

强化学习

第五讲：无模型控制学习

教师：赵冬斌 朱圆恒 张启超

中国科学院大学
中国科学院自动化研究所



March 27, 2020

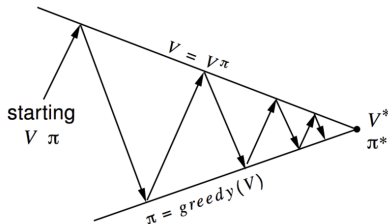
无模型预测学习

- 蒙特卡洛方法
- 时间差分学习
- $TD(\lambda)$

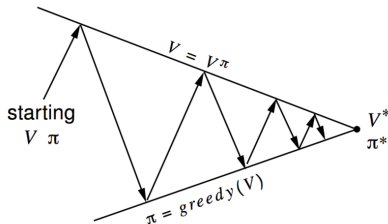
- 预测问题 prediction
 - 计算 MDP 某一策略的价值函数
- 控制问题 control
 - 计算 MDP 的 最优策略/最优价值函数

- 预测问题 prediction
 - 计算 MDP 某一策略的价值函数
- 控制问题 control
 - 计算 MDP 的最优策略/最优价值函数
- 无模型 控制学习 model-free control learning
 - 要么 MDP 本身的模型未知, 只能根据观测的经验数据学习, e.g. 参数未知的机械臂
 - 要么 MDP 太复杂, 状态空间过大, 根据在线样本训练更有效, e.g. 围棋

蒙特卡洛控制



- **策略评估:** 估计 V_π
 - 1 矩阵求解贝尔曼期望方程
 - 2 迭代策略评估
- **策略提升:** 生成新的 $\pi' \geq \pi$
 - 贪心策略提升



■ 策略评估: 估计 V_π (蒙特卡洛学习/时间差分学习)

- 1 矩阵求解贝尔曼期望方程
- 2 迭代策略评估

■ 策略提升: 生成新的 $\pi' \geq \pi$

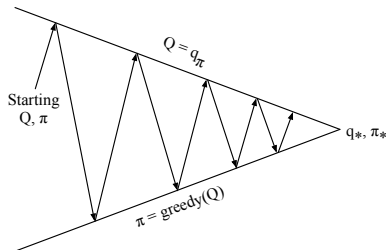
- 贪心策略提升

- 基于 $V(s)$ 进行贪心策略提升需要 MDP 的模型信息

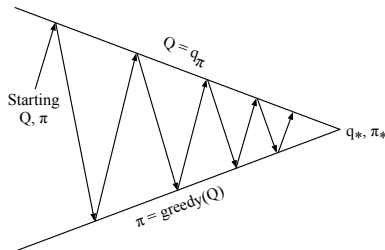
$$\pi'(s) = \mathcal{G}(V) = \arg \max_{a \in \mathcal{A}} \left(\mathcal{R}_s^a + \gamma \sum_{s' \in \mathcal{S}} \mathcal{P}_{ss'}^a V(s') \right)$$

- 基于 $Q(s, a)$ 进行贪心策略提升是无模型的

$$\pi'(s) = \mathcal{G}(Q) = \arg \max_{a \in \mathcal{A}} Q(s, a)$$



- 无模型策略评估: MC 学习 $Q = Q_\pi$
- 无模型策略提升: 贪心策略提升 $\pi' = \mathcal{G}(Q)$ 确定性策略



- 无模型策略评估: MC 学习 $Q = Q_\pi$
- 无模型策略提升: 贪心策略提升 $\pi' = \mathcal{G}(Q)$ 确定性策略
- 但这样无模型的策略迭代一定能学到最优策略吗?

举例：贪心动作选择



"Behind one door is tenure - behind the other
is flipping burgers at McDonald's."

- 想象下你面前有两扇门
- 你打开左边的门, 得到奖励 0
 $V(left) = 0$
- 接着打开右边的门, 得到奖励 +1
 $V(right) = +1$
- 接着打开右边的门, 得到奖励 +3
 $V(right) = +2$
- 接着打开右边的门, 得到奖励 +2
 $V(right) = +2$

⋮

- 每次都使用贪心动作一定能找到最优策略吗?

- 假设 MDPs 是确定型的, \mathcal{R} 和 \mathcal{P} 都是确定性的
- 对一个确定性 (deterministic) 的策略 π 使用 MC 方法评估它的 Q 函数会有什么问题?

$$s_0, a_0 = \pi(s_0), s_1, a_1 = \pi(s_1), \dots$$

- 假设 MDPs 是确定型的, \mathcal{R} 和 \mathcal{P} 都是确定性的
- 对一个确定性 (deterministic) 的策略 π 使用 MC 方法评估它的 Q 函数会有什么问题?

$$s_0, a_0 = \pi(s_0), s_1, a_1 = \pi(s_1), \dots$$

- 在状态 s_0 下只能观测到动作 $a_0 = \pi(s_0)$ 对应的回报
- 无法产生其它 $(s_0, a), a \neq \pi(s_0)$ 下的轨迹
- Q 函数只和状态有关, $Q(s_0, a_0) = Q(s_0, \pi(s_0))$
- 所以需要在策略中加入探索动作 增加轨迹的多样性, 使得 Q 函数更精确, 完成下一步的策略提升

- 在线学习需要连续的探索机制
- 保证获得尽可能全面的模型观测数据
- ϵ -贪心策略是最简单的一种探索策略
- 所有动作都有非零概率被选中执行

$$\begin{aligned}\pi(s) &= \epsilon\text{-greedy}(Q)(s) \\ &= \begin{cases} \arg \max_{a \in \mathcal{A}} Q(s, a) & \text{with } 1 - \epsilon \text{ probability} \\ \text{random } a \in \mathcal{A} & \text{with } \epsilon \text{ probability} \end{cases}\end{aligned}$$

定理

给定一个 ϵ -贪心策略 π 和它的动作-价值 Q_π , 策略提升得到的新 ϵ -贪心策略 π' 比之前的策略 π 要好, 即 $V_{\pi'}(s) \geq V_\pi(s)$

定理

给定一个 ϵ -贪心策略 π 和它的动作-价值 Q_π , 策略提升得到的新 ϵ -贪心策略 π' 比之前的策略 π 要好, 即 $V_{\pi'}(s) \geq V_\pi(s)$

$$\begin{aligned} Q_\pi(s, \pi'(s)) &= \sum_{a \in \mathcal{A}} \pi'(a|s) Q_\pi(s, a) \\ &= \epsilon/m \sum_{a \in \mathcal{A}} Q_\pi(s, a) + (1 - \epsilon) \max_{a \in \mathcal{A}} Q_\pi(s, a) \\ &\geq \epsilon/m \sum_{a \in \mathcal{A}} Q_\pi(s, a) + (1 - \epsilon) \sum_{a \in \mathcal{A}} \frac{\pi(a|s) - \epsilon/m}{1 - \epsilon} Q_\pi(s, a) \\ &= \sum_{a \in \mathcal{A}} \pi(a|s) Q_\pi(s, a) = V_\pi(s) \end{aligned}$$

定理

给定一个 ϵ -贪心策略 π 和它的动作-价值 Q_π , 策略提升得到的新 ϵ -贪心策略 π' 比之前的策略 π 要好, 即 $V_{\pi'}(s) \geq V_\pi(s)$

$$\begin{aligned} Q_\pi(s, \pi'(s)) &= \sum_{a \in \mathcal{A}} \pi'(a|s) Q_\pi(s, a) \\ &= \epsilon/m \sum_{a \in \mathcal{A}} Q_\pi(s, a) + (1 - \epsilon) \max_{a \in \mathcal{A}} Q_\pi(s, a) \\ &\geq \epsilon/m \sum_{a \in \mathcal{A}} Q_\pi(s, a) + (1 - \epsilon) \sum_{a \in \mathcal{A}} \frac{\pi(a|s) - \epsilon/m}{1 - \epsilon} Q_\pi(s, a) \\ &= \sum_{a \in \mathcal{A}} \pi(a|s) Q_\pi(s, a) = V_\pi(s) \\ Q_\pi(s, \pi'(s)) &= \mathcal{T}_{\pi'}(V_\pi) \geq V_\pi(s) \end{aligned}$$

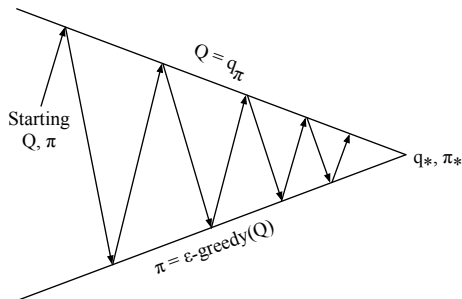
定理

给定一个 ϵ -贪心策略 π 和它的动作-价值 Q_π , 策略提升得到的新 ϵ -贪心策略 π' 比之前的策略 π 要好, 即 $V_{\pi'}(s) \geq V_\pi(s)$

$$\begin{aligned} Q_\pi(s, \pi'(s)) &= \sum_{a \in \mathcal{A}} \pi'(a|s) Q_\pi(s, a) \\ &= \epsilon/m \sum_{a \in \mathcal{A}} Q_\pi(s, a) + (1 - \epsilon) \max_{a \in \mathcal{A}} Q_\pi(s, a) \\ &\geq \epsilon/m \sum_{a \in \mathcal{A}} Q_\pi(s, a) + (1 - \epsilon) \sum_{a \in \mathcal{A}} \frac{\pi(a|s) - \epsilon/m}{1 - \epsilon} Q_\pi(s, a) \\ &= \sum_{a \in \mathcal{A}} \pi(a|s) Q_\pi(s, a) = V_\pi(s) \end{aligned}$$

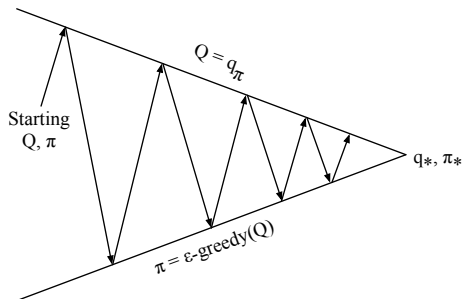
$$Q_\pi(s, \pi'(s)) = \mathcal{T}_{\pi'}(V_\pi) \geq V_\pi(s)$$

以此类推, $V_\pi(s) \leq \dots \mathcal{T}_{\pi'}^\infty \leq (V_\pi) = V_{\pi'}(s)$

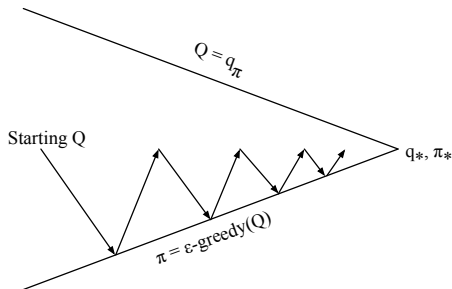


■ 策略评估: MC 学习 $Q = Q_\pi$

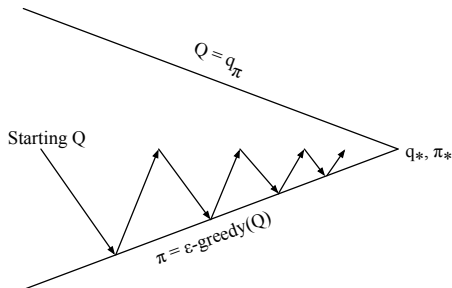
■ 策略提升: ϵ - 贪心策略提升



- **策略评估:** MC 学习 $Q = Q_\pi$
 - (每次需要多条轨迹完成精确的评估后才进行策略提升)
- **策略提升:** ϵ - 贪心策略提升



- 能否每生成一个轨迹:
 - 1 策略评估: MC 学习 $Q \simeq Q_\pi$
 - 2 策略提升: ϵ -贪心策略提升
- 然后再生成下一条轨迹继续迭代



- 能否每生成一个轨迹:
 - 1 策略评估: MC 学习 $Q \simeq Q_\pi$
 - 2 策略提升: ϵ -贪心策略提升
- 然后再生成下一条轨迹继续迭代

每次都是不精确的策略评估 (一次轨迹的 MC 评估) 能否收敛到最优策略?

定义

无限探索, 无穷时刻收敛为贪心策略 (Greedy in the Limit with Infinite Exploration, GLIE) 的含义是

- 智能体无限次数地探索所有的状态 - 动作对

$$\lim_{k \rightarrow \infty} N_k(s, a) = \infty$$

- 策略在无穷时刻收敛到贪心策略

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \pi_k(a|s) = \mathcal{I}(a = \arg \max_{a' \in \mathcal{A}} Q_k(s, a'))$$

- 如果 ϵ -贪心策略的探索率 ϵ 随时间衰减到零 $\lim_{k \rightarrow \infty} \epsilon_k = 0$, 那么它就满足 GLIE
- e.g. $\epsilon_k = \frac{1}{k}$

```
1: 初始化  $Q(s, a) = 0, N(s, a) = 0, \epsilon = 1, k = 1$ 
2:  $\pi_k = \epsilon\text{-greedy}(Q)$ 
3: loop
4:   使用策略  $\pi_k$  采集第  $k$  个轨迹  $\{s_0, a_0, r_1, s_1, \dots, s_T\}$ 
5:   for  $t = 0, \dots, T$  do
6:     if  $(s_t, a_t)$  是  $k$ -次轨迹上首次访问 then
7:        $G_t = r_{t+1} + \gamma r_{t+2} + \dots$ 
8:        $N(s_t, a_t) = N(s_t, a_t) + 1$ 
9:        $Q(s_t, a_t) = Q(s_t, a_t) + \frac{1}{N(s_t, a_t)} (G_t - Q(s_t, a_t))$ 
10:    end if
11:  end for
12:   $k = k + 1, \epsilon = 1/k$ 
13:   $\pi_k = \epsilon\text{-greedy}(Q)$ 
14: end loop
```


定理

GLIE 蒙特卡洛控制是收敛到最优动作-价值函数,
 $Q(s, a) \rightarrow Q_*(s, a)$

定理

GLIE 蒙特卡洛控制是收敛到最优动作 - 价值函数,
 $Q(s, a) \rightarrow Q_*(s, a)$

- 但实际算法运行时, ϵ 更多是使用一个 **固定的常值**, 保证新观测的数据对更新的有效性

定理

GLIE 蒙特卡洛控制是收敛到最优动作-价值函数,
 $Q(s, a) \rightarrow Q_*(s, a)$

- 但实际算法运行时, ϵ 更多是使用一个固定的常值, 保证新观测的数据对更新的有效性
- 那么能否和时间差分学习结合呢?

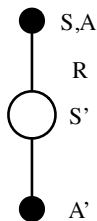
- 时间差分 (TD) 学习和蒙特卡洛 (MC) 方法相比有如下优势
 - 低方差
 - 在线学习
 - 不要求完整的轨迹
- 很自然的想法: 在控制学习中使用 TD 替代 MC
 - 基于 TD 学习 $Q(s, a)$
 - 使用 ϵ -贪心方法进行策略提升
 - 每个时刻都利用观测量对 Q 函数更新

Sarsa

■ Q 函数的贝尔曼期望方程

$$Q_{\pi}(s, a) = \mathcal{R}_s^a + \gamma \sum_{s' \in \mathcal{S}} \mathcal{P}_{ss'}^a \sum_{a' \in \mathcal{A}} \pi(a'|s') Q_{\pi}(s', a')$$

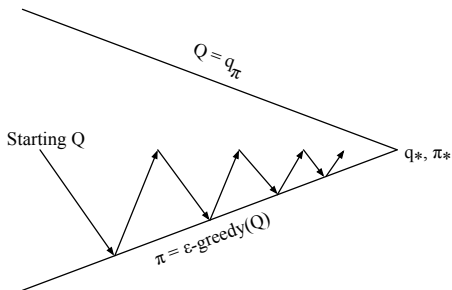
■ 利用 样本 代表奖励 \mathcal{R} 和模型 \mathcal{P} 函数



■ 智能体在线学习时每个时刻都能观察到的一段轨迹 (s, a, r, s', a')

■ TD 学习 Q 函数

$$Q(s, a) \leftarrow Q(s, a) + \alpha (r + \gamma Q(s', a') - Q(s, a))$$



MC 控制

- 每生成一个轨迹:

1 策略评估: MC 学习

$$Q \simeq Q_\pi$$

2 策略提升: ϵ -贪心策略提升

Sarsa 控制

- 在 每一时刻:

1 策略评估: 使用 TD 学习 $Q \approx Q_\pi$

2 策略提升: ϵ -贪心策略提升

- 1: 初始化 $Q(s, a)$, $\pi = \epsilon\text{-greedy}(Q)$, $t = 0$, 初始状态 $s_t = s_0$
- 2: 采样动作 $a_t \sim \pi(s_t)$ 并执行
- 3: 获得观测量 (r_{t+1}, s_{t+1})
- 4: **loop**
- 5: 采样动作 $a_{t+1} \sim \pi(s_{t+1})$ 并执行
- 6: 获得观测量 (r_{t+2}, s_{t+2})
- 7: 根据 $(s_t, a_t, r_{t+1}, s_{t+1}, a_{t+1})$ 更新 Q
$$Q(s_t, a_t) \leftarrow Q(s_t, a_t) + \alpha(r_{t+1} + \gamma Q(s_{t+1}, a_{t+1}) - Q(s_t, a_t))$$
- 8: 策略更新
$$\pi = \epsilon\text{-greedy}(Q)$$
- 9: $t = t + 1$
- 10: **end loop**

定理

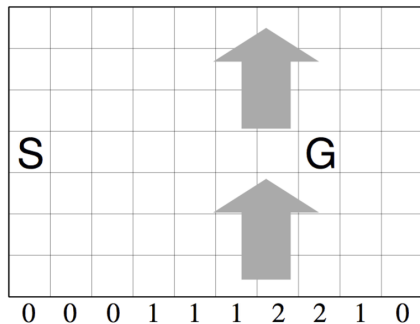
当如下条件满足时 Sarsa 算法是收敛到最优动作 - 价值函数,
 $Q(s, a) \rightarrow Q_*(s, a)$

- 策略序列 $\pi_t(a|s)$ 是 GLIE 的
- 更新步长 α_t 满足 Robbins-Monro 序列要求

$$\sum_{t=1}^{\infty} \alpha_t = \infty, \quad \sum_{t=1}^{\infty} \alpha_t^2 < \infty$$

- e.g. $\alpha_t = 1/t$
- 证明参考 [Singh, S., Jaakkola, T., Littman, M. L., & Szepesvári, C. (2000). Convergence results for single-step on-policy reinforcement-learning algorithms. *Machine learning*, 38(3), 287-308.]

举例：有风的迷宫

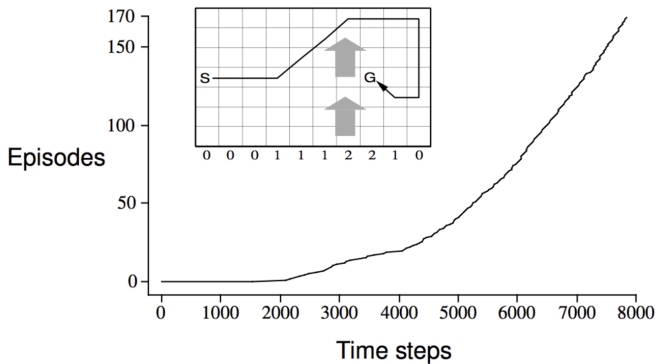


standard
moves



king's
moves

- 在到达目标点之前每一步都有 $R = -1$
- 无折扣因子, $\gamma = 1$



- 曲线斜率的增加代表智能体每个 episode 到达目标的速度越来越快

- 相比于 MC, Sarsa 每一步都在学习, 很快就会发现比较差的动作, 然后转向其它动作
- MC 则是在一段轨迹结束后 (达到终止状态, 或是轨迹序列太长), 再更新 Q , 效率低

- 考虑 n-步的回报, $n = 1, 2, \infty$:

$$n = 1 \quad (\text{Sarsa}) \quad q_t^{(1)} = r_{t+1} + \gamma Q(s_{t+1}, a_{t+1})$$

$$n = 2 \quad q_t^{(2)} = r_{t+1} + \gamma r_{t+2} + \gamma^2 Q(s_{t+2}, a_{t+2})$$

$$\vdots$$

$$n = \infty \quad (MC) \quad q_t^{(\infty)} = r_{t+1} + \gamma r_{t+2} + \cdots + \gamma^{t+T-1} r_T$$

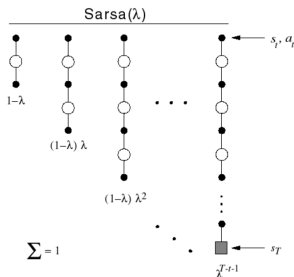
- 定义 n-步的 Q-回报

$$q_t^{(n)} = r_{t+1} + \gamma r_{t+2} + \cdots + \gamma^{n-1} r_{t+n} + \gamma^n Q(s_{t+n}, a_{t+n})$$

- n-步 Sarsa 算法更新 $Q(s, a)$, 向 n-步 Q-回报逼近

$$Q(s_t, a_t) \leftarrow Q(s_t, a_t) + \alpha (q_t^{(n)} - Q(s_t, a_t))$$

- q^λ 回报包含了所有的 n - 步 Q 回报 $q_t^{(n)}$
- 使用 $(1 - \lambda)\lambda^{n-1}$ 对回报加权
(无穷长轨迹)



$$q_t^\lambda = (1 - \lambda) \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} q_t^{(n)}$$

(轨迹在 T 时刻终止)

$$q_t^\lambda = (1 - \lambda) \sum_{n=1}^{T-t-1} \lambda^{n-1} q_t^{(n)} + \lambda^{T-t-1} q_t$$

- 前向 Sarsa(λ) 算法

$$Q(s_t, a_t) \leftarrow Q(s_t, a_t) + \alpha (q_t^\lambda - Q(s_t, a_t))$$

- 和 TD(λ) 算法一样, 将 资格迹 引入到在线控制算法中
- 但是 Sarsa(λ) 算法为 每个状态 - 动作对 都定义资格迹 (vs 之前的 TD(λ) 只定义状态的资格迹)

$$E_0(S, A) = 0$$

$$E_t(S, A) = \gamma\lambda E_{t-1}(S, A) + \mathcal{I}(S = s_t, A = a_t)$$

- 每一时刻对所有的状态和动作的 $Q(s, a)$ 更新
- 更新量与 TD 误差 δ_t 和资格迹 $E_t(S, A)$ 呈正比

$$\delta_t = r_{t+1} + \gamma Q(s_{t+1}, a_{t+1}) - Q(s_t, a_t)$$

$$Q(S, A) \leftarrow Q(S, A) + \alpha \delta_t E_t(S, A), \quad \forall S, A$$

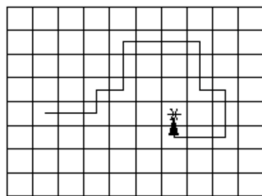
```
1: 初始化  $Q(s, a)$ ,  $\pi = \epsilon\text{-greedy}(Q)$ 
2: repeat {在每个 episode:}
3:   令  $E(S, A) = 0, \forall S, A$ 
4:   初始化  $s$ , 选择  $a \sim \pi(s)$ 
5:   repeat {对 episode 的每一步}
6:     执行  $a$  后观察  $r, s'$ 
7:     选择动作  $a' \sim \pi(s')$ 
8:      $\delta \leftarrow r + \gamma Q(s', a') - Q(s, a)$ 
9:      $E(s, a) \leftarrow E(s, a) + 1$ 
10:    for all  $S \in \mathcal{S}, A \in \mathcal{A}$  do
11:       $Q(S, A) \leftarrow Q(S, A) + \alpha \delta E(S, A)$ 
12:       $E(S, A) \leftarrow \gamma \lambda E(S, A)$ 
13:    end for
14:     $s \leftarrow s', a \leftarrow a'$ 
15:  until  $s$  是终止状态
16: until
```


举例：迷宫问题

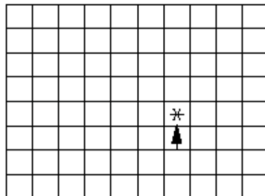


- 智能体在迷宫内行走，到达目标点获得奖励 +1，其它时刻奖励为 0

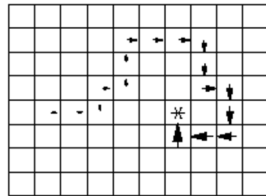
智能体的某一次行走路径



1 步 Sarsa 算法对应的动作价值更新



Sarsa(λ) 在 $\lambda = 0.9$ 时的动作价值更新



- 图 1 是智能体的某次行走轨迹
- 图 2 和图 3 分别展示 1 步 Sarsa 和 Sarsa(λ) 根据轨迹对 (s, a) 的更新
- 箭头代表 $Q(s, a)$ 的更新量

一步 Sarsa vs Sarsa(λ)



- 1 步 Sarsa 只对获得奖励的 **最后一步状态 - 动作** 强化它的 Q 值
- 资格迹方法能够对 **整条轨迹上的状态 - 动作** 强化它们的 Q 值
 - 强化的幅度 (箭头大小) 随着离奖励时刻的距离增加而衰减
 - 衰减率等于 $\gamma\lambda$
 - $0 < \gamma \leq 1, 0 < \lambda \leq 1$

重要性采样

在策略 (on-policy) 和离策略 (off-policy) 学习



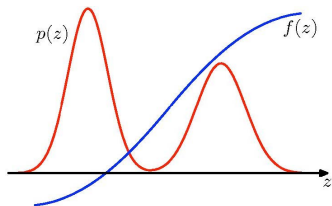
- 在策略学习
 - 根据策略 π 产生的样本来学习关于 π 的相关知识
 - e.g. 皇帝通过微服出巡，亲自下凡了解百姓生活 (On-policy)
- 离策略学习
 - 根据另一个策略 μ 产生的样本来学习关于 π 的相关知识
 - e.g. 派巡查官员去了解地方情况，皇帝本人则躺在皇宫里收听百官情报即可 (Off-policy)

- MC/TD 学习中智能体对策略的评估 V_π 使用的是执行策略 π 后产生的数据
- 但是, 智能体能否用 另一个策略 μ 产生的数据学习 V_π
- 这种学习方式是有意义的:
 - 有时智能体需要观察人类或别的智能体的行为去学习
 - 有时需要重复利用旧策略 $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{t-1}$ 产生的经验去学习
 - 执行探索性的策略去学习最优策略
 - 执行单一的策略去学习多个策略

简单的例子

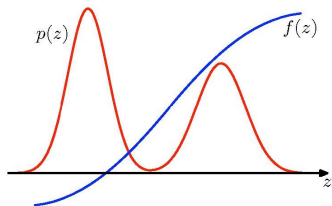


- 变量 z 满足分布 $p(z)$, 定义一个关于 z 的函数 $f(z)$
- 我们想要计算 $p(z)$ 分布下 $f(z)$ 的期望



- 变量 z 满足分布 $p(z)$, 定义一个关于 z 的函数 $f(z)$
- 我们想要计算 $p(z)$ 分布下 $f(z)$ 的期望

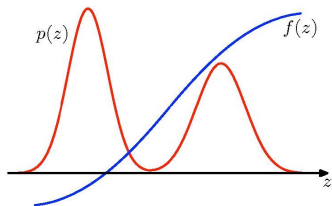
- 从 $p(z)$ 采样的一组独立样本 $\{z^1, \dots, z^N\}$



$$\begin{aligned}\mathbb{E}[f] &= \int f(z)p(z) dz \\ &\approx \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(z^n) = \hat{f}\end{aligned}$$

- 变量 z 满足分布 $p(z)$, 定义一个关于 z 的函数 $f(z)$
- 我们想要计算 $p(z)$ 分布下 $f(z)$ 的期望

- 从 $p(z)$ 采样的一组独立样本 $\{z^1, \dots, z^N\}$



$$\begin{aligned}\mathbb{E}[f] &= \int f(z)p(z) dz \\ &\approx \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(z^n) = \hat{f}\end{aligned}$$

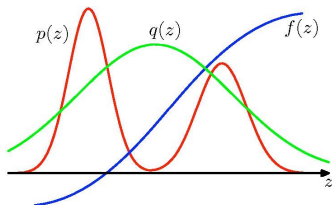
- 基于样本的计算是真实结果的无偏估计

$$\mathbb{E}[\hat{f}] = \mathbb{E}[f]$$

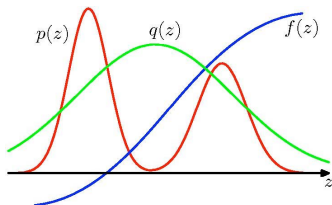
- 方差满足

$$\text{var}[\hat{f}] = \frac{1}{N} \mathbb{E}[(f - \mathbb{E}[f])^2]$$

- 假定有另外一组容易采样的样本 $\{z^1, z^2, \dots, z^N\}$, 满足分布 $q(z)$

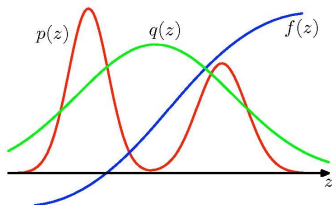


- 假定有另外一组容易采样的样本 $\{z^1, z^2, \dots, z^N\}$, 满足分布 $q(z)$



$$\begin{aligned}\mathbb{E}[f] &= \int f(z)p(z)dz \\ &= \int f(z)\frac{p(z)}{q(z)}q(z)dz \\ &\approx \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \frac{p(z^n)}{q(z^n)} f(z^n), \quad z^n \sim q(z)\end{aligned}$$

- 假定有另外一组容易采样的样本 $\{z^1, z^2, \dots, z^N\}$, 满足分布 $q(z)$



$$\begin{aligned}\mathbb{E}[f] &= \int f(z)p(z)dz \\ &= \int f(z)\frac{p(z)}{q(z)}q(z)dz \\ &\approx \frac{1}{N}\sum_{n=1}^N \frac{p(z^n)}{q(z^n)} f(z^n), \quad z^n \sim q(z)\end{aligned}$$

- 比值 $w^n = p(z^n)/q(z^n)$ 称为 重要性权重 importance weights
- 要求: $q(z) \geq 0$ if $p(z) \geq 0$

- 如果数据的分布是未归一化的, $\tilde{p}(z) = \mathcal{Z}_p p(z)$, $\tilde{q}(z) = \mathcal{Z}_q q(z)$
- 使用 $\tilde{q}(z)$, $\tilde{p}(z)$ 计算 $f(z)$ 的期望

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[f] &= \int f(z) p(z) dz = \int f(z) \frac{p(z)}{q(z)} q(z) dz = \frac{\mathcal{Z}_q}{\mathcal{Z}_p} \int f(z) \frac{\tilde{p}(z)}{\tilde{q}(z)} q(z) dz \\ &\approx \frac{\mathcal{Z}_q}{\mathcal{Z}_p} \frac{1}{N} \sum_n \frac{\tilde{p}(z^n)}{\tilde{q}(z^n)} f(z^n) = \frac{\mathcal{Z}_q}{\mathcal{Z}_p} \frac{1}{N} \sum_n w^n f(z^n)\end{aligned}$$

- 同时 $\mathcal{Z}_p/\mathcal{Z}_q$ 也可以用样本估计

$$\frac{\mathcal{Z}_p}{\mathcal{Z}_q} = \frac{1}{\mathcal{Z}_q} \int \tilde{p}(z) dz = \int \frac{\tilde{p}(z)}{\tilde{q}(z)} q(z) dz \approx \frac{1}{N} \sum_n \frac{\tilde{p}(z^n)}{\tilde{q}(z^n)} = \frac{1}{N} \sum_n w^n$$

- 因此

$$\mathbb{E}[f] \approx \sum_{n=1}^N \frac{w^n}{\sum_{m=1}^N w^m} f(z^n), \quad z^n \sim q(z)$$

- 智能体在 行为策略 μ 作用下产生一条轨迹

$$\tau = \{s_t, a_t, s_{t+1}, \dots, s_T | a_{t:T-1} \sim \mu\}$$

和相应的回报 $G_t = r_{t+1} + \gamma r_{t+2} + \dots$

- 在 μ 下轨迹的概率是

$$p(\tau|\mu) = \mu(a_t|s_t)p(s_{t+1}|s_t, a_t)\mu(a_{t+1}|s_{t+1}) \dots p(s_T|s_{T-1}, a_{T-1})$$

- 在 目标策略 π 作用下智能体产生同一条轨迹的概率是

$$p(\tau|\pi) = \pi(a_t|s_t)p(s_{t+1}|s_t, a_t)\pi(a_{t+1}|s_{t+1}) \dots p(s_T|s_{T-1}, a_{T-1})$$

- 基于重要性采样计算智能体在 π 下的回报

$$G_t^{\pi/\mu} = \frac{p(\tau|\pi)}{p(\tau|\mu)} G_t = \underbrace{\prod_{k=t}^{T-1} \frac{\pi(a_k|s_k)}{\mu(a_k|s_k)}}_{\rho_t} G_t$$

ρ_t 也称为重要性采样比率 importance sampling ratio

- 基于行为策略 μ 的数据, 对 π 的 MC 预测学习变成

$$V(s_t) \leftarrow V(s_t) + \alpha(\rho_t G_t - V(s_t))$$

- 但是这种方法要求 $\mu(a|s) > 0, \forall a \in \mathcal{A}$
- 同时使用重要性采样会进一步加大 MC 方法的方差

- 智能体执行策略 μ 生成数据 $(s_t, a_t, r_{t+1}, s_{t+1})$
- π 的 TD 目标的重要性权重等于 $\pi(a_t|s_t)/\mu(a_t|s_t)$
- TD 学习变成

$$V(s_t) \leftarrow V(s_t) + \alpha \left(\frac{\pi(a_t|s_t)}{\mu(a_t|s_t)} (r_{t+1} + \gamma V(s_{t+1})) - V(s_t) \right)$$

- 方差要比基于重要性采样的 MC 方法小很多
- 而且是在线学习

Q-学习

■ Sarsa 算法是在策略学习

$$Q(s_t, a_t) \leftarrow Q(s_t, a_t) + \alpha(r_{t+1} + \gamma Q(s_{t+1}, a_{t+1}) - Q(s_t, a_t))$$

- 生成数据的行为策略 ϵ -greedy(Q)
- 和评估 Q 的目标策略 ϵ -greedy(Q) 是一致的

$$a_{t+1} \sim \epsilon\text{-greedy}(Q)(s_{t+1})$$

$$\begin{aligned} Q_\pi(s, a) &= \mathcal{R}_s^a + \gamma \sum_{s' \in \mathcal{S}} \mathcal{P}_{ss'}^a \sum_{a' \in \mathcal{A}} \pi(a'|s') Q_\pi(s', a') \\ &\approx r_{t+1} + \gamma Q(s_{t+1}, a_{t+1}) \end{aligned}$$

- ϵ -贪心策略始终不如完全贪心策略, 能否基于离策略方法以贪心策略作为目标策略, 评估它的 Q 函数?

- 以贪心策略 $\pi(s) = \arg \max_a Q(s, a)$ 的 Q 值作为 TD 目标

$$\begin{aligned} Q_{\pi}(s, a) &= \mathcal{R}_s^a + \gamma \sum_{s'} \mathcal{P}_{ss'}^a \sum_{a'} \pi(a'|s') Q_{\pi}(s', a') \\ &= \mathcal{R}_s^a + \gamma \sum_{s'} \mathcal{P}_{ss'}^a \max_{a'} Q_{\pi}(s', a') \\ &\approx r_{t+1} + \gamma \max_{a'} Q(s_{t+1}, a') \end{aligned}$$

- 对 Q 的更新

$$Q(s_t, a_t) \leftarrow Q(s_t, a_t) + \alpha (r_{t+1} + \gamma \max_{a'} Q(s_{t+1}, a') - Q(s_t, a_t))$$

- 智能体产生数据 $(s_t, a_t, r_{t+1}, s_{t+1})$ 的动作依然是根据 ϵ -贪心策略: $a_t \sim \epsilon\text{-greedy}(Q)$
 - 离策略学习: 目标策略 ($\text{greedy}(Q)$) 和行为策略 ($\epsilon\text{-greedy}(Q)$) 不同

- 智能体产生数据 $(s_t, a_t, r_{t+1}, s_{t+1})$ 的动作依然是根据 ϵ -贪心策略: $a_t \sim \epsilon\text{-greedy}(Q)$
 - 离策略学习: 目标策略 ($\text{greedy}(Q)$) 和行为策略 ($\epsilon\text{-greedy}(Q)$) 不同
- 但更新公式没有使用重要性采样权重:
 - 因为计算的 TD 目标是基于已知的 r_{t+1}, s_{t+1} 和确定的 $a' = \arg \max Q(s_{t+1}, a')$, 没有动作选择的随机过程

- 智能体产生数据 $(s_t, a_t, r_{t+1}, s_{t+1})$ 的动作依然是根据 ϵ -贪心策略: $a_t \sim \epsilon\text{-greedy}(Q)$
 - 离策略学习: 目标策略 ($\text{greedy}(Q)$) 和行为策略 ($\epsilon\text{-greedy}(Q)$) 不同
- 但更新公式没有使用重要性采样权重:
 - 因为计算的 TD 目标是基于已知的 r_{t+1}, s_{t+1} 和确定的 $a' = \arg \max Q(s_{t+1}, a')$, 没有动作选择的随机过程
- 思考: 基于重要性采样的 Sarsa 算法更新公式会是什么样的?

- 智能体产生数据 $(s_t, a_t, r_{t+1}, s_{t+1})$ 的动作依然是根据 ϵ -贪心策略: $a_t \sim \epsilon\text{-greedy}(Q)$

- 离策略学习: 目标策略 ($\text{greedy}(Q)$) 和行为策略 ($\epsilon\text{-greedy}(Q)$) 不同

- 但更新公式没有使用重要性采样权重:

- 因为计算的 TD 目标是基于已知的 r_{t+1}, s_{t+1} 和确定的 $a' = \arg \max Q(s_{t+1}, a')$, 没有动作选择的随机过程

- 思考: 基于重要性采样的 Sarsa 算法更新公式会是什么样的?

$$Q(s_t, a_t) \leftarrow Q(s_t, a_t) + \alpha \left(r_{t+1} + \gamma \frac{\pi(a_{t+1}|s_{t+1})}{\mu(a_{t+1}|s_{t+1})} Q(s_{t+1}, a_{t+1}) - Q(s_t, a_t) \right)$$

- 1: 初始化 $Q(s, a)$, $t = 0$, 初始状态 $s_t = s_0$
- 2: 定义策略 $\pi_b = \epsilon\text{-greedy}(Q)$
- 3: **loop**
- 4: 采样动作 $a_t \sim \pi_b(s_t)$ 并执行
- 5: 获得观测量 r_{t+1}, s_{t+1}
- 6: 根据 $(s_t, a_t, r_{t+1}, s_{t+1})$ 更新 Q

$$Q(s_t, a_t) \leftarrow Q(s_t, a_t) + \alpha \left(r_{t+1} + \gamma \max_{a'} Q(s_{t+1}, a') - Q(s_t, a_t) \right)$$

- 7: 更新策略 $\pi_b = \epsilon\text{-greedy}(Q)$
- 8: $t = t + 1$
- 9: **end loop**

- Q-学习中 $Q(s, a)$ 收敛到最优 $Q^*(s, a)$ 的条件?

所有的状态-动作对 (s, a) 被无穷次遍历 (ϵ - 贪心策略)

- Q-学习中的行为策略 π_b 收敛到最优 π^* 的条件?

除了 $Q(s, a)$ 收敛到 $Q^*(s, a)$ 外, ϵ 还要逐渐衰减到 0

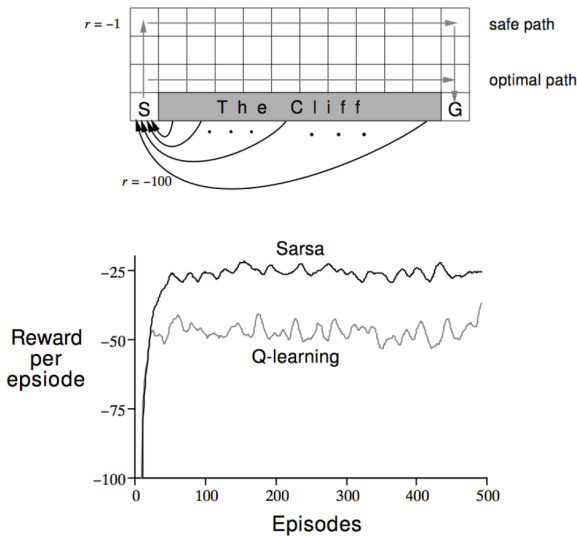
- 也有人认为 Q-学习是价值迭代的在线形式

$$Q_{k+1}(s, a) = \mathcal{R}_s^a + \gamma \sum_{s'} \mathcal{P}_{ss'}^a \max_{a'} Q_k(s', a') \quad (\text{Q 函数的价值迭代})$$

$$\approx r_{t+1} + \gamma \max_{a'} Q(s_{t+1}, a') \quad (\text{基于样本的目标})$$

$$Q(s_t, a_t) \leftarrow Q(s_t, a_t) + \alpha \left(r_{t+1} + \gamma \max_{a'} Q(s_{t+1}, a') - Q(s_t, a_t) \right)$$

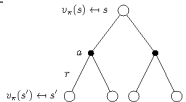

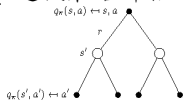
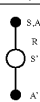
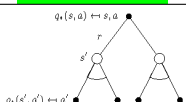
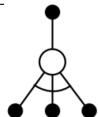
举例：沿着悬崖行走



- Q-学习正确地学到了 **最优路径**，即沿着悬崖的边缘行走
- 但是由于 ϵ -贪心策略会采取一定概率的随机动作，有时智能体跌入悬崖
- Sarsa 学到的是 **安全路径**，即沿着网格的最顶端行走
- Sarsa 在学习过程中考虑了随机探索动作的影响
- 即使 Sarsa 学到的安全路径比 Q-学习的最优路径行走步数要长，但是每个 episode 获得的奖励和却比 Q-学习的高

动态规划和时间差分学习的关系 (1)



	全体后继更新 (DP) Full Backup	样本更新 (TD) Sample Backup
$V_{\pi}(s)$ 的贝尔曼 期望方程	 <p>迭代策略评估</p>	 <p>TD 学习</p>
$Q_{\pi}(s, a)$ 的贝尔曼 期望方程	 <p>Q-策略迭代</p>	 <p>Sarsa</p>
$Q_{\pi}(s, a)$ 的贝尔曼 最优方程	 <p>Q-价值迭代</p>	 <p>Q-学习</p>

动态规划和时间差分学习的关系 (2)



全体后继更新 (DP)	样本更新 (TD)
迭代策略评估 $V(s) \leftarrow \mathbb{E}[R + \gamma V(s') s]$	TD 学习 $V(s) \stackrel{\alpha}{\leftarrow} r + \gamma V(s')$
Q-策略迭代 $Q(s, a) \leftarrow \mathbb{E}[R + \gamma Q(s', a') s, a]$	Sarsa $Q(s, a) \stackrel{\alpha}{\leftarrow} r + \gamma Q(s', a')$
Q-价值迭代 $Q(s, a) \leftarrow \mathbb{E}[R + \gamma \max_{a' \in \mathcal{A}} Q(s', a') s, a]$	Q- 学习 $Q(s, a) \stackrel{\alpha}{\leftarrow} r + \gamma \max_{a' \in \mathcal{A}} Q(s', a')$

其中 $x \stackrel{\alpha}{\leftarrow} y \equiv x \leftarrow x + \alpha(y - x)$

- 资格迹描述的是目标策略的轨迹上状态或状态 - 动作的强化权重
- Q 学习是离策略方法, ϵ -greedy 行为策略产生的轨迹会有探索动作
- 与目标策略的 greedy 动作不一致
- 因此 $Q(\lambda)$ 需要额外处理行为策略和目标策略之间的不同

```
1: 初始化  $Q(S, A)$ ,  $E(S, A) = 0, \forall S, A$ 
2: repeat {对每个 episode:}
3:   初始化  $s, a$ 
4:   repeat {对 episode 的每一步:}
5:     执行动作  $a$ , 观测  $r, s'$ 
6:     根据  $Q$  提取的策略 (e.g.  $\epsilon$ -greedy) 对  $s'$  选择动作  $a'$ 
7:      $a^* \leftarrow \arg \max_b Q(s', b)$ 
8:      $\delta \leftarrow r + \gamma Q(s', a^*) - Q(s, a)$ 
9:      $E(s, a) \leftarrow E(s, a) + 1$ 
10:    for all  $S, A$ : do
11:       $Q(S, A) \leftarrow Q(S, A) + \alpha \delta E(S, A)$ 
12:      if  $a' = a^*$  then
13:         $E(S, A) \leftarrow \gamma \lambda E(S, A)$ 
14:      else
15:         $E(S, A) \leftarrow 0$ 
16:      end if
17:    end for
18:     $s \leftarrow s', a \leftarrow a'$ 
19:  until  $s$  是终止状态
20: until
```

- Watkin's $Q(\lambda)$ 只累积轨迹上连续采用 greedy 动作的资格迹
- 每遇到 ϵ 探索动作或轨迹到达终止状态, 资格迹重新置 0
- 缺点: 由于频繁的探索动作, 资格迹会经常置 0, 起不到信息积累作用
- 其它改进算法: Peng's $Q(\lambda)$, Naïve $Q(\lambda)$
- 但是普遍 $Q(\lambda)$ 算法不如 Sarsa(λ) 效果明显

Double Q 学习

- 考虑这样的 MDP: 1 个状态 ($|\mathcal{S}| = 1$), 2 个动作, 每个动作获得均值 0 的奖励 ($\mathbb{E}[r|a = a_1] = \mathbb{E}[r|a = a_2] = 0$)
- 那么 $Q(s, a_1) = Q(s, a_2) = 0 = V(s)$

- 考虑这样的 MDP: 1 个状态 ($|S| = 1$), 2 个动作, 每个动作获得均值 0 的奖励 ($\mathbb{E}[r|a = a_1] = \mathbb{E}[r|a = a_2] = 0$)
- 那么 $Q(s, a_1) = Q(s, a_2) = 0 = V(s)$
- 假设先前有执行动作 a_1 和 a_2 的样本
- 基于这些有限的样本计算 $\hat{Q}(s, a_1), \hat{Q}(s, a_2)$ 作为对 Q 的估计
- 假设我们用了一种无偏的方法估计 Q , e.g.
$$\hat{Q}(s, a_1) = \frac{1}{n(s, a_1)} \sum_{i=0}^{n(s, a_1)} r_i(s, a_1)$$

- 考虑这样的 MDP: 1 个状态 ($|S| = 1$), 2 个动作, 每个动作获得均值 0 的奖励 ($\mathbb{E}[r|a = a_1] = \mathbb{E}[r|a = a_2] = 0$)
- 那么 $Q(s, a_1) = Q(s, a_2) = 0 = V(s)$
- 假设先前有执行动作 a_1 和 a_2 的样本
- 基于这些有限的样本计算 $\hat{Q}(s, a_1), \hat{Q}(s, a_2)$ 作为对 Q 的估计
- 假设我们用了一种无偏的方法估计 Q , e.g.
$$\hat{Q}(s, a_1) = \frac{1}{n(s, a_1)} \sum_{i=0}^{n(s, a_1)} r_i(s, a_1)$$
- 基于估计的 \hat{Q} 定义贪心策略 $\hat{\pi} = \arg \max_a \hat{Q}(s, a)$
- 尽管每个 $Q(s, a)$ 的估计是无偏的, 但是以此得到的策略 $\hat{\pi}$ 对应的价值的期望 $\hat{V}^{\hat{\pi}}$ 是有偏的

- 考虑这样的 MDP: 1 个状态 ($|S| = 1$), 2 个动作, 每个动作获得均值 0 的奖励 ($\mathbb{E}[r|a = a_1] = \mathbb{E}[r|a = a_2] = 0$)
- 那么 $Q(s, a_1) = Q(s, a_2) = 0 = V(s)$
- 假设先前有执行动作 a_1 和 a_2 的样本
- 基于这些有限的样本计算 $\hat{Q}(s, a_1), \hat{Q}(s, a_2)$ 作为对 Q 的估计
- 假设我们用了一种无偏的方法估计 Q , e.g.
$$\hat{Q}(s, a_1) = \frac{1}{n(s, a_1)} \sum_{i=0}^{n(s, a_1)} r_i(s, a_1)$$
- 基于估计的 \hat{Q} 定义贪心策略 $\hat{\pi} = \arg \max_a \hat{Q}(s, a)$
- 尽管每个 $Q(s, a)$ 的估计是无偏的, 但是以此得到的策略 $\hat{\pi}$ 对应的价值的期望 $\hat{V}^{\hat{\pi}}$ 是有偏的

$$\begin{aligned}\hat{V}^{\hat{\pi}} &= \mathbb{E}[\max(\hat{Q}(s, a_1), \hat{Q}(s, a_2))] && (V = \max Q \text{ 的期望}) \\ &\geq \max(\mathbb{E}[\hat{Q}(s, a_1)], \mathbb{E}[\hat{Q}(s, a_2)]) && (\text{Jensen's inequality}) \\ &= \max(0, 0) = 0 = V^*\end{aligned}$$

- 基于有限样本估计的 Q 函数, 生成的贪心策略会导致 **最大化偏差**
- 偏差产生的原因在于 use *max of estimates as estimate of max of true values*
- 解决办法: 将样本分成两组, 分别定义两个独立的估计

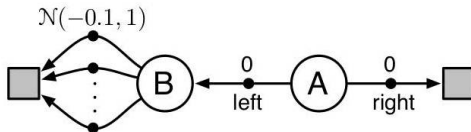
$$\hat{Q}_1(s, a_i), \hat{Q}_2(s, a_i)$$

- 1 使用一个 Q 函数计算 max 动作: $a^* = \arg \max_a \hat{Q}_1(s, a)$
 - 2 使用另一个 Q 函数估计 a^* 的价值: $\hat{Q}_2(s, a^*)$
 - 3 获得无偏的估计: $\mathbb{E}[\hat{Q}_2(s, a^*)] = Q(s, a^*)$
- 为什么是无偏估计?
 - 假定在第 1 步中选择 $a^* = a_1$ 的概率是 $p(a_1)$, 选择 $a^* = a_2$ 的概率是 $p(a_2)$, 并且 $p(a_1) + p(a_2) = 1$
 - $\hat{Q}_2(s, a)$ 是真实 $Q(s, a)$ 的无偏估计

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\hat{Q}_2(s, a^*)] &= \mathbb{E}[p(a_1)\hat{Q}_2(s, a_1) + p(a_2)\hat{Q}_2(s, a_2)] \\ &= p(a_1)Q(s, a_1) + p(a_2)Q(s, a_2) = 0 = V^*\end{aligned}$$

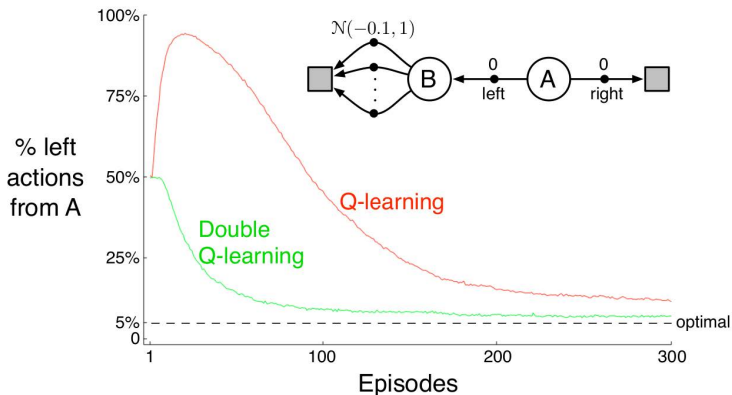
- 1: 初始化 $Q_1(s, a)$, $Q_2(s, a)$, 初始化状态 $s_t = s_0$
- 2: **loop**
- 3: 在 $\pi(s) = \arg \max_a (Q_1(s, a) + Q_2(s, a))$ 基础上选择 ϵ -greedy 动作 a_t
- 4: 获得观测量 r_{t+1}, s_{t+1}
- 5: **if** with 0.5 probability **then**
- 6: $Q_1(s_t, a_t) \leftarrow Q_1(s_t, a_t) + \alpha(r_{t+1} + \gamma Q_1(s_{t+1}, \arg \max_{a'} Q_2(s_{t+1}, a')) - Q_1(s_t, a_t))$
- 7: **else**
- 8: $Q_2(s_t, a_t) \leftarrow Q_2(s_t, a_t) + \alpha(r_{t+1} + \gamma Q_2(s_{t+1}, \arg \max_{a'} Q_1(s_{t+1}, a')) - Q_2(s_t, a_t))$
- 9: **end if**
- 10: **end loop**

Example from Sutton & Barto 2018 (Figure 6.7)



–Sutton, R.S., & Barto, A.G. (2011). Reinforcement Learning: An Introduction.

The MDP has two non-terminal states A and B. Episodes always start in A with a choice between two actions, left and right. The right action transitions immediately to the terminal state with a reward and return of zero. The left action transitions to B, also with a reward of zero, from which there are many possible actions all of which cause immediate termination with a reward drawn from a normal distribution with mean -0.1 and variance 1.0 . Thus, the expected return for any trajectory starting with left is -0.1 , and thus taking left in state A is always a mistake.



Nevertheless, Q-learning method may favor left because of maximization bias making B appear to have a positive value. Figure 6.7 shows that Q-learning with ϵ -greedy action selection initially learns to strongly favor the left action on this example. Even at asymptote, Q-learning takes the left action about 5% more often than is optimal at our parameter settings ($\epsilon = 0.1$, $\alpha = 0.1$, and $\gamma = 1$).

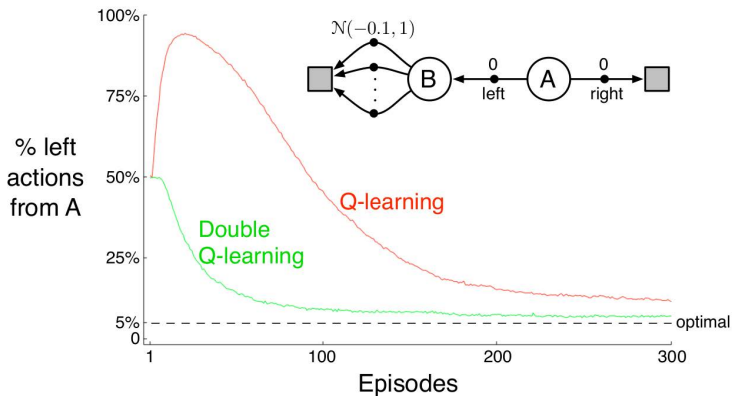


Figure 6.7: Comparison of Q-learning and Double Q-learning on a simple episodic MDP (shown inset). Q-learning initially learns to take the left action much more often than the right action, and always takes it significantly more often than the 5% minimum probability enforced by ϵ -greedy action selection with $\epsilon = 0.1$. In contrast, Double Q-learning is essentially unaffected by maximization bias. These data are averaged over 10,000 runs. The initial action-value estimates were zero. Any ties in ϵ -greedy action selection were broken randomly.

探索与利用

- 在线决策过程存在的一个关键问题是：
 - 利用：根据当前的信息做出最佳的决策
 - 探索：采样更多的信息
- 想要做出长期的最佳决策有时需要牺牲当前短期的部分利益
- 收集更多的信息从而做出整体最佳的决策

■ 选择餐馆

- **利用:** 去你平时最喜欢去的餐馆
- **探索:** 尝试一个之前没去过的

■ 网站植入广告

- **利用:** 植入当前收益最大的广告
- **探索:** 尝试一个不同的广告

■ 石油钻井

- **利用:** 沿着当前已知的最好的点向下挖
- **探索:** 在一个新的点钻井

■ 玩游戏

- **利用:** 使用你认为是最优的打法
- **探索:** 尝试一种新打法

- 如果 Q-学习没有探索, 即 $\epsilon = 0$, 学习结果容易陷入局部最优解, 无法找到真正最优策略
- 如果 ϵ 很大也不好
 - 1 状态, 动作空间很大时, 想要探索整个空间是费时费力的, 对在线学习过程不利
 - 2 随机的动作会降低智能体的实际回报

$$\pi_t(s) = \begin{cases} \arg \max_{a \in \mathcal{A}} Q_t(s, a), & \text{with } 1 - \epsilon_t \text{ probability} \\ \text{random } a \in \mathcal{A}, & \text{with } \epsilon_t \text{ probability} \end{cases}$$

- ϵ -贪心策略的探索率随时间衰减

$$\epsilon_t = \max(\epsilon_0 \cdot d^t, \epsilon_{\min})$$



- ϵ -贪心策略除了最优动作, 其它动作以等概率随机选择
- 假如: 有两个动作看起来不错, 而其它的动作完全不可行
- 那么比较合理的探索方式是选择那些看起来不错的动作
 - 从不错的动作中选出最优的动作
 - 而不是将精力浪费在看起来不可行的动作
- 根据动作 - 价值决定动作被选中的概率

$$\pi(a|s) = \frac{e^{Q(s,a)/T}}{\sum_{a' \in \mathcal{A}} e^{Q(s,a')/T}}$$

- a 被选中的概率与 $e^{Q(s,a)/T}$ 呈正比 ($Q(s, a) \geq 0, \forall s, a$)
- 温度系数 $T > 0$ 决定了策略的随机性能
 - 如果 T 很大, 所有动作几乎以等概率选择 (探索)
 - 如果 T 很小, 高价值的动作更容易被选中 (利用)
 - 极限情况 $T \rightarrow 0$, 只选择最优动作

蒙特卡洛控制

Sarsa

重要性采样

Q-学习

Double Q 学习

探索与利用