UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO – UFRJ
INSTITUTO DE MATEMÁTICA - IM

Ciência da Computação – 2019/1

Prof. Nei Rocha

TRABALHO DE SIMULAÇÃO

1. Uma urna contém 10 bolas numeradas de 1 a 10. Bolas são extraídas *com reposição* da urna até que um número anterior seja retirado novamente. Seja X a variável aleatória que conta o número de retiradas até que isto ocorra.
   Construa um algoritmo para a simulação de X de forma a obter sua função de probabilidade empírica e sua esperança matemática. (Faça 5.000 simulações)

2. Seja X uma variável aleatória com densidade $f(x) = \dfrac{10}{x^2}$ se $x > 10$, e $f(x) = 0$ se $x \leq 10$.
   Dê um método para simular a variável aleatória X. Para 1.000 simulações da variável X, obtenha a média de X e compare o resultado com o valor verdadeiro.

3. Faça um algoritmo, usando o método de Monte Carlo, para calcular $\int_{-\infty}^{\infty} 4x^2 e^{-3x^2}\, dx$.

4. Considere uma partícula que se move ao longo de 6 nós numerados 0, 1, 2, 3, 4, 5 e arranjados em torno de um círculo. A cada passo, a partícula é igualmente provável de se mover uma posição no sentido ou horário ou anti-horário. Isto é, se X_n é a posição da partícula após seu n-ésimo passo, então

   $$P(X_{n+1} = i+1 \mid X_n = i) = P(X_{n+1} = i-1 \mid X_n = i) = \frac{1}{2}$$

   (onde $i + 1 := 0$ se $i = 5$, e $i - 1 := 5$ se $i = 0$).

   Suponha que a partícula começa no 0 e continua a se mover de acordo com a regra acima, até que todos os nós (1, 2, 3, 4, 5) tenham sido visitados. Construa um algoritmo para simular a variável aleatória X, que representa o número de movimentos feitos pela partícula até que todos os nós sejam visitados. Calcule também $E(X)$. Faça 5.000 simulações.

5. Seja a Cadeia de Markov com quatro estados 0, 1, 2 e 3 com probabilidade de transição dada por $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}3 & 0 & 0{,}7 & 0 \\ 0 & 0{,}3 & 0 & 0{,}7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ começando no estado 1. Por meio de 1.000 simulações estocásticas, obtenha:
   (a) a probabilidade de a cadeia ser absorvida no estado 0;
   (b) a probabilidade de a cadeia ser absorvida no estado 1;
   (c) o número médio de visitas ao estado 1 antes da absorção;
   (d) o número médio de visitas ao estado 2 antes da absorção.