

一点说明

隐消点 (vanishing point), 隐消线 (vanishing line), 圆环点 (circular points) 是射影空间中的重要元素。这些元素的投影性质对摄像机标定和基于图像的测量具有重要的应用价值。本节将对这些内容进行简要介绍。 本节是国科大研究生课程:《计算机视觉》讲义的附录三.

附录中的很多内容均是中科院自动化研究所 吴福朝 研究员撰写的。尽管笔者也参与了一些编写, 但主体工作都是吴福朝研究员完成的, 在此特别强调说明, 并对吴老师致以谢意.

胡占义

2019-8-25

主要包括

隐消点、隐消线和圆环点图像的代数表达, 以及它们与摄像机内参数的关联性质, 即如何利用隐消点、隐消线与圆环点图像来确定摄像机的内参数。

3.1 隐消点、隐消线与圆环点

隐消点(Vanishing Point)、隐消线(Vanishing Line)在三维计算机视觉中具有特殊的重要性,因为利用它们可以恢复某些空间度量信息,例如计算空间两条直线、两个平面之间的夹角等。此外,利用它们还可以得到关于内参数矩阵 K 的约束,从而计算出摄像机内参数。

3.1.1 隐消点、隐消线

隐消点

直线 L 上的无穷远点的像点称为直线 L 的隐消点。平行直线与无穷远平面相交于同一个无穷远点,因此平行直线有一个相同的隐消点。换句话说,隐消点只与直线的方向有关而与直线的位置无关。令 $D = (d^T, 0)^T$ 是直线 L 与无穷远平面的交点,则向量 d 是该直线的方向,有时也用 D 来表示直线的方向,因此隐消点通常也说成是直线方向 D 的隐消点。

在几何上,直线 L 的隐消点 v 是与直线 L 平行且通过摄像机光心的直线 L' 与像平面的交点,如图 3.1.1 所示。事实上,对于 L 上任一点 X ,则 X 的图像是摄像机光心 C 与 X 的连线与像平面的交点。特别地,取直线 L 上的无穷远点 D ,则通过摄像机光心和 D 的直线必与直线 L 平行,因此隐消点 v 是与直线 L 平行且通过摄像机光心的直线 L' 与像平面的交点。

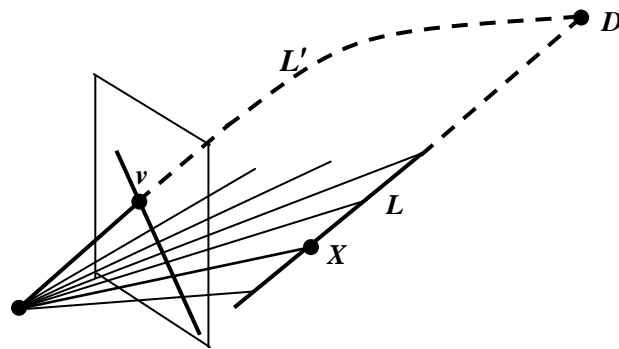


图 3.1.1: 直线 L 的隐消点 v

下面给出隐消点的代数表示。令摄像机矩阵为 $P = (H_\infty, p_4)$, 直线 L 上的无穷远点为 $D = (d^T, 0)^T$, 其中 H_∞ 是无穷远平面到像平面的单应矩阵(见附录 2 式(2.2.9))。在直线上取

一个有限点 X_0 ，则 L 的方程可表示为

$$X(u) = \frac{1}{u} X_0 + D$$

当 $u \rightarrow \infty$ 时，必有 $X(u) \rightarrow D$ 。令 $X(u)$ 的像点为 $m(u)$ ，则有

$$m(u) = PX(u) = \frac{1}{u} PX_0 + PD = \frac{1}{u} m_0 + H_\infty d$$

所以，当 $u \rightarrow \infty$ 时，必有 $m(u) \rightarrow H_\infty d$ ，如图 3.1.1 所示。于是，我们有下述命题：

命题 3.1.1 令摄像机矩阵为 $P = (H_\infty, p_4)$ ，直线 L 的方向为 d ，则直线 L 的隐消点为

$$v = H_\infty d \quad (3.1.1)$$

两条直线的夹角 令直线 L_1, L_2 的方向分别为 d_1, d_2 ，则由欧氏几何可知 L_1, L_2 的夹角(如图 3.1.2 所示)为

$$\cos \theta = \frac{d_1^T d_2}{\sqrt{d_1^T d_1} \cdot \sqrt{d_2^T d_2}} \quad (3.1.2)$$

命题 3.1.2 已知直线 L_1, L_2 的隐消点分别为 v_1, v_2 (如图 3.1.2 所示)，摄像机矩阵 $P = (H_\infty, p_4)$ 或摄像机内参数矩阵 K ，则有

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{v_1^T (H_\infty^{-T} H_\infty^{-1}) v_2}{\sqrt{v_1^T (H_\infty^{-T} H_\infty^{-1}) v_1} \cdot \sqrt{v_2^T (H_\infty^{-T} H_\infty^{-1}) v_2}} \\ &= \frac{v_1^T C v_2}{\sqrt{v_1^T C v_1} \cdot \sqrt{v_2^T C v_2}} \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

其中 $C = K^{-T} K^{-1}$ 是绝对二次曲线的图像(IAC)。

证明 从式(3.1.1)，得到 $d_1 = H_\infty^{-1} v_1, d_2 = H_\infty^{-1} v_2$ 。将它们代入(3.1.2)式，得到(3.1.3)中的第一个等式。注意到 $H_\infty^{-T} H_\infty^{-1} = K^{-T} K^{-1}$ ，立即得到(3.1.3)中的第二个等式。证毕。

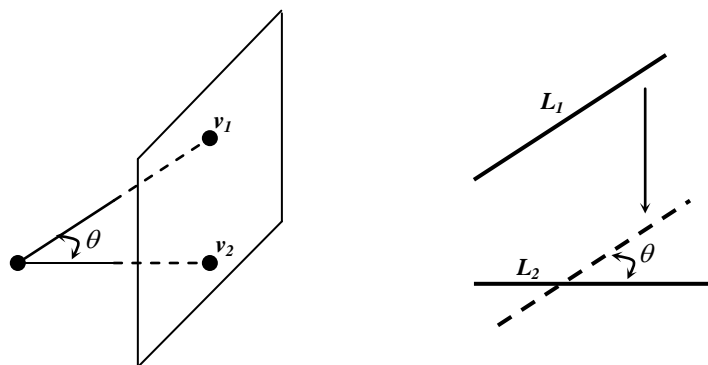


图 3.1.2: 两条直线的夹角

式(3.1.3)中的第一个等式表明，如果已知摄像机矩阵与直线的隐消点，我们就可以计算

两条直线之间的夹角。由于图像点在像平面中的位置不依赖于世界坐标系的选择,从式(3.1.3)中的第二个等式我们还可以看出:从图像计算直线间的夹角与摄像机内参数有关而与外参数无关。这是符合客观实际的,因为两直线间的夹角不因世界坐标系的改变而发生变化。

在已知摄像机内参数的情况下,由两条直线的隐消点可以根据式(3.1.3)来计算这两条直线的夹角。反过来,如果已知两条直线的夹角和它们的隐消点,则式(3.1.3)就提供了关于摄像机内参数的约束。因此,式(3.1.3)又常常被用于确定摄像机内参数,请参阅本章第 3.1.2 节。

隐消线

平面 π 上的无穷远直线 L_∞ 在像平面上的投影直线称为该平面的隐消线。平行平面相交于无穷远平面上的同一条直线,因而平行平面有相同的隐消线。换句话说,隐消线只与平面的法向量(或称为平面的方向)有关而与平面的位置无关。在几何上,平面 π 的隐消线 l 是与平面 π 平行且通过摄像机光心的平面与像平面的交线,如图 3.1.3 所示。

下面给出隐消线的代数表达。令 L_1, L_2 是平面 π 上的相交于有限点的两条直线,其无穷远点分别为 $D_1 = (d_1^T, 0)^T, D_2 = (d_2^T, 0)^T$, 则平面 π 上的无穷远线是通过 D_1, D_2 的直线,并且平面 π 的方向为 $n = d_1 \times d_2$ 。令 l 是平面 π 的隐消线的像直线,则线 L_1, L_2 的隐消点 v_1, v_2 是 l 上两个不同的点(如图 3.1.4 所示)。于是,根据式 3.1.1,可推知

$$l = v_1 \times v_2 = H_\infty d_1 \times H_\infty d_2 = H_\infty^{-T} (d_1 \times d_2) = H_\infty^{-T} n = K^{-T} R n$$

因此,有下述命题:

命题 3.1.3 令摄像机矩阵为 $P = (H_\infty, p_4)$, 平面 π 的方向 n , 则隐消线为

$$l = H_\infty^{-T} n = K^{-T} R n \quad (3.1.4)$$

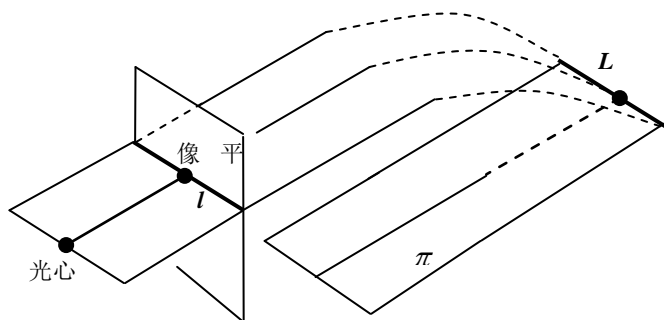


图 3.1.3: 平面 π 的隐消线 l

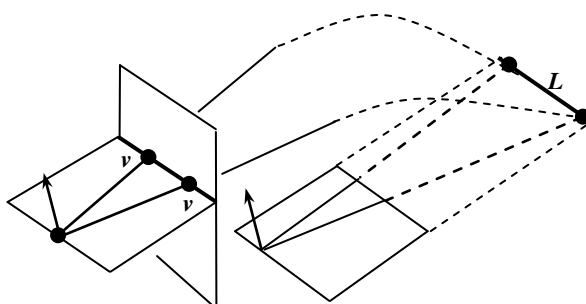


图 3.1.4: 平面 π 隐消线 $l = v_1 \times v_2$

两平面间的夹角 令平面 π_1, π_2 的方向分别为 n_1, n_2 ，于是由欧氏几何， π_1, π_2 的夹角可表示为

$$\cos \theta = \frac{n_1^T n_2}{\sqrt{n_1^T n_1} \cdot \sqrt{n_2^T n_2}} \quad (3.1.5)$$

从式(3.1.4)和(3.1.5)，不难推出下述命题。

命题 3.1.4 已知平面 π_1, π_2 的隐消线分别为 l_1, l_2 ，摄像机矩阵为 $P = (H_\infty, p_4)$ 摄像机内参数矩阵 K ，则有

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{l_1^T (H_\infty H_\infty^T) l_2}{\sqrt{l_1^T (H_\infty H_\infty^T) l_1} \cdot \sqrt{l_2^T (H_\infty H_\infty^T) l_2}} \\ &= \frac{l_1^T C^* l_2}{\sqrt{l_1^T C^* l_1} \cdot \sqrt{l_2^T C^* l_2}} \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

其中 $C^* = KK^T$ 是绝对二次曲面的图像，它是 $C = K^{-T} K^{-1}$ 的对偶(DIAC)。在已知两个平面的夹角和它们隐消线的情况下，式(3.1.6)也可被用于确定摄像机内参数。

3.1.2 正交性与摄像机内参数

在本节中，总是用 $C = K^{-T} K^{-1}$ 表示 IAC， $C^* = KK^T$ 表示 DIAC。

两条正交直线的隐消点，称为一对正交隐消点^{*)}。类似地，也有正交隐消线的概念。由正交隐消点或正交隐消线，可以建立关于摄像机内参数的线性约束方程，从而可解出摄像机的内参数。

命题 3.1.5

(1) 假定两条空间直线 L_1, L_2 上的隐消点分别为 v_1, v_2 ，则有

$$L_1 \perp L_2 \Rightarrow v_2^T C v_1 = 0 \quad (3.1.7)$$

(2) 假定空间中两张平面 π_1, π_2 的隐消线分别为 l_1, l_2 ，则

$$\pi_1 \perp \pi_2 \Rightarrow l_2^T C^* l_1 = 0 \quad (3.1.8)$$

(3) 假定直线 L 与平面 π 的隐消点与隐消线分别为 v, l ，则

$$L \perp \pi \Rightarrow l = C v, \text{ 或等价地, } v = C^* l \quad (3.1.9)$$

注意：上述等式都是齐次等式，即对于给定点的齐次坐标或直线的齐次坐标，上述等式在相差一个非零常数因子的意义下成立。

证明 (1)和(2)直接由公式(3.1.3)和(3.1.6)得到。(3)的证明如下：由于 $L \perp \pi$ ，则对

^{*)} 注意这里的正交是指隐消点对应的空间直线相互正交，并非指表示隐消点的两个向量相互正交。

$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in l$, $(\mathbf{v}, \mathbf{v}_1)$, $(\mathbf{v}, \mathbf{v}_2)$ 是两对正交隐消点。所以, 从(3.1.7), 可知:

$$\mathbf{v}^T C \mathbf{v}_1 = 0, \mathbf{v}^T C \mathbf{v}_2 = 0$$

从而, 可推知

$$\mathbf{v} = C \mathbf{v}_1 \times C \mathbf{v}_2 = C^* (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2) = C^* l$$

证毕。

命题 3.1.5 表明, 如果从图像中能获得 5 组以上的正交隐消点或隐消线, 就能得到 5 个以上的关于 IAC 或 DIAC 的线性约束方程, 而 IAC 或 DIAC 只含有 5 个独立的参数, 所以将这些方程联立起来就可以解出 IAC 或 DIAC, 再通过 IAC 或 DIAC 的 Cholesky 分解^{**)}就可以确定摄像机的内参数矩阵。

三正交隐消点 如果 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ 是两两正交隐消点, 则称 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ 为三正交隐消点。对于三正交隐消点, 在形式上可提供下述三组关于内参数的约束方程:

$$x \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = C \mathbf{v}_3, y \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_3 = C \mathbf{v}_2, z \mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3 = C \mathbf{v}_1$$

这里, 显式地给出了常数因子 x, y, z , 它们都是未知非零常数。因此, 在上述每一组中消去常数因子后可以得到两个关于内参数的独立约束方程, 但下述命题表明: 在它们联立的 6 个约束方程中仅有三个是独立的。

命题 3.1.6 令 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ 是三正交方向的隐消点, 则摄像机的 IAC 和 DIAC 的解为

$$C = (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2)(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2)^T + s_1(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_3)(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_3)^T + s_2(\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3)(\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3)^T \quad (3.1.10)$$

$$C^* = \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_1^T + s_1^* \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_2^T + s_2^* \mathbf{v}_3 \mathbf{v}_3^T \quad (3.1.11)$$

证明 由于 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ 是三正交方向的隐消点, 所以存在未知常数 x, y, z 使得

$$x \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = C \mathbf{v}_3, y \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_3 = C \mathbf{v}_2, z \mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3 = C \mathbf{v}_1$$

因此, 有

$$C(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) = (z \mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3, y \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_3, x \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2)$$

由于 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ 是三正交方向的隐消点, 所以不共线, 从而有

$$C = (z \mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3 \ y \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_3 \ x \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2)(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)^{-1}$$

所以

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{\det(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)} (z \mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3, y \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_3, x \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2) \begin{pmatrix} (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3)^T \\ (\mathbf{v}_3 \times \mathbf{v}_1)^T \\ (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2)^T \end{pmatrix} \\ &= \frac{z(\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3)(\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3)^T + y(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_3)(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_3)^T + x(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2)(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2)^T}{\det(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)} \end{aligned}$$

于是, 在相差一个常数因子的意义下, 摄像机的 IAC 可以表示为

$$C = (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2)(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2)^T + s_1(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_3)(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_3)^T + s_2(\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3)(\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3)^T$$

用同样的方法可证明: 摄像机的 DIAC 可以表示为 $C^* = \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_1^T + s_1^* \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_2^T + s_2^* \mathbf{v}_3 \mathbf{v}_3^T$ 。证毕。

^{**)} Cholesky 分解见附录 A2.3.

命题 3.1.6 不但给出了 IAC 和 DIAC 的计算公式，同时也说明从单幅图像上三正交隐消点只能提供关于内参数的三个独立的约束，尽管在形式上提供了 6 个方程。因此，需要两组三正交隐消点，才能完全确定摄像机内参数。

当摄像机的畸变因子为零且像素的纵横比为 1 时，根据这些约束可以完全确定式 (3.1.10, 3.1.11) 中的未知常数，即此时从单幅图像上的三正交隐消点可以标定摄像机。另外值得指出的是，在这种情况下，摄像机的主点是三角形 v_1, v_2, v_3 的三条高线的交点。

例 3.1.1 利用两个长方体的图像确定摄像机内参数。

图 3.1.5 是一个空间长方体的图像，记 8 个顶点图像分别为 m_1, m_2, \dots, m_8 。利用长方体平行棱相交于同一个隐消点的性质，可以从图像上得到三正交隐消点 v_1, v_2, v_3 ：

$$v_1 = (m_1 \times m_2) \times (m_3 \times m_4)$$

$$v_2 = (m_3 \times m_7) \times (m_4 \times m_8)$$

$$v_3 = (m_1 \times m_4) \times (m_2 \times m_3)$$

根据命题 3.1.6，有

$$C = (v_1 \times v_2)(v_1 \times v_2)^T + s_1(v_1 \times v_3)(v_1 \times v_3)^T + s_2(v_2 \times v_3)(v_2 \times v_3)^T$$

如果另一个长方体不与当前的长方体平行，则根据它的图像确定可得到另一组三正交隐消点，并得到 C 的另一组线性约束方程，从而能唯一确定常数 s_1, s_2 。这样，就确定了 C 。再使用 Cholesky 分解将其分解成 $C = \tilde{K}^{-T} \tilde{K}^{-1}$ (其中 \tilde{K} 是对角元均大于零的上三角矩阵)。此时， \tilde{K} 与摄像机内参数 K 相差一个常数因子。由于 K 的最后一个元素是 1，所以摄像机内参数必为 $K = \tilde{k}_{33}^{-1} \tilde{K}$ 。

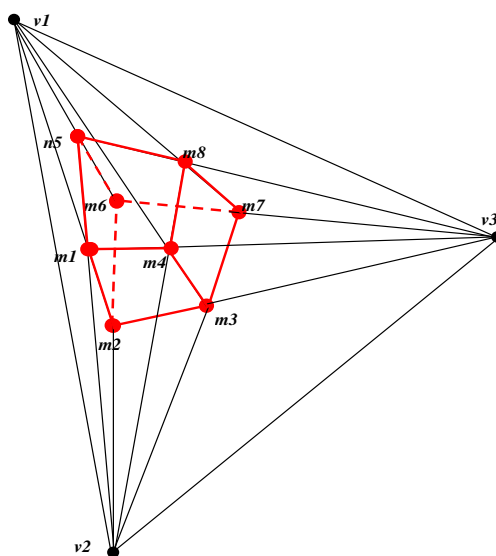


图 3.1.5：由长方体的图像得到三正交隐消点 v_1, v_2, v_3

3.1.3 圆环点与摄像机内参数

平面 π 上所有圆与该平面的无穷远线有两个公共的交点，这两个交点称为该平面的两个圆环点(Circular Point)或绝对点(Absolute Point)。圆环点是一对共轭的虚点。由于平行平面相交于同一条无穷远线，所以它们的圆环点是相同的，即平行平面有相同的圆环点。在无穷远平面上，绝对二次曲线是一个虚圆，它与每条无穷远线也相交于两个点，这两个交点就是通过这条无穷远直线的平面上的两个圆环点，因此绝对二次曲线是由所有平面的圆环点所构成的集合。

平面 π 上的两个圆环点 I, J 的坐标可以分别为 $I = (1, i, 0)^T, J = (1, -i, 0)^T$ 。由于平面 π 上的两个圆环点 I, J 都在绝对二次曲线(AC)上，所以它们的像 m_I, m_J 必在 IAC 上。因此，可得到下述关于 IAC 的约束方程^{*)}：

$$m_I^T C m_I = 0, m_J^T C m_J = 0 \quad (3.1.12)$$

由于 m_I, m_J 是一对共轭点，在上述两个方程中，实际上只能提供下述两个关于 IAC 的实线性约束方程：

$$\text{Re}(m_I^T C m_I) = 0, \text{Im}(m_I^T C m_I) = 0 \quad (3.1.13)$$

其中：Re, Im 分别表示复数的实部和虚部。

如果能从图像上获得两两不平行的三个平面上圆环点的图像，则可以得到 IAC 上的 6 个点。由于平面上 5 个点确定一条二次曲线，因此这 6 个点足以拟合出 IAC，从而可以确定摄像机内参数。这里要求每两个平面不平行，是因为平行平面有相同的圆环点。

简单标定装置 确定摄像机内参数，通常称为摄像机标定(Camera Calibration)。根据圆环点关于内参数的约束，可以设计一种简单的标定装置，如图 3.1.6 所示。通过这个装置的图像来简化求解圆环点图像的过程，从而对摄像机进行标定。

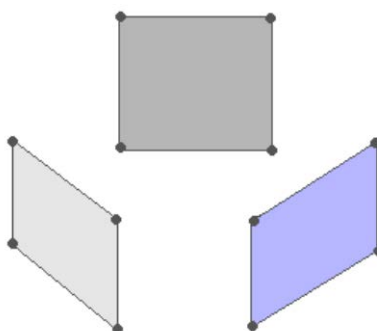


图 3.1.6：由三个正方形构成的简单的标定装置，每两个正方形的边长可以不相等，但要求它们所在的平面是不平行的。

图中每个正方形所在平面的两个圆环点的图像可以按下述方法来获取：令正方形的 4

^{*)} 请参考附录二相关内容。

个顶点坐标分别为

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, X_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, X_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

注意：每一个正方形都可以这样设定。利用这些顶点的图像坐标，可以求出正方形所在平面到像平面的单应矩阵 H 。于是，该平面圆环点的像坐标为

$$m_{I,J} = H \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \\ 0 \end{pmatrix} = h_1 \pm ih_2$$

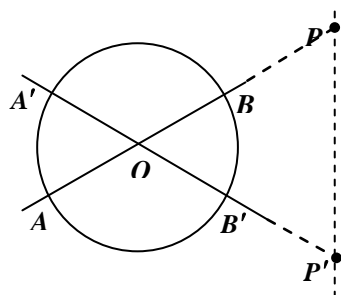
这样，就得到 IAC 的线性约束方程：

$$(h_1 \pm ih_2)^T C (h_1 \pm ih_2) = 0$$

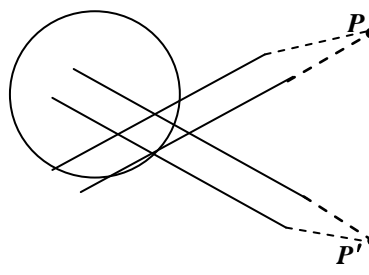
每一正方形关于 C 提供两个独立的约束，三个正方形一共得到 6 个约束。由于这三个正方形两两不共面，所以由这 6 个约束可唯一确定二次曲线 C ，从而可确定摄像机内参数。

确定圆环点的图像

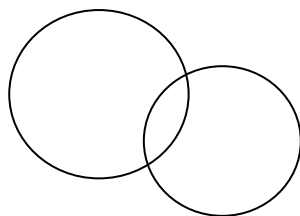
基于圆环点的标定方法的关键问题是如何在图像平面上确定圆环点的图像。由于圆环点是虚点而无法从图像直接获取，因此只有借助图像中所包含的相关场景结构信息才能得到圆环点图像。例如：上面利用正方形的图像来获取圆环点图像。下面给出能获取圆环点图像的一些特殊图形。



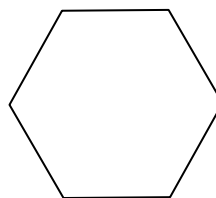
(a)



(b)



(c)



(d)

图 3.1.7: 确定圆环点的图像的一些特殊图形

圆与通过其中心的两条直线 如图 3.1.7(a)所示, 两条直线分别交无穷远直线于 P 、 P' 两点, 且交比 $(AB; OP) = -1$, $(A'B'; OP') = -1$ 。由于投影变换保持交比不变, 所以可以求出 P 和 P' 的图像点坐标, 从而可求得平面的隐消线方程。圆的图像是一条二次曲线, 并且可以用曲线拟合的方法, 求出它在像平面上的方程, 由隐消线方程与这个二次曲线方程联立求解, 就得到圆环点的图像坐标。

圆与两组平行线 如图 3.1.7 (b)所示, 两组平行直线分别交无穷远直线于 P 、 P' 两点, P 、 P' 两点的连线即为该平面的无穷远线。由两组平行直线的像, 我们可以求出 P 和 P' 的图像点坐标, 从而得到平面的隐消线方程。与圆和通过其中心的两条直线的情况一样, 最终可得到圆环点的图像坐标。

两个圆 如图 3.1.7 (c)所示, 两个相交的圆有两个实交点与两个虚交点, 显然这两个虚交点即为圆环点, 因为平面上任何一个圆都相交于圆环点。于是两条图像曲线 (二次曲线) 的两个虚交点即为圆环点在图像平面上的投影。

正 $2n$ ($n > 2$) 边形 如图 3.1.7 (d)所示, 由正 $2n$ ($n > 2$) 边形确定圆环点的方法: 从 n 组平行对边得到 n 个隐消点, 再用直线拟合得到隐消线。另外, $2n$ 个顶点共圆, 因此用二次曲线拟合顶点的图像得到一个圆的图像曲线, 并将它与隐消线联立求解得到圆环点的图像坐标。

平面相似图形 设 X , Y 是同一张平面 π 上的两个相似图形, 记 $\square = \{X_1, X_2, \dots, X_4, \dots\}$, $\square = \{Y_1, Y_2, \dots, Y_4, \dots\}$ 是一组相似的点对应 (如图 3.1.8 所示), 于是存在二维相似变换 S 使得 $Y_j = SX_j$ 。

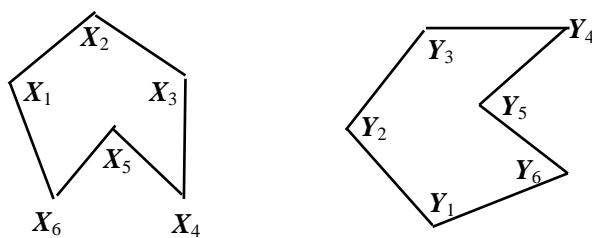


图 3.1.8: 相似图形可确定圆环点的图像

令 \square , \square 的图像点分别为 $\square_x = \{x_1, x_2, \dots, x_4, \dots\}$, $\square_y = \{y_1, y_2, \dots, y_4, \dots\}$, 于是存在一个二维射影变换 H 使得 $x_j = HX_j$, $y_j = HY_j$ 。于是, 有 $y_j = HSH^{-1}x_j$, 即 $\square_x \leftrightarrow \square_y$ 是一组射影对应。记 $H_p = HSH^{-1}$, 当 $\square_x \leftrightarrow \square_y$ 中包含 4 个以上的点对应时, 我们可以唯一确定射影变换 H_p 。

命题 3.1.7 H_p 的两个互为共轭复特征向量是平面 π 上的两个圆环点的图像。

证明 显然，平面 π 上任一点 X 的图像必为 $x=HX$ 。令 J 是平面 π 上的一个圆环点，则它的像点是 $m_J=HJ$ 。由于相似变换 S 保持圆环点不变^{*)}，即 $SJ=J$ ，所以有

$$H_p m_J = H_p HJ = HSJ = HJ = m_J$$

又因圆环点 J 是虚点，并且 H_p 是一个实矩阵，所以 m_J 是 H_p 的一个复特征向量。因此 H_p 的两个互为共轭复特征向量是平面 π 上的两个圆环点的图像。证毕。

圆环点与其所在平面的正交方向

假定平面 π 上的两个圆环点 I, J 的图像分别为 m_I, \bar{m}_I ，且平面 π 方向 D 的隐消点为 v ，如图 3.1.9 所示。下面通过 m_I, \bar{m}_I 和 v 导入摄像机内参数的线性约束方程。

由于通过 I, J 的无穷远直线的图像是平面 π 的隐消线，所以根据命题 3.1.5(3)，有

$$(m_I \times \bar{m}_I) = xCv$$

平面 π 的方向 D 关于绝对二次曲线的极线是通过 I, J 的无穷远直线，而 I, J 在绝对二次曲线上，因此通过 $\{D, I\}$ 与 $\{D, J\}$ 的两条直线是绝对二次曲线的两条切线，所以，

$$(m_I \times v) = yCm_I$$

$$(\bar{m}_I \times v) = \bar{y}C\bar{m}_I$$

其中： \bar{x} 表示 x 的共轭。这样，就得到 IAC 的线性约束方程：

$$\begin{cases} (m_I \times \bar{m}_I) = xCv \\ (m_I \times v) = yCm_I \\ (\bar{m}_I \times v) = \bar{y}C\bar{m}_I \end{cases} \quad (3.1.14)$$

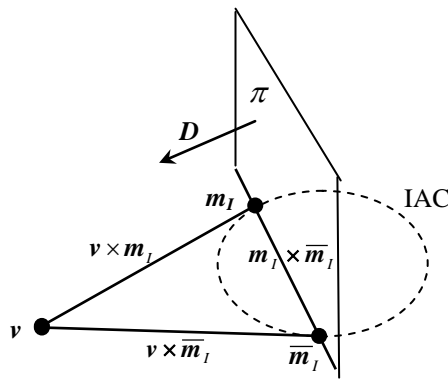


图 3.1.9: 圆环点与正交方向的隐消点 m_I, \bar{m}_I, v

式(3.1.14)的对偶形式是

^{*)} 见第 2 章命题 1.1.11。

$$\begin{cases} C^*(\mathbf{m}_I \times \overline{\mathbf{m}}_I) = x\mathbf{v} \\ C^*(\mathbf{m}_I \times \mathbf{v}) = y\mathbf{m}_I \\ C^*(\overline{\mathbf{m}}_I \times \mathbf{v}) = \overline{y}\mathbf{m}_I \end{cases} \quad (3.1.15)$$

关于方程(3.1.14)与(3.1.15)的解，我们有下述命题：

命题 3.1.8 方程(3.1.14)和(3.1.15)的解分别为

$$\begin{aligned} C &= \lambda(\mathbf{m}_I \times \overline{\mathbf{m}}_I)(\mathbf{m}_I \times \overline{\mathbf{m}}_I)^T - (\mathbf{m}_I \times \mathbf{v})(\overline{\mathbf{m}}_I \times \mathbf{v})^T - (\overline{\mathbf{m}}_I \times \mathbf{v})(\mathbf{m}_I \times \mathbf{v})^T \\ &= 2\lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b})(\mathbf{a} \times \mathbf{b})^T + (\mathbf{a} \times \mathbf{v})(\mathbf{a} \times \mathbf{v})^T + (\mathbf{b} \times \mathbf{v})(\mathbf{b} \times \mathbf{v})^T \end{aligned} \quad (3.1.16)$$

$$C^* = \lambda(\mathbf{m}_I \overline{\mathbf{m}}_I^T + \overline{\mathbf{m}}_I \mathbf{m}_I^T) + \mathbf{v}\mathbf{v}^T = 2\lambda(\mathbf{a}\mathbf{a}^T + \mathbf{b}\mathbf{b}^T) + \mathbf{v}\mathbf{v}^T \quad (3.1.17)$$

其中 λ 为一个非零实数， \mathbf{a}, \mathbf{b} 分别为 \mathbf{m}_I 的实部和虚部。

证明 只须证明(3.1.17)，因为用类似的方法可得到(3.1.16)。由

$$\begin{cases} C^*(\mathbf{m}_I \times \overline{\mathbf{m}}_I) = x\mathbf{v} \\ C^*(\mathbf{m}_I \times \mathbf{v}) = y\mathbf{m}_I \\ C^*(\overline{\mathbf{m}}_I \times \mathbf{v}) = \overline{y}\mathbf{m}_I \end{cases}$$

知：

$$\begin{aligned} C^* &= (x\mathbf{v}, y\mathbf{m}_I, \overline{y}\mathbf{m}_I)(\mathbf{m}_I \times \overline{\mathbf{m}}_I, \mathbf{m}_I \times \mathbf{v}, \overline{\mathbf{m}}_I \times \mathbf{v})^{-1} \\ &= (x\mathbf{v}, y\mathbf{m}_I, \overline{y}\mathbf{m}_I) \cdot \frac{1}{\det(\mathbf{v}, \mathbf{m}_I, \overline{\mathbf{m}}_I)} \begin{pmatrix} \mathbf{v}^T \\ -\overline{\mathbf{m}}_I^T \\ \mathbf{m}_I^T \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\det(\mathbf{v}, \mathbf{m}_I, \overline{\mathbf{m}}_I)} (x\mathbf{v}\mathbf{v}^T - y\mathbf{m}_I \overline{\mathbf{m}}_I^T + \overline{y}\mathbf{m}_I \mathbf{m}_I^T) \quad (y = y_1 + iy_2) \\ &= x\mathbf{v}\mathbf{v}^T - (y_1 + iy_2)\mathbf{m}_I \overline{\mathbf{m}}_I^T + (y_1 - iy_2)\overline{\mathbf{m}}_I \mathbf{m}_I^T \quad (\text{齐次等式，即相差一个常数意义下相等}) \\ &= x\mathbf{v}\mathbf{v}^T - y_1(\mathbf{m}_I \overline{\mathbf{m}}_I^T - \overline{\mathbf{m}}_I \mathbf{m}_I^T) - iy_2(\mathbf{m}_I \overline{\mathbf{m}}_I^T + \overline{\mathbf{m}}_I \mathbf{m}_I^T) \\ &= x\mathbf{v}\mathbf{v}^T - iy_2(\mathbf{m}_I \overline{\mathbf{m}}_I^T + \overline{\mathbf{m}}_I \mathbf{m}_I^T) \quad (\text{因为 } C^* \text{ 对称，可知 } y_1 = 0) \\ &= \mathbf{v}\mathbf{v}^T + \lambda(\mathbf{m}_I \overline{\mathbf{m}}_I^T + \overline{\mathbf{m}}_I \mathbf{m}_I^T) \quad (\text{齐次等式。}\lambda \text{ 为一个非零实数，因为 } x \text{ 是个纯虚数}) \\ &= \mathbf{v}\mathbf{v}^T + 2\lambda(\mathbf{a}\mathbf{a}^T + \mathbf{b}\mathbf{b}^T) \end{aligned}$$

命题 3.1.8 表明：通过一个平面上的圆环点与其正交方向，可以提供关于摄像机内参数的四个独立约束。如果摄像机使用 4 参数模型，例如畸变因子为零，则根据命题 3.1.8，可以确定摄像机内参数矩阵 K 。因为，此时 IAC 中的元素 $c_{12} = 0$ ，所以由这个约束可以确定(3.1.16)式中的未知常数 λ 。

例 3.1.3 从圆柱的图像标定内参数。假定摄像机畸变因子为零，则从一个圆柱的图像就足以确定内参数。图 3.1.9 是一个圆柱的图像，从圆柱上、下面的两个圆的图像，可确定两个圆环点的图像，而与两个圆环点正交方向的隐消点是两条母线的图像的交点，因此可

从圆柱图像的轮廓线中获取。

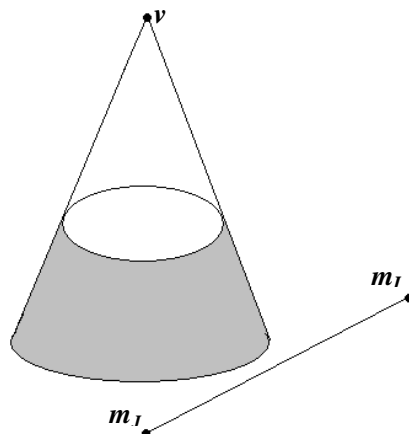


图 3.1.9: 从圆柱的图像可确定两个圆环点与正交方向的图像 m_I, \bar{m}_I, v 。

3.1.4 圆环点的图像与正交隐消点之间的关系

本节将考虑平面的圆环点的图像与该平面的正交隐消点之间的联系。

假定 I, J 是平面 π 上的两个圆环点，而 D_1, D_2 是该平面上的两条直线的方向，则由拉格尔(Laguerre)定理^{*)}可知，方向 D_1, D_2 正交的充要条件是交比: $(D_1 D_2; IJ) = -1$ ，即 D_1, D_2 与 I, J 调和共轭。由射影变换的保交比性，立即得到下述命题：

命题 3.1.9 设圆环点 I, J 的图像分别为 m_I, \bar{m}_I ， v_1 是任一隐消点，则与 v_1 正交的隐消点 v_2 是下述方程的唯一解：

$$(v_1 v_2; m_I \bar{m}_I) = -1 \quad (3.1.18)$$

根据命题 3.1.9，可以从圆环点的图像得到所有的正交隐消点。这表明所有正交隐消点所提供的信息均隐含在圆环点的图像所提供的信息之中。例如：根据命题 3.1.5(1)，每一对正交隐消点都提供摄像机内参数的一个约束方程，由于同一平面上的正交隐消点有无穷多对，这些正交隐消点将提供关于摄像机内参数的无穷多个约束方程，但这无穷多个约束方程中仅有两个是独立的，这是因为该平面圆环点的图像关于摄像机内参数仅能提供两个独立的约束方程。

由平面圆环点的图像，可以计算出该平面上的所有正交隐消点。反之，能否从平面上的正交隐消点计算出该平面圆环点的图像？对此，我们有下列命题。

命题 3.1.10 如果 (p_1, p_2) 与 (q_1, q_2) 是平面 π 上的两对不相同的正交隐消点，则可以确定

^{*)}拉格尔(Laguerre)定理：设两条非极小直线的交角为 θ ，又这两条直线与过它们交点的两条极小直线所成的交比为 μ ，则必有 $\theta = (\ln \mu) / (2i)$ 。极小直线是指通过一个圆环点的直线。

平面 π 上圆环点的图像。

证明 令平面 π 上的两个圆环点的图像为 $\mathbf{m}_I, \mathbf{m}_J$ ，由于它们是一对共轭点，所以可记为

$$\mathbf{m}_I = (x_1 + ix_2, y_1 + iy_2, 1)^T, \mathbf{m}_J = (x_1 - ix_2, y_1 - iy_2, 1)^T$$

记 $\mathbf{p}_i = (u_i^{(p)}, v_i^{(p)}, 1), \mathbf{q}_i = (u_i^{(q)}, v_i^{(q)}, 1)$ ，因正交隐消点 $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2)$ 与 $\mathbf{m}_I, \mathbf{m}_J$ 调和共轭，所以有

$$(\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2; \mathbf{m}_I \mathbf{m}_J) = \frac{x_1 + ix_2 - u_1^{(p)}}{x_1 + ix_2 - u_2^{(p)}} : \frac{x_1 - ix_2 - u_1^{(p)}}{x_1 - ix_2 - u_2^{(p)}} = \frac{y_1 + iy_2 - v_1^{(p)}}{y_1 + iy_2 - v_2^{(p)}} : \frac{y_1 - iy_2 - v_1^{(p)}}{y_1 - iy_2 - v_2^{(p)}} = -1 \quad (3.1.19)$$

$$(\mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2; \mathbf{m}_I \mathbf{m}_J) = \frac{x_1 + ix_2 - u_1^{(q)}}{x_1 + ix_2 - u_2^{(q)}} : \frac{x_1 - ix_2 - u_1^{(q)}}{x_1 - ix_2 - u_2^{(q)}} = \frac{y_1 + iy_2 - v_1^{(q)}}{y_1 + iy_2 - v_2^{(q)}} : \frac{y_1 - iy_2 - v_1^{(q)}}{y_1 - iy_2 - v_2^{(q)}} = -1 \quad (3.1.20)$$

求解上述方程组，可得到 \mathbf{m}_I 的如下 4 个可能的解

$$\mathbf{m}_I^{(1)} = (x_1^* + ix_2^*, y_1^* + iy_2^*, 1)^T, \mathbf{m}_I^{(2)} = (x_1^* - ix_2^*, y_1^* - iy_2^*, 1)^T \quad (3.1.21)$$

$$\mathbf{m}_I^{(1)} = (x_1^* - ix_2^*, y_1^* + iy_2^*, 1)^T, \mathbf{m}_I^{(2)} = (x_1^* + ix_2^*, y_1^* - iy_2^*, 1)^T \quad (3.1.22)$$

其中：

$$x_1^* = \frac{u_1^{(p)} u_2^{(p)} - u_1^{(q)} u_2^{(q)}}{u_1^{(p)} + u_2^{(p)} - u_1^{(q)} - u_2^{(q)}}$$

$$y_1^* = \frac{v_1^{(p)} v_2^{(p)} - v_1^{(q)} v_2^{(q)}}{v_1^{(p)} + v_2^{(p)} - v_1^{(q)} - v_2^{(q)}}$$

$$x_2^* = \sqrt{\frac{(u_1^{(p)} - u_1^{(q)})(u_1^{(q)} - u_2^{(p)})(u_1^{(p)} - u_2^{(q)})(u_2^{(p)} - u_2^{(q)})}{(u_1^{(p)} + u_2^{(p)} - u_1^{(q)} - u_2^{(q)})^2}}$$

$$y_2^* = \sqrt{\frac{(v_1^{(p)} - v_1^{(q)})(v_1^{(q)} - v_2^{(p)})(v_1^{(p)} - v_2^{(q)})(v_2^{(p)} - v_2^{(q)})}{(v_1^{(p)} + v_2^{(p)} - v_1^{(q)} - v_2^{(q)})^2}}$$

不难看出这 4 个可能解正好分成两组(3.1.21)和(3.1.22)，每组中的两个解互为共轭。因此，如果某组中有一个是 \mathbf{m}_I 的解，则另一个必然是 \mathbf{m}_J 的解。下面将证明在这两组解中，只有一组是合理的。假定两组解都是合理的，则 $\mathbf{m}_I^{(1)}, \mathbf{m}_I^{(2)}$ 与 $\mathbf{m}_I^{(3)}, \mathbf{m}_I^{(4)}$ 均在 $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ 两点所确定的直线上，因此必有

$$\text{Det} \begin{pmatrix} u_1^{(p)} & v_1^{(p)} & 1 \\ u_2^{(p)} & v_2^{(p)} & 1 \\ x_1^* + ix_2^* & y_1^* + iy_2^* & 1 \end{pmatrix} = \text{Det} \begin{pmatrix} u_1^{(p)} & v_1^{(p)} & 1 \\ u_2^{(p)} & v_2^{(p)} & 1 \\ x_1^* & y_1^* & 1 \end{pmatrix} + i \text{Det} \begin{pmatrix} u_1^{(p)} & v_1^{(p)} & 1 \\ u_2^{(p)} & v_2^{(p)} & 1 \\ x_2^* & y_2^* & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\text{Det} \begin{pmatrix} u_1^{(p)} & v_1^{(p)} & 1 \\ u_2^{(p)} & v_2^{(p)} & 1 \\ x_1^* - ix_2^* & y_1^* + iy_2^* & 1 \end{pmatrix} = \text{Det} \begin{pmatrix} u_1^{(p)} & v_1^{(p)} & 1 \\ u_2^{(p)} & v_2^{(p)} & 1 \\ x_1^* & y_1^* & 1 \end{pmatrix} + i \text{Det} \begin{pmatrix} u_1^{(p)} & v_1^{(p)} & 1 \\ u_2^{(p)} & v_2^{(p)} & 1 \\ -x_2^* & y_2^* & 0 \end{pmatrix} = 0$$

于是，我们有

$$\begin{cases} (v_1^{(p)} - v_2^{(p)})x_2^* + (u_2^{(p)} - u_1^{(p)})y_2^* = 0 \\ -(v_1^{(p)} - v_2^{(p)})x_2^* + (u_2^{(p)} - u_1^{(p)})y_2^* = 0 \end{cases}$$

当平面 π 与像平面的每一个坐标轴都不平行时，因平面 π 的隐消线是过光心且平行于 π 的平面与像平面的交线，所以隐消线不与像平面的任何一个坐标轴相平行。又 $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ 在隐消线上，所以必有 $u_2^{(p)} - u_1^{(p)} \neq 0$ 且 $v_1^{(p)} - v_2^{(p)} \neq 0$ 。于是，

$$\text{Det} \begin{pmatrix} v_1^{(p)} - v_2^{(p)} & u_2^{(p)} - u_1^{(p)} \\ -(v_1^{(p)} - v_2^{(p)}) & u_2^{(p)} - u_1^{(p)} \end{pmatrix} = (v_1^{(p)} - v_2^{(p)})(u_2^{(p)} - u_1^{(p)}) \neq 0$$

因此， $x_2^* = 0, y_2^* = 0$ 。这样，圆环点的图像必为实点，这是不可能的。所以，在(3.1.21)和(3.1.22)两组解中，仅有一组是圆环点图像的合理解。

注：在退化情况下，即当平面 π 与像平面某个坐标轴平行时，则平面 π 的隐消线平行于像平面的 u 轴或 v 轴，因此方程组(3.1.19)或(3.1.20)中的方程是同解的。此时，无法确定圆环点的图像。