

附录一

射影几何初步

一点说明

本课程的很多内容,如摄像机标定,基于图像的定位,基于图像的三维重建,都涉及到“射影几何”一些概念和理论,所以,了解一些射影几何知识是必要的.本节是国科大研究生课程:《计算机视觉》讲义的附录一,旨在介绍一些必要的射影几何的基础知识。

附录中的很多内容均是中科院自动化研究所 吴福朝 研究员撰写的。尽管笔者也参与了一些编写,但主体工作都是吴福朝研究员完成的,在此特别强调说明,并对吴老师致以谢意。

胡占义

2019-8-22

本节主要介绍本书中将要使用的有关射影几何的知识,主要包括二维(平面)射影几何与三维射影几何。

第一节主要介绍二维射影几何与二维射影变换。主要内容包括二维点、线,二次曲线的齐次表示,以及它们在二维射影变换下的变换规则;二维射影变换群的各种子群以及它们的不变量。

第二 2 节主要介绍三维射影几何与三维射影变换。主要内容包括三维点、线、面和二次曲面的齐次表示,以及它们在三维射影变换下的变换规则;三维射影变换群的各种子群以及它们的不变量。

1.1 二维射影几何

本章不准备用纯几何方法引进射影几何的内容，也不追求数学上的系统性与完备性，因为本章的主要目的只是为读者提供在本书中经常使用的一些几何知识。

1.1.1 射影平面

点与直线的齐次坐标

众所周知，平面上的点在欧氏坐标系下可用一个二维有序数组 $\tilde{x} = (x, y)^T$ 来表示，即点的欧氏坐标。平面上的直线方程可表示为

$$ax + by + c = 0 \quad (1.1.1)$$

在方程(1.1.1)两边同乘以任一非零常数 t ，得到下述方程：

$$axt + byt + ct = 0 \quad (1.1.2)$$

方程(1.1.1)与(1.1.2)的几何意义是相同的，它们表示平面上同一条直线。令

$$\mathbf{x} = (xt, yt, t)^T, \quad \mathbf{l} = (a, b, c)^T$$

则方程(1.1.2)可写成

$$\mathbf{l}^T \mathbf{x} = 0 \quad (1.1.3)$$

其中 \mathbf{x} 是变量，表示一条直线上的点； \mathbf{l} 是一个固定的向量，代表该直线。

一般地，称 $\mathbf{x} = (xt, yt, t)^T$ 为点的齐次坐标(Homogenous Coordinate)，称 $\mathbf{l} = (a, b, c)^T$ 为直线的齐次坐标。这里的“齐次”也可以这样来理解：在这种表示下，直线方程(1.1.3)关于点或直线变量都是齐次的，而方程(1.1.1)则是非齐次的。

齐次坐标可以相差任何一个非零常数因子，即 $\forall s \neq 0$ ， \mathbf{x} 与 $\mathbf{y} = s\mathbf{x}$ 表示同一个点，因为它们的非齐次坐标相等：

$$\tilde{\mathbf{x}} = (x/t, y/t)^T = (sx/st, sy/st) = \tilde{\mathbf{y}}$$

对于直线的齐次坐标也一样，因为 $(s\mathbf{l})^T \mathbf{x} = 0$ 与方程(1.1.3)确定同一条直线。

射影平面 (Projective Plane)

齐次坐标为 $\mathbf{x}_\infty = (x, y, 0)^T$ 的点称为无穷远点(有时也称为理想点)。无穷远点没有欧氏坐标，因为 $x/0 = \infty$ ， $y/0 = \infty$ ，从这里我们也可以看出为什么将 \mathbf{x}_∞ 称为无穷远点。

平面上所有无穷远点所构成的集合称为无穷远直线，记为 \mathbf{l}_∞ 。由于所有无穷远点 $\mathbf{x}_\infty = (x, y, 0)^T$ 都满足方程：

$$0 \cdot x + 0 \cdot y + 1 \cdot 0 = 0$$

所以，无穷远直线的线坐标为 $\mathbf{l}_\infty = (0, 0, 1)^T$ 。

由欧氏平面与无穷远直线的并集所形成的扩展平面称为射影平面，有时也称为二维射影空间。

两点、两线的叉积(Cross Product)

令 $\mathbf{x}_1 = (x_1, y_1, t_1)^T$, $\mathbf{x}_2 = (x_2, y_2, t_2)^T$ 是两个三维向量，它们的叉积定义为

$$\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2 = \det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & y_1 & t_1 \\ x_2 & y_2 & t_2 \end{pmatrix} = \left(\det \begin{pmatrix} y_1 & t_1 \\ y_2 & t_2 \end{pmatrix}, -\det \begin{pmatrix} x_1 & t_1 \\ x_2 & t_2 \end{pmatrix}, \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} \right)^T \quad (1.1.4)$$

如果 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ 表示射影平面上两个点，则 $\mathbf{l} = \mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2$ 表示通过这两个点的直线，这是因为我们有

$$\mathbf{l}^T \mathbf{x}_j = (\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2)^T \mathbf{x}_j = \det(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_j) = 0, \quad j = 1, 2$$

若三点 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ 共线，则必有 $\det(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) = (\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2)^T \mathbf{x}_3 = 0$ ，反之若 $\det(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) = 0$ ，则三点 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ 必共线。

综合前面讨论的结果，我们有下述命题：

命题 1.1.1 (1) 两点 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ 的连线是 $\mathbf{l} = \mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2$ ；(2) 三点 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ 共线的充要条件是：

$$\det(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) = 0$$

对偶原理(Dual Principle) 在射影平面内，点和线是一对互为对偶元素。在包含“点”与“线”元素的命题中，如果将元素的角色互换，则对应的命题也成立，并称它们为一对对偶命题。

例如：命题 1.1.1 有如下对偶命题：

命题 1.1.2 (1) 两线 $\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2$ 的交点是 $\mathbf{x} = \mathbf{l}_1 \times \mathbf{l}_2$ ；(2) 三线 $\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \mathbf{l}_3$ 共点的充要条件是：

$$\det(\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \mathbf{l}_3) = 0$$

直线上点的参数化

平面上的点有两个自由度，可用三维向量(齐次坐标)来表示。直线上的点仅有一个自由度，因此直线上点的齐次坐标仅需要二维向量来表示。如果直线上点仍用三维向量来表示，就会过参数化。在这样的参数化下，各参数之间独立性很差，有时处理问题不太方便。如何用二维向量来表示直线上点的齐次坐标，就是所谓的直线上点的参数化问题。

给定直线 \mathbf{l} 上两个不同点的齐次坐标 $^*)\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ ，则直线 \mathbf{l} 上任何一个点 \mathbf{x} 均可以表示为

$$\mathbf{x} = u\mathbf{x}_1 + v\mathbf{x}_2$$

这样，利用直线 \mathbf{l} 上的两个点，可以将直线 \mathbf{l} 上的所有点均由二维向量来表示：

$$\mathbf{x} = (u, v)^T$$

并称这个向量为线 \mathbf{l} 上点的(二维)齐次坐标。

可以看出 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ 的(二维)齐次坐标分别是 $\mathbf{x}_1 = (1, 0)^T, \mathbf{x}_2 = (0, 1)^T$ 。因此，这种参数化过程实际上是建立直线坐标系的过程。显然，直线上点的参数化不是唯一的，不同的参数化对应不同的坐标系。

*) “给定齐次坐标”的意义是指已经给出了齐次坐标分量的具体数值，在本书其它地方都遵循这个约定。

共线点的交比(Cross Ratio) 假定 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4$ 是直线 l 上的 4 个点，它们在某种参数化下的齐次坐标为 $\mathbf{x}_j = (u_j, v_j)^T$ 。定义

$$(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4) = \frac{\det \begin{pmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{pmatrix}} : \frac{\det \begin{pmatrix} u_1 & u_4 \\ v_1 & v_4 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} u_2 & u_4 \\ v_2 & v_4 \end{pmatrix}} \quad (1.1.10)$$

为该 4 点的交比。可以证明，4 点的交比不依赖于参数化的选择，或者说不依赖于直线坐标系的选择。

若 $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4) = -1$ ，则称点 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ 与 $\mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4$ 成调和共轭(Hamonic Conjugate)。例如：通过圆心的直线交圆上的两个点与圆心以及该直线上的无穷远点成调和共轭。

如果将平面上共点的直线束进行参数化，即将共点直线束中的直线用二维向量来表示，用类似的方法也可以定义 4 条共点直线的交比。

在 1.1.3 节，将会看到交比是射影变换下的不变量。

1.1.2 二次曲线

二次曲线的表示

我们知道在欧氏平面内，一条二次曲线(Conic)的方程可表示为

$$ax^2 + by^2 + 2cxy + 2dx + 2ey + f = 0$$

写成矩阵形式，有

$$(x, y, 1) \begin{pmatrix} a & c & d \\ c & b & e \\ d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

令 $C = \begin{pmatrix} a & c & d \\ c & b & e \\ d & e & f \end{pmatrix}$ ，它是一个对称矩阵。如果点使用齐次坐标，则二次曲线可表示为

$$\mathbf{x}^T C \mathbf{x} = 0 \quad (1.1.5)$$

称对称矩阵 C 是二次曲线的表示。

矩阵 C 虽然有 6 个不同的元素，但由于方程(1.1.5)的齐次性，所以仅有 5 个元素是独立的，即起确定作用的是 5 个比值，例如： $a/f, b/f, c/f, d/f$ 和 e/f 。因此，二次曲线有 5 个自由度。这样，在一般情况下，射影平面上的 5 个点唯一确定一条二次曲线，并且可以通过求解下述线性方程组而得出：

$$\mathbf{x}_j^T C \mathbf{x}_j = 0, j = 1, 2, \dots, 5 \quad (1.1.6)$$

二次曲线根据它的秩（即 C 的秩）是否是满秩而分为非退化与退化两种情况。非退化二次曲线是正常二次曲线，退化二次曲线或者是由两条直线所构成(rank $C=2$)，或者由二条重合直线所构成(rank $C=1$)。

方程(1.1.5)所表示的二次曲线，是射影平面的点集，即二次曲线由点所生成。如果将点元素换成直线元素，则得到直线元素的二次方程：

$$l^T C^* l = 0 \quad (1.1.7)$$

其中 C^* 是对称矩阵。“*”表示对偶，其意义可从下文得到理解。

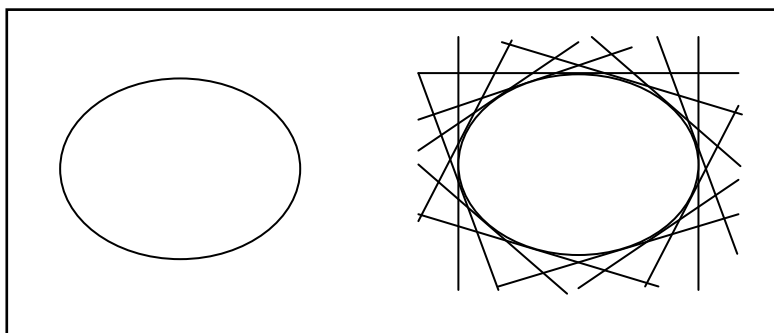


图 1.1.1：点二次曲线(左)；线二次曲线(右)

方程(1.1.7)也表示射影平面内的一条二次曲线，这条二次曲线 C^* 是由直线生成的。在几何上，这条二次曲线是直线族的包络，即 C^* 的几何元素是二次曲线的切线，如图 1.1.1 所示。

切线的坐标

假定 C 是一条非退化(点)二次曲线，令 x 是 C 上的任意一点，下面考虑 C 在点 x 处的切线的代数表示。显然， $l=Cx$ 确定平面上的一条直线。点 x 必在直线 l 上，因为 $l^T x = (xC)^T x = x^T Cx = 0$ 。如果能证明：除点 x 外，直线 l 与 C 不再有另外的交点，则就证明了 l 是 C 过点 x 的切线。反证：若直线 l 与 C 还有另外一个交点 y ，则必有

$$y^T Cy = 0, x^T Cy = l^T y = 0$$

将上式与 $x^T Cx = 0$ 结合起来，可导致下述等式

$$(sx + ty)^T C(sx + ty) = 0$$

对任何标量 s, t 都成立，这表明直线 l 在二次曲线 C 上，与 C 非退化矛盾。

总结上述讨论，有下述命题。

命题 1.1.3 非退化(点)二次曲线 C 过点 x 的切线为 $l=Cx$ 。

命题 1.1.3 的对偶命题是：非退化(线)二次曲线 C^* 过线 l 的切点为 $x=C^*l$ 。

对偶之间的关系

非退化情况 射影平面上任一条(点)二次曲线 C ，都可以作为其切线的包络，即同时可用(线)二次曲线来表示，记为 C^* ，并称 C 与 C^* 互为对偶。下面考虑 C^* 与 C 之间的代数关系。

对于 C 上的任一点 x ，该点的切线为 $l=Cx$ 。由于 C 是满秩的，所以有 $C^{-1}l=x$ ，又因切点必在切线上，即 $l^T x=0$ ，于是有 $l^T C^{-1}l=0$ 。因此 $C^*=C^{-1}$ 。另外，还可以证明 $(C^*)^*=C$ 。

综合上面讨论的结果，我们有命题：

命题 1.1.4 非退化二次曲线 C 与其对偶 C^* 之间的关系是 $C^*=C^{-1}$ ，并且 $(C^*)^*=C$ 。

退化情况 退化二次曲线 C 由两条直线所组成。令这两条直线为 l, m ，则 C 可表示为

$$C = lm^T + ml^T$$

根据对偶原理，对偶二次曲线 C^* 包含两个点 x, y ，并且 C^* 可表示为

$$C^* = xy^T + yx^T$$

注意对于退化情况， $(C^*)^* \neq C$ 。

对于(点)二次曲线，以后简称为二次曲线，而(线)二次曲线称为对偶二次曲线(Dual Conic)。

极点-极线关系

令 x 是平面上的任一点，给定一条二次曲线 C ，则 $l=Cx$ 确定了一条直线。直线 l 称为 x 关于 C 的极线(Pole Line)， x 称为直线 l 关于 C 的极点(Pole Point)。

二次曲线 C 上的点 x 关于 C 的极线是过该点的切线 l ，而切线 l 关于 C 的极点是切点 x 。

由二次曲线 C 所确定的这种点与直线之间的对应关系称为二次曲线的极对应。可以证明：非退化二次曲线的极对应是点与直线之间的一一对应。

这种极对应，也可以给出它的几何描述：

命题 1.1.5 点 x 关于 C 的极线 $l=Cx$ 交 C 于两个点(可能是虚点，或重点)，且 C 在这两个交点的切线交于点 x 。(如图 1.1.2 所示)

证明 直线 l 与二次曲线 C 总交于二个点，交点的坐标是方程组 $\begin{cases} y^T Cy = 0 \\ l^T y = 0 \end{cases}$ 的解。令 y 是一个交点，则有 $(Cx)^T y = 0$ 。由 C 的对称性， $x^T Cy = 0$ ，这说明 x 必在切线 Cy 上，同理 x 在另一个交点的切线上。证毕。

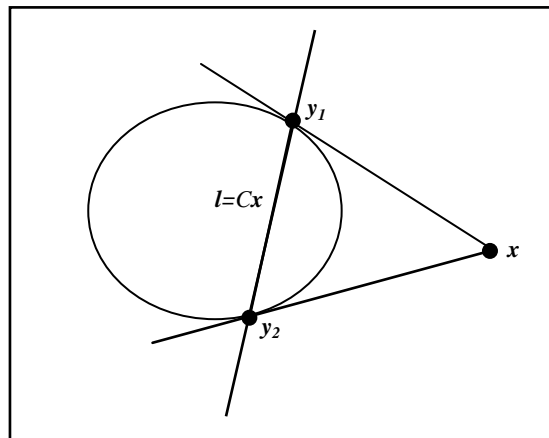


图 1.1.2：二次曲线的极点与极线的对应关系。过点 \mathbf{x} 的两条切线的切点的连线是点 \mathbf{x} 的极线 l 。

共轭点(Conjugate Points) 如果两个点 \mathbf{x}, \mathbf{y} 满足 $\mathbf{x}^T C \mathbf{y} = 0$ ，则称点 \mathbf{x}, \mathbf{y} 关于二次曲线 C 互为共轭。不难看出点 \mathbf{x} 关于 C 的所有共轭点所构成的集合构成点 \mathbf{x} 关于 C 的极线。

圆环点及其对偶

无穷远直线上的两个点：

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.1.8)$$

称为一对圆环点(Circular Points)或绝对点(Absolute Points)。其中 $i = \sqrt{-1}$ ，所以它们是一对共轭虚点。

圆环点的命名来源于平面上任何圆与无穷远直线均交于 \mathbf{I}, \mathbf{J} 。事实上，圆的方程可表示为

$$x^2 + y^2 + 2dxt + 2eyt + ft = 0$$

而无穷远直线的方程是 $t = 0$ 。将这两个方程联立求解，可以得到 $x^2 + y^2 = 0$ 。因此，交点的齐次坐标必为 \mathbf{I}, \mathbf{J} 。

现在，可以看出解释为什么给定三个点就能唯一确定一个圆，因为圆总是通过两个圆环点。所以，3 点确定一个圆与 5 个点才能确定一条二次曲线并不矛盾。

圆环点的对偶(Dual of Circular Points) 圆环点可以看作平面上的一条(退化)二次曲线，它的方程是 $x^2 + y^2 = 0$ 。它的(退化)对偶二次曲线 C_∞^* 称为圆环点的对偶，可以表示为

$$C_\infty^* = \mathbf{I}\mathbf{J}^T + \mathbf{J}\mathbf{I}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.1.9)$$

1.1.3 二维射影变换

射影变换(Projective Transformation) 是射影平面上的可逆齐次线性变换，这个变换可由 3×3 的矩阵 H 来描述：

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad (1.1.10)$$

或更简略地记为 $\mathbf{x}' = H\mathbf{x}$ 。

射影变换有时又称为单应(Homography)，而矩阵 H 称为射影变换矩阵或称为单应矩阵。由于变换是齐次的(点使用了齐次坐标)，所以同一个射影变换矩阵 H 可以相差一个非零常数因子，因此射影变换仅有 8 个自由度，即射影变换矩阵可由它的元素所构成的 8 个比值唯一确定。

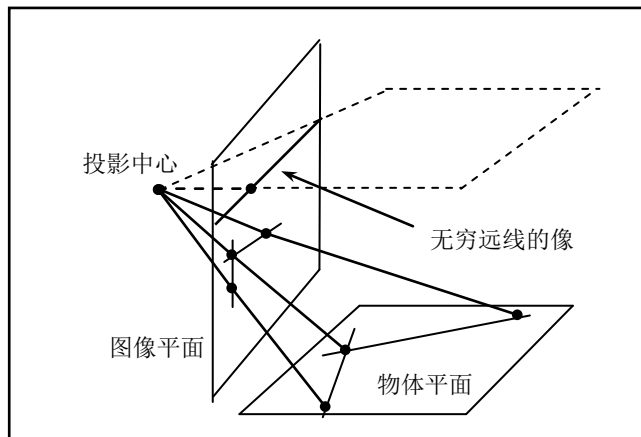


图 1.1.2: 投影中心不在物体平面上的中心投影 (Central Projection) 是一个射影变换，因为它可以用一个 3×3 的可逆矩阵来描述 (第 2 章有详细的讨论)。中心投影将物体平面上的点投影到图像平面上得到像点，像点是物体平面点与投影中心的连线与像平面的交点，物体平面点到像点之间的变换是一个射影变换。物体平面上的无穷远点的像是该无穷远点与投影中心的连线 (平行于物体平面) 与像平面的交点，一般地该交点是像平面上的有限点 (即该点在图像平面中的齐次坐标的第三个分量不为零)。物体平面上的无穷远线的像是通过投影中心且平行于物体平面的平面与像平面的交线，一般地它是像平面上的有限直线。射影变换将平面上的点变换到点，并且保持点的共线性，即将平面上的直线变为直线 (如图 1.1.2 所示)。任何射影变换的逆变换 (对应于单应矩阵的逆) 都是射影变换、任意两个的合成 (对应于两个单应矩阵的积) 都是射影变换 (如图 1.1.3 所示)，因此射影变换的全体构成射影平面上的一个变换群 (Group of Transformation)。

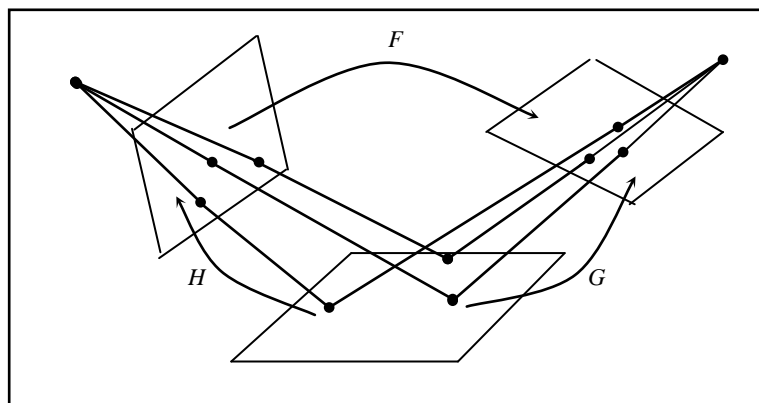


图 1.1.3: 图中第一个中心投影变换是 H ，第二个中心投影变换是 G ，由这两个投影得到一个从第一个像平面到第二个像平面的变换是 F 。由于 H, G 都是射影变换，它们的逆变换是像点沿投影线反投到物体平面上的点，对应的变换矩阵分别是 H 与 G 的逆矩阵，因此逆变换也是射影变换。变换 F 是 H 的逆变换与变换 G 的合成，它可以用 3×3 的可逆矩阵 GH^{-1} 来描述，所以也是一个射影变换。但它不再是中心投影变换而是一般的投影变换。

如果被变换点 \mathbf{x} 是欧氏坐标系下的齐次坐标, 则无穷远点 $\mathbf{x}_\infty = (x_1, x_2, 0)^T$ 的射影变换是

$$\mathbf{x}'_\infty = H\mathbf{x}_\infty = (h_{11}x_1 + h_{12}x_2, h_{21}x_1 + h_{22}x_2, h_{31}x_1 + h_{32}x_2)^T$$

一般地, $h_{31}x_1 + h_{32}x_2 \neq 0$, 这样无穷远点变换后的坐标不再有第 3 个分量为零的形式。事实上, 射影变换(1.1.10)等价于坐标基的变换, 变换后的坐标基称为射影坐标基(见 1.2.7 节)。上述观察等价于无穷远点在一般坐标基下, 第 3 个分量不为零。由于射影几何是讨论射影变换群下的不变几何性质的理论, 这就是在研究射影性质时不使用无穷远点术语而把无穷远点和非无穷远点同等对待的理由。以后, 将会看到在计算机视觉中无穷远点具有特别重要的作用, 所以在本书中仍使用无穷远点的术语。

射影变换矩阵 H 的计算 本书第二章将要详细介绍计算射影变换 H 的方法, 这里只简要地陈述如何由点对应计算 H 。满足式 (1.1.10) 的点对 $\mathbf{x} \leftrightarrow \mathbf{x}'$ 称为射影变换的一个点对应。给定点对应的齐次坐标, 例如写成形式 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, 1)^T, \mathbf{x}' = (x'_1, x'_2, 1)^T$, 由于式(1.1.10)是一个齐次等式, 它表示在相差一个常数因子的意义下相等, 因此有:

$$s \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

其中 s 为未知的齐次因子。消去上式中的齐次因子 s , 可得到关于 H 的两个线性齐次方程:

$$\begin{cases} x'_1(h_{31}x_1 + h_{32}x_2 + h_{33}) = h_{11}x_1 + h_{12}x_2 + h_{13} \\ x'_2(h_{31}x_1 + h_{32}x_2 + h_{33}) = h_{21}x_1 + h_{22}x_2 + h_{23} \end{cases} \quad (1.1.11)$$

这样, 由一个点对应 $\mathbf{x} \leftrightarrow \mathbf{x}'$ 就可得到关于 H 的两个线性方程。由于 H 只需要确定到相差一个常数倍的程度, 所以从 4 个点对应所构成的方程组 (其中含有 8 个方程) 所得到的非零解就是所要计算的射影变换 H 。

从上面的讨论中可以看出: 在一般情况下, 4 个点对应唯一确定一个射影变换。下述命题是更确切的陈述:

命题 1.1.6 从 4 个点对应唯一确定射影变换的充要条件是 4 个点对应中任意三点不共线, 并且可以通过下述公式计算这个射影变换:

$$H = s_4(\mathbf{x}'_1, \mathbf{x}'_2, \mathbf{x}'_3) \text{diag}\left(\frac{p'_1}{p_1}, \frac{p'_2}{p_2}, \frac{p'_3}{p_3}\right) (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)^{-1} \quad (1.1.12)$$

其中: $(p_1, p_2, p_3)^T = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)^{-1} \mathbf{x}_4$, $(p'_1, p'_2, p'_3)^T = (\mathbf{x}'_1, \mathbf{x}'_2, \mathbf{x}'_3)^{-1} \mathbf{x}'_4$ 。

证明 由于 $\mathbf{x}_j \leftrightarrow \mathbf{x}'_j, (1 \leq j \leq 4)$ 是 4 个点对应, 所以存在常数 $s_j (1 \leq j \leq 4)$ 使得

$$s_j \mathbf{x}'_j = H \mathbf{x}_j, (1 \leq j \leq 4) \quad (1.1.13)$$

充分性: 由式(1.1.13), 可得到:

$$H(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) = (s_1 \mathbf{x}'_1, s_2 \mathbf{x}'_2, s_3 \mathbf{x}'_3) = (\mathbf{x}'_1, \mathbf{x}'_2, \mathbf{x}'_3) \text{diag}(s_1, s_2, s_3)$$

于是,

$$H = (\mathbf{x}'_1, \mathbf{x}'_2, \mathbf{x}'_3) \text{diag}(s_1, s_2, s_3) (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)^{-1} \quad (1.1.14)$$

由 $s_4 \mathbf{x}'_4 = H \mathbf{x}_4$ ，得到：

$$(\mathbf{x}'_1, \mathbf{x}'_2, \mathbf{x}'_3) \text{diag}(s_1, s_2, s_3) (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)^{-1} \mathbf{x}_4 = s_4 \mathbf{x}'_4$$

所以，

$$\text{diag}(s_1, s_2, s_3) (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)^{-1} \mathbf{x}_4 = s_4 (\mathbf{x}'_1, \mathbf{x}'_2, \mathbf{x}'_3)^{-1} \mathbf{x}'_4$$

令

$$\mathbf{p} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)^{-1} \mathbf{x}_4 = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}' = (\mathbf{x}'_1, \mathbf{x}'_2, \mathbf{x}'_3)^{-1} \mathbf{x}'_4 = \begin{pmatrix} p'_1 \\ p'_2 \\ p'_3 \end{pmatrix}$$

则对任意的 p_j 必有 $p_j \neq 0$ 。否则，例如： $p_1 = 0$ ，则有

$$\mathbf{x}_4 = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) \begin{pmatrix} 0 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = p_2 \mathbf{x}_2 + p_3 \mathbf{x}_3$$

因此 $\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4$ 共线，矛盾。于是， $s_j = \frac{s_4 p'_j}{p_j}, (1 \leq j \leq 3)$ ，将它代入式(1.1.14)可得式(1.1.12)。

必要性：反证：若存在三个共线点，不妨假定 $\mathbf{x}_j (1 \leq j \leq 3)$ 是三个共线点，则必有

$$\mathbf{x}_3 = a\mathbf{x}_1 + b\mathbf{x}_2$$

于是，

$$\lambda H \mathbf{x}_3 = a H \mathbf{x}_1 + b H \mathbf{x}_2$$

因此，(1.1.13)中至多有三组方程是独立的，故不可能在相差一个常数因子的意义下确定单应矩阵 H 。证毕。

直线与二次曲线的射影变换

射影变换 (1.1.10) 是由点的变换规则来定义的，下面讨论在这个射影变换下直线与二次曲线的变换规则。

令 l 是平面上的一条直线， l' 是经过射影变换后的直线。由于 $\forall \mathbf{x} \in l, \mathbf{x}' = H\mathbf{x} \in l'$ ，所以有

$$l'^T \mathbf{x}' = l'^T H \mathbf{x} = 0$$

因此， $l'^T = l'^T H$ ，即 $l' = H^{-T} l$ 。射影变换 H^{-T} 称为变换 H 的对偶。于是，直线的变换规则由点变换的对偶给出。以后，说射影变换 H 均是指满足点变换规则(1.1.10)的射影变换。

命题 1.1.7 射影变换 H 对直线的变换规则，由 H 的对偶所确定：

$$l' = H^{-T} l \quad (1.1.15)$$

令 C 是平面上的一条二次曲线， C' 是经过射影变换后的曲线。由于 $\forall \mathbf{x} \in C, \mathbf{x}' = H\mathbf{x} \in C'$ ，所以有

$$\mathbf{x}^T C \mathbf{x} = \mathbf{x}'^T H^{-T} C H^{-1} \mathbf{x}' = 0$$

这样，必有 $C' = H^{-T} C H^{-1}$ 。因此，二次曲线 C 经过射影变换后仍是一条二次曲线。

设 D 是一个可逆矩阵，则称矩阵变换 $Y = DXD^T$ 为合同变换。因此，射影变换 H 对二次曲线的变换规则是对偶合同。

命题 1.1.8 射影变换 H 对二次曲线的变换规则，由 H 的对偶合同所确定：

$$C' = H^{-T} C H^{-1} \quad (1.1.16)$$

应用对偶原理，有下述命题：

命题 1.1.9 射影变换 H 关于对偶二次曲线 C^* 的变换规则，由 H 合同所确定：

$$C^{*'} = H C^* H^T \quad (1.1.17)$$

二次曲线的射影分类

表 1.1.1: 二次曲线的射影分类

对角元素	方 程	类 型
(1,1,1)	$x^2 + y^2 + t^2 = 0$	无实点（假二次曲线）
(1,1,-1)	$x^2 + y^2 - t^2 = 0$	圆
(1,1,0)	$x^2 + y^2 = 0$	实点 (0,0, 1)
(1,-1,0)	$x^2 - y^2 = 0$	两条直线
(1,0,0)	$x^2 = 0$	二重直线

二次曲线由对称矩阵 C 来表示，根据附录 A2.2 关于对称矩阵的特征分解理论，不难证明对任意对称矩阵 C ，必存在可逆矩阵 H 使得

$$H^{-T} C H^{-1} = \text{diag}(s_1, s_2, s_3)$$

其中 $s_j = \pm 1$, 或 0。根据二次曲线的变换规则，任何二次曲线 C 都可以通过射影变换变为具有上述对角矩阵形式的二次曲线。因此，得到二次曲线的表 1.1.1 的射影分类。

1.1.4 变换群与不变量

前面已经指出：平面上的所有射影变换构成一个变换群。通常称这个群为射影变换群，并记为 $PL(n)$ 。在给定的坐标系下，一个射影变换对应一个 3 阶可逆矩阵（在相差一个常数因子的意义下）。所有的 n 阶可逆矩阵构成一个线性群，通常记为 $L(n)$ ，如果将相差一个非零常数因子的 n 阶可逆矩阵作为一个等价类，那么等价类的全体构成 $L(n)$ 的商群 $L_q(n)$ ，因此射影群 $PL(n)$ 可用 3 阶可逆矩阵的商群 $L_q(n)$ 来表示。几何学的主要内容是研究在各种变换群作用下的几何不变量（包括不变几何性质），在射影变换群中包含两类重要的子群：欧氏变换群与仿射变换群。本节重点介绍这两类子群以及相应的不变量。

等距变换群

等距变换(Isometry Transformation)由下式定义：

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma \cos \theta & -\sin \theta & x_0 \\ \sigma \sin \theta & \cos \theta & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1.1.18)$$

其中, $\sigma = \pm 1$ 。

等距变换群, 从它的名字就可看出它的几何意义, 即保持距离不变的所有变换构成的群。只要将式(1.1.18)改写成下面的形式就能明白这一点:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma \cos \theta & -\sin \theta \\ \sigma \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \quad (\tilde{x}' = U\tilde{x} + \tilde{x}_0)$$

从上式可以看出: 等距变换是先作正交变换, 再作平移变换所构成的变换。正交变换与平移变换都保持距离不变, 因此等距变换也保持距离不变。

正交变换 U 根据它的行列式是否等于 1 而分为旋转变换与反射变换, 当 $\det(U)=1$ 时, 是旋转变换; $\det(U)=-1$ 时, 是反射变换。它们的几何意义是旋转变换不但保持两点的距离不变, 而且还保持方向(保向)不变, 而反射变换是一个逆向变换(如图 1.1.4 所示)。

矩阵 U 为旋转的等距变换称为欧氏变换(Euclidean Transformation)。欧氏变换的全体构成等距变换群的子群, 称为**欧氏变换群**(简称**欧氏群**)。欧氏群可以更简洁地表示为

$$x' = H_e x = \begin{pmatrix} R & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x \quad (1.1.19)$$

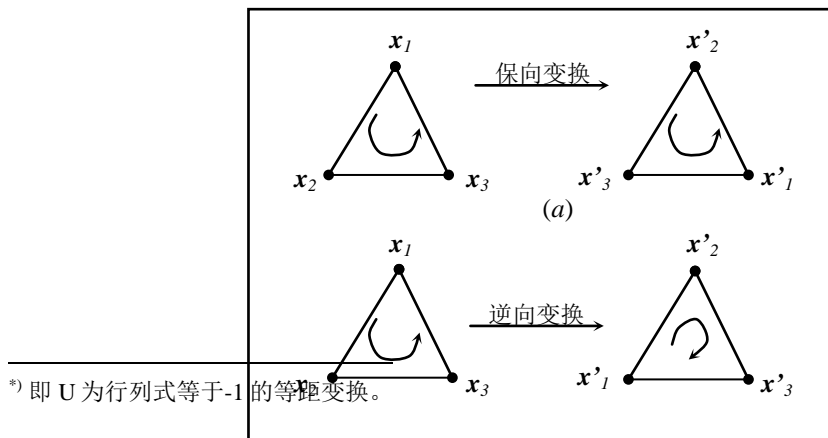
平面的欧氏变换有 3 个自由度(旋转有 1 个自由度, 平移有 2 个自由度)。因此, 两个点对应可确定欧氏变换。

注意: 矩阵 U 为反射的等距变换^{*)}不能构成等距变换群的子群, 因为两个这样变换的合成是一个欧氏变换。

欧氏不变量 等距变换群的不变量有: 两点的距离、两线的夹角、图形的面积等。它们都是欧氏不变量。下面给出在计算机视觉中经常使用的欧氏群的一个不变量, 它是不难验证的。

命题 1.1.10 欧氏变换保持圆环点不变, 因此也保持无穷远直线不变。

反射等距变换将两个圆环点互换, 即反射等距变换只能保持两个圆环点的整体不变。当然, 它也是保持无穷远直线不变的。



(b)

图 1.1.4 保向变换与逆向变换：(a) 保持点的顺序不变，是一个保向变换；(b) 变换后对应三点的顺序与原来反向，是一个逆向变换。

相似变换群

相似变换(Similarity Transformation)是等距变换与均匀伸缩变换的合成，相似变换顾名思义，它是保持图形相似的变换。在初等几何中，相似分为旋转相似(保向)和对称相似(逆向)。旋转相似是欧氏变换与均匀伸缩变换的合成，而对称相似是反射等距变换与均匀伸缩变换的合成。在计算机视觉中最关心的是旋转相似，它可用下面的矩阵形式来表示：

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \cos \theta & -s \sin \theta & x_0 \\ s \sin \theta & s \cos \theta & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \quad \left(\mathbf{x}' = H_s \mathbf{x} = \begin{pmatrix} sR & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} \right) \quad (1.1.20)$$

其中 s 是均匀伸缩因子。

旋转相似变换有 4 个自由度，因为它比欧氏变换多一个均匀伸缩因子。2 个点对应可确定相似变换。相似变换的全体也构成一个群，通常称为相似变换群。

旋转相似变换是相似变换群的子群，而欧氏群又是它的子群。非旋转相似变换不构成相似变换群的子群。

相似不变量 相似变换群的不变量有：两直线的夹角，长度的比值，面积的比值。

下面的命题是非常重要的，因为它在计算机视觉中扮演着非常重要的角色。

命题 1.1.11 (1)射影变换 H 保持圆环点不变的充要条件是 H 为相似变换；(2)射影变换 H 保持对偶二次曲线 C_∞^* 不变的充要条件是 H 为相似变换。

证明 (1): 因为

$$\begin{pmatrix} s \cos \theta & -s \sin \theta & x_0 \\ s \sin \theta & s \cos \theta & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} = s e^{i\theta} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} = I$$

所以，相似变换保持圆环点不变。类似地，可证对另一个圆环点也保持不变。反之，如果

$$H \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & x_0 \\ c & d & y_0 \\ e & f & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}$$

则必有

$$a + ib = \lambda, c + id = i\lambda, e - if = 0$$

最后一式表明 $e=f=0$ 。令 $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$ ，则前两式变成

$$a = \lambda_1, b = \lambda_2, c = -\lambda_2, d = \lambda_1$$

令

$$s = \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}, \cos \theta = \frac{\lambda_1}{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}}, \sin \theta = -\frac{\lambda_2}{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}}$$

则有

$$H = \begin{pmatrix} a & b & x_0 \\ c & d & y_0 \\ e & f & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \cos \theta & -s \sin \theta & x_0 \\ s \sin \theta & s \cos \theta & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

因此, H 是一个相似变换。

(2); 可由对偶原理从(1)直接得到, 因为相似变换 H 的对偶 H^{-T} 仍是一个相似变换。证毕。

仿射变换群

仿射变换(Affine Transformation)可用矩阵表示为

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & x_0 \\ c & d & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \quad \left(\mathbf{x}' = H_a \mathbf{x} = \begin{pmatrix} A & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} \right) \quad (1.1.21)$$

其中 A 是一个 2 阶可逆矩阵。仿射变换有 6 个自由度, 3 个点应对应可确定仿射变换。

仿射变换的全体也构成一个变换群, 称为仿射变换群。相似变换是它的子群。

仿射变换的分解 除平移变换外, 只须对矩阵 A 进行分解。对矩阵 A 作奇异值分解 (SVD 分解, 见附录 A3.2), 我们得到 $A = UDV^T$, 其中 U, V 是正交矩阵, D 是对角元为正数的对角矩阵

$$D = \begin{pmatrix} s_x & \\ & s_y \end{pmatrix}$$

由此可以看出, 仿射变换是一个等距变换 V^T 、一个非均匀伸缩变换 D 以及另一个等距变换 U 的合成, 因此它与相似变换的差别在于非均匀伸缩。仿射变换(1.1.21)是否保向, 根据矩阵 A 的行列式 $\det(A)$ 是否大于零来确定。这只要将 A 写成 $A = (UV^T)(VDV^T)$ 就可以看出这一点, 因为 (VDV^T) 总是一个保向的变换 (不论 V 是否为旋转矩阵), (UV^T) 是否保向是由它的行列式是否为 $+1$ (即是否为旋转矩阵) 来确定, 而行列式 $\det(A)$ 的符号与 (UV^T) 的符号是一致的。所有的保向仿射变换构成仿射变换群的子群, 而旋转 (保向) 相似变换群又是它的子群。

仿射变换的另一种分解。对 A 作 QR 分解 (见附录 A1.3): $A = UK$, 其中 U 是一个正交阵, K 是一个对角元素均大于零的上三角阵:

$$K = \begin{pmatrix} s_x & e \\ & s_y \end{pmatrix}$$

再对 K 再作如下分解 $K = \begin{pmatrix} s_x & \\ & s_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & e/s_x \\ & 1 \end{pmatrix} = DP$, 于是仿射变换可以表示为

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = UDP \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

变换 $P = \begin{pmatrix} 1 & e/s_x \\ & 1 \end{pmatrix}$ 通常称为推移变换(如图 1.1.4 所示)。因此, 一个仿射变换(除一个平移变换外)是推移变换、非均匀伸缩变换与正交变换的合成。

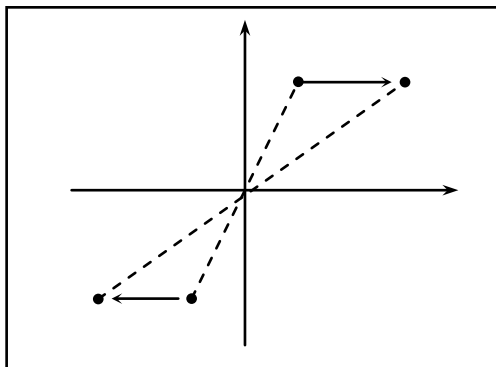


图 1.1.4: 推移变换 P : 位于 x 轴上的点保持不动, 不在 x 轴上的点沿 x 轴平行移动(在轴两侧移动, 方向相反)

仿射不变量 关于仿射变换群的不变量有: 平行线段长度的比值不变, 面积的比值不变。另外, 在计算机视觉中经常用到的一个结论是下述命题:

命题 1.1.12 射影变换 H 保持无穷远直线不动的充要条件是 H 为仿射变换^{*)}。

证明 令 $H = \begin{pmatrix} A & t \\ 0^T & 1 \end{pmatrix}$ 是仿射变换, 则根据射影变换对线的变换规则(命题 1.1.6), 可知:

$$l' = H^{-T} l_{\infty} = \begin{pmatrix} A^{-T} & 0 \\ -tA^{-T} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = l_{\infty}$$

反之, 若射影变换 $H = \begin{pmatrix} A & a \\ b^T & 1 \end{pmatrix}$ 使得

$$\begin{pmatrix} A & a \\ b^T & 1 \end{pmatrix}^{-T} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

则必有 $b=0$ 。因此, H 为仿射变换。证毕。

二次曲线的仿射分类 对于(非退化)二次曲线在欧氏变换群下的等价类是椭圆、抛物线与双曲线三类, 这样的分类对仿射变换群仍然有效。椭圆与无穷远直线没有实交点、抛物线与无

^{*)} 这里所说保持无穷远直线不动的意思是将无穷远点变换到无穷远点(可能不是同一点), 即将直线看作一个整体是保持不变的。

穷远直线相切，即有两个接触点、双曲线与无穷远直线有两个实交点。由于仿射变换保持无穷远直线不动且保持交点性质不变(实变实、虚变虚)，所以前面的性质是仿射不变的，因此二次曲线的仿射分类仍然是：椭圆、抛物线与双曲线三类。

射影变换群

在 1.1.3 节已讨论过射影变换，与其它变换一样将它写成分块矩阵的形式：

$$x' = Hx = \begin{pmatrix} A & t \\ v^T & k \end{pmatrix} x \quad (1.1.22)$$

当 $k \neq 0$ ， H 可分解为

$$H = \begin{pmatrix} sR & t/k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ v^T & k \end{pmatrix} \quad (1.1.23)$$

其中 K 是行列式等于 1 的且对角元素均大于零的上三角矩阵， R 是正交矩阵。

显然， $H_p = \begin{pmatrix} I & 0 \\ v^T & k \end{pmatrix}$ 是改变无穷远线的射影变换； $H_a = \begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 是保持面积比不变的仿

射变换； $H_s = \begin{pmatrix} sR & t/k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 是相似变换。

式(1.1.23)是不难证明的：因为

$$H \begin{pmatrix} I & 0 \\ v^T & k \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A & t \\ v^T & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ -v^T/k & 1/k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A - tv^T/k & t/k \\ 0^T & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sRK & t/k \\ 0^T & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sR & t/k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

倒数第二个等式，是利用 QR 分解并将分解中的上三角矩阵行列式归一化所得的结果。所以有

$$H = \begin{pmatrix} sR & t/k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ v^T & k \end{pmatrix}$$

与仿射变换不同的是射影变换不再有保向与逆向之分，这是因为一般的射影变换将无穷远直线 l_∞ 变到一条有限直线 l'_∞ ，在源平面上的两个有序图形，如果被变换到直线 l'_∞ 的两侧，则必存在一个图形与原来的图形反序，而另一个图形与原来的同序。如图 1.1.5 所示。

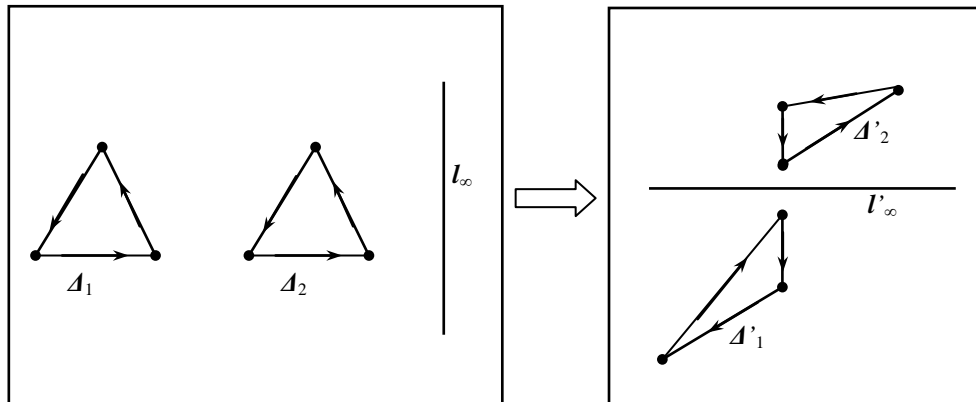


图 1.1.5: (非仿射的) 射影变换不是保向变换也不是逆向变换。

射影不变量 基本射影不变量是四共线点的交比。

关于共线点的交比, 在 1.1.1 节已给出定义, 这里将作更详细的讨论。如果线 l 上 4 个点 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4$ 的齐次坐标为 $\mathbf{x}_j = (x_{1j}, x_{2j})^T$, 则这 4 个点的交比是

$$(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4) = \frac{\det(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_3)}{\det(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)} : \frac{\det(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_4)}{\det(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_4)} \quad (1.1.24)$$

4 点交比在一维射影变换下是不变的(如图 1.1.6 所示), 换句话说交比的定义不依赖于直线 l 的坐标系的选择。

所谓一维射影变换, 在代数上与二维射影变换类似, 是指线 l 上的可逆齐次线性变换, 这个变换由 2×2 的矩阵 H 来描述:

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

显然 $\det(\mathbf{x}'_i, \mathbf{x}'_j) = \det(H\mathbf{x}_i, H\mathbf{x}_j) = \det(H)\det(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)$, 而 $\det(H)$ 在交比的比值中自动消除。因此一维射影变换保持交比不变。

如果 4 个点都是有限点, 则可以将它们第二个坐标归一化, 写成 $\mathbf{x}_j = (x_{1j}, 1)^T$, 则 $\det(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = x_{1i} - x_{1j}$, 它表示两点之间的有向距离。这样, 就可以通过有向距离来计算交比。

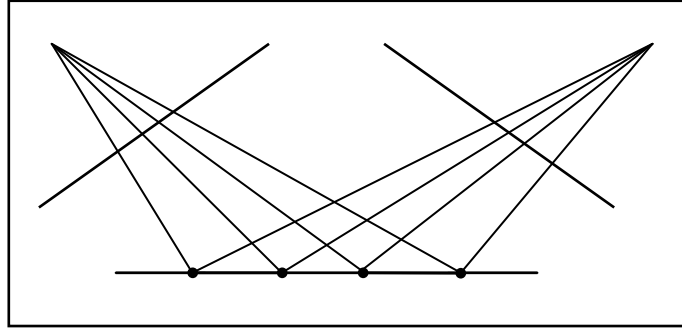


图 1.1.6: 与图中两个线束相交的所有直线上的 4 个交点的交比均相等, 因为它们之间满足一维射影变换。

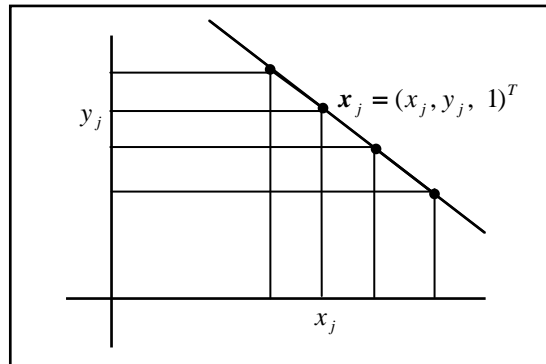


图 1.1.7: 平面上 4 个共线点的有限点的交比可以通过它们的非齐次坐标分量来计算,
因为直线点到坐标轴的投影是一维射影变换。

在平面上, 任何二维射影变换 H 都可以诱导出直线的一维射影变换, 由此, 立即得到平面射影变换保持交比不变的结论。下面提供了一种诱导一维射影变换方法。在直线 l 上取两个不同的点, 并给定齐次坐标 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ 。令 $\mathbf{x}'_j = H\mathbf{x}_j$ ($j=1,2$), 如线参数化那样(见 1.1.1 节)利用下式:

$$\mathbf{x} = u\mathbf{x}_1 + v\mathbf{x}_2 = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}' = u'\mathbf{x}'_1 + v'\mathbf{x}'_2 = (\mathbf{x}'_1, \mathbf{x}'_2) \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}$$

定义点 \mathbf{x} 和对应点 \mathbf{x}' 的齐次坐标分别为 $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}$, 于是我们有

$$(\mathbf{x}'_1, \mathbf{x}'_2) \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \mathbf{x}' = H\mathbf{x} = H(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

因此,

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = (\mathbf{x}'_1, \mathbf{x}'_2)^+ H(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \hat{H} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

$\hat{H} = (\mathbf{x}'_1, \mathbf{x}'_2)^+ H(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ 是一个 2 阶可逆矩阵(这里矩阵的上标 “+” 表示矩阵的广义逆), 且它对线 l 的作用与 H 对线 l 的作用是相同的。因此, 它是由 H 在线 l 上诱导的一维射影变换。

如果 4 个共线点是平面上的有限点, 我们不需要通过线参数化, 再利用式(1.1.24)计算交比。因为此时可以将点的第三个坐标归一化, 写成 $\mathbf{x}_j = (x_j, y_j, 1)^T$, 于是 $x_j(y_j)$ 是沿 $y(x)$ 方向在轴 $x(y)$ 上的投影(如图 1.1.7 所示), 而投影变换(直线到坐标轴的投影)是一维射影变换, 因此 4 点的交比与它们在各坐标轴上的投影点的交比相同。也就是说, 我们可以通过非齐次坐标分量来计算平面上共线点的交比。

1.2 三维射影几何

1.2.1 点的齐次坐标

假定在空间建立了欧氏坐标系, 空间每一点的欧氏坐标记为 $\tilde{\mathbf{X}} = (x, y, z)^T$, 令

$$\frac{x_1}{x_4} = x, \frac{x_2}{x_4} = y, \frac{x_3}{x_4} = z, x_4 \neq 0$$

则空间每一点有(欧氏)齐次坐标 $\mathbf{X} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ 。当 $s \neq 0$ 时, $s\mathbf{X}$ 与 \mathbf{X} 表示空间同一点的齐次坐标, 即空间点的齐次坐标可以相差一个非零常数因子。如果令 $x_4 \rightarrow 0$, 则有

$$x = \frac{x_1}{x_4} \rightarrow \infty, y = \frac{x_2}{x_4} \rightarrow \infty, z = \frac{x_3}{x_4} \rightarrow \infty$$

因此，定义齐次坐标 $x_4 = 0$ 点为无穷远点。

这样，只要 x_1, x_2, x_3, x_4 不同时为零， $\mathbf{X} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ 就代表扩展空间(包括所有无穷远点的三维空间)中的一个点，反之扩展空间中的每一点都可以用不同时为零的 4 个数构成的齐次坐标 $\mathbf{X} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ 来表示；当 $x_4 \neq 0$ 时代表有限点(非无穷远点)， $x_4 = 0$ 时代表无穷远点。称这样扩展的三维空间为三维射影空间(Projective Space)。

1.2.2 平面的齐次坐标

在三维射影空间中，平面方程可以写成

$$\pi_1 x + \pi_2 y + \pi_3 z + \pi_4 w = 0 \quad (1.2.1)$$

其中 $\mathbf{X} = (x, y, z, w)^T$ 表示空间点的齐次坐标。称 4 维矢量 $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4)^T$ 为该平面的齐次坐标。显然，方程(1.2.1) 两边同乘以一个非零因子仍表示该平面，所以平面的坐标 π 仅依赖于三对独立的比值 $\{\pi_1 : \pi_2 : \pi_3 : \pi_4\}$ ，也就是说平面在三维空间中有 3 自由度。方程(1.2.1)可以写成更简洁的形式

$$\pi^T \mathbf{X} = 0 \quad (1.2.2)$$

如果 $\pi = (0, 0, 0, 1)^T$ ，则方程(1.2.2)的解集为

$$\{\mathbf{X} = (\tilde{\mathbf{X}}^T, 0) \mid \tilde{\mathbf{X}} \in R^3 - \{0\}\}$$

即所有无穷远点所构成的集合。因此，称平面 $\pi = (0, 0, 0, 1)^T$ 为无穷远平面，并记为 π_∞ 。

如果 $\pi \neq \pi_\infty$ ，则该平面上的有限点 $\mathbf{X} = (\tilde{\mathbf{X}}^T, 1)^T$ 满足方程：

$$\mathbf{n}^T \tilde{\mathbf{X}} + d = 0$$

其中 $\mathbf{n} = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)^T$ ， $d = \pi_4$ ， $|d|/\|\mathbf{n}\|$ 是坐标原点到该平面的距离。不难看出这就是欧氏几何中的平面法式方程。该平面上的无穷远直线由下述方程给出：

$$\mathbf{n}^T \tilde{\mathbf{X}} = \pi^T \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{X}} \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

即平面 π 法向量 \mathbf{n} 是该平面上无穷远直线的表示。

不难得到下述结论：

- 两平面平行的充要条件为它们的交线是一条无穷远直线；
- 线与线(面)平行的充要条件是它们相交于无穷远点。

三点确定一个平面

假定三点 $\mathbf{X}_j, j=1, 2, 3$ 是平面 π 上的三个点，则必有

$$\begin{pmatrix} \mathbf{X}_1^T \\ \mathbf{X}_2^T \\ \mathbf{X}_3^T \end{pmatrix} \pi = 0 \quad (1.2.3)$$

如果三点 X_1, X_2, X_3 不共线(此时称三点处于一般位置), 则方程(1.2.3)中系数矩阵的秩必为 3, 此时平面 π 是系数矩阵的一维(右)零空间的元素(相差一个齐次因子), 因此一般位置上的三个点唯一确定一个平面。如果三点 X_1, X_2, X_3 共一条直线 L , 则系数矩阵秩为 2, 因此系数矩阵有二维(右)零空间, 所以此时不能唯一确定平面 π 。实际上, 通过直线 L 的所有平面都满足方程(1.2.3), 即方程(1.2.3)确定了以直线 L 为轴的平面束。

假定三点 X_1, X_2, X_3 处于一般位置, 令 $X = (x, y, z, w)^T$ 是这三个点所确定的平面 π 上的任一点, 则 X 是 X_1, X_2, X_3 的线性组合, 即 $\det(X, X_1, X_2, X_3)=0$, 而

$$\det(X, X_1, X_2, X_3) = xd_{234} - yd_{134} + zd_{124} - wd_{123}$$

其中 d_{jkl} 是由矩阵 (X_1, X_2, X_3) 组成的第 j, k, l 行构成的行列式。所以我们得到

$$\pi = (d_{234}, -d_{134}, d_{124}, -d_{123})^T \quad (1.2.4)$$

这是方程(1.2.3)的解向量。

如果三点 X_1, X_2, X_3 是有限远点, 则它的齐次坐标可以写成下面的形式:

$$X_1 = \begin{pmatrix} \tilde{X}_1 \\ 1 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} \tilde{X}_2 \\ 1 \end{pmatrix}, X_3 = \begin{pmatrix} \tilde{X}_3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

根据式(1.2.4), 它们所确定的平面为

$$\pi = \begin{pmatrix} (\tilde{X}_1 - \tilde{X}_3) \times (\tilde{X}_2 - \tilde{X}_3) \\ -\tilde{X}_3^T (\tilde{X}_1 \times \tilde{X}_2) \end{pmatrix} \quad (1.2.5)$$

这与欧氏几何中的结果是一致的, 例如平面 π 的法向量由 $n = (\tilde{X}_1 - \tilde{X}_3) \times (\tilde{X}_2 - \tilde{X}_3)$ 来计算。

三个平面确定一点

在空间中点与面是对偶的, 而线是自对偶的。将式(1.2.3)中的点、面的角色对换, 我们有

$$\begin{pmatrix} \pi_1^T \\ \pi_2^T \\ \pi_3^T \end{pmatrix} X = 0 \quad (1.2.6)$$

如果三个面 π_1, π_2, π_3 不共线(此时称三个面处于一般位置), 则其系数矩阵的秩必为 3, 此时点 X 是方程(1.2.6)系数矩阵的一维(右)零空间中的元素, 因而能被唯一地确定(相差一个齐次因子), 因此一般位置上的三个面唯一确定一个点(有可能是无穷远点)。如果三个面 π_1, π_2, π_3 共一条直线 L , 则方程(1.2.6)系数矩阵的秩为 2, 此时系数矩阵有二维(右)零空间, 因而不能唯一确定点 X , 实际上在直线 L 上的所有点都满足方程(1.2.6)。如果三个面 π_1, π_2, π_3 处于一般位置, 就可以得到由系数矩阵的 3 阶子行列式来计算点 X 的与式(1.2.4)类似的公式。

平面点的参数化

空间平面 π 上的点仅有两个自由度, 如果将空间平面 π 上的点 X 作为一个射影平面上的点, 则点 X 可以用三维向量 x 来表示, 三维向量 x 称为平面 π 上的点 X 的参数化表示。

给定平面 π 上不共线三个点的齐次坐标 X_1, X_2, X_3 , 则对于平面 π 上的任一点 X 可以表示成

$$X = \alpha X_1 + \beta X_2 + \gamma X_3 = (X_1, X_2, X_3) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \quad (1.2.7)$$

这样, 就得到了平面 π 上的点 X 的一种参数化表示 $x = (\alpha, \beta, \gamma)^T$, 有时也称它为平面点的二维齐次坐标。显然平面点的参数化不是唯一的。

1.2.3 直线的表示

在三维空间中, 直线不如点、面那样可以非常简单地用一个四维向量(齐次坐标)来表示, 因为三维空间中的直线有 4 个自由度。下面我们主要介绍直线的若干种表示方法。

直线的点表示与面表示

下面以点为基本几何元素来表示直线, 即将直线作为两个点的连线。

假定 X_1, X_2 是空间中两个不重合点, 令 W 为由这两个点的齐次坐标作为行的一个 2×4 矩阵 $W = \begin{pmatrix} X_1^T \\ X_2^T \end{pmatrix}$ 。于是, 有下述结论:

- 点束 $L = \{X = W^T \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \mid (\alpha, \beta) \in R^2\}$ 是连结这两个空间点的一条直线 (通常, 简述为矩阵 W 生成直线 L);
- 矩阵 W 的二维右零空间是以直线 L 为轴的平面束(因为右零空间中的每一平面都通过这两个空间点, 因此连结这两点的直线 L 必在此平面上)。

由线 L 上的另外两点 X'_1, X'_2 所定义的 W' 和 W 生成同样的点束, 且有相同的右零空间。因此, 空间直线 L 可以由它上面的两个点所构成的矩阵 W 来表示。在这种表示下, 连结两点的直线 L 也说成是直线 W 。

假定 π_1, π_2 为 W 右零空间中的两个基向量, 则点 X_1, X_2 同时在平面 π_1 和平面 π_2 上。所以, 由 W 定义的直线是它的右零空间中平面的交线 L , 并且以直线 L 为轴的平面束可表示为 $\mu\pi_1 + \xi\pi_2$ 。

类似地, 也可以用面作为基本几何元素来表示直线, 即将线定义为两个平面 π_1, π_2 的交, 即直线的对偶表示。由不重合的面 π_1, π_2 定义一个 2×4 矩阵 W^* :

$$W^* = \begin{pmatrix} \pi_1^T \\ \pi_2^T \end{pmatrix}$$

显然, 有下述结论:

- $\alpha\pi_1 + \beta\pi_2 = W^{*T} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ 是以一条直线 L 为轴的平面束;

- W^* 的二维零空间是一条直线 L 上的点束。

空间中的点 X 和直线 W 按下述方式定义了一个 3×4 矩阵：

$$M = \begin{pmatrix} W \\ X^T \end{pmatrix}$$

如果点 X 不在直线 W 上，则 M 的零空间是一维的，这个零空间确定一个平面(即没有结合性质的点与线确定一个平面，或者不共线的三点确定一个平面)；如果点 X 在直线 W 上，则 M 的零空间是二维的。

空间中的直线 W^* 与平面 π 也定义一个 3×4 矩阵：

$$M^* = \begin{pmatrix} W^* \\ \pi^T \end{pmatrix}$$

如果直线 W^* 不在平面 π 上，则 M^* 的零空间是一维的，并且这个零空间确定一个点 X (即线 W^* 与平面 π 的交点)；直线 W^* 在平面 π 上，则 M^* 的零空间是二维的。

直线的 Plucker 矩阵^{*)}

连结两点 A, B 的直线可由下述 **Plucker** 矩阵 L 表示，

$$L = AB^T - BA^T \quad (1.2.8)$$

它是一个 4×4 反对称矩阵。

平面上两点的连线可表示为 $l = x \times y$ ，因此 $L = AB^T - BA^T$ 是二维空间中的直线的向量积表示在三维空间中的推广。连结 A, B 的直线是矩阵 L 的二维零空间所确定的平面束的轴线。

直线的 **Plucker** 矩阵 L 表示与选取该线上点 A, B 无关。这是因为对于直线上的任何一个不同点 C ，有 $C = A + sB$ ，从而得到

$$AC^T - CA^T = A(A^T + sB^T) - (A + sB)A^T$$

从这里也可以看出空间直线有 4 个自由度，具体计算如下：反对称矩阵 L 有 6 个非独立的非零元素，但仅有 5 个比率是有意义的，另外 L 满足约束 $\det(L)=0$ ，因此直线的自由度是 4。

在点变换 $X' = HX$ 下，矩阵 L 的变换为 $L' = HLH^T$ 。

直线的对偶 **Plucker** 表示 L^* 是由两个平面 P, Q 的交所构成：

$$L^* = PQ^T - QP^T \quad (1.2.9)$$

L^* 与 L 有相似的性质。在点变换 $X' = HX$ 下，矩阵 L^* 的变换为 $L^{*'} = H^{-T} L^* H^{-1}$ 。

矩阵 L^* 与 L 有下述关系

$$l_{12} : l_{13} : l_{14} : l_{23} : l_{24} : l_{34} = l_{34}^* : l_{24}^* : l_{23}^* : l_{14}^* : l_{13}^* : l_{12}^* \quad (1.2.10)$$

关系规则非常简单：对偶和原来元素的下标总包含所有的数字 $\{1,2,3,4\}$ ，如果原来元素的下标是 ij ，那么对偶元素的下标是 $\{1,2,3,4\}$ 中不包含 ij 的数，例如 $12 \mapsto 34$ 。

在直线的 **Plucker** 矩阵这种表示下，有下述结论：

^{*)} 本节以下内容初次阅读本书者可略过，因为直线的 **Plucker** 矩阵与坐标仅与本书第二章中的命题 2.2.1 和 2.2.2 密切相关。

- 如果点 X 不在线 L 上, 则它们所确定的平面是 $\pi = L^*X$; 而 $L^*X=0$ 的充要条件是 X 在线 L 上;
- 线 L 和平面 π 交点是 $X=L\pi$; 而 $L\pi=0$ 的充要条件是线 L 在 π 上;
- 两 (或更多) 条线 L_1, L_2 的性质可以由矩阵 $M=(L_1, L_2, \dots)$ 的零空间得到。例如: 三线 L_1, L_2, L_3 共面的充要条件是 $M^T=(L_1, L_2, L_3)^T$ 有一维零空间。

直线的 Plucker 坐标

Plucker 线坐标是 4×4 反对称 Plucker 矩阵 L 的六个非零元素, 即

$$L=(l_{12}, l_{13}, l_{14}, l_{23}, l_{24}, l_{34}) \quad (1.2.11)$$

它是齐次 6 维矢量, 因而是四维射影空间 P^5 中的元素。因为 $\det L=0$, 坐标满足方程

$$l_{12}l_{34} + l_{13}l_{24} + l_{14}l_{23} = 0 \quad (1.2.12)$$

反之, 如果矢量 L 满足(1.2.12), 则它对应于三维空间中的一条直线。

假定两直线 L, \hat{L} 分别是点 A, B 和 \hat{A}, \hat{B} 的连线, 定义:

$$(L/\hat{L}) = \hat{l}_{12}l_{34} + l_{12}\hat{l}_{34} + l_{13}\hat{l}_{24} + \hat{l}_{13}l_{24} + l_{14}\hat{l}_{23} + \hat{l}_{14}l_{23}$$

可以证明:

$$(L/\hat{L}) = \det(A, B, \hat{A}, \hat{B}) \quad (1.2.13)$$

由于两直线 L, \hat{L} 相交的充要条件是 4 点 A, B, \hat{A}, \hat{B} 共面, 而 4 点共面等价于 $\det(A, B, \hat{A}, \hat{B})=0$ 。于是, 有下述结论:

- 两直线 L, \hat{L} 相交(即共面)的充要条件是 $(L/\hat{L})=0$;
- 假定两线 L, \hat{L} 分别是平面 P, Q 和 \hat{P}, \hat{Q} 的交线, 则 $(L/\hat{L}) = \det(P, Q, \hat{P}, \hat{Q})$ (这是式 1.2.13 的对偶);
- 如果 L 是两平面 P, Q 的交线, \hat{L} 是两点 A, B 的连线, 则有

$$(L/\hat{L}) = (P^T A)(Q^T B) - (Q^T A)(P^T B) \quad (1.2.14)$$

1.2.4 三维射影变换

与二维射影变换类似, 三维射影变换是三维射影空间上的可逆齐次线性变换 (实际上, n 维射影变换也是如此定义的), 这个变换可由 4×4 的矩阵 H 来描述:

$$X' = HX \quad (1.2.15)$$

矩阵 H 称为射影变换矩阵或称为单应矩阵。由于变换是齐次的, 所以射影变换矩阵 H 可以相差一个非零常数因子, 因此三维射影变换有 15 个自由度, 即射影变换矩阵可由它的元素所构成的 15 个比值唯一确定。

三维射影变换将空间上的点(线、面)变换到点(线、面), 并且保持点的共线(面)性、线的共面性等性质。任何三维射影变换的逆变换都是三维射影变换、任意两个三维射影变换的合成(对应于两个单应矩阵的积)也是三维射影变换。因此, 三维射影变换的全体构成三维射影空间上的一个变换群, 称它为三维射影变换群。

满足式(1.2.15)的点 $X \leftrightarrow X'$ 称为射影变换 H 的一个点对应。给定点对应的齐次坐标, 由(1.2.15)是一个齐次等式, 即式(1.2.15)表示在相差一个常数意义下的相等, 所以有

$$s\mathbf{X}' = H\mathbf{X}$$

其中 s 为未知的非零齐次因子。消去上式中齐次因子 s ，可得到关于 H 的 3 个线性齐次方程。因此，在一般情况下，5 个点唯一确定一个三维射影变换。下述命题是更确切的陈述。

命题 1.2.1 如果 5 个点对应中任意 4 点不共面，则这 5 个点对应唯一确定一个三维射影变换。

由于两个三维射影变换的合成仍是一个射影变换，因此为了证明此命题，只须证明它的下述特殊形式：

设 $\mathbf{X}'_1, \mathbf{X}'_2, \dots, \mathbf{X}'_5$ 为三维射影空间中任意给定的 5 个点，其中任何 4 个点不共面，则存在唯一的射影变换 H 将下述 5 个点：

$$\mathbf{X}_1 = (1,0,0,0)^T, \mathbf{X}_2 = (0,1,0,0)^T, \mathbf{X}_3 = (0,0,1,0)^T, \mathbf{X}_4 = (0,0,0,1)^T, \mathbf{X}_5 = (1,1,1,1)^T$$

依次变为 $\mathbf{X}'_1, \mathbf{X}'_2, \dots, \mathbf{X}'_5$ 。

证明 因为 $s_j \mathbf{X}'_j = H\mathbf{X}_j$ ， $s_j \neq 0, j=1,2,\dots,5$ ，所以有

$$(s_1 \mathbf{X}'_1, s_2 \mathbf{X}'_2, s_3 \mathbf{X}'_3, s_4 \mathbf{X}'_4) = H(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3, \mathbf{X}_4)$$

因此，

$$H = (\mathbf{X}'_1, \mathbf{X}'_2, \mathbf{X}'_3, \mathbf{X}'_4) \text{diag}(s_1, s_2, s_3, s_4) (\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3, \mathbf{X}_4)^{-1} = (\mathbf{X}'_1, \mathbf{X}'_2, \mathbf{X}'_3, \mathbf{X}'_4) \text{diag}(s_1, s_2, s_3, s_4)$$

于是有

$$s_5 \mathbf{X}'_5 = (\mathbf{X}'_1, \mathbf{X}'_2, \mathbf{X}'_3, \mathbf{X}'_4) \text{diag}(s_1, s_2, s_3, s_4) \mathbf{X}_5 = (\mathbf{X}'_1, \mathbf{X}'_2, \mathbf{X}'_3, \mathbf{X}'_4) \mathbf{S}$$

其中 $\mathbf{S} = (s_1, s_2, s_3, s_4)^T$ 。由于 $\mathbf{X}'_1, \mathbf{X}'_2, \mathbf{X}'_3, \mathbf{X}'_4$ 不共面，所以矩阵 $(\mathbf{X}'_1, \mathbf{X}'_2, \mathbf{X}'_3, \mathbf{X}'_4)$ 是可逆的，因此

$$\mathbf{S} = s_5 (\mathbf{X}'_1, \mathbf{X}'_2, \mathbf{X}'_3, \mathbf{X}'_4)^{-1} \mathbf{X}'_5$$

从而有

$$H = s_5 (\mathbf{X}'_1, \mathbf{X}'_2, \mathbf{X}'_3, \mathbf{X}'_4) \text{diag}((\mathbf{X}'_1, \mathbf{X}'_2, \mathbf{X}'_3, \mathbf{X}'_4)^{-1} \mathbf{X}'_5)$$

即 H 在相差一个常数因子的意义下有唯一解。证毕。

平面与直线在（点）射影变换下的变换规则

变换 H 的对偶是 H^{-T} ，由于在空间中点与平面是一对对偶元素，所以有下述命题：

命题 1.2.2 射影变换 H 对平面的变换规则是

$$\pi' = H^{-T} \pi \quad (1.2.16)$$

如果直线用 Plucker 矩阵表示，则有如下关于直线的变换规则：

命题 1.2.3 射影变换 H 对直线 L 的变换规则是

$$L' = HLH^T \quad (1.2.17)$$

其对偶形式是

$$L^{*'} = H^{-T} L^* H^{-1} \quad (1.2.18)$$

证明是容易的，因为 $L' = HA(HB)^T - HB(HA)^T = H(AB^T - BA^T)H^T = HLH^T$ 。

1.2.5 二次曲面

二次曲面由下述方程所定义：

$$X^T Q X = 0 \quad (1.2.19)$$

其中 Q 是 4×4 的对称矩阵。如果 Q 是降秩的，则称它为退化二次曲面，否则称为非退化二次曲面。为了陈述方便，通常用“二次曲面 Q ”来代替陈述“由对称矩阵 Q 所确定的二次曲面”。

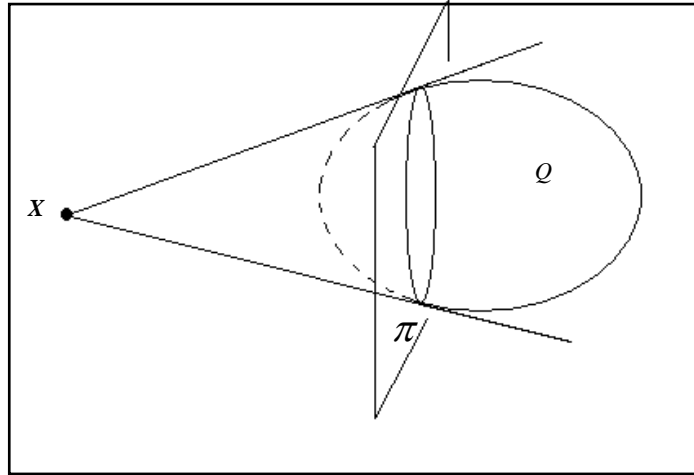


图 1.2.1：点 X 关于二次曲面的极平面是过该点的锥与 Q 的切点所在的平面 π 。

下面是二次曲面的一些与二次曲线相类似的性质：

- 二次曲面有 9 个自由度，即由它的 10 个不同元素的比值所确定；
- 在一般位置上的 9 个点可确定一个二次曲面。如果二次曲面是退化的，则可用较少的点来确定；
- 给定一个二次曲面 Q ，等式 $\pi = QX$ 定义一个点与平面的对应，通常称为由二次曲面 Q 所确定的极对应。如果二次曲面 Q 是非退化的，则它确定的极对应是点与平面之间的一一对应。在几何上，如果点 X 在二次曲面 Q 上，则它的极平面是点 X 的切平面；如果点 X 不在(非退化)二次曲面 Q 上，则点 X 的极平面是以点 X 为顶点的锥与 Q 的切点所在的平面(如图 1.2.1 所示)；
- 平面 π 与二次曲面 Q 的交是一条二次曲线；
- 在(点)变换 $X' = HX$ 下，(点)二次曲面变换规则是

$$Q' = H^{-T} Q H^{-1} \quad (1.2.20)$$

(实)二次曲面的射影分类

由于二次曲面的矩阵 Q 是对称的，所以它可以分解为 $Q = UDU^T$ ，这里 U 是一个实正交矩阵而 D 是一个实对角矩阵。通过对 U 的四列各自进行适当的伸缩，可以将 Q 分解成 $Q = H^{-T} D H^{-1}$ ，这里 D 是对角元素取 0, 1, 或 -1 的对角矩阵，并且使 D 的零对角元素出现在对角线的最后而 $+1$ 出现在前面(如表 1.2.1 所给的那种形式)。由式(1.2.20)，二次曲面 Q 通过射影

变换 H , 必(射影)等价于二次曲面 D 。因此, 对角矩阵 D 的每一种形式代表了二次曲面的一种射影等价类。

表 1.2.1: (实)二次曲面的射影分类

(注: 符号差是指 D 的对角元素中 1 的个数与 -1 个数的差)

$Q(D)$ 的秩	符号差	D 的对角线元	方程	类型
4	4	(1,1,1,1)	$x^2+y^2+z^2+1=0$	无实点
	2	(1,1,1,-1)	$x^2+y^2+z^2=1$	球
	0	(1,1,-1,-1)	$x^2+y^2=z^2+1$	单叶双曲面
3	3	(1,1,1,0)	$x^2+y^2+z^2=0$	一点 (0,0,0,1)
	1	(1,1,-1,0)	$x^2+y^2=z^2$	顶点在原点的锥
2	2	(1,1,0,0)	$x^2+y^2=0$	直线 (z -轴)
	0	(1,-1,0,0)	$x^2=y^2$	两平面 $x=\pm y$
1	1	(1,0,0,0)	$x^2=0$	平面 $x=0$

二次曲面的对偶

空间曲面的对偶是指以该曲面的切平面为基本元素在对偶空间(面空间)中所构成的曲面, 通常称对偶曲面。下面着重考虑二次曲面的对偶曲面。在一般情况下二次曲面的对偶曲面仍为一个二次曲面。令 Q 是一个二次曲面, 它的对偶曲面记为 Q^* , 按照对偶曲面的定义 Q^* 的基本元素是 Q 的切平面, 也就是说它是 Q 的所有切平面所构成的平面集合, 而 Q 是 Q^* 中的所有平面所形成的包络。由于二次曲面的对偶, 尤其是锥面与空间二次曲线的对偶, 在本书中有特别的重要性, 且考虑到这些概念的抽象性以及一般读者对对偶空间的概念不是特别熟悉, 所以, 下面将对这些概念作一些讨论, 并尽量从几何和代数观点对这些概念进行一些解释。

非退化二次曲面的对偶 考虑非退化二次曲面的对偶。令 Q 是一个非退化的二次曲面, 即 $\det(Q) \neq 0$, 它在(点)空间的方程为 $X^T Q X = 0$ 。根据上面的定义, 它的对偶是它的所有切平面构成的集合, 下面证明这个集合在对偶空间中也构成一个非退化的二次曲面。为此, 任取 Q 的一个切平面 π , 切点为 X , 则必有 $\pi = QX$, 因此有 $Q^{-1}\pi = X$ 。又因 X 在平面 π 上, 所以必有 $\pi^T X = 0$, 于是得到 $\pi^T Q^{-1}\pi = \pi^T X = 0$ 。因此, Q 的任一切平面 π 必满足方程: $\pi^T Q^{-1}\pi = 0$ 。反之, 假定平面 π 方程: $\pi^T Q^{-1}\pi = 0$ 。下面证明平面 π 必为 Q 的切平面: 令 $X = Q^{-1}\pi$, 则必有 $\pi = QX$ 。为了证明 π 为 Q 的切平面, 现在只须证明点 X 在二次曲面上。由于 $X^T Q X = (Q^{-1}\pi)^T \pi = \pi^T Q^{-1}\pi = \pi^T Q^{-1}\pi = 0$, 其中倒数第二个等式利用了 Q 的对称性, 因此点 X 在二次曲面 Q 上。从上面的论证我们有下述命题:

命题 1.2.4: 非退化二次曲面的对偶 Q^* 仍是二次曲面, 并且 $Q^* = Q^{-1}$ 。

注: 非退化二次曲面与其对偶二次曲面是互为对偶的, 即有 $(Q^*)^* = Q$ 。

锥面的对偶 令 Q 是一个锥面, 即 $\text{rank}(Q) = 3$, 它是一个退化二次曲面。下面考虑它的对偶 Q^* 。由于 $\text{rank}(Q) = 3$, 则 Q 有一维零空间, 并且零空间的元素是锥面 Q 的顶点 V 的齐次坐标, 即锥面 Q 的顶点 V 是方程 $QV = 0$ 的非零解。现在考虑 Q 的切平面集合在对偶空间中所构

成的曲面形式。首先注意到：锥面 Q 在顶点 V 处不存在切平面。从代数上也可以看出这一点：由于顶点 V 使得 $QV=0$ ，而四维零向量不能作为任何平面的齐次坐标，因此锥面 Q 在顶点 V 处不存在切平面。

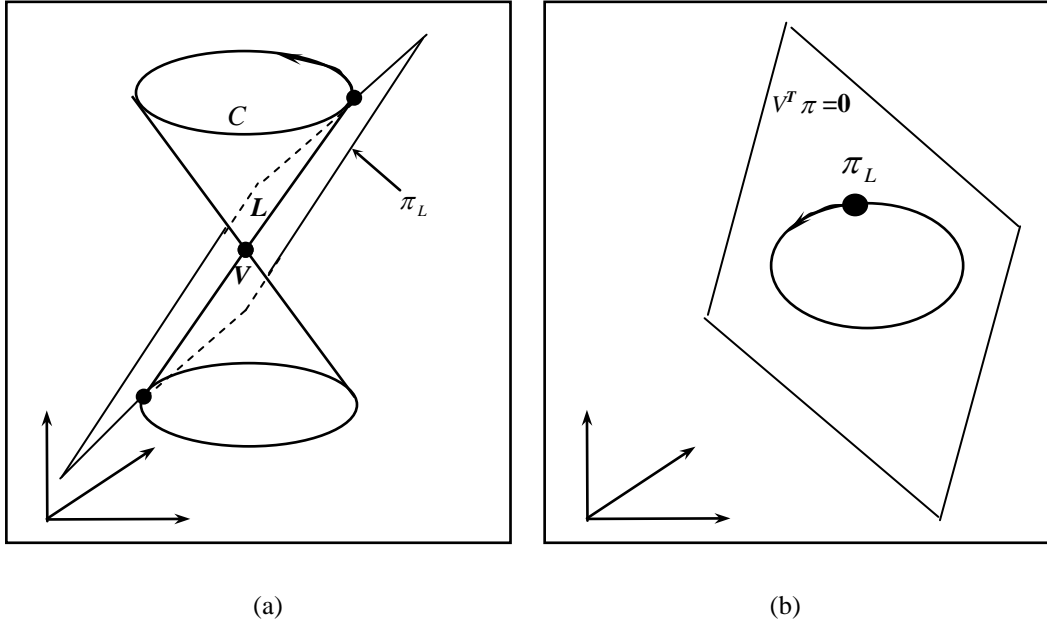


图 1.2.2: 锥面及其对偶。(a) 点空间中的锥面;
(b)(点)空间中的锥面对偶在面空间(对偶空间)是一条二次曲线。

参考图 1.2.2: 点 V 的对偶在对偶空间中表示一个“平面” V ，即在对偶空间中满足方程 $V^T \pi = 0$ 的所有“点” π 的集合。在锥面母线 L 上的点除顶点外都有相同的切平面 π_L ，即母线 L 上所有点的对偶是同一“点” π_L ，换句话说，母线 L 在对偶空间中被压缩成一个“点” π_L 。由于在点空间中平面 π_L 过顶点 V ，所以在对偶空间中“点” π_L 必在“平面” V 上。当母线 L 绕基线 C 运动时， π_L 在对偶空间中的轨迹将是“平面” V 上的一条“点”曲线。所以，锥面的对偶是一条平面曲线。

下面证明这条曲线是一条二次曲线。令 X 是锥面 Q 上任一异于顶点 V 的点，则它的切平面为 $\pi = QX$ 。显然，一个点 Y 在母线 VX 上，当且仅当 $QY = \pi$ 。令 $\tilde{X} = Q^+ \pi$ ，则它必在母线 VX 上。这是，因为

$$Q\tilde{X} = QQ^+ \pi = QQ^+ QX = QX = \pi$$

因此，母线的参数方程为 $\tilde{X} = V + sX$ 。于是，我们有

$$\pi^T Q^+ \pi = X^T Q^T (V + sX) = X^T QX = 0$$

所以，锥面的对偶由下述方程表示： $\begin{cases} \pi^T Q^+ \pi = 0 \\ V^T \pi = 0 \end{cases}$ 。由于 $\text{rank}(Q^+) = 3$ ，所以锥面的对偶(在对偶空间中)是一个锥面与平面的交线，因此它是一条平面曲线。

命题 1.2.5: 锥面 Q 的对偶在对偶空间中是一条二次曲线，这条二次曲线的支撑面是锥面顶点的对偶，锥面 Q 的母线在对偶空间中压缩为二次曲线上的一个点。锥面 Q 的对偶可以用下述方程来描述：

$$\begin{cases} \pi^T Q^+ \pi = 0 \\ V^T \pi = 0 \end{cases}$$

空间二次曲线的对偶 参考图 1.2.3：令平面 π_0 是空间二次曲线的支撑平面，它的对偶在对偶空间中表示一个“点” π_0 。二次曲线上任一点 X 的切平面是以该点的切线为轴的一个平面束(但不包括支撑平面 π_0)。令 π_1 是这个面束中的一个成员，则这个平面束的参数方程为： $\pi = \pi_0 + s\pi_1$ 。在对偶空间中，它表示经过“点” π_0 的一条直线 $L(s) = \pi_0 + s\pi_1$ 。当点 X 绕二次曲线运动时， L 在对偶空间中的轨迹将形成是一个锥面。也就是说，我们可以证明下述命题：

命题 1.2.6: 空间二次曲线的对偶曲面是一个锥面，二次曲线的支撑平面的对偶是这个锥面的顶点，二次曲线上的一个点在对偶空间中扩展为锥面的一条母线，二次曲线的切线与锥面的母线构成一一对应关系。

对偶二次曲面的变换规则 在(点)变换 $X' = HX$ 下，应用平面的变换规则 $\pi' = H^{-T}\pi$ ，立即得到对偶二次曲面 Q^* 的变换规则：

$$Q^{*'} = HQ^*H^T \quad (1.2.21)$$

注意：由于锥面的对偶曲面 Q^* 是一条空间二次曲线，它不能由一个矩阵来表示，所以它的变换规则不能统一在上述公式中，但它的变换规则可以由对偶锥面的变换规则和平面的变换规则来联合表达：

$$\begin{cases} \pi^T Q^+ \pi = 0 \\ V^T \pi = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \pi'^T HQ^+H^T \pi' = 0 \\ V^T H^T \pi' = 0 \end{cases}$$

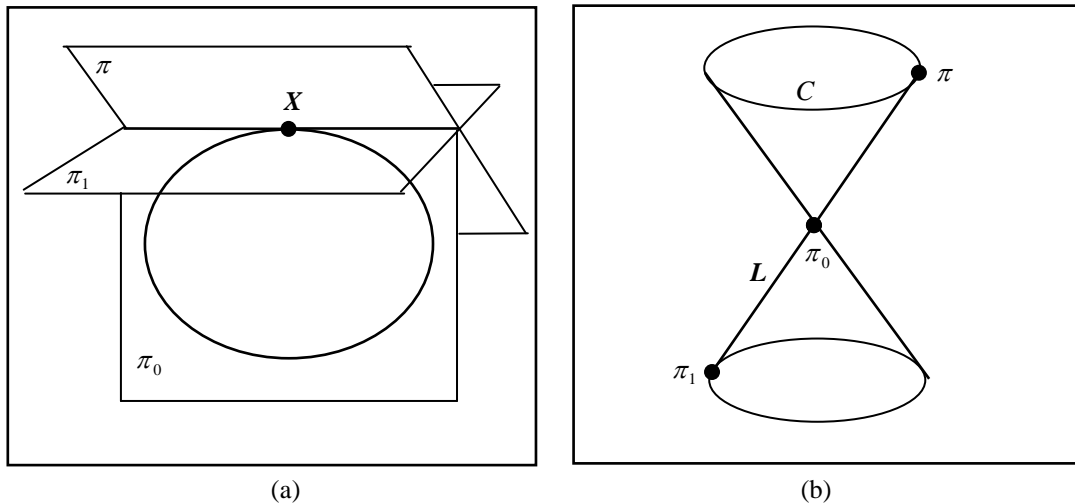


图 1.2.3：空间二次曲线及其对偶。(a) 点空间中的二次曲线；
(b) (点)空间二次曲线的对偶在面空间(对偶空间)是一个锥面。

绝对二次曲线与绝对二次曲面

绝对二次曲线(AC, Absolute Conic) 绝对二次曲线 Ω_∞ 是 π_∞ 上的一条(点)二次曲线。在欧氏坐标系下 $\pi_\infty = (0, 0, 0, 1)^T$, 在 Ω_∞ 上的点 $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ 是下述方程的解集:

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 \\ x_4^2 = 0 \end{cases} \quad (1.2.22)$$

它是 π_∞ 上的一条虚二次曲线。尽管 Ω_∞ 没有实点, 但它具有二次曲线的共同性质, 例如: 直线交二次曲线于两点; 极对应关系等。下面给出 Ω_∞ 的基本性质:

- 任意一个圆与绝对二次曲线 Ω_∞ 相交于两个点, 这两个点是圆所在平面内的两个圆环点。可以证明绝对二次曲线是所有平面上的圆环点所构成的集合;
- 任意一个球与无穷远平面 π_∞ 相交于绝对二次曲线 Ω_∞ 。

绝对二次曲面(AQ, Absolute Quadric) 绝对二次曲线 Ω_∞ 的对偶是三维空间中的退化对偶二次曲面, 并称它为绝对二次曲面并记为 Q_∞^* 。几何上, Q_∞^* 是所有与 Ω_∞ 相切的平面所构成的集合。在代数上 Q_∞^* 由秩为 3 的 4×4 的齐次矩阵来表示, 在欧氏坐标系下它可表示为

$$Q_\infty^* = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0^T & 0 \end{pmatrix} \quad (1.2.23)$$

在代数上, 平面 π 在包络 Q_∞^* 上的充要条件是 $\pi^T Q_\infty^* \pi = 0$ 。令平面的坐标为 $\pi = (\mathbf{v}^T, k)^T$, 给定 Q_∞^* 形式(1.2.23)后, $\pi^T Q_\infty^* \pi = 0$ 等价于 $\mathbf{v}^T \mathbf{v} = 0$ 。而 \mathbf{v} 表示平面 $\pi = (\mathbf{v}^T, k)^T$ 与无穷远平面的交线, 该直线与绝对二次曲线相切的充要条件是 $\mathbf{v}^T \mathbf{l} \mathbf{v} = 0$ 。因此, Q_∞^* 的包络正好由这些与绝对二次曲线相切的平面所组成。由式(1.2.23)可直接验证无穷远平面是 Q_∞^* 的右零空间, 即 $Q_\infty^* \pi_\infty = 0$ 。

绝对二次曲面在射影坐标系下有 8 个自由度, 因为它是退化的对偶二次曲面。这 8 个自由度也是从射影坐标系下确定度量性质所需要确定的自由度。

绝对二次曲线和绝对二次曲面之间的关系与前面讨论的一般退化情况完全相同, 只是绝对二次曲线位于一个特殊的平面(无穷远平面)而已。由于无穷远平面的特殊性, 所以绝对二次曲线和绝对二次曲面也有很多特殊性质。在三维计算机视觉中, 尤其在摄像机自标定与三维重构理论中, 绝对二次曲线和绝对二次曲面处于十分重要的地位。为了深入理解它们在欧氏坐标下的表示, 下面从另一个角度来考虑它们。

首先, 将绝对二次曲线视为球面的极限。令 Q_r 是中心在原点半径为 r 的球面, 则它的矩阵表示为

$$Q_r = \text{diag}(1, 1, 1, -r^2)$$

即球面 Q_r 上的点 $X = (x, y, z, w)^T$ 满足方程:

$$\left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{y}{r}\right)^2 + \left(\frac{z}{r}\right)^2 = w^2$$

当 r 逐渐增大时, 球面 Q_r 上的点就逐渐接近于无穷远平面。记 Q_∞ 是球面 Q_r 在 $r \rightarrow \infty$ 时的极限。当 $r \rightarrow \infty$ 时, 对任意 x, y, z , 有 $\frac{x}{r} \rightarrow 0, \frac{y}{r} \rightarrow 0, \frac{z}{r} \rightarrow 0$ 。由上式, 必有 $w \rightarrow 0$, 因此, Q_∞ 上的点 $X = (x, y, z, w)^T$ 必是无穷远点, 且满足方程:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 0 \\ w = 0 \end{cases}$$

这正是绝对二次曲线在欧氏坐标系下的方程, 所以可以将绝对二次曲线作为球面 Q_r 在 $r \rightarrow \infty$ 时的极限。

下面考虑对偶二次曲面 Q_∞^* 。由于绝对二次曲面 Q_∞^* 是绝对二次曲线的对偶, 所以从上面的讨论可以将它看作为球面 Q_r 对偶 Q_r^* 的极限。由于 Q_r 的对偶可以表示成

$$Q_r^* = \text{diag}(1, 1, 1, -1/r^2)$$

当 $r \rightarrow \infty$ 时, 必有

$$Q_r^* = \text{diag}(1, 1, 1, -1/r^2) \rightarrow \text{diag}(1, 1, 1, 0) = Q_\infty^*$$

这样, 就得到了绝对二次曲面在欧氏坐标系下表示式(1.2.23)。从这里也可以看出, 我们为什么将绝对二次曲面记成 Q_∞^* 而不是按习惯那样记成 Ω_∞^*

绝对二次曲线与绝对二次曲面的度量性质 在一般的三维射影空间中, 通过绝对二次曲线 Ω_∞ 可以度量两条直线间的夹角, 而通过绝对二次曲面可以度量二个平面的夹角。确切地说, 我们有下列命题。

命题 1.2.7 三维射影空间中, 令 d_1 和 d_2 是两条直线与二次曲线 Ω_∞ 所在平面 π_∞ 的交点, 它表示这两条直线在射影空间中的方向, 绝对二次曲线在平面 π_∞ 上的矩阵表示仍记为 Ω_∞ 。则两条直线交角可以通过下述公式来计算:

$$\cos \theta = \frac{(d_1^T \Omega_\infty d_2)}{\sqrt{(d_1^T \Omega_\infty d_1)(d_2^T \Omega_\infty d_2)}} \quad (1.2.24)$$

证明: 先验证欧氏空间的情形: 由于在欧氏空间中 Ω_∞ 在无穷远平面上的矩阵表示为 $\Omega_\infty = I$, 两条直线与无穷远平面的交点 $D_1 = (d_1^T, 0)^T, D_2 = (d_2^T, 0)^T$ 在无穷远平面上的表示必为 d_1 和 d_2 , 它们是两条直线的欧氏方向。由欧氏几何, 立即得到两直线的交角公式:

$$\cos \theta = \frac{(d_1^T d_2)}{\sqrt{(d_1^T d_1)(d_2^T d_2)}} = \frac{(d_1^T \Omega_\infty d_2)}{\sqrt{(d_1^T \Omega_\infty d_1)(d_2^T \Omega_\infty d_2)}}$$

因此, 公式(1.2.24)成立。下面证明一般情况:

由于通过一个射影变换 H 可以将欧氏空间变换到一般的射影空间, 并且射影变换将平面映射为平面。记无穷平面 π_∞ 被映射到平面 π'_∞ , 则射影变换 H 必诱导出从平面 π_∞ 到平面 π'_∞ 上的一个二维射影变换 $\tilde{H}_{3 \times 3}$ 。于是, 根据二次曲线的变换规则, 绝对二次曲线 Ω_∞ 在平面 π'_∞ 上的矩阵表示必为 $\Omega'_\infty = \tilde{H}_{3 \times 3}^{-T} \Omega_\infty \tilde{H}_{3 \times 3}^{-1}$, 且两直线的方向 d_1, d_2 被变换到射影方向: $d'_1 = \tilde{H}_{3 \times 3} d_1, d'_2 = \tilde{H}_{3 \times 3} d_2$ 。因此, 我们有

$$\cos \theta = \frac{(d_1^T d_2)}{\sqrt{(d_1^T d_1)(d_2^T d_2)}}$$

$$= \frac{d_1'^T \tilde{H}_{3 \times 3}^{-T} H_{3 \times 3}^{-1} d_2'}{\sqrt{d_1'^T \tilde{H}_{3 \times 3}^{-T} H_{3 \times 3}^{-1} d_1'} \sqrt{d_2'^T \tilde{H}_{3 \times 3}^{-T} H_{3 \times 3}^{-1} d_2'}} = \frac{(d_1'^T \Omega_\infty' d_2')}{\sqrt{(d_1'^T \Omega_\infty' d_1')(d_2'^T \Omega_\infty' d_2')}}$$

即公式(1.2.4)成立。证毕。

命题 1.2.8 在三维射影空间中，若绝对二次曲面的矩阵表示为 Q_∞^* ，两平面 π_1 和 π_2 之间的夹角由下式给出：

$$\cos \theta = \frac{\pi_1^T Q_\infty^* \pi_2}{\sqrt{(\pi_1^T Q_\infty^* \pi_1)(\pi_2^T Q_\infty^* \pi_2)}} \quad (1.2.25)$$

特别地，在欧氏空间中，若两平面的欧氏坐标 $\pi_1 = (n_1^T, d_1)^T$, $\pi_2 = (n_2^T, d_2)^T$ ，则两平面的夹角计算公式简化为：

$$\cos \theta = \frac{n_1^T n_2}{\sqrt{(n_1^T n_1)(n_2^T n_2)}}$$

证明是容易的，欧氏空间的夹角公式直接由欧氏几何得到，对于一般射影空间可由射影变换关于对偶二次曲面的变换规则和平面的变换规则得到。

三次扭线 (Twisted Cubic)

二次曲面是根据二次曲线方程的变元次数在三维空间中的类比而得到的。下面所介绍的三次曲线，也可以看成是二次曲线在三维空间中的一种类比。

二维射影平面上的二次曲线可以由下述二次参数方程来描述：

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + a_{12}t + a_{13}t^2 \\ a_{21} + a_{22}t + a_{23}t^2 \\ a_{31} + a_{32}t + a_{33}t^2 \end{pmatrix} \quad (1.2.26)$$

其中 A 为非奇异的 3×3 矩阵。

二次曲线的参数方程在三维空间中的类比是下述三次参数方程：

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \\ t^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + a_{12}t + a_{13}t^2 + a_{14}t^3 \\ a_{21} + a_{22}t + a_{23}t^2 + a_{24}t^3 \\ a_{31} + a_{32}t + a_{33}t^2 + a_{34}t^3 \\ a_{41} + a_{42}t + a_{43}t^2 + a_{44}t^3 \end{pmatrix} \quad (1.2.27)$$

其中 A 是非奇异的 4×4 矩阵。

由方程(1.2.27)所定义的空间曲线称为三次扭线。三次扭线在摄像机矩阵的退化情况分析中有非常重要应用。下面给出三次扭线的一些性质：

- 三次扭线有 12 个自由度，一般位置的六点确定唯一的三次扭线；
- 三次扭线与所有的空间平面都至少相交于一个实点，至多相交于 3 个实点；
- 所有的三次扭线都是射影等价的。

1.2.6 三维射影变换群的子群

仿射变换群

三维仿射变换是

$$X' = H_a X = \begin{pmatrix} A & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X \quad (1.2.28)$$

其中 A 是一个 3 阶可逆矩阵。三维仿射变换有 12 个自由度。

仿射不变量 关于仿射不变量，有下述结论：

- 保持无穷远平面不变，即将无穷远点变换到无穷远点；
- 保持直线、平面之间的平行性；
- 保持体积比、面积比、长度比不变；

下述命题 1.2.9 表明保持无穷远平面不变性质是仿射变换的基本特征。

命题 1.2.9 射影变换 H 保持无穷远平面不变的充要条件是 H 为仿射变换。

相似变换群

相似变换由下述变换所定义

$$X' = \begin{pmatrix} sU & t \\ 0^T & 1 \end{pmatrix} X \quad (1.2.29)$$

其中， U 是三维正交矩阵， s 是相似比例因子。所有三维相似变换构成一个群，通常称为相似变换群，它是三维仿射群的子群。如果限制 U 是一个三维旋转矩阵，则上述变换称为旋转相似变换。旋转相似变换的全体构成相似变换群的子群。

相似不变量 相似变换除了仿射不变量作为它的不变量之外，最本质的不变量是绝对二次曲线与绝对二次曲面。

命题 1.2.10 射影变换 H 保持绝对二次曲线不变的充要条件是 H 为相似变换^{*)}。

证明 相似变换必为仿射变换，所以 H 可以写成下述形式：

$$H = \begin{pmatrix} A & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

由于仿射变换将无穷远点变为无穷远点，因此 H 限制在无穷远平面上的二维变换是 A 。而绝对二次曲线 Ω_∞ 是无穷远平面上的二次曲线，在无穷远平面上它的矩阵表示是一个 3 阶单位矩阵 I ，因此 H 将 Ω_∞ 变为 Ω_∞ 的充要条件是 $A^{-T} I A^{-1} = sI$ ，而 $A^{-T} I A^{-1} = sI$ 等价于 $sA^T A = I$ ， $sA^T A = I$ 等价于 A 是一个与正交矩阵相差常数倍的矩阵。所以，射影变换 H 保持绝对二次曲线不变的充要条件是 H 为相似变换。证毕。

根据对偶原理，由命题 1.2.10 得到下述命题：

命题 1.2.11 射影变换 H 保持绝对二次曲面 Q_∞^* 不变的充要条件是 H 为相似变换。

^{*)} 这里的保持绝对二次曲线不变，是指整体不变性，而不是说二次曲线上的每一点都保持不变。

下面是命题 1.2.11 一种直接证明：因为 Q_∞^* 是一对偶二次曲面，它的变换规则为(1.2.21)。

因此，它在变换 H 下不变的充要条件是 $Q_\infty^* = H Q_\infty^* H^T$ 。令 $H = \begin{pmatrix} A & t \\ v^T & k \end{pmatrix}$ ，下述齐次等式：

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0^T & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & t \\ v^T & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^T & v \\ t^T & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AA^T & Av \\ v^T A^T & v^T v \end{pmatrix}$$

成立的充要条件是 $v=0$ 且 A 与正交矩阵相差一个非零常数倍，从而 H 是一个相似变换。

等距变换群

等距变换由下述变换所定义：

$$X' = \begin{pmatrix} U & t \\ 0^T & 1 \end{pmatrix} X \quad (1.2.30)$$

其中 U 是三维正交矩阵。所有三维等距变换构成一个群，通常称为等距变换群，它是三维射影群的子群。如果限制 U 是一个三维旋转矩阵，则上述变换称为欧氏变换。欧氏变换的全体构成等距变换群的子群。等距变换群的重要不变量是保持物体形状和体积不变。

等距变换是特殊的相似变换，它具有相似变换的一切特性，如保持绝对二次曲线不变。下面给出关于欧氏变换的不动点性质。

一个射影变换的不动点是指在这个变换下保持不动的空间点。在代数上，一个空间点 X 是射影变换 H 的不动点的充要条件是 X 为 H 的特征向量，即 $HX = X$ (注意：这是一个齐次等式，齐次因子是与特征向量 X 对应的特征值)。

命题 1.2.12

(1) 设 E 是一个欧氏变换，则正交于旋转轴的平面上的两个圆环点是 E 的两个不动点，它们是 E 的共轭复特征值的特征向量；旋转轴与无穷远平面的交点是 E 的另一个不动点，它是 E 的特征值 1 的特征向量。如果 E 为一般欧氏运动， E 仅有上述三个不动点。

(2) 如果平移向量在与旋转轴正交的平面上(通常称为平面运动)，则 E 还存在另外一个不动点，它是 E 的特征值 1 的另一个特征向量。

证明 令欧氏变换为

$$E = \begin{pmatrix} R & t \\ 0^T & 1 \end{pmatrix}$$

考虑欧氏变换 E 的特征向量。由于 $\det(sI_{4 \times 4} - E) = (s-1)\det(sI_{3 \times 3} - R)$ ，所以 E 的特征值必为 $\{e^{i\theta}, e^{-i\theta}, 1, 1\}$ ，其中 θ 是 R 的旋转角。显然， E 有如下三个线性无关的特征向量：

$$E_1 = (i_R, 0)^T, E_2 = (\bar{i}_R, 0)^T, E_3 = (a_R^T, 0)^T$$

其中： i_R, \bar{i}_R 是 R 的共轭复特征值的特征向量，所以 E_1, E_2 在与旋转轴正交平面 π_E 上，并且 π_E 是 R 的不变子空间(由 R 特征向量 i_R, \bar{i}_R 张成的二维子空间)，因此 E_1, E_2 是平面 π_E 上的两个无穷远点。由于 E 在 π_E 上的限制 E_{π_E} 是一个二维欧氏变换，由命题 1.1.10，平面 π_E 上的两

个圆环点在变换 E_{π_E} 下保持不变, 于是 E_1, E_2 必是平面 π_E 上的两个圆环点。 a_R 是 R 的特征值 1 的特征向量, 它是 R 的旋转轴方向, 所以 E_3 是旋转轴与无穷远平面的交点。

如果 E 对应于特征值 1 还有另外的特征向量 E_4 , 则 E_4 必有形式 $E_4 = (x^T, 1)^T$ 。于是从

$$\begin{pmatrix} R & t \\ 0^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$$

可知 $(I - R)x = t$, 所以 $a_R^T t = a_R^T (I - R)x = a_R^T x - (R^{-1} a_R)^T x = a_R^T x - a_R^T x = 0$, 这表示平移向量 t 在与旋转轴正交的平面 π_E 上(注意: 这里使用了三维欧氏坐标)。反之, 若平移向量 t 在与旋转轴正交的平面 π_E 上, 则 E 必有形如 E_4 的特征向量。证毕。

1.2.7 射影坐标系与射影坐标变换

在前面各节中, 我们所使用的坐标系都是欧氏坐标系。本节将讨论一般射影坐标系以及射影坐标系之间的变换(射影坐标变换)。

射影坐标系

这里不打算用纯几何的方法来建立射影坐标系, 而是从给定的欧氏齐次坐标系 σ 来建立一般射影坐标系。

设 A, B, C, D 是空间中的 4 个不共面的点, 它们在欧氏坐标系 σ 下的齐次坐标分别为 $X_1^e, X_2^e, X_3^e, X_4^e$, 则对于空间任一点 P 的欧氏齐次坐标均可以表示成

$$X^e = u_1 X_1^e + u_2 X_2^e + u_3 X_3^e + u_4 X_4^e \quad (1.2.31)$$

其中 u_j 不全为零。这样, 任一点 P 有一个分量不全为零的 4 维有序数组 $\{u_j\}$ 与之对应。但是, $\{u_j\}$ 还不能作为 P 点的新齐次坐标, 因为 u_j 的比值 $u_1 : u_2 : u_3 : u_4$ 不能唯一确定, 例如对欧氏齐次坐标 X_j^e 选择不同的齐次因子 s_j , 则 u_j 将变成 u_j / s_j , 且

$$u_1 : u_2 : u_3 : u_4 \neq (u_1 / s_1) : (u_2 / s_2) : (u_3 / s_3) : (u_4 / s_4)$$

为了确定比值, 必须再加约束条件。设空间中的第五个点 E , 它在欧氏坐标系 σ 下的齐次坐标记为 X_5^e , 并且它与原来 4 点中的任何 3 个点都不共面, 因此存在 4 个都不全为零的数 v_1, v_2, v_3, v_4 , 使得

$$X_5^e = v_1 X_1^e + v_2 X_2^e + v_3 X_3^e + v_4 X_4^e$$

令 $\hat{X}_j^e = v_j X_j^e$, 则式(1.2.31)可以写成

$$X^e = x_1 \hat{X}_1^e + x_2 \hat{X}_2^e + x_3 \hat{X}_3^e + x_4 \hat{X}_4^e, (x_j = u_j / v_j) \quad (1.2.32)$$

这样对于 $\{x_j\}$ 中的 4 个元素就有确定的比值, 即不依赖于 $X_j^e (j=1,2,3,4)$ 的齐次因子 s_j 的选择。因为对任意的 $\{s_j\}$, 总有

$$\begin{aligned} x_1 : x_2 : x_3 : x_4 &= (u_1 / v_1) : (u_2 / v_2) : (u_3 / v_3) : (u_4 / v_4) \\ &= (u_1 s_1 / v_1 s_1) : (u_2 s_2 / v_2 s_2) : (u_3 s_3 / v_3 s_3) : (u_4 s_4 / v_4 s_4) \end{aligned}$$

于是, 对于每一个空间点 P 都有一个新的齐次坐标 $(x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ 。特别地, A, B, C, D, E 的新齐次坐标分别为

$$X_1^p = (1, 0, 0, 0)^T, X_2^p = (0, 1, 0, 0)^T, X_3^p = (0, 0, 1, 0)^T, X_4^p = (0, 0, 0, 1)^T, X_5^p = (1, 1, 1, 1)^T$$

这样建立起来的坐标系称为射影坐标系，并称 A、B、C、D 所构成的 4 面形为射影坐标系的 4 面形，E 称为单位点，A、B、C、D、E 称为射影坐标系的基点(如图 1.2.4 所示)。

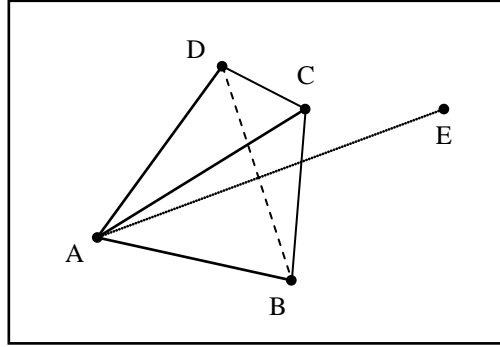


图 1.2.4: 射影坐标系的 4 面形 {A, B, C, D} 与单位点 E

不难看出以欧氏坐标(或仿射坐标)为基础的齐次坐标系是一种特殊的射影坐标系，其坐标 4 面形的顶点是三个坐标轴的无穷远点和坐标原点，而单位点是非齐次坐标为 $(1,1,1)^T$ 的空间点。

值得说明的是以下几点：

- 在以一般射影坐标系为基础的三维射影空间中，无穷远点、无穷远直线与无穷远平面在以欧氏坐标系（或仿射坐标系）为基础的代数形式都消失了，即不再有表示它们的那种(欧氏坐标系中的)特殊代数形式，所有的几何元素的地位都是同等的。
- 可以在一般射影坐标系下讨论平面的齐次坐标，二次曲面，射影变换等等。
- 在以一般射影坐标系为基础的三维射影空间中的射影变换不再有层次之分，如相似变换、仿射变换、欧氏变换等等，例如形如 $H = \begin{pmatrix} A & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 的变换不再具有仿射的意义了。

因此，上节对射影变换的分层以及特殊变换的特征，都只是在以欧氏坐标系（或仿射坐标系）为基础的射影空间中才成立，正如我们不能在仿射坐标系下讨论欧氏变换一样。

射影坐标变换

同一个空间点在两个不同射影坐标系中的射影坐标之间的变换，是很容易获得到。令 σ_x, σ_y 是两个一般射影坐标系， σ_e 是以欧氏坐标为基础的特殊射影坐标系，点 P 在这三个坐标系下的坐标分别为 X, Y, X^e ，由式(1.2.30) $\sigma_x \rightarrow \sigma_e$ ， $\sigma_y \rightarrow \sigma_e$ 的射影坐标变换分别为

$$X^e = x_1 \hat{X}_1^e + x_2 \hat{X}_2^e + x_3 \hat{X}_3^e + x_4 \hat{X}_4^e = (\hat{X}_1^e, \hat{X}_2^e, \hat{X}_3^e, \hat{X}_4^e) X$$

$$X^e = y_1 \hat{Y}_1^e + y_2 \hat{Y}_2^e + y_3 \hat{Y}_3^e + y_4 \hat{Y}_4^e = (\hat{Y}_1^e, \hat{Y}_2^e, \hat{Y}_3^e, \hat{Y}_4^e) Y$$

因此 $Y = (\hat{Y}_1^e, \hat{Y}_2^e, \hat{Y}_3^e, \hat{Y}_4^e)^{-1} (\hat{X}_1^e, \hat{X}_2^e, \hat{X}_3^e, \hat{X}_4^e) X$ ，这样就证明了 $\sigma_x \rightarrow \sigma_y$ 的射影坐标变换是一个可逆的齐次线性变换。给定空间 5 个点，其中任意 4 个点不共面，如果已知它们在 σ_x, σ_y 的坐标为 X_j, Y_j ，则由命题 1.2.1 就可以唯一确定这个可逆的齐次线性变换。

可以看出射影坐标变换也具有射影变换的形式。射影坐标变换具有射影变换的形式，不是偶然的，因为可以给射影变换以两种解释。第一种解释：射影变换是同一个坐标系中空间点之间的变换，坐标系没有发生变化，图形发生变化，不但位置发生了变化，连整个图形的形状也发生了变化。即变换前、后的图形在同一个坐标系下的代数形式发生了变化。另一解释：射影变换是不同坐标系之间的变换，图形不发生变化，而是坐标系发生变化，这种变化使得同一个图形具有不同的代数形式。为区别前一种解释，后一种解释的射影变换通常称为射影坐标变换。这两种对射影变换的解释没有本质上的差异，只是观察的角度不同而已。前一种是立足于坐标系观察变换(运动)，后一种是立足于变换(运动)观察坐标系。

参考文献

1. J. G. Semple and G. T. Kneebone, Algebraic Projective Geometry, Oxford University Press, Oxford , 1979.
2. R. Hartley and A. Zisserman, Multiple View Geometry in Computer Vision, Cambridge University Press, Cambridge , 2000.
3. 梅向明、刘增贤、林向岩, 高等几何, 高等教育出版社, 北京, 1983