

附录四

基本矩阵及其估计方法

一点说明

基本矩阵是二幅图像对应点之间的基本约束, 在特征匹配, 相机标定和基于图像的三维重建中具有重要的用处. 因此, 本节对基本矩阵进行简单介绍。

附录中的很多内容均是中科院自动化研究所 吴福朝 研究员撰写的。尽管笔者也参与了一些编写，但主体工作都是吴福朝研究员完成的，在此特别强调说明，并对吴老师致以谢意。

胡占义

2019-8-27

本节主要讨论基本矩阵及其不同的估计方法,包括著名的归一化 8-点算法 (Normalized 8-point Algorithm)，鲁棒估计等。同时，对仿射相机下的极几何关系也进行了讨论。

4.1 极几何与基本矩阵

4.1.1 极几何

极平面(Epipolar Plane)

通过两个摄像机光心的平面称为极平面。两个摄像机光心的连线称为基线，任意两张极平面均相交于基线，所以所有极平面的全体构成共基线的平面束。两个摄像机的极几何(Epipolar Geometry)由极平面导入。

极线(Epipolar Line)

极平面与摄像机像平面的交线称为极线。同一张极平面 π 与两个摄像机像平面的交线 l, l' 称为一对极线对应，如图 4.1.1 所示。显然，极平面 π 上任一点 X 在第一个摄像机像平面上的投影 m 必位于极线 l 上，即 $m \in l$ 。同样，点 X 在第二个摄像机像平面上的投影 m' 必位于极线 l' 上，即 $m' \in l'$ 。

极点(Epipolar Point)

基线与像平面的交点称为极点。两个摄像机像平面上的极点分别记为 e, e' 。显然， e 是第二个摄像机光心在第一个摄像机像平面上的投影， e' 是第一个摄像机光心在第二个摄像机像平面上的投影。由于所有极平面都通过基线，所以第一个像平面上的所有极线都相交于极点 e ，从而第一个像平面上的所有极线构成共极点 e 的平面线束，同样第二个像平面上的所有极线构成共极点 e' 的平面线束。

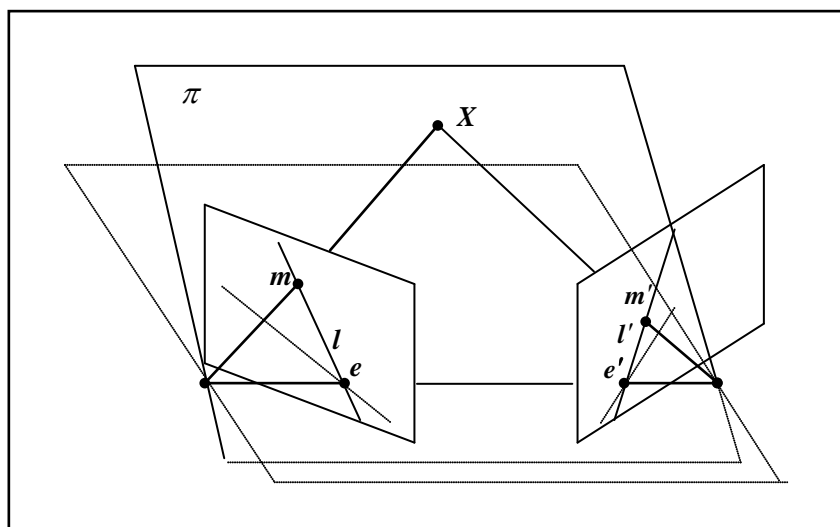


图 4.1.1: 两个摄像机的极几何

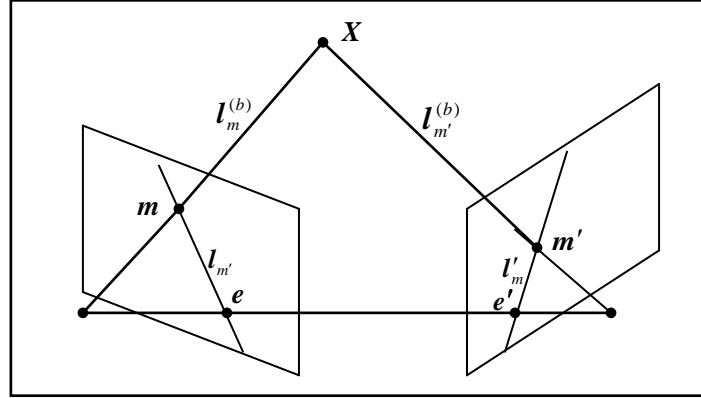


图 4.1.2: 极线对应 $l_{m'} \leftrightarrow l'_m$

令 m, m' 是空间点 X 分别在两个摄像机下的投影，通常称它们为点对应 (Point Correspondence)，并记作 $m \leftrightarrow m'$ 。若 $m \leftrightarrow m'$ ，则 m 的反投影线 $l_m^{(b)}$ 与 m' 的反投影线 $l_{m'}^{(b)}$ 必相交于一个空间点 X 。因此，反投影线 $l_m^{(b)}$, $l_{m'}^{(b)}$ 确定一张通过两摄像机光心的平面 π ，它是一张极平面，由它所确定的一对对应极线分别记为 l'_m, l_m ，通常称 l'_m, l_m 为极线对应 (Epipolar Line Correspondence)，并记作 $l'_m \leftrightarrow l_m$ 。显然 l'_m 是反投影线 $l_m^{(b)}$ 在第二个摄像机下的投影，且 m' 在极线 l'_m 上，同样 l_m 是反投影线 $l_{m'}^{(b)}$ 在第一个摄像机下的投影，且 m 在极线 l_m 上。如图 4.1.2 所示。

极线 l'_m 称为像点 m 对应的极线， l_m 称为像点 m' 对应的极线。

极几何约束

总结上述讨论，我们得到下述所谓的极几何约束。

命题 4.1.1 令 $m \leftrightarrow m'$ 是一个点对应，则 m' 必位于 m 对应的极线 l'_m 上， m 必位于 m' 对应的极线 l_m 上，即 $m' \in l'_m$, $m \in l_m$ 。

给定两个摄像机下的图像 (I, I') ，极几何约束表明：

- (1) $\forall m \in I$ ，在 I' 上存在一条极线 l'_m 与之对应，并且使得对应于 m 的像点 $m' \in l'_m$ ；
- (2) $\forall m' \in I'$ ，在 I 上存在一条极线 l_m 与之对应，并且使得对应于 m' 的像点 $m \in l_m$ 。

在上述讨论中，我们没有利用场景的任何几何结构信息，因此极几何约束与场景的几何结构无关，它是两幅图像间的固有射影性质。

4.1.2 基本矩阵

极几何所描述的图像点与其极线的对应关系，可以用所谓的基本矩阵 (Fundamental Matrix) 来刻画，换句话说基本矩阵是极几何的代数表示。

基本矩阵

假定两个摄像机矩阵分别为 P, P' ，记两个摄像机的像平面分别为 I, I' ，则 $\forall m \in I$ 的反投影线 $l_m^{(b)}$ 的参数方程为^{*)}

$$X(s) = P^+m + sC, \quad s \in (-\infty, \infty)$$

其中， P^+ 是 P 的广义逆，即 $PP^+ = I$ ， C 是第一个摄像机的光心，即 $PC = 0$ 。于是可推知：

$$l'_m = e' \times m' = (P'C) \times (P'X(s)) = (P'C) \times (P'P^+m + sP'C) = (P'C) \times (P'P^+m) = [e']_x P'P^+m$$

即，

$$l'_m = [e']_x P'P^+m$$

记

$$F = [e']_x P'P^+ \quad (4.1.1)$$

并称它为两个摄像机间或两幅图像 (I, I') 间的基本矩阵。基本矩阵 F 描述了图像点 m 与它对应的极线 l'_m 间的对应关系：

$$l'_m = Fm \quad (4.1.2)$$

由于图像点 m 在第二幅图像上的对应点 m' 在极线 l'_m 上，所以必有

$$m'^T Fm = 0 \quad (4.1.3)$$

并且

$$Fe = 0, F^T e' = 0 \quad (4.1.4)$$

因此，基本矩阵 F 刻划了两幅图像间的极几何。

基本矩阵 F 将二维空间(第一个图像平面)点(齐次)线性映射到共点的平面直线束(第二幅图像平面上的极线束)，而共点平面直线束构成一维空间，因此 F 的秩必为 2。基本矩阵是一个齐次变换矩阵，它有 8 个参数需要确定，而 $\text{rank}(F) = 2$ 导致 F 的一个约束 $\det(F) = 0$ ，因此基本矩阵有 7 个自由度。对每一个图像点对应，式(4.1.3)为基本矩阵提供一个约束。所以，在一般情况下，利用 7 对以上的图像点对应就可以确定基本矩阵。关于基本矩阵的估计，参看本章第 4.2 节。

基本矩阵的性质

下述命题给出了基本矩阵的一些性质。

命题 4.1.2 令 F 是两幅图像 (I, I') 间的基本矩阵， e, e' 是极点， $m \leftrightarrow m'$ 是任意一个点对应，则

- (1) $l'_m = Fm$ 是 m 对应的极线， $l_m = F^T m'$ 是 m' 对应的极线；或等价地表示为 $m'^T Fm = 0$ ；
- (2) 两极点分别满足下述方程： $Fe = 0, F^T e' = 0$ ；
- (3) 基本矩阵有 7 个自由度且 $\text{rank}(F) = 2$ 。

例 4.1.1 假定第一个摄像机的内参数矩阵为 K ，第二个摄像机的内参数矩阵为 K' ，第二个摄像机相对于第一个摄像机的方位为 (R, t) ，即第二个摄像机与第一个摄像机坐标系之间的关系为 $X' = RX + t$ ，其中 R 是旋转矩阵， t 是平移向量，则第一与第二个摄像机的投影矩阵可表示为

^{*)} 见第 2 章，式 (2.2.2)。

$$P = K(I, 0), \quad P' = K'(R, t) \quad (4.1.5)$$

由于 $P^+ = \begin{pmatrix} K^{-1} \\ a^T \end{pmatrix}$, 其中 a 为一个任意 3 维列向量, 且 $e' = K't$, 所以

$$F = [K't]_x P' P^+ = [K't]_x (K'R, K't) \begin{pmatrix} K^{-1} \\ a^T \end{pmatrix} = [K't]_x (K'RK^{-1} + K'ta^T) = [K't]_x K'RK^{-1} \quad ^*)$$

因 $[K't]_x$ 是一个秩为 2 的矩阵, 而 $K'RK^{-1}$ 是一个秩为 3 的矩阵, 所以从这里再次得到基本矩阵 F 的秩为 2 的结论。

对 $[K't]_x K'RK^{-1}$ 通过代数运算, 还可以得到下述一系列等式:

$$F = [K't]_x K'RK^{-1} = K'^{-T} [t]_x RK^{-1} = K'^{-T} RK^T [KR^T t]_x \quad (4.1.6)$$

事实上, 式(4.1.6)利用摄像机内参数和相对方位给出了基本矩阵的三种表示。

由于 $e = KR^T t$, $e' = K't$, 所以从式(4.1.6)又可以得到 $Fe = 0, F^T e' = 0$ 。

显然, $F^T = [KR^T t]_x KR^T K'^{-1}$ 。矩阵 F^T 描述了图像点 m' 与它对应的极线 l_m 间的对应关系 $l_m = F^T m'$ 。

极线对应

下面利用基本矩阵来描述极线之间的对应关系。

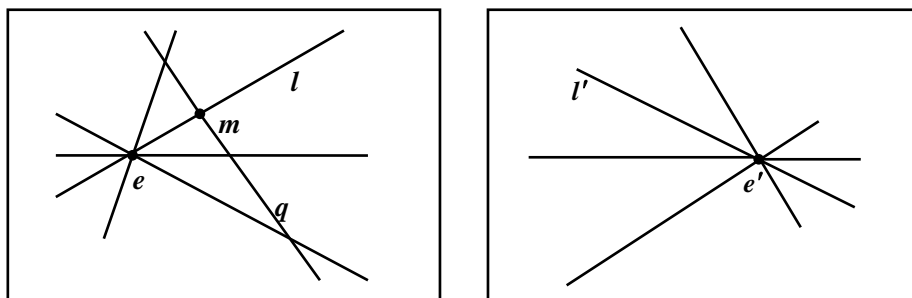


图 4.1.3: 极线对应关系 $l' = F[q]_x l$

如前所述, 一张极平面 π 与两个摄像机像平面的交线 l, l' 构成一个极线对应, 这样极平面在几何上确定了两幅图像极线之间的对应关系。如何使用基本矩阵来刻画这个对应关系呢? 为此, 令 q 是第一幅图像上不通过极点的任一条直线, $l \leftrightarrow l'$ 是任一极线对应, 如图 4.1.3 所示。因 $q \times l = [q]_x l$ 是两直线 q, l 的交点 m , 因而在 l 上。于是, $l' = F(q \times l) = F[q]_x l$ 。特别地, 取 $q = e$, 它是以极点 e 作为线坐标的直线, 从而不通过极点 e (因为 $e^T e \neq 0$)。因此, 我们有下述命题:

命题 4.1.3 令 F 是两摄像机间的基本矩阵, e, e' 分别是两个摄像机的极点。对任一极线对应 $l \leftrightarrow l'$, 必有

^{*)} 式中符号 $[x]_x$ 是由三维向量 $x = (x_1, x_2, x_3)$ 所定义的反对称矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & x_1 & -x_2 \\ -x_1 & 0 & x_3 \\ x_2 & -x_3 & 0 \end{pmatrix}$, 关于它的有关运算

请参考附录 A2.1.

$$l' = F[e]_x l, l = F^T [e']_x l' \quad (4.1.7)$$

纯平移运动下的基本矩阵

两个摄像机在不同位置下所拍摄的图像可以视为同一个摄像机运动前、后所拍摄的图像。如果两个摄像机的内参数不相同，此时可以看作同一个摄像机作刚体运动时内参数同时发生变化。在本书中，这种等价性简称为这两个摄像机是刚体运动下的两个摄像机。如果两个摄像机的摄像机内参数相同，我们称这两个摄像机是纯刚体运动下的两个摄像机，这里的“纯”是指摄像机在作刚体运动时，其内参数保持不变。下面讨论在纯平移运动下的基本矩阵。

由(4.1.6)式，可知纯平移运动 (I, t) 下两个摄像机间的基本矩阵为

$$F = [e']_x K K^{-1} = [e']_x \quad (4.1.8)$$

这就是说，纯平移运动的基本矩阵 F 是由极点所确定的反对称矩阵 $[e']_x$ ，并且两幅图像上的极点相同，即 $e' = e$ 。

例 4.1.2 当摄像机沿 x 轴作纯平移时，两幅图像的极点 $e' = e = (1\ 0\ 0)^T$ ，所以基本矩阵必为

$$F = [e']_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

此时，对任意一点对应 $(u, v, 1)^T \leftrightarrow (u', v', 1)^T$ 均有 $v = v'$ 。这说明两幅图像上的极线都是相互平行的，且对应极线为同一条水平线。这是立体视觉中的一种典型的摄像机配置。

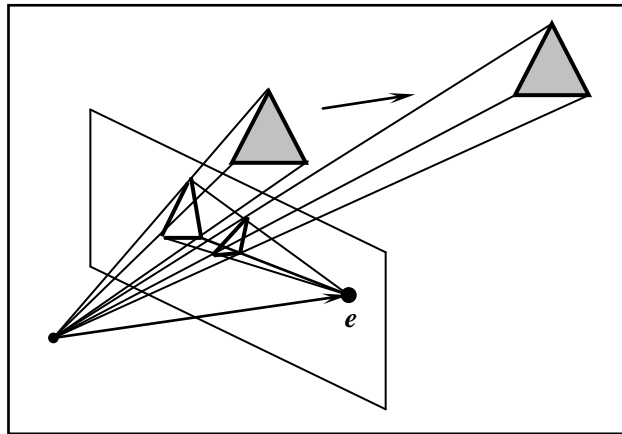


图 4.1.4: 纯平移运动摄像机的极几何

关于纯平移运动的基本矩阵，可以作如下几何解释：当摄像机作平移运动且内参数保持不变时，某个静止物体的两幅图像可视为物体作相对平移运动而摄像机在固定位置下所得到的两幅图像，如图 4.1.4 所示。平移运动物体上的任何一对对应点的连线必与平移方向平行，因此所有对应点的连线在空间中相交于同一(无穷远)点，该点表示了平移方向。因此两幅图像对应点的连线也必交于一点，该点是平移方向在图像平面上的投影，由极几何可以知道它是两幅图像的极点。于是，当摄像机作纯平移运动时，两幅图像的极点相同并且是平移方向在图像平面上

的投影，对应的极线为同一条直线。

基本矩阵的几何解释

记 F_s, F_a 分别为基本矩阵 F 的对称部分和反对称部分，即

$$F_s = \frac{F + F^T}{2}, F_a = \frac{F - F^T}{2}, (F = F_s + F_a)$$

考虑图像对的不动点集合。所谓图像对的不动点是指有相同图像坐标的图像对应点 $m = m'$ 。所有不动点构成的集合可以表示为：

$$\Phi_F = \{m \mid m^T F m = 0\}$$

由于 $m^T F m = m^T F_s m + m^T F_a m$ ，而 F_a 是反对称矩阵，对任意的 m 均有 $m^T F_a m = 0$ ，所以不动点集合是由 F 的对称部分所唯一确定的，即

$$\Phi_F = \{m \mid m^T F_s m = 0\}$$

在一般的情况下 $\text{rank} F_s = 3$ ，这就是说在一般的情况下图像对的不动点集合是一条非退化的二次曲线 F_s 。这条二次曲线是三维空间中的一条 3 次扭线在两个摄像机下的图像。由于

$$e^T F_s e = e^T F_s e + e^T F_a e = e^T F e = 0$$

$$e'^T F_s e' = e'^T F_s e' + e'^T F_a^T e' = e'^T F^T e' = 0$$

所以，图像的两个极点 e, e' 在二次曲线 F_s 上。

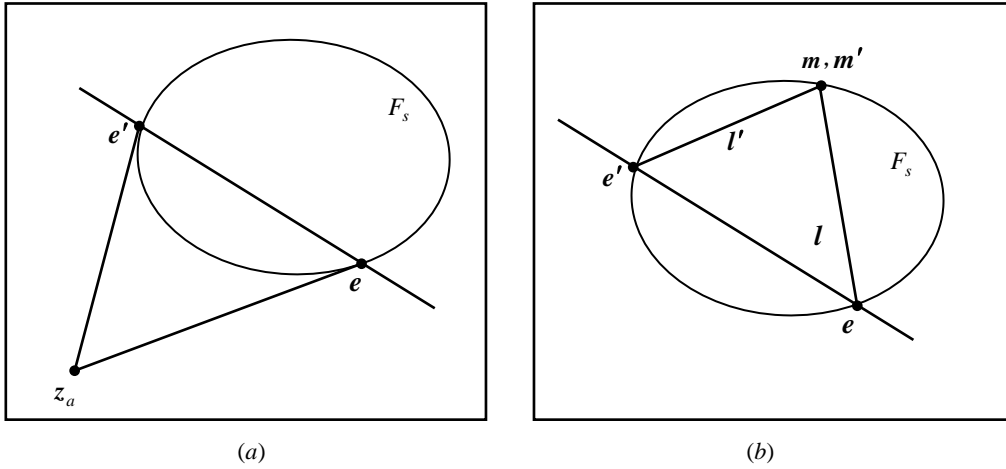


图 4.1.5: 基本矩阵的几何解释

再考虑 F 的反对称部分 F_a 。由于它是反对称矩阵，所以存在三维向量 z_a 使得 $F_a = [z_a]_{\times}$ 。因 $F_a e = [z_a]_{\times} e = F e - F_s e = F_s e$ ，所以将 z_a 作为一个图像点的齐次坐标，极点 e 关于二次曲线 F_s 的极线 $F_s e$ 是直线 $z_a \times e$ 。由于极点 e 在二次曲线 F_s 上，所以 $F_s e = z_a \times e$ 是点 e 处的切线。同理， $z_a \times e'$ 是点 e' 处的切线。所以点 z_a 关于二次曲线的极线是直线 $l_a = e \times e'$ 。如图 4.1.5(a) 所示。

最后，考虑两幅图像的极线对应关系。令 m 是二次曲线上 F_s 的一个点，由于它是两幅图像的不动点，即 $m \leftrightarrow m' = m$ 是一个点对应，因此 $l = e \times m \leftrightarrow l' = e' \times m$ 是一个极线对应。如图

4.1.5(b)所示。于是，极线对应关系由二个极点和二次曲线 F_s 所确定，它是一维射影对应。

4.1.3 单应矩阵

上节所讨论的极几何约束与场景结构无关，也就是说极几何约束对于任何三维场景结构的两幅图像都成立，因此它不能给出两幅图像点间的一一对应关系，只能给出点对应的必要条件，即图像点在另一幅图像上的对应点位于对应的极线上，不可能给出对应点的确切位置。如果已知场景结构的某些信息，无疑两幅图像对应点的约束会得到加强。本节主要讨论空间平面在两个摄像机下的投影几何。空间平面在两个摄像机下图像点具有一一对应关系，这个一一对应关系是齐次线性的，可由一个 3 阶矩阵即所谓的单应矩阵来描述。在本节，还给出了单应矩阵与基本矩阵之间的关系。

单应矩阵

设 π 是不通过两摄像机任一光心的空间平面，它在两个摄像机下的图像分别记为 l, l' ，如图 4.1.6 所示。令 X 是平面 π 上的任一点，它在两个摄像机下的像分别记为 m, m' 。

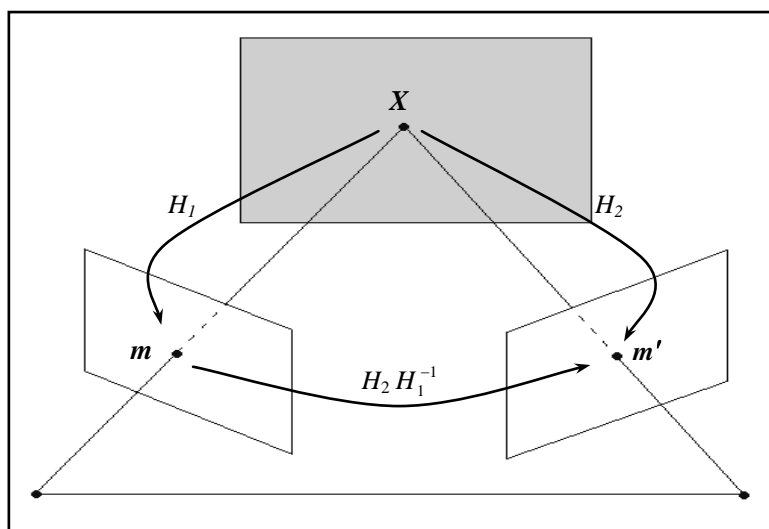


图 4.1.6: 两幅图像的单应变换

从 2.2.3 节可知，在空间平面 π 到两个像平面之间存在两个单应矩阵 H_1, H_2 使得 $m = H_1 X$ ， $m' = H_2 X$ 。由于平面 π 不通过两摄像机的任一光心，所以 H_1, H_2 实现平面 π 到对应的像平面之间的一一变换。因此 m, m' 之间存在一个二维射影变换 $H = H_2 H_1^{-1}$ 使得

$$m' = Hm \quad (4.1.9)$$

即平面在两个摄像机下的图像之间的关系也是一个二维射影变换。矩阵 H 实现从第一个像平面与第二个像平面的一一变换，从而矩阵 H 为可逆矩阵。

由于两个摄像机的极点 e, e' 是摄像机基线与平面 π 的交点在两个摄像机下的投影，因此它

们是一个点对应，于是总有 $e' = He$ 。即变换 H 总是将第一幅图像上的极点变换到第二幅图像上的极点。

满足式(4.1.9)的矩阵称为平面 π 诱导的两个摄像机间（或两幅图像间）的单应矩阵，或简称平面 π 的单应矩阵，相应的变换称为单应。单应矩阵 H 是一个齐次矩阵，它有 8 个自由度。根据(4.1.9)式，利用单应矩阵 H ，从一幅图像上的点可以得到另一幅图像上的对应点，这是基本矩阵所不具备的性质。

对于单应矩阵的代数表示，有下述命题：

命题 4.1.4 假定：第一个摄像机的内参数矩阵为 K ，第二个摄像机的内参数矩阵为 K' ，第二个摄像机相对于第一个摄像机的方位为 (R, t) 。若 n 为平面 π 在第一个摄像机坐标系下的单位法向量， d 为坐标原点到平面 π 的距离，如图 4.1.7 所示，则平面 π 的单应矩阵可表示为

$$H = K'(R + tn_d^T)K^{-1} \quad (4.1.10)$$

其中 $n_d = \frac{n}{d}$ 。

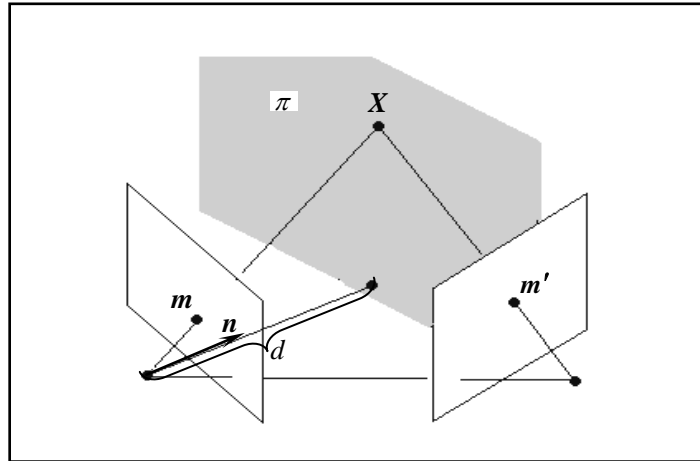


图 4.1.7：平面 π 在第一个摄像机坐标系下的单位法向量为 n ，坐标原点到平面的距离为 d 。

证明 取第一个摄像机坐标系为世界坐标系，根据假定第一和第二个摄像机矩阵分别为

$$P = K(I, 0), \quad P' = K'(R, t)$$

对于平面 π 上的任一点 $X = (\tilde{X}^T, 1)^T$ ，考虑它在两个摄像机下的投影。显然，在第一个摄像机下的投影必为 $m = P \begin{pmatrix} \tilde{X} \\ 1 \end{pmatrix} = K\tilde{X}$ ，因此平面 π 到第一个像平面的单应矩阵为 $H_1 = K$ 。在第二个摄像机下的投影为

$$m' = P' \begin{pmatrix} \tilde{X} \\ 1 \end{pmatrix} = K'(R, t) \begin{pmatrix} \tilde{X} \\ 1 \end{pmatrix} = K'(R\tilde{X} + t)$$

由于平面 π 的方程为 $\mathbf{n}^T \tilde{\mathbf{X}} = d$ ，即 $\mathbf{n}_d^T \tilde{\mathbf{X}} = 1$ ，因此 \mathbf{t} 可以写成 $\mathbf{t} = \mathbf{t} \mathbf{n}_d^T \tilde{\mathbf{X}}$ 。于是，在第二个摄像机下机的投影为

$$\mathbf{m}' = K'(R\tilde{\mathbf{X}} + \mathbf{t}) = K'(R + \mathbf{t} \mathbf{n}_d^T) \tilde{\mathbf{X}}$$

即平面 π 到第二个像平面的单应矩阵 $H_2 = K'(R + \mathbf{t} \mathbf{n}_d^T)$ ，所以两幅图像间的单应矩阵可表示为

$$H = H_2 H_1^{-1} = K'(R + \mathbf{t} \mathbf{n}_d^T) K^{-1}$$

证毕。

由无穷远平面所诱导的两幅图像的单应矩阵，简称为**无穷远单应矩阵**。由于无穷远平面与坐标原点的距离为无穷大，所以在式(4.1.10)中取 $d \rightarrow \infty$ 的极限值，就可以得到无穷远单应矩阵。显然，

$$H = K'(R + \mathbf{t} \mathbf{n}_d^T) K^{-1} \rightarrow K' R K^{-1} \quad (d \rightarrow \infty)$$

因此，无穷远单应矩阵可表示为

$$H_\infty = K' R K^{-1} \quad (4.1.11)$$

从上式可以看出：无穷远单应矩阵与摄像机的平移运动无关，仅与旋转运动参数有关。

结合式(4.1.10)与(4.1.11)，任何平面 π 的单应矩阵都可以写成下面的形式：

$$H = H_\infty + \mathbf{e}' \mathbf{a}^T, \quad \mathbf{a} \in R^3 \quad (4.1.12)$$

- $H_\infty = K' R K^{-1}$ ——**无穷远单应矩阵**：与平面 π 无关，仅与两个摄像机内参数和相互姿态（旋转）有关；
- $\mathbf{e}' = K' \mathbf{t}$ ——**第二幅图像的极点**：与平面 π 无关，仅与第二个摄像机内参数和相应平移有关；
- $\mathbf{a} = K^{-T} \mathbf{n}_d$ ——**平面 π 在第一幅图像上的隐消线^{**}**：与平面 π 相对第一个摄像机的位置和第一个摄像机内参数有关，而与第二个摄像机无关。

式(4.1.12)表明：任何一个平面的单应矩阵，均可以由无穷远单应、极点的一个三维向量来表示。从下面的命题可以看出：任何一个平面的单应都可以充当式(4.1.12)中无穷远单应的角色。

命题 4.1.5 令 H^* 为两个摄像机下任一给定平面 π^* 的单应矩阵，则 3 阶矩阵 H 为某个平面 π 的单应矩阵的充要条件是存在三维向量 $\mathbf{a} \in R^3$ 使得

$$H = H^* + \mathbf{e}' \mathbf{a}^T \quad (4.1.13)$$

证明 必要性：由式(4.1.12)，存在三维向量 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \in R^3$ 使得

$$H^* = s_1(H_\infty + \mathbf{e}' \mathbf{a}_1^T), \quad H = s_2(H_\infty + \mathbf{e}' \mathbf{a}_2^T)$$

这里，显式地给出了齐次因子 s_1, s_2 。于是，

$$\frac{1}{s_2} H - \frac{1}{s_1} H^* = \mathbf{e}' (\mathbf{a}_2^T - \mathbf{a}_1^T)$$

^{*}在附录 2 曾用符号 H_∞ 来标记无穷远平面到像平面的单应矩阵，这里也使用符号 H_∞ 来标记无穷远平面所诱导的两幅图像间的单应矩阵。这从上下文来理解符号 H_∞ 意义，而这不致于引起混淆。

^{**} 因为平面的法向量是该平面的无穷远直线的线坐标，并且在摄像机坐标系下无穷远平面到像平面的单应矩阵为内参数矩阵，因此由命题 3.1.3 可得到 $\mathbf{a} = K^{-T} \mathbf{n}_d$ 平面 π 在第一幅图像上的隐消线的结论。

$$H = \frac{s_2}{s_1} (H^* + s_1 e' (a_2^T - a_1^T)) = H^* + e' a^T, \quad a = s_1 (a_2 - a_1) \in R^3$$

充分性：由

$$H = s(H^* + e' a^T) = sK'(R + t n_d^{*T})K^{-1} + \lambda K't(K^T a)^T K^{-1} = sK'(R + t(n_d^* + \lambda(K^T a)^T))K^{-1}$$

知 H 是以方程 $(n_d^* + \lambda(K^T a)^T)\tilde{X} = 1$ 所确定的平面的单应矩阵。证毕。

注 4.1.1 式(4.1.13)中的三维向量 a 不再是平面 π 在第一幅图像上的隐消线，而是平面 π^* 与平面 π 的交线在第一幅图像上的像直线。

与基本矩阵的关系

令 π 是不通过两摄像机光心的任一张空间平面，其图像间的单应矩阵为 H ， $m \leftrightarrow m'$ 是两幅图像的任一点对应，则有 $m' = Hm$ ，因此 m 对应的极线为

$$l'_m = Fm = e' \times m' = e' \times Hm = [e']_x Hm$$

所以基本矩阵可以表示为

$$F = [e']_x H \quad (4.1.14)$$

从下式：

$$F = [K't]_x K'RK^{-1} = [e']_x H_\infty = [e']_x (H_\infty + e' a^T) = [e']_x H$$

同样可以得到式(4.1.14)。

由于 $[e']_x H = H^{-T} [H^{-1} e']_x = H^{-T} [e]_x$ ，所以基本矩阵又可以表示为

$$F = H^{-T} [e]_x \quad (4.1.15)$$

式(4.1.14)与(4.1.15)表明基本矩阵由平面单应矩阵与极点唯一确定。事实上，有下述更深刻的结论：

命题 4.1.6 3 阶矩阵 H 使得 $[e']_x H (H^{-T} [e]_x)$ 为基本矩阵的充要条件是 H 为某个平面的单应矩阵。

证明 从上面的讨论，充分性已经得到了证明。下面证明必要性：令基本矩阵 $F = [e']_x H$ 。不难证明齐次矩阵方程 $[e']_x X = 0$ 的通解为

$$X = e' a^T, \quad a \in R^3$$

显然， $X = H_\infty$ 是方程 $F = [e']_x X$ 的一个特解，因此 $F = [e']_x X$ 的通解为

$$X = H_\infty + e' a^T, \quad a \in R^3$$

所以存在三维向量 a^* 使得

$$H = H_\infty + e' a^{*T}$$

由命题 4.1.5， H 必为平面的单应矩阵。证毕。

表 4.1.1 给出了在各种条件下，基本矩阵的计算公式。

表 4.1.1：基本矩阵计算公式

| 已知条件 | 基本矩阵 |
|-----------------|-----------------------------|
| 两个摄像机矩阵 P, P' | $F = [P'C]_x P'P^+, PC = 0$ |

| | |
|--|--|
| 两个摄像机的内参数 K, K' , 两个摄像机的相对运动 (R, t) | $F = [K't]_x K' R K^{-1} = K'^{-T} [t]_x R K^{-1} = K'^{-T} R K^T [K R^T t]_x$ |
| 单应矩阵 H , 极点 e, e' | $F = [e']_x H = H^{-T} [e]_x$ |

不动点与不动线

下面考虑一些特殊单应的不动点与不动直线性质。

纯平移运动 对于纯平移运动下的两个摄像机，平面的单应矩阵有下述更简单的表示式：

$$H = I + ea^T$$

其中 $e = Kt$ 是两个像平面的共同极点^{*)}， $a = K^{-T}n_d$ 是平面 π 在第一幅图像上的隐消线。

不难看出： $He = (I + ea^T)e = (1 + a^T e)e$ ，因此极点是平面单应的一个不动点。令 m 是隐消线 $a = K^{-T}n_d$ 上的任一点，则 $a^T m = 0$ ，所以 $Hm = (I + ea^T)m = m$ ，因此隐消线上的任一点都是平面单应的不动点，而隐消线构成一条不动直线(保持点点不动)。于是，我们有下述命题：

命题 4.1.7 对于纯平移运动下的两个摄像机，极点是平面单应的一个不动点，它是平面单应矩阵 H 的单重特征值的特征向量；隐消线是平面单应的(保持点点不动的)不动直线，它是平面单应矩阵 H 的二重特征值对应的二维特征子空间。

在纯平移运动下，平面单应除平面的隐消线作为它的一条(点点不动的)不动直线外，还有另外的不动直线吗？为此，考虑过点 m 的极线 $l = e \times m$ 。 $\forall x \in l$ ，即 $(e \times m)^T x = 0$ 。由于 $(e \times m)^T Hx = m^T [e]_x (I + ea^T)x = m^T [e]_x x = (e \times m)^T x = 0$ ，所以 $Hx \in l$ 。因此，每一条极线都是平面单应的一条不动直线。也就是说，平面单应的所有(非点点不动的)不动直线构成极线束。由于二维射影变换对直线的变换规则由它的对偶所确定^{**)} ，因此有下述命题：

命题 4.1.8 对于纯平移运动下的两个摄像机，平面隐消线是平面单应的(保持点点不动的)不动直线，它是对偶单应矩阵 H^{-T} 单重特征值的特征向量；极线束是单应的(非点点不动的)不动直线束，它是对偶单应矩阵 H^{-T} 二重特征值的二维特征子空间。

^{*)} 实际上，在纯平移运动下，由于两个摄像机的内参数相同，所以它们的像平面是同一张空间平面。

^{**)} 见第一章命题 1.1.7。

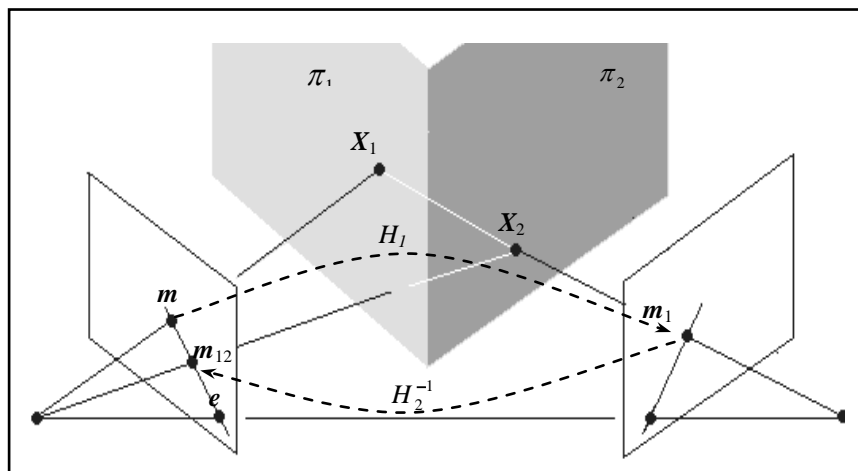


图 4.1.8: 相对单应: 对第一个图像平面上的点 m , 单应 H_1 将它变到第二幅图像的点 m_1 , 它是平面 π_1 上的点 X_1 在第二个摄像机下的投影。 H_2^{-1} 再将 m_1 变换到第一幅图像上的点 m_{12} , 它是 m_1 的反投影线与平面 π_2 的交点 X_2 在第一个摄像机下的投影。因此, 相对单应 $H_{12} = H_2^{-1}H_1$ 是第一幅图像上的一个射影变换。可以看出: m_{12} 是极线 $e \times m$ 上的点, 因为 X_1, X_2 在同一个极平面上。相对单应总是将第一幅图像点 m 变换到它所确定的极线 $e \times m$ 上, 因此极线是相对单应的不动直线。除此之外, 相对单应还有一条保持点点不动的不动直线, 它是两平面交线的图像直线。

相对单应矩阵 考虑在一般运动 (R, t) 下的两个摄像机。假定平面 π_1, π_2 在这两个摄像机下的单应矩阵分别为 H_1, H_2 , 则矩阵 $H_{12} = H_2^{-1}H_1$ 确定了第一个像平面到自身的一个二维射影变换(如图 4.1.8 所示), 这个变换称为相对(平面 π_2 的)单应, 矩阵 $H_{12} = H_2^{-1}H_1$ 称为相对(平面 π_2 的)单应矩阵。

由命题 4.1.5, 可知: $H_1 = H_2 + e'e^T, a \in R^3$, 于是, 相对单应矩阵可表示为

$$H_{12} = H_2^{-1}H_1 = H_2^{-1}(H_2 + e'e^T) = I + ea^T, a \in R^3$$

$e = H_2^{-1}e'$ 是第一幅图像上的极点。从上式可以看出相对单应矩阵等价于纯平移运动下的单应矩阵, 因此相对单应有与类似命题 4.1.7 和 4.1.8 的不动点与不动线性性质。事实上, 只需要将这两个命题中的“平面单应”替代为“相对单应”和“平面隐消线”替代为“平面 π_1, π_2 的交线在第一幅图像上的像直线”, 对应的命题成立。

4.1.4 恢复摄像机矩阵

射影相关

设 $\langle P, P' \rangle, \langle \hat{P}, \hat{P}' \rangle$ 为两个摄像机对, 若存在一个可逆的 4 阶矩阵 M 使得下式成立:

$$\hat{P} = PM, \hat{P}' = P'M \quad (4.1.16)$$

则称 $\langle P, P' \rangle, \langle \hat{P}, \hat{P}' \rangle$ 是两个射影相关的摄像机对, 并记为 $\langle P, P' \rangle \propto \langle \hat{P}, \hat{P}' \rangle$ 。

可逆的 4 阶矩阵 M 确定一个三维空间的射影变换, 所谓射影相关实际上就是摄像机对之间的射影变换。射影相关是摄像机对的一种等价关系, 即它满足下述性质:

- 自反性: $\langle P, P' \rangle \propto \langle P, P' \rangle$
- 对称性: $\langle P, P' \rangle \propto \langle \hat{P}, \hat{P}' \rangle \Rightarrow \langle \hat{P}, \hat{P}' \rangle \propto \langle P, P' \rangle$
- 传递性: $\langle P_1, P'_1 \rangle \propto \langle P_2, P'_2 \rangle, \langle P_2, P'_2 \rangle \propto \langle P_3, P'_3 \rangle \Rightarrow \langle P_1, P'_1 \rangle \propto \langle P_3, P'_3 \rangle$

因此, 根据射影相关可以将摄像机对分为不同的射影相关类, 同一类的摄像机对都是射影相关的, 不同类的摄像机对是不射影相关的。由于射影相关是一种等价关系, 所以有时又称射影相关为射影等价。

令 $\langle P, P' \rangle$ 是一个摄像机对, 由于摄像机矩阵 P 是一个秩 3 的 3×4 矩阵, 所以由矩阵 P 可以构造一个 4 阶可逆矩阵 $M_p = \begin{pmatrix} P \\ \mathbf{q}^T \end{pmatrix}^{-1}$, 其中 \mathbf{q} 是与 P 的行向量组线性无关的一个向量, 使得 $PM_p = (I, \mathbf{0})$ 。令 $\langle \tilde{P}, \tilde{P}' \rangle = \langle PM_p, P'M_p \rangle$, 则 $\langle P, P' \rangle$ 必与下述形式的摄像机对射影相关:

$$\tilde{P} = (I, \mathbf{0}), \quad \tilde{P}' = (A, \mathbf{b}) \quad (4.1.17)$$

由此, 可以看出 $\langle \tilde{P}, \tilde{P}' \rangle$ 属于 $\langle P, P' \rangle$ 所在的射影相关类。摄像机对 $\langle \tilde{P}, \tilde{P}' \rangle$ 称为该射影相关类的典型摄像机对。

注意: 同一个射影相关类的典型摄像机对不是唯一的。但是, 我们有下列命题:

引理 4.1.1 $\langle \tilde{P}_1 = (I, \mathbf{0}), \tilde{P}'_1 = (A_1, \mathbf{b}_1) \rangle$ 与 $\langle \tilde{P}_2 = (I, \mathbf{0}), \tilde{P}'_2 = (A_2, \mathbf{b}_2) \rangle$ 为同一射影相关类的两个典型摄像机对的充要条件是存在三维向量 $\mathbf{a} \in R^3$ 使得

$$A_2 = A_1 + \mathbf{b}_1 \mathbf{a}^T, \quad \mathbf{b}_2 = \mathbf{b}_1 \quad (4.1.18)$$

证明 必要性: 由 $\tilde{P}_2 = \tilde{P}_1 M$ 知 $M = \begin{pmatrix} I & \mathbf{0} \\ \mathbf{a}^T & k \end{pmatrix}$, 其中 $k \neq 0$, \mathbf{a} 是一个三维向量。再由 $\tilde{P}'_2 = \tilde{P}'_1 M$ 可以得到式(4.1.18)。充分性: 令 $M = \begin{pmatrix} I & \mathbf{0} \\ \mathbf{a}^T & k \end{pmatrix}$, 由于 $k \neq 0$, 所以 M 为可逆矩阵。显然 $\tilde{P}_2 = \tilde{P}_1 M$,

由式(4.1.18)可得 $\tilde{P}'_2 = \tilde{P}'_1 M$, 所以 $\langle \tilde{P}_1, \tilde{P}'_1 \rangle \propto \langle \tilde{P}_2, \tilde{P}'_2 \rangle$, 因此它们属于同一射影相关类。证毕。

基本矩阵与射影相关类

命题 4.1.9 若 $\langle P, P' \rangle \propto \langle \hat{P}, \hat{P}' \rangle$, 则它们有相同的基本矩阵。

证明 因 $\langle P, P' \rangle, \langle \hat{P}, \hat{P}' \rangle$ 射影相关, 所以存在一个可逆的 4 阶矩阵 M 使 $\hat{P} = PM, \hat{P}' = P'M$ 。令 $\mathbf{m} \leftrightarrow \mathbf{m}'$ 是对应于摄像机对 $\langle P, P' \rangle$ 的一个点对应, 即存在空间点 \mathbf{X} 使得

$$\mathbf{m} = P\mathbf{X}, \mathbf{m}' = P'\mathbf{X}$$

于是,

$$\mathbf{m} = P\mathbf{X} = (PM)\mathbf{X} = \hat{P}\mathbf{X}, \mathbf{m}' = P'\mathbf{X} = (P'M)\mathbf{X} = \hat{P}'\mathbf{X}$$

即 $\mathbf{m} \leftrightarrow \mathbf{m}'$ 也是摄像机对 $\langle \hat{P}, \hat{P}' \rangle$ 的一个点对应。同理可知摄像机对 $\langle \hat{P}, \hat{P}' \rangle$ 的点对应也是摄像机对 $\langle P, P' \rangle$ 的点对应。所以, $\langle P, P' \rangle$ 与 $\langle \hat{P}, \hat{P}' \rangle$ 确定相同的点对应集合, 从而有相同的基本矩阵。证毕。

注 4.1.2 命题 4.1.9 说明每一个射影相关类的摄像机对有相同的基本矩阵。

注 4.1.3 基本矩阵不依赖于世界坐标系的选择。一个可逆的 4 阶矩阵 M 确定一个三维投影变换，反之一个三维射影变换也可以通过一个可逆的 4 阶矩阵 M 来表示。在命题 4.1.9 的证明中，变换 $\hat{X} = M^{-1}X$ 表示从 $\langle P, P' \rangle$ 世界坐标系到 $\langle \hat{P}, \hat{P}' \rangle$ 世界坐标系之间的变换。因此，命题 4.1.9 说明，基本矩阵不依赖于世界坐标系的选择。

例 4.1.2 两个摄像机对 $\langle P, P' \rangle$ ， $\langle \hat{P}, \hat{P}' \rangle$ 定义如下：

$$P = (I, 0), P' = (K'RK^{-1}, K't); \quad \hat{P} = K(I, 0), \hat{P}' = K'(R, t)$$

令 $M = \begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ，则 $\langle \hat{P}, \hat{P}' \rangle = \langle PM, P'M \rangle$ ，因此 $\langle P, P' \rangle \propto \langle \hat{P}, \hat{P}' \rangle$ ，从而上述两个摄像机对有相同的基本矩阵。矩阵 M 的逆：

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} K^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

是 $\langle P, P' \rangle$ 世界坐标系到 $\langle \hat{P}, \hat{P}' \rangle$ 世界坐标系的变换。因 $\langle \hat{P}, \hat{P}' \rangle$ 世界坐标系是一个欧氏坐标系(第一个摄像机坐标系)，而变换 M 是一个仿射变换，因此 $\langle P, P' \rangle$ 的世界坐标系是一个仿射坐标系。

命题 4.1.10 令 $\langle \tilde{P} = (I, 0), \tilde{P}' = (A, b) \rangle$ 是一个典型的摄像机对，则 A 是一个平面的单应矩阵， $b = e'$ ，从而这个摄像机的基本矩阵为

$$F = [b]_{\times} A \quad (4.1.19)$$

证明 记两个摄像机的内参数矩阵分别为 K, K' ，它们之间的相对运动为 (R, t) ，则

$$\langle P = (I, 0), P' = (K'RK^{-1}, K't) \rangle$$

是一个与 $\langle \tilde{P}, \tilde{P}' \rangle$ 射影相关的摄像机对，由引理 4.1.1，

$$A = K'RK^{-1} + K'ta^T = H_{\infty} + e'e'^T$$

是一个平面的单应矩阵，且 $b = K't = e'$ ，由命题 4.1.6， $F = [b]_{\times} A$ 。证毕。

命题 4.1.11 若摄像机对 $\langle P, P' \rangle$ ， $\langle \hat{P}, \hat{P}' \rangle$ 有相同的基本矩阵 F ，则 $\langle P, P' \rangle \propto \langle \hat{P}, \hat{P}' \rangle$ 。

证明 令

$$\langle \tilde{P}_1 = (I, 0), \tilde{P}'_1 = (A_1, b_1) \rangle \propto \langle P, P' \rangle$$

$$\langle \tilde{P}_2 = (I, 0), \tilde{P}'_2 = (A_2, b_2) \rangle \propto \langle \hat{P}, \hat{P}' \rangle$$

我们只须证明 $\langle \tilde{P}_1, \tilde{P}'_1 \rangle \propto \langle \tilde{P}_2, \tilde{P}'_2 \rangle$ 。由命题 4.1.10， $F = [b_1]_{\times} A_1 = [b_2]_{\times} A_2$ ，所以

$$F^T b_1 = F^T b_2 = 0$$

由于 $\text{rank}(F)=2$ ，所以存在非零常数 k 使得 $b_2 = kb_1$ 。于是 $[b_2]_{\times} A_2 = [b_2]_{\times} (kA_1)$ ，由此得

$$A_2 = kA_1 + b_1 a^T = k \left(A_1 + b_1 \left(\frac{a}{k} \right)^T \right), a \in R^3$$

由引理 4.1.1， $\langle \tilde{P}_1, \tilde{P}'_1 \rangle \propto \langle \tilde{P}_2, \tilde{P}'_2 \rangle$ 。证毕。

将命题 4.1.9 与命题 4.1.11 结合起来，我们有下述结论：

命题 4.1.12 摄像机对 $\langle P, P' \rangle, \langle \hat{P}, \hat{P}' \rangle$ 有相同的基本矩阵 F ，当且仅当 $\langle P, P' \rangle \propto \langle \hat{P}, \hat{P}' \rangle$ 。

这一结论是 Hartley 首次在文献[8]中给出的，它们在多视几何中占有十分重要的地位。

摄像机矩阵的恢复

下面讨论如何从基本矩阵来恢复射影意义下的摄像机对，通常也称为两幅图像的射影重构。

给定基本矩阵的一个分解 $F = [e']_{\times} H$ ，构造典型摄像机对 $\tilde{P} = (I, 0), \tilde{P}' = (H, e')$ 。由命题 4.1.10，这个摄像机对的基本矩阵必为 F ，再由引理 4.1.1，与这个摄像机对射影相关的所有典型摄像机对均可表示为

$$\tilde{P} = (I, 0), \tilde{P}'(s, a) = (H + e'a^T, se'), \quad s \neq 0, a \in R^3$$

于是，从上节的讨论，我们有下述命题：

命题 4.1.13 给定基本矩阵 F ，则它对应的所有摄像机对为

$$\tilde{P} = (I, 0)M, \tilde{P}'(s, a) = (H + e'a^T, se')M \quad (4.1.20)$$

其中， $s \neq 0, a \in R^3$ ， M 为 4 阶可逆矩阵。

4.2 基本矩阵估计

4.2.1 8-点算法

8-点算法 (8-Point Algorithm)

给定一对点对应 $m = (u, v, 1)^T, m' = (u', v', 1)^T$ ，基本矩阵 F 满足下述方程

$$m'^T F m = 0 \quad (4.2.1)$$

给定充分多(至少 ≥ 8)的点对应，由上式可线性估计基本矩阵 F 。

令 $F = (f_{ij})$ ，则基本矩阵的约束方程(4.2.1)可以写成下述形式：

$$u'uf_{11} + u'vf_{12} + u'f_{13} + v'uf_{21} + v'vf_{22} + v'f_{23} + uf_{31} + vf_{32} + f_{33} = 0$$

记

$$f = (f_{11}, f_{12}, f_{13}, f_{21}, f_{22}, f_{23}, f_{31}, f_{32}, f_{33})^T$$

它是由 F 的 3 个行向量所构成的 9 维列向量，则上述方程可写成向量内积的形式：

$$(u'u, u'v, u', v'u, v'v, v', u, v, 1)f = 0$$

这样，给定 N 个对应点可以得到线性方程组：

$$Af = \begin{pmatrix} u'_1u_1 & u'_1v_1 & u'_1 & v'_1u_1 & v'_1v_1 & v'_1 & u_1 & v_1 & 1 \\ & & & \vdots & & & & & \\ u'_Nu_N & u'_Nv_N & u'_N & v'_Nu_N & v'_Nv_N & v'_N & u_N & v_N & 1 \end{pmatrix} f = 0 \quad (4.2.2)$$

其中 A 是一个 $N \times 9$ 矩阵。

由于基本矩阵是非零的，所以 f 是一个非零向量，即线性方程组有非零解。因此在一般情况下，当点对应精确时， $\text{rank}(A)=8$ ， f 是矩阵 A 的零空间，或者说是矩阵 A 的零特征值对应的特征向量。因此，当点对应精确时，直接通过求解线性方程组可以确定基本矩阵 F 。然而，在实际情况下，不可能得到精确的图像点对应。在点对应不精确时，矩阵 A 通常是一个秩 9 的矩阵(这里点对应数 >8 。因为当点对应数 $=8$ 时， A 是一个 8×9 矩阵。不论点对应是否有误差， A 的秩总等于 8)，这样方程组只有零解。

在实际情况下，不能直接通过求解线性方程组来确定基本矩阵，而是求在约束条件 $\|f\|=1$ 下方程组(4.2.2)的最小二乘解，即求解下述问题：

$$\begin{cases} \min \|Af\| \\ \text{subject to } \|f\|=1 \end{cases} \quad (4.2.3)$$

问题(4.2.3)的解是 A 的最小奇异值的右奇异向量。令 A 的奇异值分解为 $A=UDV^T$ ，则(4.2.3)的解是 V 的最后一个列向量，即 $f=v_9$ ，于是由 $f=v_9$ 可构造矩阵 F 。

秩 2 约束 基本矩阵秩为 2 的约束是它的一个重要性质。如果用一个秩不等于 2 的矩阵作为基本矩阵，并用它估计图像极线，则所估计的极线不交于同一个图像点。这就是说如果用秩不为 2 的矩阵作为基本矩阵的估计，我们不能得到两幅图像的极几何，这是因为在极几何中所有的极线均交于极点。然而，通过(4.2.3)所确定的矩阵 F 一般是满秩的，因此还必须用一个秩 2 的矩阵 \bar{F} 去逼近矩阵 F 作为基本矩阵的估计，也就是说将下述最小化问题：

$$\begin{cases} \min \|F - \bar{F}\| \\ \text{subject to } \text{rank}(\bar{F}) = 2 \end{cases} \quad (4.2.4)$$

的解作为基本矩阵的最终估计。问题(4.2.4)的解可通过对 F 进行奇异值分解得到。令 F 的最小奇异值分解为 $F = U \text{diag}(s_1, s_2, s_3) V^T$ ，($s_1 \geq s_2 \geq s_3$)，则(4.2.4)的解为 $\bar{F} = U \text{diag}(s_1, s_2, 0) V^T$ 。

总结上述讨论，有下述估计基本矩阵的 8-点算法：

算法 4.2.1：估计基本矩阵的 8-点算法

目标： 给定 $N(>=8)$ 个点对应 $m_i \leftrightarrow m'_i$ ，计算基本矩阵 F

8-点算法：

- (1) 由 N 个对应点集构造矩阵 A ；
 - (2) 对 A 进行奇异值分解 $A=UDV^T$ ，并由 V 的最后一个列向量 v_9 可构造矩阵 F ；
 - (3) 对 F 进行奇异值分解 $F = U \text{diag}(s_1, s_2, s_3) V^T$ ，($s_1 \geq s_2 \geq s_3$)，得基本矩阵的估计 $\bar{F} = U \text{diag}(s_1, s_2, 0) V^T$ 。
-

8-点算法虽然简单，但算法的鲁棒性很差。自从 1981 年首次由 H.C.Longuet-Higgins 在文献[1]中提出后，人们一直认为该算法的实用价值不大。直到 1997 年由 Hartley 在文献[14]中提出归一化 8-点算法后，才使得 8-点算法真正得到广泛应用。

归一化 8-点算法 (Normalized 8-Point Algorithm)

假定 $\{m_j \leftrightarrow m'_j\}$ 是一组点对应，并且将 8-点算法所得到的矩阵记为 F 。现在对两幅图像分别作坐标(射影)变换 H, H' ，产生一组新的点对应 $\{\tilde{m}_j \leftrightarrow \tilde{m}'_j\}$ ，再将 8-点算法应用于这组新的点对应所计算的矩阵记为 \tilde{F} 。显然，对于精确的点对应和无限精度的算术运算，两种计算结果具有关系式： $F = H'^T \tilde{F} H$ 。现在的问题是当图像数据有噪声时，即在点对应不精确的情况下，8-点算法的结果还能保证上述关系式成立吗？Hartley 在文献[14]中指出这是不可能的。因为 8-点算法的最小化约束条件 $\|F\|=1$ 不等价于约束条件 $\|\tilde{F}\|=1$ ， $\|F\|$ 和 $\|\tilde{F}\|$ 之间的关系很难用某种数学关系来描述，因此 8-点算法的结果不具有关系式 $F = H'^T \tilde{F} H$ 和同样的计算精度。具体地说，

$$\begin{cases} \min \sum_j \|m'^T F m\|^2 \\ \text{subject to } \|F\|=1 \end{cases}$$

不等价于

$$\begin{cases} \min \sum_j \|\tilde{m}'^T \tilde{F} \tilde{m}\|^2 \\ \text{subject to } \|\tilde{F}\|=1 \end{cases}$$

因此，坐标变换方法将给出不同的基本矩阵估计。

归一化变换 由于估计基本矩阵的 8-点算法的结果与表示图像点的坐标系有关，那么在计算基本矩阵时是否有某种坐标系优于其它的坐标系呢？回答是绝对肯定的，请参考文献[14]。下面介绍一种数据归一化方法，它由图像的位移变换与伸缩变换所组成。数据归一化处理不仅能提高 8-点算法的精度，而且还能够消除坐标变换的效应。

图像数据的归一化分为以下两步：

- **位移变换**：对每一幅图像作坐标位移变换（一般地，两幅图像的位移是不同的），使得图像的坐标原点为图像点集(这里指图像的特征点集)的重心；
- **伸缩变换**：对每幅图像作坐标缩放变换，使得位移变换后的图像点分布在以重心为圆心半径为 $\sqrt{2}$ 的圆内。

先对图像数据作归一化处理，然后再应用 8-点算法来估计基本矩阵的方法，通常称为归一化 8-点算法。

算法 4.2.2：归一化 8-点算法

目标：给定 N 个点对应 $m_j \leftrightarrow m'_j$ ，计算基本矩阵 F

归一化 8-点算法：

- (1) 对两图像分别作归一化变换 H, H' ，得新的点对应；
 - (2) 对新的点对应，使用 8-点算法获得矩阵 \tilde{F} ；
 - (3) 对矩阵 \tilde{F} 进行归一化反演获得基本矩阵的估计： $F = H'^T \tilde{F} H$ 。
-

Hartley 对归一化 8-点算法进行了大量实验，实验结果表明归一化 8-点算法大大提高了 8

一点算法的鲁棒性，其性能可与一些常用的非线性方法相媲美。“归一化”的有效性在于降低了线性方程组中系数矩阵的条件数。因为通过归一化操作，系数矩阵的元素大小比较均匀，从而相应的条件数较小，这样就提高了数值计算的稳定性。可以说归一化 8 点算法是近年来在多视几何研究中的一项重要工作，目前在文献中应用非常广泛。

4.2.2 最小点对应算法

7-点算法

7-点算法是指仅用 7 个点对应来估计基本矩阵的方法。在一般情形下，7 个点对应是能够估计基本矩阵所需要的最少点对应数，它的重要性在于：

- 在图像中仅有 7 个点对应时，只能用这种方法；
- 在基本矩阵的鲁棒估计中，RANSAC 方法的随机抽样通常需要抽取最小的点对应集。这将在 4.2.4 节中作详细介绍。

正如 8 点算法那样，使用 7 个点对应可得到下述方程：

$$Af = \begin{pmatrix} u'_1 u_1 & u'_1 v_1 & u'_1 & v'_1 u_1 & v'_1 v_1 & v'_1 & u_1 & v_1 & 1 \\ & & & \vdots & & & & & \\ u'_7 u_7 & u'_7 v_7 & u'_7 & v'_7 u_7 & v'_7 v_7 & v'_7 & u_7 & v_7 & 1 \end{pmatrix} f = 0$$

一般地，系数矩阵 A 的秩为 7，所以上述方程的解集是 9 维空间中的通过坐标原点的一张 2 维平面。令 f_1, f_2 是方程的两个单位正交解，则它的单位解集合是一个单参数簇 $f = sf_1 + (1-s)f_2$ ，于是基本矩阵可以表示为

$$F = sF_1 + (1-s)F_2$$

其中， F_1, F_2 是由 f_1, f_2 确定的 3 阶矩阵。由于基本矩阵的秩为 2，因此获得参数 s 的一个约束方程：

$$\det(sF_1 + (1-s)F_2) = 0$$

这是一个关于参数 s 的 3 次方程，因此有一个解或有 3 个解(如果有复解则删去，因为基本矩阵是一个实矩阵)。于是，我们有下列结论：

命题 4.2.1 使用 7 个点对应，基本矩阵有一个解或者有 3 个可能的解。

若图像中仅有 7 个对应点，当基本矩阵有 3 个解时，不能断定哪一个是真解。如果图像中有多于 7 个点对应，当基本矩阵有 3 个解时，可选取匹配点对应数最多的矩阵作为基本矩阵的真解。

6-点算法

如果场景能提供某些可以利用的信息的话，则在估计基本矩阵时可以减少点对应的个数。例如，当场景中包含有平面信息时，仅利用 6 个点对应，其中 4 个是来自同一平面上的点对应，就可以计算基本矩阵。

首先，利用平面上的 4 个点对应计算该平面的单应矩阵 H 。由于基本矩阵可表示为

$F=[e']_x H$ ，而极点 e' 仅有两个自由度，所以根据另外的两个对应点 $m_j \leftrightarrow m'_j, j=1,2$ ，通过下述方程：

$$m_j'^T [e']_x H m_j = 0, j=1,2 \quad (4.2.4)$$

可以线性地确定极点 e' 。

值得指出的是，利用一张平面上的点对应，无论有多少个都不可能确定基本矩阵。这是因为对于该平面上的任一个点对应 $m \leftrightarrow m'$ ，总是有 $m' = Hm$ ，于是式(4.2.4)化为恒等式： $m'^T [e']_x H m = m'^T [e']_x m' \equiv 0$ ，因而不能构成对极点 e' 的约束。

4.2.3 迭代算法

迭代算法概要

前面几节所给的估计基本矩阵的方法都是线性方法，而迭代算法是一类非线性算法。所谓迭代算法，就是将估计基本矩阵问题化为数学最优化问题，然后使用某种优化迭代算法求解。迭代算法的一般步骤由下表所给出：

- (1) 选择基本矩阵的某种约束和适当的度量构造目标函数（或称为代价函数） $g(F)$ ，将估计基本矩阵 F 的问题归结为最小化问题：

$$\min_F g(F) \quad (4.2.5)$$

- (2) 选取最小化问题一个初始解，作为迭代算法的初始值；
- (3) 选取一种最小化迭代算法，得到最小化问题的解 F ；
- (4) 寻找 F 的秩 2 最优逼近解作为基本矩阵的估计。

对于步骤(2)，通常取 8-点算法的解作为初始值。对于步骤(3)，可以选择数学优化中的一些算法，如共轭梯度迭代算法、拟牛顿迭代算法、L-M 迭代算法等等^{*)}。由于 L-M 算法具有收敛速度快的优点，所以在计算机视觉中的优化问题大多使用 L-M 迭代算法。对于步骤(4)，可以用 8-点算法中所使用的方法，对最小化问题的解 F 进行 SVD 分解得一个秩 2 的最优逼近。如果对基本矩阵进行适当的参数化，即使用秩 2 的参数化表示，使得迭代结果是一个秩 2 的矩阵，则步骤(4)就可以省略。

综上所述，如何构造最优问题的目标函数是建立估计基本矩阵迭代算法的关键。

基本矩阵迭代估计方法见后面的算法 4.2.3。

目标函数

下面主要讨论迭代算法中两种常用的目标函数。

极距离最小化 由于像平面 I 上任一点 m ，它在像平面 I' 上的对应点 m' 必位于对应的外极线 l'_m 上。由基本矩阵的性质，极线 $l'_m = Fm$ ，不难计算 m' 到极线 l'_m 距离为

$$d^2(m', Fm) = \frac{1}{(Fm)_1^2 + (Fm)_2^2} \times (m'^T Fm)^2$$

对于精确的点对应，上述距离应等于零。类似地，有 m 到极线 l_m 距离为

^{*)} 关于这些算法，请参考附录 B2

$$d^2(\mathbf{m}, F^T \mathbf{m}') = \frac{1}{(F^T \mathbf{m}')_1^2 + (F^T \mathbf{m}')_2^2} \times (\mathbf{m}'^T F \mathbf{m})^2$$

这样，就导致下述基于极距离最小化目标函数：

$$g(F) = \sum_j \left(\frac{1}{(F \mathbf{m}_j)_1^2 + (F \mathbf{m}_j)_2^2} + \frac{1}{(F^T \mathbf{m}'_j)_1^2 + (F^T \mathbf{m}'_j)_2^2} \right) \times (\mathbf{m}'_j^T F \mathbf{m}_j)^2 \quad (4.2.6)$$

Sampson 估计 对一个给定的基本矩阵 F 和任一点对应 $\mathbf{m} = (u, v, 1)^T \leftrightarrow \mathbf{m}' = (u', v', 1)^T$ ，必有

$$\mathbf{m}'^T F \mathbf{m} = 0$$

令 $\mathbf{X} = (u, v, u', v')^T \in R^4$ ，则上式可以改写成下面的形式：

$$\Phi_F(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} \mathbf{X}^T, 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & f_{11} & f_{21} & f_{31} \\ 0 & 0 & f_{12} & f_{22} & f_{32} \\ f_{11} & f_{12} & 0 & 0 & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & 0 & 0 & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{13} & f_{23} & 2f_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

显然， Φ_F 定义了 4 维空间上的一个二次曲面。

给定 N 个对应点 $\mathbf{m}_j = (u_j, v_j, 1)^T \leftrightarrow \mathbf{m}'_j = (u'_j, v'_j, 1)^T$ 求解基本矩阵 F ，在几何上等价于最佳拟合 4 维空间点集 $\{\mathbf{X}_j = (u_j, v_j, u'_j, v'_j)^T\}$ 的二次曲面 Φ_F 。对应于最小化几何误差 $\|\mathbf{X} - \hat{\mathbf{X}}\|^2$ 的向量 $\hat{\mathbf{X}}$ 是位于二次曲面 Φ_F 上的与测量点 \mathbf{X} 距离最小的点。由于 Φ_F 的非线性，很难对点 $\hat{\mathbf{X}}$ 作出准确估计。

Sampson 估计的思想是假定代价函数在估计点 $\hat{\mathbf{X}}$ 附近是线性的，从而给出点 $\hat{\mathbf{X}}$ 的一阶近似估计。为了求一阶近似，使用一阶 Taylor 展开式：

$$\Phi_F(\mathbf{X} + \Delta \mathbf{X}) = \Phi_F(\mathbf{X}) + \frac{\partial \Phi_F}{\partial \mathbf{X}} \Delta \mathbf{X}$$

这里 $\Delta \mathbf{X} = \hat{\mathbf{X}} - \mathbf{X}$ ，并且

$$\frac{\partial \Phi_F}{\partial \mathbf{X}} = \left((F^T \mathbf{m}'_j)_1, (F^T \mathbf{m}'_j)_2, (F \mathbf{m}_j)_1, (F \mathbf{m}_j)_2 \right)$$

我们的目的是希望 $\hat{\mathbf{X}}$ 在二次曲面 Φ_F 上，即 $\Phi_F(\hat{\mathbf{X}}) = 0$ ，因此，

$$\Phi_F(\mathbf{X}) + \frac{\partial \Phi_F}{\partial \mathbf{X}} \Delta \mathbf{X} = 0 \quad (4.2.7)$$

于是，现在所面临的最小化问题是寻找满足式(4.2.7)的具有最小模的 $\Delta \mathbf{X}$ 。为此，使用 Lagrange 乘法，可以得到

$$\Delta \mathbf{X} = - \left(\frac{\partial \Phi_F}{\partial \mathbf{X}} \right)^T \left(\frac{\partial \Phi_F}{\partial \mathbf{X}} \cdot \left(\frac{\partial \Phi_F}{\partial \mathbf{X}} \right)^T \right)^{-1} \Phi_F(\mathbf{X})$$

由此，就得到了下述最小化目标函数：

$$g(F) = \sum_j \Delta \mathbf{X}_j^T \Delta \mathbf{X}_j = \sum_j \frac{(\mathbf{m}'_j F \mathbf{m}_j)^2}{(F \mathbf{m}_j)_1^2 + (F \mathbf{m}_j)_2^2 + (F^T \mathbf{m}'_j)_1^2 + (F^T \mathbf{m}'_j)_2^2} \quad (4.2.8)$$

事实上，也可以利用加权最小二乘方法导入上述目标函数。由于在 8 点算法中， $\Phi_i = \mathbf{m}_i'^T F \mathbf{m}_i$ ($i=1,2,3,\dots,N$) 具有不同的方差 $\sigma_{\Phi_i}^2$ ，所以很自然的思想是用 $\frac{(\mathbf{m}_i'^T F \mathbf{m}_i)^2}{\sigma_{\Phi_i}^2}$ 代替 $\Phi_i = (\mathbf{m}_i'^T F \mathbf{m}_i)^2$ 使得它们在最小化过程中是均衡的。 $\sigma_{\Phi_i}^2$ 可表示为 $(\mathbf{m}_i, \mathbf{m}_i')$ 的函数：

$$\sigma_{\Phi_i}^2 = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_i}{\partial \mathbf{m}_i} & \frac{\partial \Phi_i}{\partial \mathbf{m}_i'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda_{m_i} & 0 \\ 0 & \Lambda_{m_i'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_i}{\partial \mathbf{m}_i} \\ \frac{\partial \Phi_i}{\partial \mathbf{m}_i'} \end{pmatrix} \quad (4.2.9)$$

其中： $\Lambda_{m_i}, \Lambda_{m_i'}$ 分别是点 $\mathbf{m}_i, \mathbf{m}_i'$ 的协方差矩阵。假定对应点噪声满足高斯分布，则有

$$\Lambda_{m_i} = \Lambda_{m_i'} = \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix}, \quad \forall i$$

于是(4.2.9)可简化为

$$\sigma_{\Phi_i}^2 = \sigma^2 \|\nabla \Phi_i\|$$

其中： $\nabla \Phi_i$ 是 Φ_i 在点 $X_i = (u_i, v_i, u_i', v_i')^T$ 的梯度，即

$$\nabla \Phi_i = ((F \mathbf{m}_i)_1, (F \mathbf{m}_i)_2, (F^T \mathbf{m}_i')_1, (F^T \mathbf{m}_i')_2)^T$$

这样，就重新得到了目标函数(4.2.8)。

算法 4.2.3：基本矩阵迭代估计方法

目标： 给定 N 个点对应 $\{\mathbf{m}_i \leftrightarrow \mathbf{m}_i'\}$ ，计算基本矩阵 F

迭代算法：

- (1) 选择某种度量构造目标函数（或称为代价函数） $g(F)$ ；
- (2) 选取 8-点算法的结果作为迭代算法的初始值；
- (3) 选取一种迭代方法（如 L-M 方法），迭代求解最小化问题 $\min_F g(F)$ ；
- (4) 寻找 F 的秩 2 最优逼近解作为基本矩阵的估计（SVD 方法）。如果 F 采用秩 2 参数化表示，可略去此步。

秩 2 参数化表示

基于反对称矩阵与可逆矩阵的表示 基本矩阵 F 可表示为反对称矩阵与可逆矩阵的积： $F = [\mathbf{e}']_{\times} H$ 。如果令：

$$[\mathbf{e}']_{\times} = \begin{pmatrix} 0 & x & y \\ -x & 0 & z \\ -y & -z & 0 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

则 F 可表示为下述形式：

$$F = \begin{pmatrix} xd + yg & xe + yh & xf + yi \\ -xa + zg & -xb + zh & -xc + zi \\ -ya - zd & -yb - ze & -yc - zf \end{pmatrix}$$

此时 F 有 12 个参数，远大于基本矩阵的自由度的个数，这表明参数之间的独立性非常差，如果迭代算法使用这种参数化表示很难得到好的结果。在迭代算法中不提倡这种参数化表示。

极参数表示 由于基本矩阵 F 的秩为 2，所以 F 的三个行向量必线性相关。因此，在一般情况下第三行可由前两行线性表示，这样基本矩阵就可表示为下述形式：

$$F = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ ga + hd & gb + he & gc + hf \end{pmatrix}$$

不难验证：极点 $\mathbf{e}' = (-g, -h, 1)^T$ 。

在迭代算法中如果使用这种参数表示，则其初始值可按下述方法确定：令 8 点算法的解为

$$F_0 = \begin{pmatrix} f_{01} & f_{02} & f_{03} \\ f_{04} & f_{05} & f_{06} \\ f_{07} & f_{08} & f_{09} \end{pmatrix}$$

取 $a = f_{01}, b = f_{02}, c = f_{03}, d = f_{04}, e = f_{05}, f = f_{06}$ 作为其初始值， g, h 的初始值取下述最小线性二乘问题的解：

$$\min[(f_{01}g + f_{04}h - f_{07})^2 + (f_{02}g + f_{05}h - f_{08})^2 + (f_{03}g + f_{06}h - f_{09})^2]$$

这种表示方法的不足之处在于，它可能导致算法的不稳定。这是因为第三行不总是可以由前两行线性表示。由于 F 的秩为 2，所以第三行不能由前两行线性表示的充要条件是前两行线性相关，而前两行线性相关等价于极点在无穷远点，即 $\mathbf{e}' = (e'_1, e'_2, 0)^T$ 。这说明在实际问题中，这种情况很少会发生。另外，可以利用 8-点算法对极点的估计结果来预测是否发生这种情况。如果 8-点算法所估计的极点距图像中心非常远，则改变参数化方式，如用第一行和第三行来线性表示第二行。

双极表示 在一般情况下第三行可由前两行线性表示，同时第三列也可以由前两列线性表示，于是基本矩阵可表示为下述形式：

$$F = \begin{pmatrix} a & b & ga + hb \\ c & d & gc + hd \\ ea + fc & eb + fd & g(ea + fc) + h(eb + fd) \end{pmatrix}$$

同样，可以验证 $\mathbf{e}' = (-e, -f, 1)^T, \mathbf{e} = (-g, -h, 1)^T$ 。

对于给定的目标函数，如果有若干种参数化可供选择的话，指导参数化的一般策略是所选择参数与求解的问题相匹配，同时用这些参数计算代价函数时有较小的计算量。例如 F 可以用 9 个参数来参数化——那么它是过参数化的，因为实际上 F 仅有 7 个自由度。如果最小化问题不是太过参数化，只要所采用的参数化形式与最小化问题是相匹配的，就不会产生坏的效应。

因为一个性能好的非线性最小化算法会“注意”不必要在冗余方向移动，能有效地丢弃冗余参数组合，如 Levenberg-Marquardt 算法就很容易处理冗余参数化问题。经验发现采用最低限度参数化时常使代价函数变得更为复杂，这样陷入局部最小值的机会就可能更多。因此，在基本矩阵的参数化过程中，不必用 7 个参数去表示它。但是，如果采用的参数化与最小化问题是不相匹配的，过参数化可能产生坏的效应。例如，纯平移运动下的基本矩阵，是一个反对称矩阵，有两个自由度，用一个 3 参数的反对称矩阵来表示虽然过参数化，但不会影响计算结果。如果利用 9 参数或 8 参数的基本矩阵来表示，与对应的最小化问题就不相匹配，其计算结果往往都不是一个反对称矩阵，这不是所期望的结果。

4.2.4 鲁棒性估计

前面所给出的算法，均假定点对应集 $\{m_j \leftrightarrow m'_j\}$ 的误差源仅发生在对该点的位置测量，它遵循 Gaussian 分布。但在许多实际情况中，特别是在基本矩阵的自动估计中，误匹配的点对应对于 Gaussian 误差分布来说是外点(outlier)。一旦点对应中存在外点，直接使用前面所介绍的算法所得到的结果与真实值会有极大的偏差，也就是说这些外点将严重干扰基本矩阵的估计。因此，我们必须使用某种方法对外点加以识别，或者说从初始的“对应”中确定出内点(inlier)，然后再使用前几节中所描述的算法在这些内点中估计基本矩阵。这就是所谓的鲁棒估计(Robust Estimation)。

RANSAC 方法

RANSAC(RANdom SAMple Consensus)方法是由 Fischler 和 Bolles 在文献[27]所引入的一种鲁棒估计方法，在计算机视觉中有广泛的应用，它对于处理大比例的外点是十分有效的。

我们先就鲁棒估计一条直线的例子来说明 RANSAC 方法的基本思想。在几何上鲁棒估计一条直线可描述为：给定一组二维数据点，寻找一条线，最小化点到线的垂直距离的平方和，并且有效点偏离该线的距离小于 t 个单位。这个问题有两个要求：(1) 用一条线拟合数据点；(2) 根据阈值 t 将数据分为内点（有效点）和外点。阈值 t 是根据测量噪声而设置的，具体做法将在下文中讨论。RANSAC 方法的思想比较简单，主要有以下几步：

- (1) 随机选择两点(确定一条直线所需要的最小点集)；由这两个点确定一条线 l ；
- (2) 根据阈值 t ，确定距离小于 t 的数据点集 $S(l)$ ($S(l)$ 称为直线 l 的一致集)；
- (3) 重复若干次随机选择，得到直线 l_1, l_2, \dots, l_n 和相应的一致集 $S(l_1), S(l_2), \dots, S(l_n)$ ；
- (4) 使用几何距离，求最大一致集的最佳拟合直线，作为数据点的最佳匹配直线。

如果随机选择两点中存在一个外点，则这两点所确定的直线一般不会有大的**一致集**，所以根据直线的一致集的大小对其进行评价有利于取得更好的拟合直线。正如 Fischler 和 Bolles 所指出：RANSAC 过程与通常的数据最佳拟合技术相反，不是用尽可能多的数据点去获得一个解，而是用尽量少的可行数据，并尽量地扩大一致性数据集。

一般地，RANSAC 鲁棒估计的步骤由算法 4.2.4 所给出。

算法 4.2.4：RANSAC 鲁棒估计方法

目标：给定模型 M 和数据点集 D ，估计模型 M 的参数

RANSAC 估计算法：

- (1) 确定求解模型 M 时，所需要的最小数据点的个数 s 。由 s 个数据点所构成的集称为模型 M 的一个样本；
 - (2) 从数据点集 D 中随机地抽取一个样本，由该样本计算模型的一个实例 M_j ，确定模型距离 < 阈值 t 的数据点集 $S(M_j)$ ，它称为实例 M_j 的一致集；
 - (3) 如果一致集 $S(M_j)$ 中数据点的个数 $|S(M_j)| > \text{阈值 } T$ ，用 $S(M_j)$ 重新估计模型 M ，并输出结果；如果 $|S(M_j)| < \text{阈值 } T$ ，返回到(2)；
 - (4) 经过 N 次随机抽样，选择最大的一致集 $S(M_{\max})$ ，用 $S(M_{\max})$ 重新估计模型 M ，并输出结果。
-

下面对 RANSAC 鲁棒估计的细节作一些说明。

距离阈值 t 如果我们希望所选取的阈值 t 使得数据点为内点的概率是 α ，则需要通过由内点到模型距离的概率分布来计算距离阈值 t ，这是非常困难的。在实际中，距离阈值通常靠经验选取。如果已知测量误差为 Gaussian 分布并具有零均值和标准方差 σ ，那么 t 的值是可以计算的。因为在这种情况下点距离的平方 d^2 是 Gaussian 变量的平方和并服从一个自由度为 m 的 χ_m^2 分布。其中， m 是模型的余维度。例如线估计的余维度是 1——仅测量点到线的距离。随机变量 χ_m^2 小于 k^2 的概率由累积分布 $F_m(k^2) = \int_0^{k^2} \chi_m^2(\xi) d\xi$ 来描述。由累积分布有

$$t^2 = F_m^{-1}(\alpha) \sigma^2 \quad (4.2.10)$$

通常 α 取 0.95，即数据点为内点的概率是 95%，它的意义是一个内点被排斥的错误概率仅有 5%。例如，对于基本矩阵的估计，在 $\alpha=0.95$ 时，阈值 $t^2=3.84 \sigma^2$ 。

抽样次数 N 在通常的情况下，没有必要尝试每一种可能的抽样，实际上尝试每一种可能的抽样在计算上也是不可行的。只要选择足够多的抽样次数 N ，保证至少存在一次抽样中没有外点就可以了。假定数据点集中含有外点的比例是 ε ，那么 N 个样本中至少有一个样本不包含外点的概率 p 为

$$p = 1 - (1 - (1 - \varepsilon)^s)^N$$

于是

$$N = \frac{\log(1 - p)}{\log(1 - (1 - \varepsilon)^s)} \quad (4.2.11)$$

值得说明的是，(1) 抽样次数与外点的比例不是正相关的，抽样的计算代价即使在外点数目很大的时候也能被接受。(2) 对于给定的 ε ， p ，抽样次数随样本所包含数据点个数 s 的增大而急剧增大。因此，样本中元素的个数通常取模型所需要的最低限度的个数，即所谓的最小点集。

终止阈值 T 经验的做法是：给出外点比例的一个估计值 ε ，如果一致集大小相当于数据中内点的大小则终止，例如若数据点总数为 n ，则 $T=(1-\varepsilon)n$ 。

基本矩阵鲁棒估计

将 RANSAC 方法用于基本矩阵的估计，我们只需要：

- 定义样本；
- 给定样本，求该样本所对应的基本矩阵；
- 由最大一致集重新估计基本矩阵的算法。

定义样本 令 $D = \{m_j \leftrightarrow m'_j | 1 \leq j \leq n\}$ 是给定的两幅图像的点对应集。由于确定基本矩阵的最低限度需要 7 个点对应，所以定义点对应集 D 中的 7 个对应点构成的子集为一个样本，所有样本的集合简称为样本集。

求样本 k 所对应的基本矩阵 F_k 由于样本 k 中仅有 7 个点对应，根据基本矩阵的 7-点算法，可能得到基本矩阵的 3 个解 $F_k^{(1)}, F_k^{(2)}, F_k^{(3)}$ ，将一致集最大的解作为该次抽样的基本矩阵。具体方法如下：

根据下述公式计算 $F_k^{(1)}, F_k^{(2)}, F_k^{(3)}$ 的一致集：

$$S(F_k^{(j)}) = \{(m \leftrightarrow m') \in D | d^2(m', F_k^{(j)}m) + d^2(m, (F_k^{(j)})^T m') < t^2\} \quad (4.2.12)$$

其中， d 表示点到直线的距离， t 是距离阈值。求 j_0 使得

$$|S(F_k^{(j_0)})| = \max\{|S(F_k^{(1)})|, |S(F_k^{(2)})|, |S(F_k^{(3)})|\}$$

令 $F_k = F_k^{(j_0)}$ 为该次抽样的基本矩阵， $S(F_k) = S(F_k^{(j_0)})$ 为该次抽样的一致集。

由一致集重新估计基本矩阵 令 $S(F_{k_0})$ 是最大的一致集，则 F_{k_0} 是最低限度子集所确定的基本矩阵，将它作为初值，求解下述最小化问题重新估计基本矩阵：

$$\min \sum_{(m_j \leftrightarrow m'_j) \in S(F_{k_0})} \left(\frac{1}{(Fm_j)_1^2 + (Fm_j)_2^2} + \frac{1}{(F^T m'_j)_1^2 + (F^T m'_j)_2^2} \right) \times (m'_j Fm_j)^2$$

最后值得指出的是，RANSAC 方法被实践证明是一种非常有效的鲁棒性方法。在可能的情况下，建议读者使用这种方法。

4.2.5 基本矩阵的自动估计

RANSAC 方法可以从有误匹配的点对应集中估计基本矩阵，这使得从两幅图像自动估计基本矩阵成为可能。基本矩阵自动估计由算法 4.2.5 所给出。

算法 4.2.5：基本矩阵自动估计算法

目标： 给定两幅图像，计算基本矩阵。

自动估计算法：

- (1) 自动提取两幅图像的特征点集并建立“点对应集”（见第 5 章相应的算法）；
 - (2) RANSAC 抽样：
 - 计算当前抽样所确定的基本矩阵 F ，和它的一致点集 $S(F)$ ；
 - 如果当前的一致集大于原先的一致集，则保持当前的一致集 $S(F)$ 和相应的基本矩阵 F ，并删去原先的一致集和相应的基本矩阵；
 - 由自适应算法终止抽样过程；
-

(3) 由一致集 $S(F)$ 重新估计基本矩阵。

为了自动估计基本矩阵，首先需要从两幅图像自动建立一个“点对应集”，可以容忍这个点对应集包含大量的误匹配，因为在 RANSAC 估计方法中，理论上只要存在 8 个“好”的点对应就可以估计出基本矩阵。使用本书第 5 章所描述的方法，可以自动提取两幅图像的特征点，以及自动建立特征点之间的粗匹配，这样就得到一个“点对应集”。一旦确立了两幅图像的“点对应集”，为了使 RANSAC 方法能自动地估计基本矩阵，只需要终止抽样的自适应算法，即在 RANSAC 估计中能自动地终止抽样过程。下面给出一种终止抽样的自适应算法。

终止抽样的自适应算法

- (1) 对外点（误匹配的点对应）的比例 ε 作最保守估计 $\varepsilon = \varepsilon_0$ （如 $\varepsilon_0 = 0.9$ ，这意味着在点对应集中可能有 90% 是误匹配，这确实是一个保守估计），将 $\varepsilon = \varepsilon_0, s = 7, p = 0.99$ 代入公式 (4.2.11)，得到抽样数 N 的初始值：

$$N = N_0 = \frac{\log(0.01)}{\log(1 - (1 - \varepsilon_0)^7)} \quad (\text{如 } \varepsilon_0 = 0.9 \text{ 时, } N_0 = \frac{\log(0.01)}{\log(1 - 0.1^7)} = 4.7 \times 10^7);$$

- (2) 抽样并更新 ε, N ：令抽样的一致集占整个数据点的比例为 w ，若 $1 - w < \varepsilon$ ，则更新 $\varepsilon = 1 - w$ ，并且更新抽样数 $N = \frac{\log(0.01)}{\log(1 - w^7)}$ ；否则，保持原来的 ε, N ；

- (3) 如果抽样次数已达到更新抽样数 N ，则终止抽样；否则，返回(2)。

不难看出，抽样数在更新过程中是单调下降的，所以抽样过程必终止。注意：自适应算法同时还保证了有足够多次抽样，它可以应用于一般模型的 RANSAC 估计中，是一种值得推荐的自适应算法。

4.3 仿射极几何

4.3.1 仿射基本矩阵

仿射极几何

本节主要考虑仿射摄像机的极几何。因仿射摄像机的透视中心在无穷远点，所以基线是一条无穷远直线，这样极平面必相互平行，因而极线也相互平行，极点在无穷远点(如图 4.3.1 所示)。给定两个仿射摄像机下的图像 (I, I') ，我们有如下的仿射极几何约束：

- (1) $\forall m \in I$ ，在 I' 上存在一条极线 l'_m 与之对应，并且使得对应于 m 的像点 $m' \in l'_m$ ；
- (2) $\forall m' \in I'$ ，在 I 上存在一条极线 l_m 与之对应，并且使得对应于 m' 的像点 $m \in l_m$ ；
- (3) $\forall m_1, m_2 \in I$ 有 $l'_{m_1} \parallel l'_{m_2}$ ， $\forall m'_1, m'_2 \in I'$ 有 $l_{m'_1} \parallel l_{m'_2}$ 。

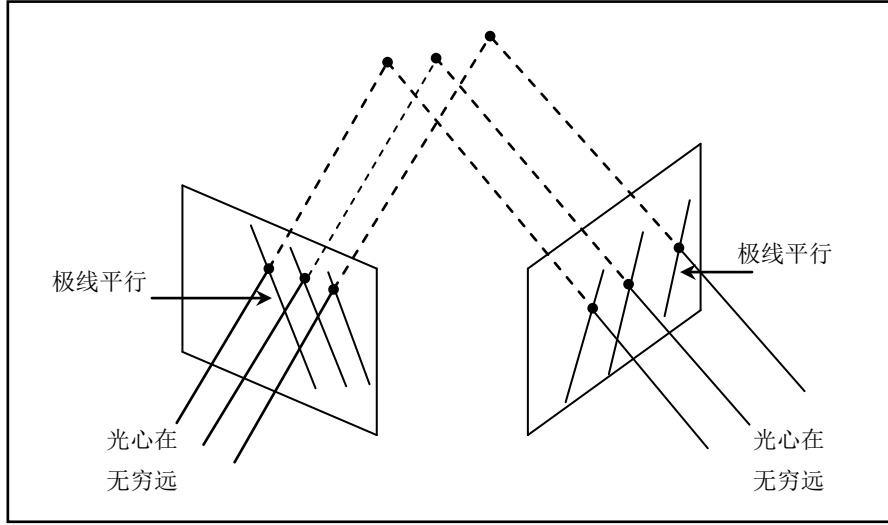


图 4.3.1：仿射极几何

仿射单应矩阵

令平面 π 是不通过摄像机光心的空间平面，考虑它在两个仿射摄像机下图像间的单应矩阵。由于仿射摄像机光心在无穷远点，平面 π 上的任何一对平行直线在仿射摄像机下的像直线也是一对平行直线，所以在仿射摄像机下，平面到像平面的变换是一个二维仿射变换。这样，平面 π 所确定的两个仿射摄像机的像平面之间的变换也是二维仿射变换，于是平面 π 的单应矩阵必有如下形式：

$$H_A = \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.3.1)$$

其中 “*” 对应的元素可能是非零元素。

仿射单应矩阵 H_A 有 6 个自由度，每一个点对应可导致 H_A 的两个线性约束，因此给定 3 个以上的点对应可以线性求解 H_A 。

仿射基本矩阵

下面用仿射基本矩阵来刻画仿射极几何。由于极点在无穷远且仿射单应是一个仿射矩阵，所以仿射基本矩阵必有下列形式：

$$F_A = [e']_{\times} H_A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & * \\ * & * & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

即仿射基本矩阵总可以写成

$$F_A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \\ c & d & e \end{pmatrix} \quad (4.3.2)$$

仿射基本矩阵有 4 个自由度，它的秩等于 2。

注意：具有(4.3.2)形式的矩阵不一定是仿射基本矩阵，例如有限点处的透视摄像机沿与像平面平行的方向作平移运动，以光轴作旋转运动的两摄像机的基本矩阵就具有(4.3.2)的形式，但它不是两个仿射摄像机的基本矩阵。

仿射基本矩阵的性质

仿射基本矩阵 F_A 具有如下性质：

(1) 点对应：对任意点对应 $\mathbf{m} \leftrightarrow \mathbf{m}'$ ，有 $\mathbf{m}'^T F_A \mathbf{m} = 0$ ；

对于有穷点对应 $\mathbf{m} = (u, v, 1)^T \leftrightarrow \mathbf{m}' = (u', v', 1)^T$ ，有 $au' + bv' + cu + dv + e = 0$

(2) 极线：

对应于图像点 \mathbf{m} 的极线：

当 \mathbf{m} 是有穷点时， $\mathbf{l}' = F_A \mathbf{m} = (a, b, cu + dv + e)^T$ ，

当 \mathbf{m} 是无穷点时， $\mathbf{l}' = F_A \mathbf{m} = (0, 0, cu + dv)^T$ ；

对应于图像点 \mathbf{m}' 的极线：

当 \mathbf{m}' 是有穷点时， $\mathbf{l} = F_A^T \mathbf{m}' = (c, d, au' + b'v + e)^T$ ，

当 \mathbf{m}' 是无穷点时， $\mathbf{l} = F_A^T \mathbf{m}' = (0, 0, au' + b'v)^T$ 。

(3) 极点： $\mathbf{e} = (-d, c, 0)^T, \mathbf{e}' = (-b, a, 0)^T$ 。

4.3.2 仿射基本矩阵的估计

在第 4.2 节中所给出的基本矩阵估计方法都可以应用于仿射基本矩阵的估计。由于仿射基本矩阵具有特殊的形式，所以相应的估计方法大多数都是线性的。本节主要介绍相应于第 4.2 节的 8-点算法和基于 Sampson 估计算法。我们将看到 Sampson 估计等价于几何距离的最小化，并且存在线性算法而不需要迭代求解。

4-点算法

给定点对应 $\mathbf{m} = (u, v, 1)^T \leftrightarrow \mathbf{m}' = (u', v', 1)^T$ ，仿射基本矩阵 F 满足下述方程：

$$(u', v', u, v, 1) \mathbf{f} = au' + bv' + cu + dv + e = 0 \quad (\mathbf{f} = (a, b, c, d, e)^T) \quad (4.3.3)$$

因此，给定 4 个以上的点对应，从下述线性方程组可以求解仿射基本矩阵：

$$A \mathbf{f} = \begin{pmatrix} u'_1 & v'_1 & u_1 & v_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u'_n & v'_n & u_n & v_n & 1 \end{pmatrix} \mathbf{f} = 0 \quad (4.3.4)$$

其中 A 是一个 $n \times 5$ 矩阵。

由于仿射基本矩阵是非零的，所以 f 是一个非零向量，即线性方程组(4.3.4)有非零解。因此在一般情况下，当对应点精确时， $\text{rank}(A)=4$ ， f 是矩阵 A 的零空间，或者说是 A 的零特征值对应的特征向量。当图像数据有噪声时，由点对应所构造的矩阵 A 通常是一个秩 5 的矩阵。因此，在实际情况下不能直接通过求解线性方程组来确定仿射基本矩阵，而是求在约束条件 $\|f\|=1$ 下方程组(4.3.4)的最小二乘解。即求解下述问题：

$$\begin{cases} \min \|Af\| \\ \text{subject to } \|f\|=1 \end{cases} \quad (4.3.5)$$

与第 4.2 节中的 8-点算法相同，它的解是矩阵 A 的最小奇异值对应的右奇异向量。与 4.2 节中的 8-点算法不同的是，这里不需要考虑仿射基本矩阵的秩 2 约束，因为此时秩 2 约束能自然地得到满足。

最小点对应算法

由于仿射基本矩阵有 4 个自由度，而每个点对应仅能提供一个约束，因此最少需要 4 个点对应才能确定仿射基本矩阵。但并非任意的 4 个点对应，都能唯一确定仿射基本矩阵，例如 4 个共面的点对应就不可能唯一确定仿射基本矩阵。另外，当存在 3 个点对应的空间平面通过摄像机的基线时，也不能唯一确定仿射基本矩阵。除这两种情况外，仿射基本矩阵可以唯一确定。对于 4 个点对应，当然可以使用 8-点算法，一种更直接的算法由算法 4.3.1 给出。

算法 4.3.1：估计仿射基本矩阵的最小点对应算法

目标：给定 4 个点对应 $m_j = (u_j \ v_j \ 1)^T \leftrightarrow m'_j = (u'_j \ v'_j \ 1)^T, j=1,2,\dots,4$ ，估计仿射基本矩阵

最小点对应算法：

- (1) 由 3 个点对应，计算相应平面的仿射单应矩阵 H_A ；
- (2) 计算 m_4 对应的极线： $l' = H_A m_4 \times m'_4$ 点，因此 $e' = (-l'_2 \ l'_1 \ 0)^T$ ；
- (3) $F_A = [(-l'_2 \ l'_1 \ 0)^T]_{\times} H_A$ 。

几何距离最小化算法（最大似然估计）

仿射基本矩阵 F 定义了 4 维空间中的一张超平面 $f = (a, b, c, d, e)^T$ ：

$$(X^T, 1)f = au' + bv' + cu + dv + e = 0, \quad X = (u', v', u, v)^T \in R^4$$

估计仿射基本矩阵等价于用一张超平面拟合给定的 4 维数据集：

$$\{X_j = (u'_j, v'_j, u_j, v_j)^T \mid (u_j, v_j, 1)^T \leftrightarrow (u'_j, v'_j, 1)^T\}$$

4-点算法是最小二乘拟合方法，它是基于代数距离的最优拟合。由于 Sampson 估计是几何

距离的一阶近似，而超平面的一阶近似是超平面自身，因此在这里的 **Sampson** 估计等价于几何距离最小化。下面讨论基于几何距离最小化的仿射基本矩阵估计方法。

由于点 $\mathbf{X} = (u', v', u, v)^T$ 到超平面 $\mathbf{f} = (a, b, c, d, e)^T$ 几何距离为

$$d(\mathbf{X}, \mathbf{f}) = \frac{|au' + bv' + cu + dv + e|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}}$$

所以，基于几何距离的最小化代价函数有下述形式：

$$g = \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} \sum_j (au'_j + bv'_j + cu_j + dv_j + e)^2$$

令 $\mathbf{N} = (a, b, c, d)^T$ ，它是超平面 $\mathbf{f} = (a, b, c, d, e)^T$ 的法向量，则上式可以写成

$$g = \frac{1}{\|\mathbf{N}\|^2} \sum_j (\mathbf{N}^T \mathbf{X}_j + e)^2 \quad (4.3.7)$$

求解最小化问题(4.3.7)的一种线性方法：若 F 为上述最小化的解，则必有

$$\frac{\partial g}{\partial e} = \frac{1}{\|\mathbf{N}\|^2} \sum_j 2(\mathbf{N}^T \mathbf{X}_j + e) = 0$$

因此，

$$e = -\frac{1}{n} \sum_j (\mathbf{N}^T \mathbf{X}_j) = -\mathbf{N}^T \bar{\mathbf{X}}$$

其中 $\bar{\mathbf{X}} = \frac{1}{n} \sum_j \mathbf{X}_j$ 。将上式代入式(4.3.7)，可得到

$$g = \frac{1}{\|\mathbf{N}\|^2} \sum_j (\mathbf{N}^T (\mathbf{X}_j - \bar{\mathbf{X}}))^2$$

令 $\bar{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} (\mathbf{X}_1 - \bar{\mathbf{X}})^T \\ \vdots \\ (\mathbf{X}_n - \bar{\mathbf{X}})^T \end{pmatrix}$ ，则上式可写成 $g = \frac{\|\bar{\mathbf{A}}\mathbf{N}\|^2}{\|\mathbf{N}\|^2}$ ，最小化 $g = \frac{\|\bar{\mathbf{A}}\mathbf{N}\|^2}{\|\mathbf{N}\|^2}$ 等价于最小化 $\|\bar{\mathbf{A}}\mathbf{N}\|$ 使得

$\|\mathbf{N}\|=1$ ，因此可以使用 **SVD** 分解来求解这个最小化问题。

总结上述讨论，我们有下述几何距离最小化算法：

算法 4.3.2：仿射基本矩阵的最大似然估计

目标： 给定点对应 $\mathbf{m}_j = (u_j, v_j, 1)^T \leftrightarrow \mathbf{m}'_j = (u'_j, v'_j, 1)^T, j = 1, 2, \dots, N$ ，估计仿射基本矩阵 F_A

几何距离最小化算法（最大似然估计）：

- (1) 将点对应表示为 $\mathbf{X}_j = (u'_j, v'_j, u_j, v_j)^T$ 并计算均值 $\bar{\mathbf{X}} = \frac{1}{n} \sum_j \mathbf{X}_j$,

构造矩阵： $\bar{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} (\mathbf{X}_1 - \bar{\mathbf{X}})^T \\ \vdots \\ (\mathbf{X}_n - \bar{\mathbf{X}})^T \end{pmatrix}$;

- (2) 计算矩阵 $\bar{\mathbf{A}}$ 的最小奇异值的右奇异向量 $\mathbf{N} = (a, b, c, d)^T$,

以及 $e = -\frac{1}{n} \sum_j (\mathbf{N}^T \mathbf{X}_j) = -\mathbf{N}^T \bar{\mathbf{X}}$;

- (3) 仿射基本矩阵为 $F_A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \\ c & d & e \end{pmatrix}$ 。
-