

PESQUISA OPERACIONAL (Operational Research)

Os métodos da Pesquisa Operacional visam auxiliar na seleção da melhor maneira de se operar um sistema, usualmente sob condições que exijam a utilização de recursos limitados.

Empresas podem ser vistas como sistemas que visam obter o maior retorno possível para as suas atividades, com retorno podendo significar qualidade do serviço prestado no caso de uma empresa pública, ou lucro financeiro no caso de uma empresa privada. Planejar as atividades de uma empresa produtora de bens (eletrodomésticos, equipamentos eletrônicos, automóveis, ...) e de serviços (telefonias, transporte, energia, ...) significa determinar que decisões a empresa deve tomar, eventualmente ao longo do tempo e sob condições de incerteza, para maximizar o seu retorno.

Problemas práticos de planejamento podem exigir a utilização de sistemas de suporte à decisão, softwares destinados a apoiar o processo de tomada de decisões. Sistemas deste tipo geralmente oferecem opções de modelagem matemática e de métodos quantitativos para tomada de decisões compatíveis com os modelos adotados. Os modelos matemáticos utilizados em planejamento da produção são geralmente modelos de otimização, no sentido de que estes modelos prescrevem obter decisões ótimas, como mínimo custo ou máximo lucro de produção, por exemplo.

Dá-se o nome de Programação Matemática ao conjunto de modelos e métodos de otimização utilizados em planejamento da produção, podendo o termo programação ser entendido como sinônimo de planejamento.

Baseado em material elaborado pelo professor Osmar Kunen e apostila da professora Janaina Poffo Possamai.

Histórico:

No século XII, com o início da Revolução Industrial, começaram a surgir as primeiras preocupações com a maximização dos lucros, minimização dos custos e desta forma começaram a surgir as primeiras tentativas de modelação para interpretar a realidade.

Em 1939, Kantorovich, apresenta o trabalho “Métodos Matemáticos de Organização e Planejamento de Produção”, formulado na forma de um problema de Programação Linear, mas para o qual não apresenta a resolução.

Somente com o início da II Guerra Mundial é que surge a Pesquisa Operacional, como ramo científico. Seu objetivo inicial era investigar de forma sistemática e racional os processos envolvidos na realização de uma atividade produtiva, mesmo que no início com finalidades bélicas.

Hoje ela possui uma grande aplicabilidade nas áreas de administração, produção, planejamento e organização.

Definição

Como ciência, estrutura processos, propondo um conjunto de alternativas de ação, fazendo a previsão e comparação de valores, de evidência e de custos.

Ou seja:

- É um método científico de tomada de decisão
- Ferramenta estratégica de gestão de negócios
- Construção de Modelos Matemáticos, econômicos e estatísticos para tratar de situações de complexidade e incerteza.
- Analisar as relações que determinam as consequências futuras prováveis de ações alternativas. Inferência.

MODELOS DE P.O. QUE SERÃO ESTUDADOS

- Programação Linear
- Sequenciamento de Projetos (PERT)

PROGRAMAÇÃO LINEAR

A Programação Linear é uma das muitas técnicas analíticas recentemente desenvolvidas que têm se mostrado úteis na resolução de certos tipos de problemas empresariais. Esses métodos quantitativos de resolução de problemas, como muito aplicados na Pesquisa Operacional, são baseados em conceitos matemáticos e estatísticos.

Os Modelos envolvem as funções, equações e inequações do primeiro grau.

ÁREAS DE APLICAÇÃO:

Os métodos de programação linear podem ser aplicados principalmente à classe geral de problemas conhecidos como problemas de alocação. Definidos pelos economistas como aqueles envolvidos na alocação de recursos escassos entre fins alternativos, de acordo com algum critério.

Os recursos escassos para uma empresa incluem capital, pessoal, equipamento e materiais. Os vários produtos e/ou serviços que constituem a produção da firma representam fins alternativos aos quais devem ser alocados recursos. O critério ou objetivo, na base de quais decisões de alocação devem ser tomadas, pode ser alguma forma de maximização de lucro ou outra medida qualquer apropriada de performance desejada.

Encontram-se muitos tipos de problemas de alocação nas atividades empresariais, especialmente na produção ou função de operações. Como exemplos em que se pode aplicar a Programação Linear, podemos citar:

- ✓ Determinação dos produtos a serem fabricados (composição da produção);
- ✓ Problemas de mistura ou composição;
- ✓ Problemas de produção e planejamento de estoque;
- ✓ Alimentação das máquinas;
- ✓ Problemas de transporte e distribuição física.

Embora não haja uma fórmula única para a modelagem, sugere-se a seguinte metodologia:

- **Identificar as variáveis decisórias:** aquilo que se pode controlar e que se deseja saber quanto vale. As variáveis devem ser claramente definidas. Se a variável usa alguma unidade de medida, deve-se deixar bem claro qual é esta unidade de medida. Se ela é real ou só pode assumir valores inteiros.
- **Identificar o objetivo:** sempre se quer ou maximizar ou minimizar um determinado objetivo, expresso em função das variáveis do problema.

- **Identificar os fatores restritivos:** também expressas em função das variáveis do problema, as restrições limitam as combinações das variáveis a determinados limites.

MÉTODOS DE CÁLCULO

- Interpretação Gráfica
- Método Simplex
- Solução Computacional – via solver

MODELAGEM - Modelo Geral de Problemas de Programação Linear

Todo problema de PL pode ser descrito através de uma função objetivo e através de um conjunto de restrições, todos lineares. Assim, temos o seguinte modelo genérico.

$\{ \text{Max, Min} \} Z = C_1X_1 + C_2X_2 + \dots + C_nX_n$
 sujeito a
 $a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \dots + a_{1n}X_n \{ =, \leq, \geq \} b_1$
 $a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \dots + a_{2n}X_n \{ =, \leq, \geq \} b_2$

 $a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \dots + a_{mn}X_n \{ =, \leq, \geq \} b_m$
 $X_1, X_2, \dots, X_n \geq 0$

No modelo matemático acima, deve-se interpretar:

- X_1, X_2, \dots, X_n = conjunto de variáveis estruturais do problema;
- C_1, C_2, \dots, C_n = coeficientes da função objetivo;
- a_{ij} e b_i = coeficientes das restrições. Os coeficientes da b_i da mão direita devem necessariamente ser não-negativos quando o algoritmo de resolução é o Simplex.

O que está entre colchetes significa “usar um dos elementos separados por vírgula”.

A função objetivo expressa a meta que se deseja atender. Esta meta ou será de maximização (Max $Z = \dots$) ou de minimização (Min $Z = \dots$).

As restrições expressam limites a serem respeitados. A resolução procura a solução ótima no espaço de soluções compatíveis ao problema de PL, ou seja, no conjunto de pontos cujas coordenadas são valores das

variáveis que satisfazem ao conjunto de restrições. Cada restrição poderá ser uma igualdade (=) ou uma desigualdade não-estrita (\leq ou \geq).

As últimas restrições de **não negatividade** das variáveis constituem condição necessária à aplicação do algoritmo Simplex de resolução de problemas de PL (que será trabalhado posteriormente). Embora normalmente isto ocorra em decorrência da natureza da variável dentro do modelo, pode haver situações em que variáveis são irrestritas, isto é, podem assumir qualquer valor real. É o caso, por exemplo, onde a variável, em um determinado problema, representa um saldo bancário, que eventualmente pode ser negativo. Nestes casos, existe um artifício: substituir cada variável irrestrita pela diferença de duas outras, onde a restrição de não negatividade se aplica. Por exemplo, seja x_3 uma variável irrestrita em um problema de PL. Neste caso utilizamos a substituição $x_3 = x_3' - x_3''$. Assim, cada ocorrência de x_3 na função objetivo e em cada restrição é substituída por $x_3' - x_3''$. Neste caso, $x_3' \geq 0$ e $x_3'' \geq 0$. Na solução ótima, tomam-se os valores de x_3' e x_3'' e com eles calcula-se x_3 . Se $x_3' > x_3''$ então $x_3 > 0$. Se $x_3' < x_3''$ então $x_3 < 0$.

Observação: Os valores de todos os coeficientes são conhecidos durante a modelagem do problema. As variáveis são calculadas pelo algoritmo de resolução.

Na PL, todas as variáveis devem ser quantidades reais. No caso de um problema de planejamento da produção em uma indústria discreta (automobilística, por exemplo), algumas das variáveis (se não todas) deverão representar quantidades a serem produzidas, necessariamente quantidades inteiras. Neste caso será necessário, dependendo da solução encontrada, fazer um ajuste na mesma.

RESOLUÇÃO PELO MÉTODO GRÁFICO

É aplicada a problemas pequenos, com apenas duas variáveis. Apesar da sua limitação, este método facilita o entendimento do processo de busca da solução por meio da solução gráfica, possibilitando melhor visão geral do problema e tornando mais fácil a interpretação de alguns passos e resultados.

Cada restrição define uma área que contém um número infinito de pontos representados pela área, que não excede a inequação de restrição. O processo de busca da solução consiste em encontrar a região definida por todas as restrições (região viável) e dela selecionar pontos para que sejam analisados na função objetivo de forma que seja possível encontrar o melhor resultado.

Problema Exemplo 1. Uma empresa produz dois produtos que, para serem finalizados precisam passar por 3 máquinas. A primeira máquina pode ser usada no máximo 70 horas por semana; a segunda máquina no máximo 40 horas por semana e a terceira máquina, no máximo 90 horas por semana. O primeiro produto requer 2 horas na máquina I, 1 hora na máquina II e 1 hora na máquina III. O segundo produto requer 1 hora em cada uma das máquinas I e II e 3 horas na máquina III. O preço de venda é de R\$ 400,00 para o primeiro produto e de R\$ 600,00 para o segundo produto. Sabe-se ainda que, tudo o que puder ser produzido em uma semana será vendido.

Problema Exemplo 2. Uma empresa fabrica dois tipos de produtos, feitos de madeira compensada. Cada produto do tipo A necessita de 5 minutos para o corte e 10 minutos para a montagem; cada produto do tipo B precisa de 8 minutos para o corte e 8 minutos para a montagem. Dispõe-se de 3 horas e vinte minutos para o corte e 4 horas para a montagem. O lucro é de \$ 5,00 para cada produto do tipo A e de \$ 6,00 para cada produto do tipo B. Suponha que toda a produção é vendida. Quantas unidades de cada produto a empresa deverá produzir para maximizar o lucro? (É possível vender tudo o que for produzido)

Problema Exemplo 3. O dono de um aviário precisa fabricar uma ração especial para as suas galinhas, de forma a atender às necessidades mínimas. A produção desejada desta ração é de 90 kg e a mistura deve ser formada por dois ingredientes básicos: o milho e o farelo de arroz, que custam \$ 0,90 e \$ 0,30 por kg respectivamente. Além disso, sabe-se que a ração precisa ter pelo menos 7% de proteína e 3% de fibra na sua composição, de forma a atender as necessidades diárias das aves. A partir da tabela com a composição porcentual de fibra e proteína do milho e do farelo de arroz, pede-se formular um modelo de Programação Linear para atender as necessidades diárias a um custo mínimo e verificar a quantidade de cada ingrediente.

	Proteína	Fibra
Milho	9%	2%
Farelo de Arroz	5%	6%

Composição de cada ingrediente

Problema Exemplo 4. Uma empresa possui dois depósitos para suas mercadorias localizados em cidades diferentes, com quantidades diferentes de produtos. O depósito a_1 possui 15 unidades em estoque e o depósito a_2 possui 25 unidades. Três lojas solicitaram estes produtos nas seguintes quantidades/destinos, $b_1 = 20$, $b_2 = 10$ e $b_3 = 10$ unidades. Devido às distâncias entre os depósitos e as lojas, os custos de transporte são os seguintes $c_{11} = 10$, $c_{12} = 3$, $c_{13} = 5$; $c_{21} = 12$; $c_{22} = 7$; $c_{23} = 9$; Sendo c_{ij} = custo por unidade que sai do depósito i para a loja j . Encontre a quantidade que deve ser enviada de cada depósito para cada loja de modo que o custo com transporte seja mínimo.

EXERCÍCIOS

Modele os seguintes problemas e resolva pelo método gráfico (se for possível).

1. Um empresário tem dois produtos que dão um excelente lucro. Ele precisa então, decidir quantas unidades de cada produto devem ser produzidas a fim de otimizar o seu lucro total. Cada unidade do produto A oferece um lucro de R\$ 20,00 e cada unidade do produto B, R\$ 50,00. Cada unidade do produto A requer 3 horas de máquina e 9 unidades de matéria-prima, enquanto o produto B requer 4 horas de máquina e 7 unidades de

matéria-prima. Os tempos máximos disponíveis de horas de máquina e de matéria-prima são 200 horas e 300 unidades, respectivamente.

- a) Faça a modelagem do problema acima.
- b) Resolva utilizando o método gráfico.
- c) Analise a solução apresentada.

2. Um agricultor dispõe de dois tipos de adubo. O adubo A contém 3 g de fósforo, 1 g de nitrogênio e 8 g de potássio, e custa 5 u.m. por quilograma. O adubo tipo B contém 2 g de fósforo, 3 g de nitrogênio e 2 g de potássio, e custa 4 u.m. por quilograma. A terra que o agricultor vai utilizar necessita de pelo menos 3 g de fósforo, 1,5 g de nitrogênio e 4 g de potássio. Quanto o agricultor deve comprar de cada adubo, de modo que seu custo seja mínimo?

- a) Formular a modelagem de modo a determinar a quantidade de camisas a produzir para otimizar a solução.
- b) Resolva pelo método gráfico e analise a solução apresentada.

3. Uma fábrica produz dois tipos de móveis. O móvel do tipo I é vendido na loja por 20 u.m. enquanto o do tipo II, por 30 u.m. Cada móvel do tipo I consome 3 horas de trabalho de carpintaria e o do tipo II, 6. A empresa dispõe de três carpinteiros, totalizando 24 horas de trabalho por dia. Após prontos, os móveis são laqueados. O móvel do tipo I leva 2 horas para ser laqueado e o do tipo II, 3. Os laqueadores dispõem de 18 horas por dia para fazer seu serviço. Um caminhão vem uma vez por dia (no final do expediente) na empresa para levar os móveis. Ele pode transportar móveis que ocupem até 20 m². Cada móvel do tipo I ocupa 4 m² e do tipo II, 2 m². O fabricante não pode deixar nenhum estoque de produto pronto na fábrica por falta de espaço. Qual deve ser a produção de cada um dos produtos da fábrica para maximizar seu rendimento com as vendas, respeitando as restrições citadas?

4. O açougue de um povoado prepara tradicionalmente suas almôndegas, misturando carne bovina magra e carne de porco. A carne bovina contém 80% de carne e 20% de gordura e custa R\$0,80 o Kg; a carne de porco contém 68% de carne e 32% de gordura e custa R\$0,60 o Kg. Quanto de carne bovina e quanto de carne de porco deve o açougue utilizar por Kg de almôndegas se desejar minimizar seu custo e conservar o teor de gordura da almôndega não superior a 25%?

5. A empresa Industrial Têxtil S/A realizou no mês de janeiro a produção e venda de dois produtos principais: camiseta e conjunto. Como o lucro obtido foi muito bom a empresa deseja otimizar a venda destes produtos, ou seja, obter o maior lucro possível com as suas vendas.

Sabe-se que os custos fixos ficam na média de R\$75000,00 e que cada camiseta custa para a indústria R\$60,00, sendo vendida a R\$100,00. Já o conjunto custa, para a indústria R\$150,00 e seu preço de venda é de R\$200,00.

A demanda máxima de camisetas é de 36.000 unidades e dos conjuntos é de 40.000 unidades. O setor de malharia possui 50.000 horas/homem disponível, sendo que cada camiseta requer 0,6 e cada conjunto, 1. O setor de beneficiamento possui 65.000 horas/homem disponível, sendo que cada camiseta requer 1, e cada

conjunto 0,8. A confecção possui 150.000 horas/homem disponível, sendo que cada camiseta requer 1,5 e cada conjunto 4. Quantas unidades de cada produto devem ser vendidas para que o lucro seja máximo?

6. Em determinada empresa, a produção de cada unidade do produto A requer 3 homens-hora de mão de obra e 1 KWh de energia. Cada unidade do produto B requer 2 homens-hora e 3 KWh. Existe material disponível para a fabricação de 600 unidades do produto A e para 800 unidades do produto B. Estão disponíveis 2.450 homens-hora de mão de obra e 2.100 KWh de energia. O lucro por unidade é de \$60 para o produto A e de \$90 para o produto B. Quantas unidades de cada produto devem ser produzidas para que a empresa obtenha o máximo lucro supondo que todas as unidades produzidas sejam vendidas?

- Formular a modelagem de modo a determinar a quantidade de camisas a produzir para otimizar a solução.
- Resolva pelo método gráfico.
- Analise a solução apresentada.

7. Dados os custos de uma carga de leite de determinadas fábricas para armazéns e, das ofertas (produção) e procuras em cargas de caminhão /dia. Calcular o menor custo de fazer esta distribuição satisfazendo os pedidos.

Custos por carga de caminhão					
Armazéns					
Fábricas	1	2	3	4	Ofertas
1	1	2	3	4	6
2	4	3	2	4	8
3	0	2	2	1	10
Demanda	4	7	6	7	

8. Uma marcenaria deseja estabelecer uma programação diária de produção. Atualmente a oficina faz apenas dois produtos: *mesa* e *armário*, ambos de um só modelo. Para efeito de simplificação, vamos considerar que a marcenaria tem limitações em somente dois recursos: *madeira* e *mão de obra*, cujas disponibilidades diárias são mostradas na tabela abaixo:

Recurso	Disponibilidade
Madeira	12 m ²
Mão de obra	8 homens-hora

O processo de produção é tal que, para fazer 1 mesa, a fábrica gasta 2 m^2 de madeira e 2 homens-hora de mão de obra. Para fazer um armário, a fábrica gasta 2 m^2 de madeira e 1 homem-hora de mão de obra. Além disso, o fabricante sabe que cada mesa dá um lucro de 6 u.m. e cada armário dá um lucro de 2 u.m. O problema do fabricante é encontrar o programa de produção que maximiza o lucro total. Faça a modelagem e resolva pelo método gráfico.