x_0 + w_1x_1 + w_2x_2)$
    $= f(-1.0 \times 1 + 0.5 \times 1 + 0.5 \times 1) = f(0) = 0 \rightarrow s_{out} \neq t$

    $$\begin{aligned} w_0 &= w_0 + \eta(t - s_{out})x_0 = -1.0 + 0.5 \times (1 - 0) \times 1 = -0.5 \\ w_1 &= w_1 + \eta(t - s_{out})x_1 = 0.5 + 0.5 \times (1 - 0) \times 1 = 1.0 \\ w_2 &= w_2 + \eta(t - s_{out})x_2 = 0.5 + 0.5 \times (1 - 0) \times 1 = 1.0 \end{aligned}$$

Exemplo: simulação do operador lógico AND

- **5º ciclo**
  - Entrada 1: $s_{out} = f(w_0x_0 + w_1x_1 + w_2x_2)$

    $= f(-0.5 \times 1 + 1.0 \times 0 + 1.0 \times 0) = f(-0.5) = 0 \rightarrow s_{out} = t$
  - Entrada 2: $s_{out} = f(w_0x_0 + w_1x_1 + w_2x_2)$

    $= f(-0.5 \times 1 + 1.0 \times 0 + 1.0 \times 1) = f(0.5) = 1 \rightarrow s_{out} \neq t$

$$
\begin{aligned}
w_0 &= w_0 + \eta(t - s_{out})x_0 = -0.5 + 0.5 \times (0 - 1) \times 1 = -1.0 \\
w_1 &= w_1 + \eta(t - s_{out})x_1 = 1.0 + 0.5 \times (0 - 1) \times 0 = 1.0 \\
w_2 &= w_2 + \eta(t - s_{out})x_2 = 1.0 + 0.5 \times (0 - 1) \times 1 = 0.5
\end{aligned}
$$

Exemplo: simulação do operador lógico AND

- **5º ciclo**
  - Entrada 3: $s_{out} = f(w_0x_0 + w_1x_1 + w_2x_2)$
    $= f(-1.0 \times 1 + 1.0 \times 1 + 0.5 \times 0) = f(0) = 0 \rightarrow s_{out} = t$
  - Entrada 4: $s_{out} = f(w_0x_0 + w_1x_1 + w_2x_2)$

    $= f(-1.0 \times 1 + 1.0 \times 1 + 0.5 \times 1) = f(0.5) = 1 \rightarrow s_{out} = t$

Exemplo: simulação do operador lógico AND

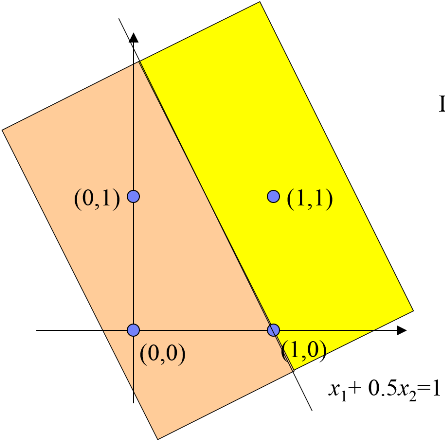
- **6º ciclo**
  - Entrada 1: $s_{out} = f(w_0x_0 + w_1x_1 + w_2x_2)$

    $= f(-1.0 \times 1 + 1.0 \times 0 + 0.5 \times 0) = f(-1) = 0 \rightarrow s_{out} = t$
  - Entrada 2: $s_{out} = f(w_0x_0 + w_1x_1 + w_2x_2)$

    $= f(-1.0 \times 1 + 1.0 \times 0 + 0.5 \times 1) = f(-0.5) = 0 \rightarrow s_{out} = t$
  - Entrada 3: $s_{out} = f(w_0x_0 + w_1x_1 + w_2x_2)$
    $= f(-1.0 \times 1 + 1.0 \times 1 + 0.5 \times 0) = f(0) = 0 \rightarrow s_{out} = t$
  - Entrada 4: $s_{out} = f(w_0x_0 + w_1x_1 + w_2x_2)$

    $= f(-1.0 \times 1 + 1.0 \times 1 + 0.5 \times 1) = f(0.5) = 1 \rightarrow s_{out} = t$
- $w_0 = -1.0, w_1 = 1.0, w_2 = 0.5$

Interpretação geométrica



Linha de Decisão:

$$x_1 w_1 + x_2 w_2 = -\theta$$

$$\Downarrow$$

$$x_1 + 0.5\, x_2 = 1$$

Sumário

Teorema de convergência do Perceptron

- Seja o vetor de entrada:
  - $\mathbf{x}(n) = [-1, x_1(n), x_2(n), \cdots, x_p(n)]^T$
- E seu correspondente vetor peso:
  - $\mathbf{w}(n) = [\theta(n), w_1(n), w_2(n), \cdots, w_p(n)]^T$
- A saída pode ser descrita na sua forma compacta:
  - $\mathbf{v}(n) = \mathbf{w}_T(n) \cdot \mathbf{x}(n)$
- A equação $\mathbf{w}^T\mathbf{x}$, plotada em um plano p-dimensional, define um hiperplano entre duas classes diferentes.

Teorema de convergência do Perceptron

- Seja $X_1 = \{\mathbf{x_1}(1), \mathbf{x_1}(2), \cdots\}$ o conjunto de vetores de treinamento pertencentes à classe $\mathcal{C}_1$
- Seja $X_2 = \{\mathbf{x_2}(1), \mathbf{x_2}(2), \cdots\}$ o conjunto de vetores de treinamento pertencentes à classe $\mathcal{C}_2$
- $X = X_1 \cup X_2$

Teorema de convergência do Perceptron

- Usando X_1 e X_2 para treinar o classificador $\rightarrow$ ajuste do vetor peso **w**, de tal forma que as classes $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ fiquem separadas.
- Então, duas classes são ditas linearmente separáveis se existe um vetor peso **w**.
- Analogamente, se as duas classes são linearmente separáveis, então $\exists$ um vetor **w** tal que:

$$\begin{cases} \mathbf{w}^\mathbf{T}\mathbf{x} \geq 0, \forall \mathbf{x} \in \mathcal{C}_1 \\ \mathbf{w}^\mathbf{T}\mathbf{x} < 0, \forall \mathbf{x} \in \mathcal{C}_2 \end{cases} \tag{2}$$

Teorema de convergência do Perceptron

- Portanto, dados os subconjuntos X_1 e X_2, o problema de treinamento do Perceptron consiste em encontrar um vetor $\mathbf{w}$ que satisfaça às duas desigualdades apresentadas em (2).
- O algoritmo para atualização do vetor $\mathbf{w}$ pode ser formulado conforme segue:

Algoritmo

- Se $\mathbf{x}(n)$ é classificado corretamente, então:

$$\begin{cases} \mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n), & se \quad \mathbf{w}^{\mathbf{T}}\mathbf{x} \geq 0, x \in \mathcal{C}_1 \\ \mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n), & se \quad \mathbf{w}^{\mathbf{T}}\mathbf{x} < 0, x \in \mathcal{C}_2 \end{cases}$$

- Caso contrário, o vetor peso é atualizado:

$$\begin{cases} \mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) - \eta(n)\mathbf{x}(n), & se \quad \mathbf{w}^{\mathbf{T}}\mathbf{x} \geq 0, x \in \mathcal{C}_2 \\ \mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + \eta(n)\mathbf{x}(n), & se \quad \mathbf{w}^{\mathbf{T}}\mathbf{x} < 0, x \in \mathcal{C}_1 \end{cases}$$

- Onde $\eta(n)$ é o parâmetro *velocidade de aprendizado*.
  - Se $\eta(n) = \eta$, então o parâmetro velocidade é fixo.

Convergência

- A convergência será provada com $\eta = 1$ e $\mathbf{w}(0) = \mathbf{0}$.
- Suponha que $\mathbf{w}^\mathbf{T}(n)\mathbf{x}(n) < 0$ para $n = 1, 2, \ldots$ e que o vetor de entrada $\mathbf{x}_\mathbf{k}(n) \in X_1$, isto é, a segunda condição de (2) é verdadeira.
- Então, a correção deve ser realizada de acordo com:
  - $\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + \mathbf{x}(n)$
- Usando a condição inicial $\mathbf{w}(0) = \mathbf{0}$, pode-se resolver iterativamente esta equação para:

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{x}(1) + \mathbf{x}(2) + \cdots + \mathbf{x}(n) \tag{3}$$

Convergência

- Contanto que as classes $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ sejam assumidas linearmente separáveis, existe uma solução $\mathbf{w}_0$ tal que
$\mathbf{w}_0^T\mathbf{x}(n) > 0, \quad n = 1, 2, \dots$
- Seja $d = min\{\mathbf{w}_0^T\mathbf{x}(n)\}$, $\mathbf{x}(n) \in X_1$
- Multiplicando ambos os termos de (3) por $\mathbf{w}_0^T$, obtemos:

$$\mathbf{w}_0^T\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}_0^T\mathbf{x}(1) + \mathbf{w}_0^T\mathbf{x}(2) + \cdots + \mathbf{w}_0^T\mathbf{x}(n) \geq n \cdot d$$

- Usando a desigualdade de Cauchy, tem-se:

$$n^2d^2 \leq [\mathbf{w}_0^T\mathbf{w}(n+1)]^2 \leq ||\mathbf{w}_0||^2||\mathbf{w}(n+1)||^2 \implies$$

$$||\mathbf{w}(n+1)||^2 \geq \frac{n^2d^2}{||\mathbf{w}_0||^2} \tag{4}$$

Convergência

- Considerando a equação (2):

$$||\mathbf{w}(k+1)||^2 = ||\mathbf{w}(k)||^2 + ||\mathbf{x}(k)||^2 + 2\mathbf{w}^T(k) \cdot \mathbf{x}(k) \leq 0$$

$$||\mathbf{w}(k+1)||^2 \leq ||\mathbf{w}(k)||^2 + ||\mathbf{x}(k)||^2$$

- Ou, equivalentemente:

$$||\mathbf{w}(k+1)||^2 - ||\mathbf{w}(k)||^2 \leq ||\mathbf{x}(k)||^2, \quad k = 1, 2, \cdots, n$$

- Somando estas desigualdades para $k = 1, 2, \cdots, n$ e $\mathbf{w}(0) = 0$:

$$||\mathbf{w}(n+1)||^2 \leq \sum_k ||\mathbf{x}(k)||^2 \leq n \cdot \beta \tag{5}$$

- Onde $\beta = max\{||\mathbf{x}(k)||^2\}, \quad \mathbf{x}(k) \in X_1$

Convergência

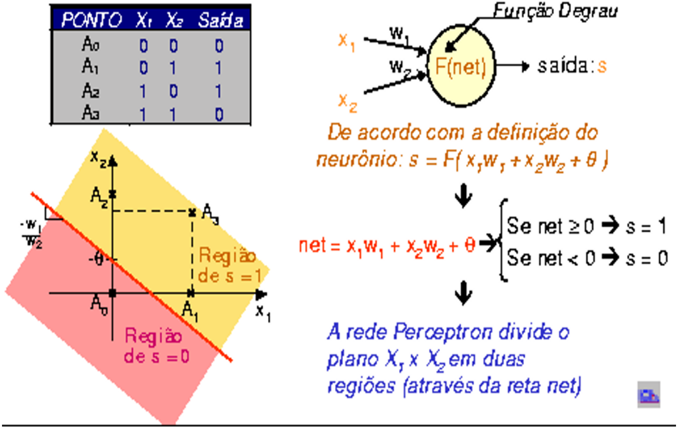
- A equação (5) diz que a norma euclidiana ao quadrado do vetor peso $\mathbf{w}(n+1)$ cresce linearmente com o número de iterações.
- Isso entra em conflito com a equação (4).
- n não pode ser maior que n_{max}, para o qual as equações (4) e (5) valem com sinal de igualdade:

$$\frac{n_{max}^2 d^2}{||\mathbf{w}_0||^2} = n_{max}\beta \implies n_{max} = \frac{\beta||\mathbf{w}_0||^2}{d^2}$$

- Portanto, supondo que $\mathbf{w}_0$ existe, a regra de atualização deve terminar em n_{max} iterações.

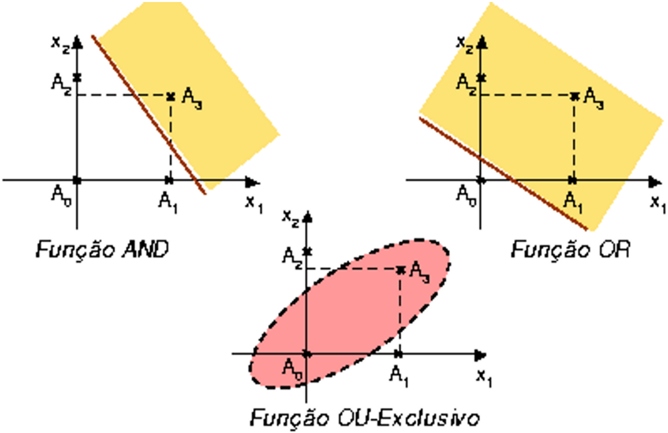
Sumário

O problema do OU exclusivo (XOR)



PONTO	X_1	X_2	Saída
A_0	0	0	0
A_1	0	1	1
A_2	1	0	1
A_3	1	1	0

O problema do OU exclusivo (XOR)



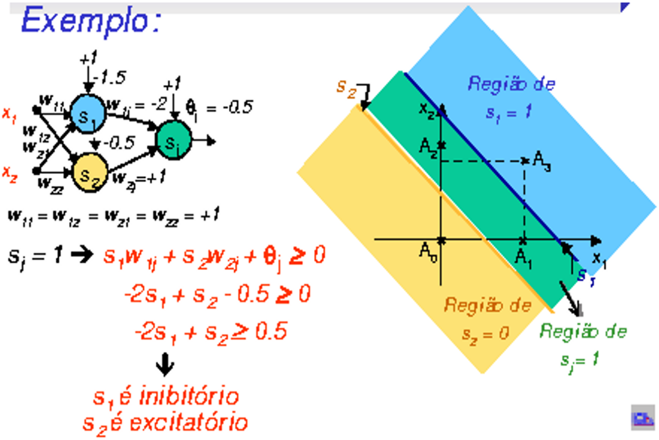
O problema do OU exclusivo (XOR)

- Mudando-se os valores de w_1, w_2 e θ, muda-se a inclinação da reta.
- Entretanto, é impossível achar uma reta que divida o plano de forma a separar os pontos A_1 e A_2 de um lado e A_0 e A_3 de outro.
- Redes de uma única camada só representam **funções linearmente separáveis**.

O problema do OU exclusivo (XOR)

- Minsky & Papert provaram que esse problema pode ser solucionado adicionando-se uma outra camada intermediária de processadores $\rightarrow$ Multi-Layer Perceptron (MLP).

O problema do OU exclusivo (XOR)

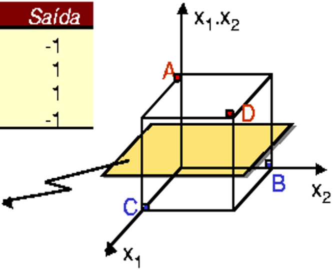


O problema do OU exclusivo (XOR)

- *Exemplo do OU-EXCLUSIVO:*
  - J = 2 (número de entradas originais - x_1, x_2)
  - H = 1 (número de entradas adicionais - $x_1 . x_2$)

Pontos	Entradas				Saída
A	-1	-1	1	⇨	-1
B	-1	1	-1	⇨	1
C	1	-1	-1	⇨	1
D	1	1	1	⇨	-1

Problema Linearmente Separável



Multi-Layer Perceptron

- Redes de apenas uma camada só representam funções linearmente separáveis.
- Redes de múltiplas camadas solucionam essa restrição.
- O desenvolvimento do algoritmo *backpropagation* foi um dos motivos para o ressurgimento da área de redes neurais.