FURB
UNIVERSIDADE DE BLUMENAU

LÓGICA PROPOSICIONAL

<propriedades das fórmulas e método da refutação>

Prof. Jonathan Gil Müller

Escopo da disciplina:

Unidade 1:

INTRODUÇÃO À LÓGICA

FINALIZADO

>> ~~O que é lógica~~?

>> ~~Porque estudar lógica~~?

>> ~~Histórico e evolução~~.

Unidade 2:

LÓGICA PROPOSICIONAL

>> ~~Introdução: proposições, princípios, operadores lógicos~~;

>> ~~Linguagem: sintaxe e semântica~~;

>> Métodos para verificar a validade de fórmulas: (a) tabelas verdade, (b) método da refutação, (c) dedução formal

>> Formalização de problemas.

Unidade 3:

LÓGICA DE PREDICADOS

>> Introdução;

>> Linguagem: sintaxe e semântica;

>> Métodos para verificar a validade de fórmulas: dedução formal;

>> Formalização de Problemas.

Unidade 4:

FORMALIZAÇÃO DE PROGRAMAS E SISTEMAS DE COMPUTAÇÃO SIMPLES

>> PROgramming in LOGic (PROLOG)

FURB

Lógica Proposicional:
PROPRIEDADES

Existem **três classificações** para uma fórmula lógica, ou seja, ela pode ser:

a) **Tautológica**: diz-se que uma fórmula é tautológica (ou uma tautologia) se a interpretação da fórmula for sempre **V**, quaisquer que sejam as interpretações de suas subfórmulas.

Em outras palavras, uma fórmula α é uma tautologia (ou é válida) se e somente se, para toda interpretação I, $I[\alpha] = \mathbf{V}$;

Lógica Proposicional:
PROPRIEDADES

Exemplo de tautologia: (P ∧ Q) → (P ∨ Q)

(P	∧	Q)	→	(P	∨	Q)
V	V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	V	V	F
F	F	V	V	F	V	V
F	F	F	V	F	F	F

tautológica

Lógica Proposicional:

PROPRIEDADES

b) **Contraditória**: diz-se que uma fórmula é contraditória (ou é insatisfatível) se a interpretação da fórmula for sempre **F**, quaisquer que sejam as interpretações de suas subfórmulas.

Em outras palavras, uma fórmula α é contraditória se, e somente se, para toda interpretação I, $I[\alpha] = \mathbf{F}$.

Lógica Proposicional:
PROPRIEDADES

Exemplo de contradição: $(P \leftrightarrow \sim Q) \wedge (P \wedge Q)$

(P	↔	~Q)	∧	(P	∧	Q)

FURB

Lógica Proposicional:

PROPRIEDADES

c) **Satisfatível**: diz-se que uma fórmula é satisfatível (ou contingente ou factível) se a interpretação da fórmula for **V** para algumas interpretações de suas subfórmulas e **F** para outras.

Em outras palavras, uma fórmula α é satisfatível se, e somente se, existir interpretações tais que $I[\alpha] = \mathbf{V}$ e $I[\alpha] = \mathbf{F}$.

Mãos a obra:

Exercícios 1 e 2 da lista 03!

1. As fórmulas da lógica proposicional possuem propriedades semânticas. Sendo assim:
   a) O que significa dizer que uma fórmula é tautológica (ou uma tautologia, ou válida)?
   b) O que significa dizer que uma fórmula é contraditória (ou insatisfatível)?
   c) O que significa dizer que uma fórmula é satisfatível (ou contingente, ou factível)?

RESPOSTAS:

a) O que significa dizer que uma fórmula é tautológica (ou uma tautologia, ou válida)?
<u>R.:</u> Uma fórmula é tautológica se a interpretação da fórmula for sempre V, quaisquer que sejam as interpretações das suas sub-fórmulas.

b) O que significa dizer que uma fórmula é contraditória (ou insatisfatível)?
<u>R.:</u> Uma fórmula é contraditória se a interpretação da fórmula for sempre F, quaisquer que sejam as interpretações das suas sub-fórmulas.

c) O que significa dizer que uma fórmula é satisfatível (ou contingente, ou factível)?
<u>R.:</u> Uma fórmula é satisfatível se a interpretação da fórmula for V para algumas interpretações das suas sub-fórmulas e for F para outras.

2. Considere a tabela verdade das fórmulas abaixo. Para quais fórmulas é possível afirmar: é tautológica, é contraditória, é satisfatível? Justifique sua resposta.

a)

¬	P	→	*true*
F	V	V	V
V	F	V	V

b)

¬	((P	∨	Q)	→	(P	→	Q))
F	V	V	V	V	V	V	V
F	F	F	F	V	F	V	F
V	V	V	F	F	V	F	F

c)

(P	∧	Q)	↔	(P	→	¬	(Q	∨	¬	P))
V	V	V	F	V	F	F	V	V	F	V
F	F	F	F	F	V	F	F	V	V	F

RESPOSTAS:

a) R.: É tautológica, para todas as interpretações das suas sub-fórmulas, a interpretação da fórmula é sempre V.

b) R.: É satisfatível, para algumas interpretações das suas sub-fórmulas, a interpretação da fórmula é V e para outras a interpretação da fórmula é F.

c) R.: Não é possível determinar se a fórmula é contraditória ou satisfatível, pois não se tem determinadas todas as interpretações da fórmula.

Lógica Proposicional:
PROPRIEDADES

Para determinar se uma fórmula é tautológica, contraditória ou satisfatível pode-se usar os seguintes métodos:

a) **tabela-verdade**;

b) **método da negação ou da refutação** (absurdo).

- Observa-se que esses métodos são equivalentes entre si, mas, dependendo da fórmula, um método pode se mostrar mais eficiente do que outro.

Lógica Proposicional:
MÉTODO DA REFUTAÇÃO

A interpretação de uma fórmula também pode ser descrita através do **método da refutação** (SOUZA, 2002, p. 51):

1º passo: considerar inicialmente a **negação** daquilo que se pretende demonstrar;

2º passo: utilizar um conjunto de deduções para concluir um absurdo, atribuindo valores aos símbolos verdade, símbolos proposicionais e conectivos proposicionais, na **ordem "inversa"** a da construção da tabela verdade;

3º passo: caso se obtenha um **absurdo**, a conclusão é que a suposição inicial é falsa. Caso contrário, nada se pode concluir sobre a suposição inicial.

Lógica Proposicional:
MÉTODO DA REFUTAÇÃO

Para verificar se uma fórmula α é **tautológica**, deve-se:

1º passo: negar α, ou seja, considerar que α não é válida atribuindo-se o valor **F** à fórmula;

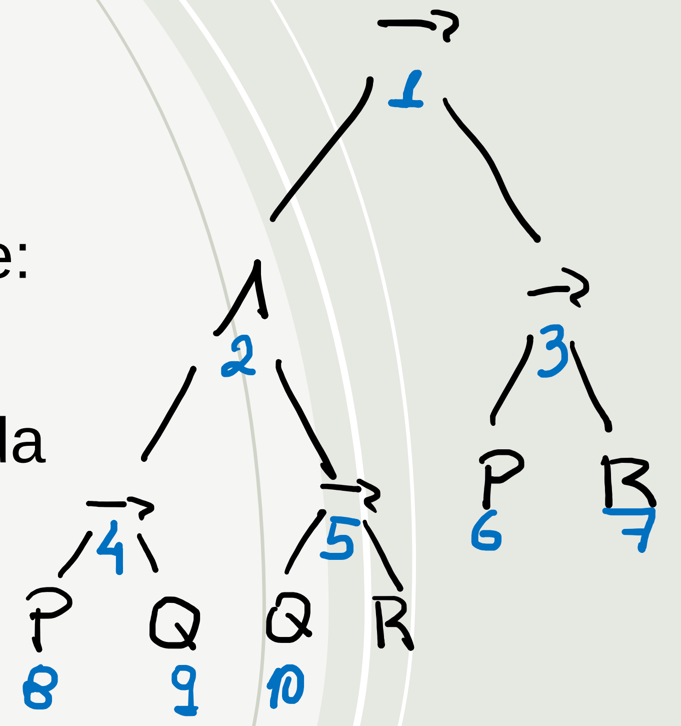
2º passo: fazer deduções sobre α para concluir um absurdo;

3º passo: caso se obtenha um absurdo, α não pode ter o valor **F**. Ou seja, a suposição inicial é falsa, logo α é uma **tautologia**. Caso não se obtenha o absurdo, nada se pode concluir sobre a suposição inicial.

FURB

P	→	Q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	V	F

Lógica Proposicional:
MÉTODO DA REFUTAÇÃO



Para verificar se uma fórmula α é **tautológica**, deve-se:

<u>1º passo</u>: negar α, ou seja, considerar que α não é válida atribuindo-se o valor **F** à fórmula;

Exemplo: α = **((P → Q) ∧ (Q → R)) → (P →R)**

É contraditório

((P	→	Q)	∧	(Q	→	R))	→	(P	→	R)
V	V	V	V	V	V	V	F	V	F	F
8	4	9	2	10	5	11	1	6	3	7

FURB

((P	→	Q)	∧	(Q	→	R))	→	(P	→	R)
V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	V	F	V	F	F	V	V	F	F
V	F	F	F	F	V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	F	V	F	V	V	F	F
F	V	V	V	V	V	V	V	F	V	V
F	V	V	F	V	F	F	V	F	V	F
F	V	F	V	F	V	V	V	F	V	V
F	V	F	V	F	V	F	V	F	V	F

Lógica Proposicional:
MÉTODO DA REFUTAÇÃO

Para verificar se uma fórmula α é **tautológica**, deve-se:

2º passo: fazer deduções sobre α para concluir um absurdo;

Exemplo: α **= ((P → Q) ∧ (Q → R)) → (P →R)**

Como $I[\alpha]$ = F, então

- $I[(P \rightarrow Q) \land (Q \rightarrow R)] = V$
- $I[(P \rightarrow R)] = F$

((P	→	Q)	∧	(Q	→	R))	→	(P	→	R)
			V				F		F	

Lógica Proposicional:
MÉTODO DA REFUTAÇÃO

Para verificar se uma fórmula α é **tautológica**, deve-se:

<u>2º passo</u>: fazer deduções sobre α para concluir um absurdo;

Exemplo: α = **((P → Q) ∧ (Q → R)) → (P →R)**

- A partir desse valores de verdade, podemos obter os valores de verdade das subfórmulas

((P	→	Q)	∧	(Q	→	R))	→	(P	→	R)
	V		$\boxed{V}$		V		F	V	$\boxed{F}$	F

Lógica Proposicional:
MÉTODO DA REFUTAÇÃO

Para verificar se uma fórmula α é **tautológica**, deve-se:

2º passo: fazer deduções sobre α para concluir um absurdo;

Exemplo: α **= ((P → Q) ∧ (Q → R)) → (P →R)**

- Então podemos concluir que I[P] = V e I[R] = F

((P	→	Q)	∧	(Q	→	R))	→	(P	→	R)
V	V		V		V	F	F	V	F	F

Lógica Proposicional:
MÉTODO DA REFUTAÇÃO

Para verificar se uma fórmula α é **tautológica**, deve-se:

2º passo: fazer deduções sobre α para concluir um absurdo;

Exemplo: α = **((P → Q) ∧ (Q → R)) → (P →R)**

- A partir da subfórmula (P → Q), concluimos que I[Q] = V
- A partir da subfórmula (Q → R), concluimos que I[Q] = F

Portanto, suposição incial é FALSA!

((P	→	Q)	∧	(Q	→	R))	→	(P	→	R)
V	V	V	V	F	V	F	F	V	F	F

Lógica Proposicional:
MÉTODO DA REFUTAÇÃO

Para verificar se uma fórmula α é **tautológica**, deve-se:

<u>3º passo:</u> caso se obtenha um absurdo, α não pode ter o valor **F**. Ou seja, a suposição inicial é falsa, logo α é uma **tautologia**. Caso não se obtenha o absurdo, nada se pode concluir sobre a suposição inicial.

Exemplo: α **= ((P → Q) ∧ (Q → R)) → (P →R)**

- A partir da subfórmula (P → Q), concluimos que I[Q] = V
- A partir da subfórmula (Q → R), concluimos que I[Q] = F

Portanto, suposição incial é FALSA!

Não existe interpretação I tal que I[α] = F
Logo, α é uma tautologia.

((P	→	Q)	∧	(Q	→	R))	→	(P	→	R)
V	V	$\boxed{\text{V}}$	V	$\boxed{\text{F}}$	V	F	F	V	F	F

Mais alguns exercícios!

Questão 03 da Lista 03...

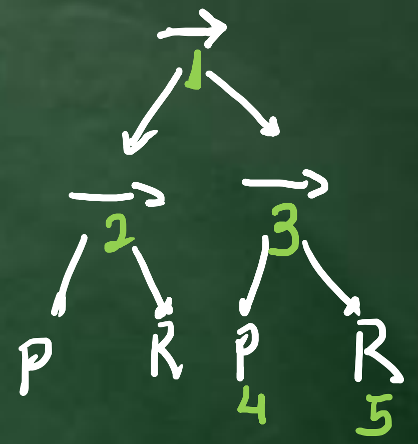
Questão 3:

a) $(P \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R)$

É tautológica

P	→	Q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	V	F

(P	→	R)	→	(P	→	R)
V	V	F	F	V	F	F
6	2	7	1	4	3	5

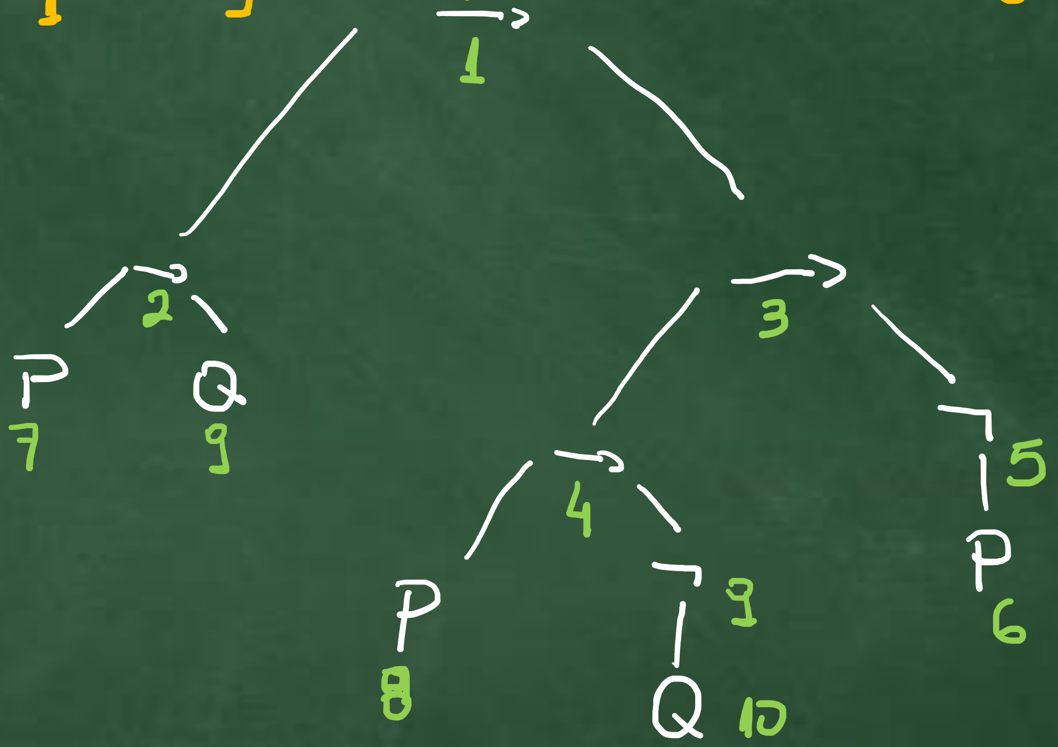


Questão 3:

b) $(P \to Q) \to ((P \to \neg Q) \to \neg P)$

é tautológica

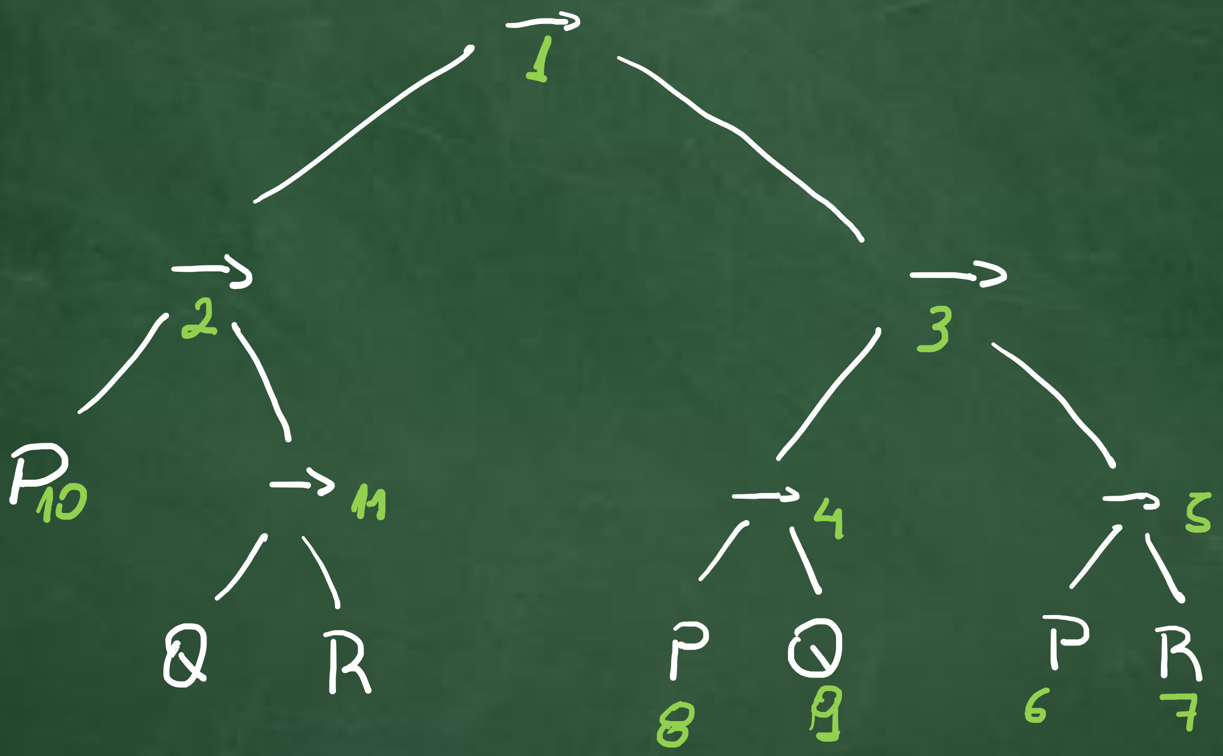
(P	→	Q)	→	((P	→	¬	Q)	→	¬	P)
V	V	V	F	V	V	V	F	F	F	V
7	2	9	1	8	4	9	10	3	5	6
V	V	V	F	V	V	F	V	F	F	V
7	2	8	1	9	4	11	10	3	5	6



c) $(P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \rightarrow ((P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R))$

É tautológica

(P	→	(Q	→	R))	→	((P	→	Q)	→	(P	→	R))
V	V	V	V	F	F	V	V	V	F	V	F	F
10	2	12	11	13	1	8	4	9	3	6	5	7



d) $\neg((P \rightarrow (Q \wedge \neg Q)) \wedge P)$

e) $((P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \wedge (P \wedge \neg R)) \rightarrow \neg Q$

f) $((P \rightarrow Q) \wedge (R \rightarrow S)) \rightarrow ((P \wedge R) \rightarrow (Q \wedge S))$

g) $(P \vee Q) \leftrightarrow (Q \vee P)$

h) $(P \wedge Q) \leftrightarrow (Q \wedge P)$

i) $(\neg P \vee Q) \leftrightarrow (P \rightarrow Q)$

j) $(P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \leftrightarrow ((P \wedge Q) \rightarrow R)$

Lógica Proposicional:

MÉTODO DA REFUTAÇÃO

Para verificar se uma fórmula α é **contraditória**, deve-se:

1º passo: negar α, ou seja, considerar que α é válida atribuindo-se o valor **V** à fórmula;

2º passo: fazer deduções sobre α para concluir um absurdo;

3º passo: caso se obtenha um absurdo, α não pode ter o valor **V**. Isto é, a suposição inicial é falsa, logo α é **contraditória**. Caso não se obtenha o absurdo, nada se pode concluir sobre a suposição inicial.

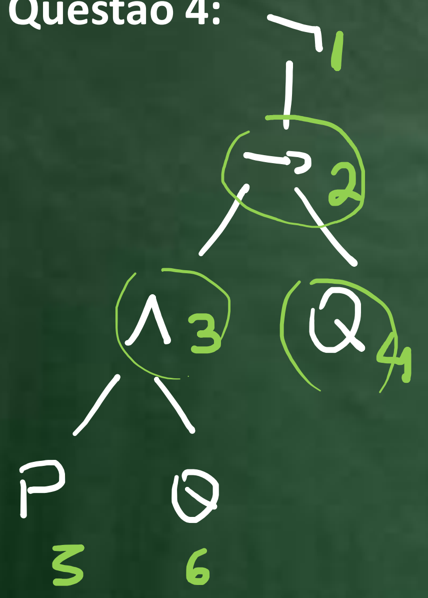
FURB

FURB

Faltam as questões 4 e 5 da Lista 03...

Vamos lá!

Questão 4:



a) $\neg((P \wedge Q) \rightarrow Q)$

É contraditório .

¬	((P	∧	Q)	→	Q
V	V	V	V	F	F
1	5	3	6	2	4

b) $P \wedge (Q \wedge \neg P)$

c) $(P \wedge Q) \wedge \neg P$

FURB

d) $(P \wedge Q) \wedge (\neg P \wedge \neg Q)$

e) $\neg((P \rightarrow R) \rightarrow ((Q \rightarrow R) \rightarrow ((P \vee Q) \rightarrow R)))$

É contraditório

$\neg$	$((P$	$\rightarrow$	$R)$	$\rightarrow$	$((Q$	$\rightarrow$	$R)$	$\rightarrow$	$((P$	$\vee$	$Q)$	$\rightarrow$	$R)))$
V	V	V	V	F	F	V	F	F	V	V	F	F	F
1	13	3	14	2	10	5	9	4	12	7	11	6	8

f) $\neg(((P \wedge Q) \rightarrow R) \rightarrow ((P \rightarrow R) \vee (Q \rightarrow R)))$

g) $\neg(((P \rightarrow (Q \vee R)) \wedge (\neg R \wedge \neg Q)) \rightarrow \neg P)$

h) $\neg(P \land (Q \land \neg P)) \rightarrow ((P \land Q) \land \neg P)$

i) $\neg(\neg(P \vee Q) \leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q))$

j) $\neg((P \rightarrow Q) \rightarrow (((P \wedge Q) \leftrightarrow P) \wedge ((P \vee Q) \leftrightarrow Q)))$

Questão 5:

P	↔	Q
V	V	V
V	F	F
F	F	V
F	V	F

a) a) $(\neg P \vee \neg Q) \leftrightarrow \neg P$

$(\neg$	P	$\vee$	$\neg$	$Q)$	$\leftrightarrow$	$\neg$	P
F	V	F	F	V	V	F	V
5	7	2	6	8	1	3	4
F	V	F	F	V	F	V	F
5	7	2	6	8	1	3	4
F	V	V	V	F	F	F	V
6	5	2	7	8	1	3	4

É contraditório? Não

É tautologia Não

Portanto, é satisfatível

$(\neg$	P	$\vee$	$\neg$	$Q)$	$\leftrightarrow$	$\neg$	P
F	V	F	F	V	V	F	V
F	V	V	V	F	F	F	V
V	F	V	F	V	F	V	F
V	F	V	V	F	V	V	F

Questão 5:

b) b) $\neg((P \wedge Q) \wedge (\neg P \wedge \neg Q))$

c) c) $\neg(\neg((P \wedge Q) \wedge \neg P))$

d)

d) $((P \lor Q) \land (P \to Q)) \to P$

e)

e) $\neg (((P \land \neg(\neg Q \leftrightarrow R)) \land (\neg R \land (\neg S \to Q))) \to (S \land P))$

f) f) $((P \to Q) \land (\neg(\neg Q \leftrightarrow R) \land ((\neg S \to \neg R) \land ((S \to (Q \land T)) \land \neg T)))) \to \neg P$

g)

h)

i)
