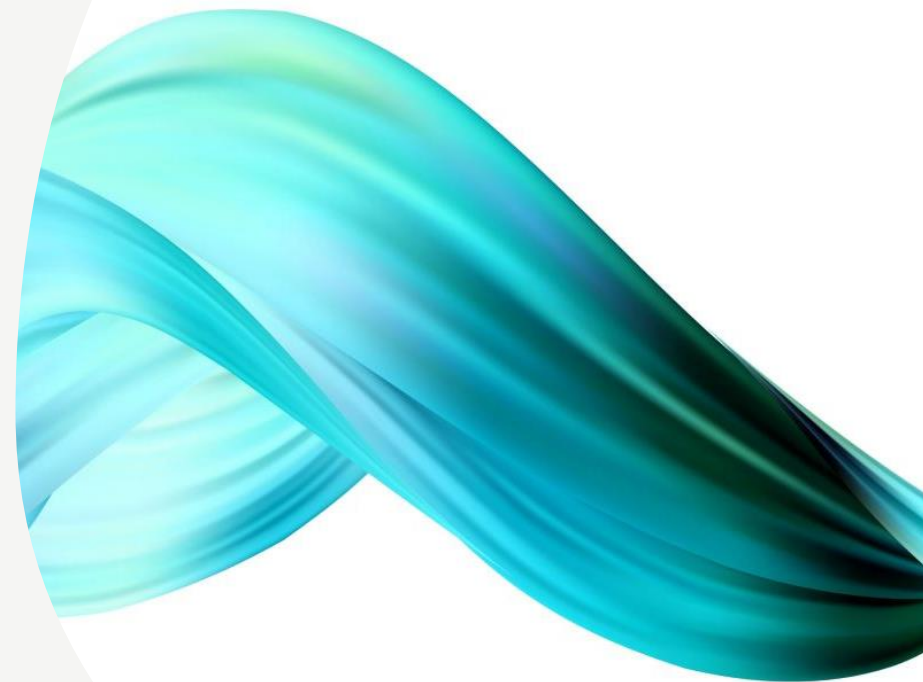




# LÓGICA PROPOSICIONAL

<propriedades das fórmulas e método  
da refutação>

*Prof. Jonathan Gil Müller*



# Escopo da disciplina:

## Unidade 1:

### **INTRODUÇÃO À LÓGICA**

- >> O que é lógica?
- >> Por que estudar lógica?
- >> Histórico e evolução.

## Unidade 2:

### **LÓGICA PROPOSICIONAL**

- >> Introdução: proposições, princípios, operadores lógicos;
- >> Linguagem: sintaxe e semântica;
- >> Métodos para verificar a validade de fórmulas: (a) tabelas verdade, (b) método da refutação, (c) dedução formal
- >> Formalização de problemas.

## Unidade 3:

### **LÓGICA DE PREDICADOS**

- >> Introdução;
- >> Linguagem: sintaxe e semântica;
- >> Métodos para verificar a validade de fórmulas: dedução formal;
- >> Formalização de Problemas.

## Unidade 4:

### **FORMALIZAÇÃO DE PROGRAMAS E SISTEMAS DE COMPUTAÇÃO SIMPLES**

- >> PROgramming in LOGic (PROLOG)

# Lógica Proposicional:

## PROPRIEDADES

Existem **três classificações** para uma fórmula lógica, ou seja, ela pode ser:

- a) **Tautológica**: diz-se que uma fórmula é tautológica (ou uma tautologia) se a interpretação da fórmula for **sempre V**, quaisquer que sejam as interpretações de suas subfórmulas.

Em outras palavras, uma fórmula  $\alpha$  é uma tautologia (ou é válida) se e somente se, para toda interpretação  $I$ ,  
 $I[\alpha] = V$ ;

# Lógica Proposicional:

## PROPRIEDADES

Exemplo de **tautologia**:  $(P \wedge Q) \rightarrow (P \vee Q)$

(P	$\wedge$	Q)	$\rightarrow$	(P	$\vee$	Q)

# Lógica Proposicional:

## PROPRIEDADES

- b) **Contraditória:** diz-se que uma fórmula é contraditória (ou é insatisfatível) se a interpretação da fórmula for **sempre F**, quaisquer que sejam as interpretações de suas subfórmulas.

Em outras palavras, uma fórmula  $\alpha$  é contraditória se, e somente se, para toda interpretação  $I$ ,  $I[\alpha] = \mathbf{F}$ .

# Lógica Proposicional: PROPRIEDADES

Exemplo de **contradição**:  $(P \leftrightarrow \sim Q) \wedge (P \wedge Q)$

(P	$\leftrightarrow$	$\sim Q)$	$\wedge$	(P	$\wedge$	Q)



# Lógica Proposicional:

## PROPRIEDADES

- c) **Satisfatível**: diz-se que uma fórmula é satisfatível (ou **contingente** ou factível) se a interpretação da fórmula for **V** para algumas interpretações de suas subfórmulas e **F** para outras.

Em outras palavras, uma fórmula  $\alpha$  é satisfatível se, e somente se, existir interpretações tais que  $I[\alpha] = \mathbf{V}$  e  $I[\alpha] = \mathbf{F}$ .

A cartoon illustration of Homer Simpson from 'The Simpsons'. He is shown from the chest up, wearing his signature blue polo shirt. His eyes are wide open, and his mouth is open in a 'V' shape, indicating he is shouting or cheering. His two arms are raised high, with his fists clenched. The background is a bright blue sky with several white, fluffy clouds. A dark grey, semi-transparent rectangular box is positioned in the lower-left area of the image, containing white text.

# Mãos a obra:

Exercícios 1 e 2 da lista 03!



1. As fórmulas da lógica proposicional possuem propriedades semânticas. Sendo assim:
  - a) O que significa dizer que uma fórmula é tautológica (ou uma tautologia, ou válida)?
  - b) O que significa dizer que uma fórmula é contraditória (ou insatisfável)?
  - c) O que significa dizer que uma fórmula é satisfável (ou contingente, ou factível)?

## RESPOSTAS:

a) O que significa dizer que uma fórmula é tautológica (ou uma tautologia, ou válida)?

R.: Uma fórmula é tautológica se a interpretação da fórmula for sempre V, quaisquer que sejam as interpretações das suas sub-fórmulas.

b) O que significa dizer que uma fórmula é contraditória (ou insatisfável)?

R.: Uma fórmula é contraditória se a interpretação da fórmula for sempre F, quaisquer que sejam as interpretações das suas sub-fórmulas.

c) O que significa dizer que uma fórmula é satisfável (ou contingente, ou factível)?

R.: Uma fórmula é satisfável se a interpretação da fórmula for V para algumas interpretações das suas sub-fórmulas e for F para outras.

2. Considere a tabela verdade das fórmulas abaixo. Para quais fórmulas é possível afirmar: é tautológica, é contraditória, é satisfatível? Justifique sua resposta.

a)

$\neg$	P	$\rightarrow$	true
F	V	V	V
V	F	V	V

b)

$\neg$	((P	$\vee$	Q)	$\rightarrow$	(P	$\rightarrow$	Q))
F	V	V	V	V	V	V	V
F	F	F	F	V	F	V	F
V	V	V	F	F	V	F	F

c)

(P	$\wedge$	Q)	$\leftrightarrow$	(P	$\rightarrow$	$\neg$	(Q	$\vee$	$\neg$	P))
V	V	V	F	V	F	F	V	V	F	V
F	F	F	F	F	V	F	F	V	V	F

## RESPOSTAS:

- a) R.: É tautológica, para todas as interpretações das suas sub-fórmulas, a interpretação da fórmula é sempre V.
- b) R.: É satisfatível, para algumas interpretações das suas sub-fórmulas, a interpretação da fórmula é V e para outras a interpretação da fórmula é F.
- c) R.: Não é possível determinar se a fórmula é contraditória ou satisfatível, pois não se tem determinadas todas as interpretações da fórmula.

# Lógica Proposicional:

## PROPRIEDADES

Para determinar se uma fórmula é tautológica, contraditória ou satisfatível pode-se usar os seguintes métodos:

- a) **tabela-verdade**;
  - b) **método da negação ou da refutação** (absurdo).
- Observa-se que esses métodos são equivalentes entre si, mas, dependendo da fórmula, um método pode se mostrar mais eficiente do que outro.

# Lógica Proposicional:

## MÉTODO DA REFUTAÇÃO

A interpretação de uma fórmula também pode ser descrita através do **método da refutação** (SOUZA, 2002, p. 51):

1º passo: considerar inicialmente a **negação** daquilo que se pretende demonstrar;

2º passo: utilizar um conjunto de deduções para concluir um absurdo, atribuindo valores aos símbolos verdade, símbolos proposicionais e conectivos proposicionais, na **ordem “inversa”** a da construção da tabela verdade;

3º passo: caso se obtenha um **absurdo**, a conclusão é que a suposição inicial é falsa. Caso contrário, nada se pode concluir sobre a suposição inicial.

# Lógica Proposicional: MÉTODO DA REFUTAÇÃO

Para verificar se uma fórmula  $\alpha$  é **tautológica**, deve-se:

1º passo: negar  $\alpha$ , ou seja, considerar que  $\alpha$  não é válida atribuindo-se o valor **F** à fórmula;

2º passo: fazer deduções sobre  $\alpha$  para concluir um absurdo;

3º passo: caso se obtenha um absurdo,  $\alpha$  não pode ter o valor **F**. Ou seja, a suposição inicial é falsa, logo  $\alpha$  é uma **tautologia**. Caso não se obtenha o absurdo, nada se pode concluir sobre a suposição inicial.

# Lógica Proposicional: MÉTODO DA REFUTAÇÃO

Para verificar se uma fórmula  $\alpha$  é **tautológica**, deve-se:

1º passo: negar  $\alpha$ , ou seja, considerar que  $\alpha$  não é válida atribuindo-se o valor **F** à fórmula;

Exemplo:  $\alpha = ((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)) \rightarrow (P \rightarrow R)$

((P	→	Q)	∧	(Q	→	R))	→	(P	→	R)
							F			



$((P$	$\rightarrow$	$Q)$	$\wedge$	$(Q$	$\rightarrow$	$R))$	$\rightarrow$	$(P$	$\rightarrow$	$R)$

# Lógica Proposicional: MÉTODO DA REFUTAÇÃO

Para verificar se uma fórmula  $\alpha$  é **tautológica**, deve-se:

2º passo: fazer deduções sobre  $\alpha$  para concluir um absurdo;

Exemplo:  $\alpha = ((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)) \rightarrow (P \rightarrow R)$

Como  $I[\alpha] = F$ , então

- $I[(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)] = V$
- $I[(P \rightarrow R)] = F$

$((P$	$\rightarrow$	$Q)$	$\wedge$	$(Q$	$\rightarrow$	$R))$	$\rightarrow$	$(P$	$\rightarrow$	$R)$
			V				F		F	

# Lógica Proposicional: MÉTODO DA REFUTAÇÃO

Para verificar se uma fórmula  $\alpha$  é **tautológica**, deve-se:

2º passo: fazer deduções sobre  $\alpha$  para concluir um absurdo;

Exemplo:  $\alpha = ((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)) \rightarrow (P \rightarrow R)$

- A partir desses valores de verdade, podemos obter os valores de verdade das subfórmulas

$((P$	$\rightarrow$	$Q)$	$\wedge$	$(Q$	$\rightarrow$	$R))$	$\rightarrow$	$(P$	$\rightarrow$	$R)$
	V		V		V		F	V	F	F

# Lógica Proposicional: MÉTODO DA REFUTAÇÃO

Para verificar se uma fórmula  $\alpha$  é **tautológica**, deve-se:

2º passo: fazer deduções sobre  $\alpha$  para concluir um absurdo;

Exemplo:  $\alpha = ((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)) \rightarrow (P \rightarrow R)$

- Então podemos concluir que  $I[P] = V$  e  $I[R] = F$

$((P$	$\rightarrow$	$Q)$	$\wedge$	$(Q$	$\rightarrow$	$R))$	$\rightarrow$	$(P$	$\rightarrow$	$R)$
V	V		V		V	F	F	V	F	F

# Lógica Proposicional: MÉTODO DA REFUTAÇÃO

Para verificar se uma fórmula  $\alpha$  é **tautológica**, deve-se:

2º passo: fazer deduções sobre  $\alpha$  para concluir um absurdo;

Exemplo:  $\alpha = ((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)) \rightarrow (P \rightarrow R)$

- A partir da subfórmula  $(P \rightarrow Q)$ , concluímos que  $I[Q] = V$
- A partir da subfórmula  $(Q \rightarrow R)$ , concluímos que  $I[Q] = F$



➡ Portanto, suposição inicial é FALSA!

$((P$	$\rightarrow$	$Q)$	$\wedge$	$(Q$	$\rightarrow$	$R))$	$\rightarrow$	$(P$	$\rightarrow$	$R)$
V	V	V	V	F	V	F	F	V	F	F

# Lógica Proposicional: MÉTODO DA REFUTAÇÃO

Para verificar se uma fórmula  $\alpha$  é **tautológica**, deve-se:

3º passo: caso se obtenha um absurdo,  $\alpha$  não pode ter o valor **F**.  
Ou seja, a suposição inicial é falsa, logo  $\alpha$  é uma **tautologia**. Caso não se obtenha o absurdo, nada se pode concluir sobre a suposição inicial.

Exemplo:  $\alpha = ((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)) \rightarrow (P \rightarrow R)$

- A partir da subfórmula  $(P \rightarrow Q)$ , concluímos que  $I[Q] = V$
- A partir da subfórmula  $(Q \rightarrow R)$ , concluímos que  $I[Q] = F$



➡ Portanto, suposição inicial é FALSA!

Não existe interpretação  $I$  tal  
que  $I[\alpha] = F$   
Logo,  $\alpha$  é uma tautologia.

$((P$	$\rightarrow$	$Q)$	$\wedge$	$(Q$	$\rightarrow$	$R))$	$\rightarrow$	$(P$	$\rightarrow$	$R)$
V	V	V	V	F	V	F	F	V	F	F



# Mais alguns exercícios!

Questão 03 da Lista 03...



Questão 3:

a)  $(P \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R)$

### Questão 3:

b)  $(P \rightarrow Q) \rightarrow ((P \rightarrow \neg Q) \rightarrow \neg P)$

[illegible]

c)  $(P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \rightarrow ((P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R))$

[illegible]

d)

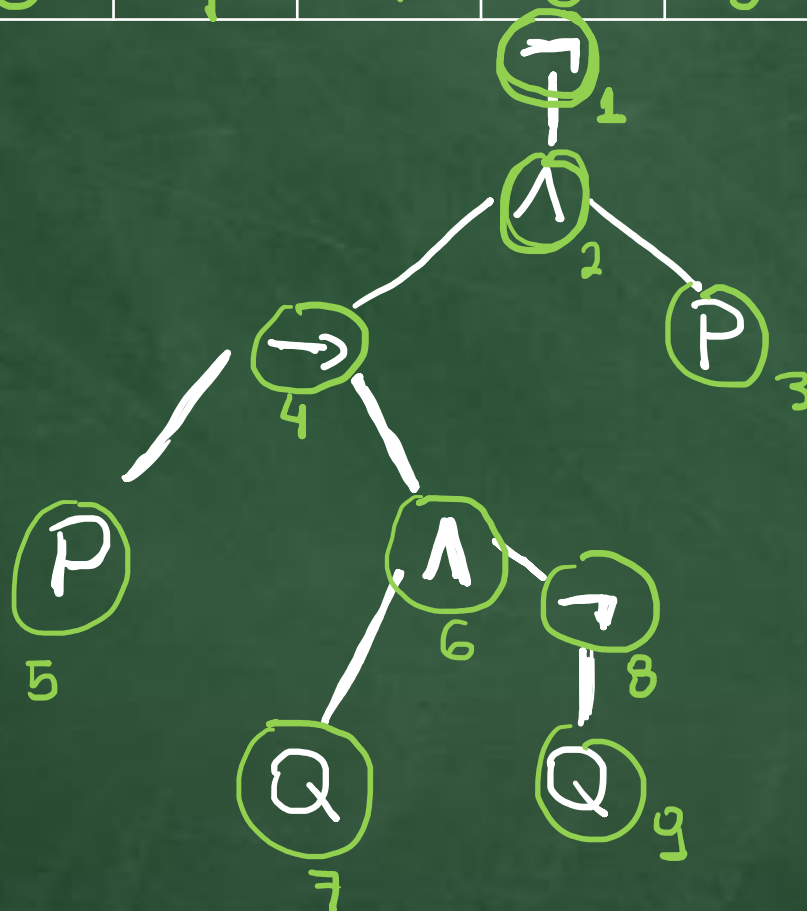
$$\neg((P \rightarrow (Q \wedge \neg Q)) \wedge P)$$

$\neg$	$((P$	$\rightarrow$	$(Q$	$\wedge$	$\neg$	$Q))$	$\wedge$	$P$
F	V	V	V	V	V	F	V	V
1	5	4	7	6	8	9	2	3

Absurdo

É tautológico?

Sim



P	$\rightarrow$	Q
V	V	V
V	V	V
F	V	V
F	V	V

P	$\wedge$	Q
V	V	V
V	V	V
F	V	V
F	V	V

d)

$$\neg((P \rightarrow (Q \wedge \neg Q)) \wedge P)$$

$\neg$	$((P$	$\rightarrow$	$(Q$	$\wedge$	$\neg$	$Q))$	$\wedge$	$P)$
V	V	F	V	F	F	V	F	V
V	V	F	F	F	V	F	F	V
V	F	V	V	F	F	V	F	F
V	F	V	F	F	V	F	F	F


 É tautológico

4

↑

↑

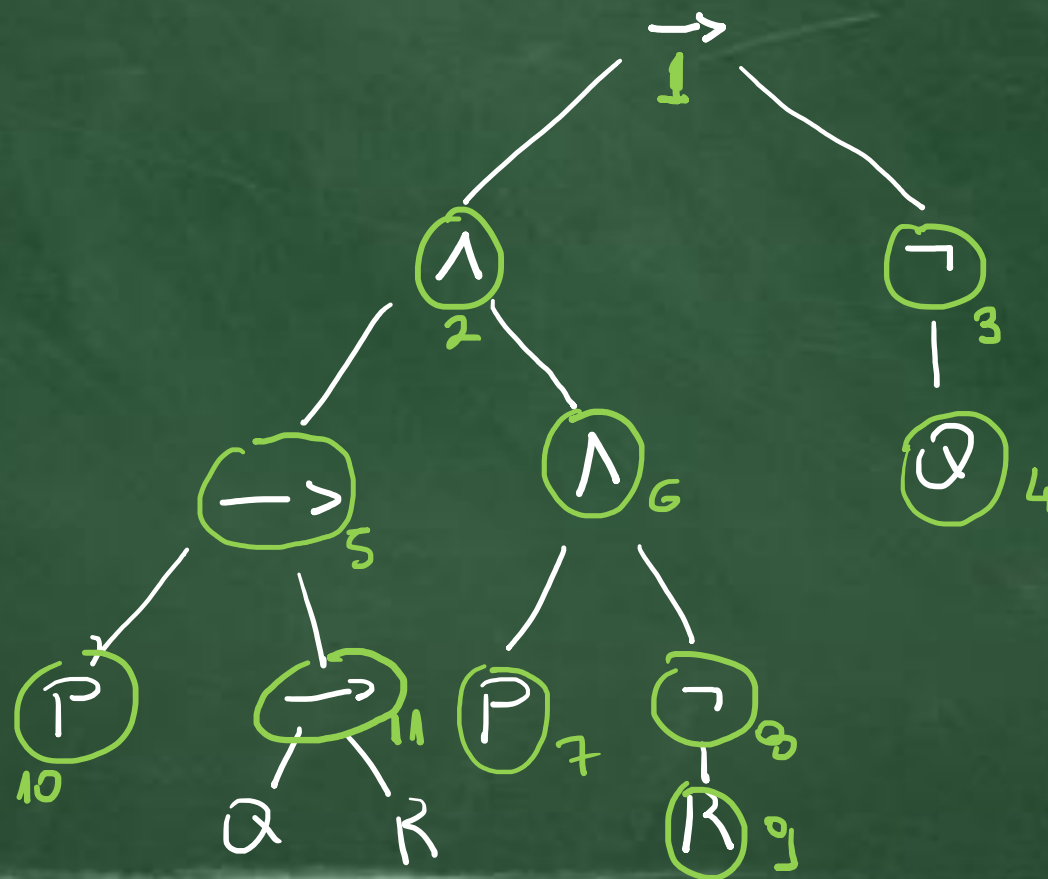


e)  $((P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \wedge (P \wedge \neg R)) \rightarrow \neg Q$

$((P$	$\rightarrow$	$(Q$	$\rightarrow$	$R))$	$\wedge$	$(P$	$\wedge$	$\neg$	$R))$	$\rightarrow$	$\neg$	$Q$
$\vee$	$\vee$	$\vee$	$\vee$	$\vee$	$\vee$	$\vee$	$\vee$	$\vee$	$\vee$	$\vee$	$\vee$	$\vee$
10	5	12	11	13	2	7	6	8	9	1	3	4

Absurdo

É tautologia?  
Sim





[illegible]

g)  $(P \vee Q) \leftrightarrow (Q \vee P)$



h)  $(P \wedge Q) \leftrightarrow (Q \wedge P)$



# Lógica Proposicional: MÉTODO DA REFUTAÇÃO

Para verificar se uma fórmula  $\alpha$  é **contraditória**, deve-se:

1º passo: negar  $\alpha$ , ou seja, considerar que  $\alpha$  é válida atribuindo-se o valor **V** à fórmula;

2º passo: fazer deduções sobre  $\alpha$  para concluir um absurdo;

3º passo: caso se obtenha um absurdo,  $\alpha$  não pode ter o valor **V**. Isto é, a suposição inicial é falsa, logo  $\alpha$  é **contraditória**. Caso não se obtenha o absurdo, nada se pode concluir sobre a suposição inicial.





Faltam as  
questões 4 e 5 da  
Lista 03...

---

Vamos lá!

Questão 4:

a)  $\neg((P \wedge Q) \rightarrow Q)$



b)  $P \wedge (Q \wedge \neg P)$



c)  $(P \wedge Q) \wedge \neg P$



g)  $\neg(((P \rightarrow (Q \vee R)) \wedge (\neg R \wedge \neg Q)) \rightarrow \neg P)$

$\neg$	$((P$	$\rightarrow$	$(Q$	$\vee$	$R))$	$\wedge$	$(\neg$	$R$	$\wedge$	$\neg$	$Q))$	$\rightarrow$	$\neg$	$P)$
V	V	V	F	V	F	V	V	F	V	V	F	F	F	V
1	11	5	13	12	14	4	7	9	6	8	10	2	3	4

É contraditório? Sim FIM

P	V	Q
V	V	V
V	V	F
F	V	V
F	V	F
F	F	F



g)  $\neg(((P \rightarrow (Q \vee R)) \wedge (\neg R \wedge \neg Q)) \rightarrow \neg P)$









[illegible]

## Questão 5:

b) b)  $\neg((P \wedge Q) \wedge (\neg P \wedge \neg Q))$


c) c)  $\neg(\neg((P \wedge Q) \wedge \neg P))$





e)  $\neg (((P \wedge \neg(\neg Q \leftrightarrow R)) \wedge (\neg R \wedge (\neg S \rightarrow Q))) \rightarrow (S \wedge P))$

[illegible]

f)

[illegible]





