

---

**LEIA COM ATENÇÃO**

**Esta prova é estritamente individual. A detecção de plágio em qualquer parte da prova implicará na anulação e atribuição de nota ZERO (0) a todos os envolvidos independente do autor original.**

---

- 1) (0.6 pt) Na ilha de Avalon existem três tipos de habitantes: os habitantes chamados de "feiticeiros" que sempre dizem a verdade; os chamados "druidas" que sempre mentem; e os "cavaleiros", que às vezes falam a verdade e às vezes mentem. Você visita a ilha e se depara com 3 habitantes chamados Uther, Igraine e Arthur. Você sabe que dentre eles ao menos um é feiticeiro e ao menos um é druida. Cada um deles faz uma declaração, listadas a seguir:

Uther diz: Igraine é druida se, e somente se, Arthur é druida

Igraine diz: Se Uther é druida, então Arthur é druida

Arthur: Uther é druida ou Igraine é feiticeiro

Para cada uma das pessoas acima diga que tipo habitante eles são.

- 2) (0.6 pt) Prove ou disprove cada uma das afirmações abaixo:
- a) A diferença entre dois cubos consecutivos é um múltiplo de 3.
  - b) Para todo real  $x > 0$ ,  $x + \frac{1}{x} \geq 2$
  - c) Suponha que  $x, y, z$  sejam três números reais tais que  $0 \leq x, y, z \leq 100$ . Prove que dois desses três números têm a propriedade que o valor absoluto de sua diferença é no máximo 50.
- 3) (0.5 pt) Seja  $A_1, A_2, A_3, \dots$  uma família de conjuntos definida por  $A_i = \{-i, -i+1, \dots, -1, 0, 1, 2, \dots, i-1, i\}$ . Determine:

a)  $\bigcup_{i=1}^n A_i.$

b)  $\bigcap_{i=1}^n A_i.$

- 4) (0.6 pt) Para cada uma das proposições abaixo diga se ela é verdadeira ou falsa para quaisquer conjuntos  $A, B$  e  $C$ . Justifique sua resposta.
- a) Se  $A \not\subseteq B$  e  $B \not\subseteq C$ , então  $A \not\subseteq C$
  - b) Se  $A \subseteq B$  e  $B \not\subseteq C$  ( $B$  não é subconjunto de  $C$ ), então  $A \not\subseteq C$
  - c) Se  $A \subseteq B$  e  $B \subseteq C$ , então  $A \subseteq C$
- 5) (0.6 pt) Para cada item abaixo, dê uma fórmula explícita para uma função que tem como domínio o conjunto dos números inteiros e contradomínio o conjunto dos inteiros positivos que:
- a) Injetora, mas não é sobrejetora
  - b) Sobrejetora, mas não injetora
  - c) Bijetora
- 6) (0.6 pt) Prove por indução que:
- a) Para todo inteiro positivo  $n$ ,  $2^{3n} - 1$  é divisível por 7
  - b) Para todo inteiro  $n \geq 4$ ,  $2^n < n!$