Необходимые ведения из линейной алгебры, высшей и дискретной математики

§1. Векторы

§1.1. Определение вектора

Вектором называется направленный отрезок, то есть отрезок, у которого указаны начало (наз. также точкой приложения вектора) и конец.

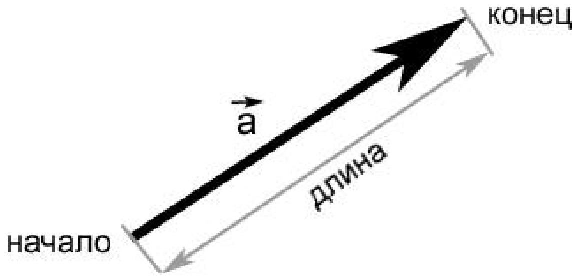


Рисунок 1. Изображение вектора

Длина направленного отрезка, изображающего вектор, называется ***длиной***, или ***модулем***, вектора. Длина вектора $\vec{a}$ обозначается $|\vec{a}|$.

Нуль-вектор – вектор, начало и конец которого совпадают, его модуль равен *0*, а направление неопределенное. Обозначается $(\vec{0})$.

Ортом, или единичным вектором, называется вектор, длина которого равна единице.

§1.2. Координатное представление

Пусть на плоскости задана декартова система координат XOY (рис. 2).

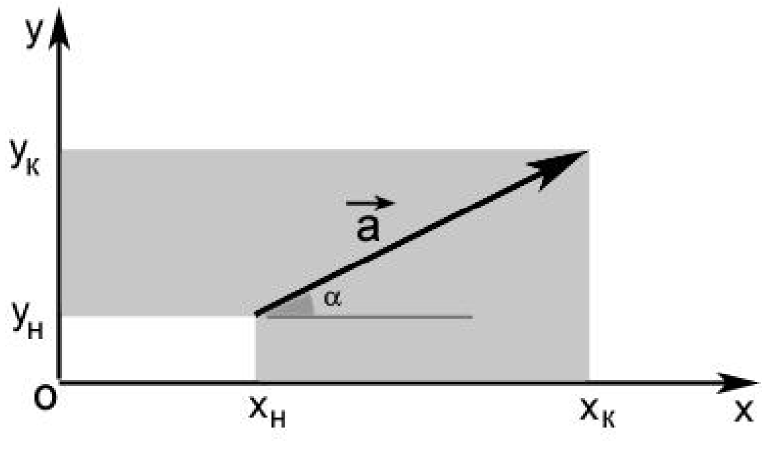


Рисунок 2. Изображение вектора в координатном представлении

Согласно рис. 2, вектор задан парой чисел, составляющих начало координат $(x_н, y_н)$ и парой числе, составляющих конец координат $(x_к, y_к)$.

Тогда вектор может быть задан двумя числами:

$$a_x = x_к - x_н \text{ и } a_y = y_к - y_н \quad (1)$$

Эти числа a_x и a_y в геометрии называют *координатами вектора*, а в физике – проекциями вектора на соответствующие оси координат. Вектор можно записать как:

$$\vec{a} = (a_x, a_y) \quad (2)$$

При таком определении вектора его модуль

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \quad (3)$$

Чтобы выполнить обратное действие – отобразить вектор в системе координат, необходимо знать систему координат, заданную единичными векторами – ортами.

Пусть на плоскости задана декартова система координат при помощи единичных векторов $\vec{i}$ и $\vec{j}$:

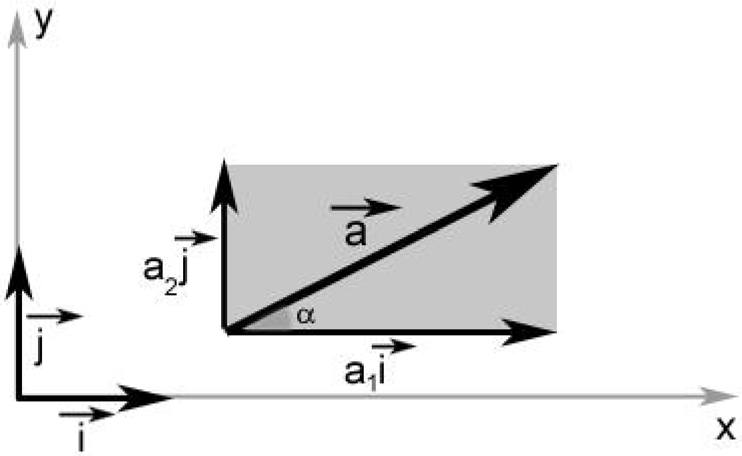


Рисунок 3. Изображение вектора в системе координат, заданной ортами

Тогда вектор может быть задан следующим образом:

$$\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} \quad (4)$$

Очевидно, что:

$$a_1 = a_x \text{ и } a_2 = a_y \quad (5)$$

§1.3. Коллинеарность векторов

Векторы называются ***коллинеарными***, если они лежат либо на одной прямой, либо на параллельных прямых.

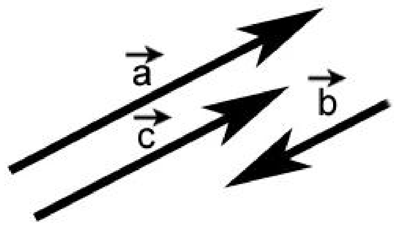


Рисунок 4. Коллинеарные вектора

Координаты коллинеарных векторов удовлетворяют соотношению:

$$\frac{a_x}{a_y} = \frac{b_x}{b_y} = \frac{c_x}{c_y} \tag{6}$$

§1.4. Равенство векторов

Два вектора называются ***равными***, если они коллинеарны, имеют одинаковую длину и одинаково направлены.

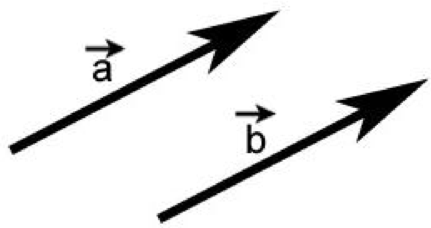


Рисунок 5. Равные вектора

Все нуль-векторы считаются равными.

Координаты равных векторов удовлетворяют соотношениям:

$$a_x = b_x \text{ и } a_y = b_y \tag{7}$$

§1.5. Ортогональность

Векторы, лежащие на перпендикулярных прямых или векторы, образующие угол в 90º, называются ***ортогональными***.

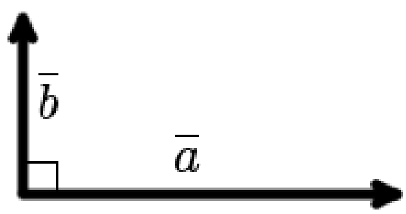
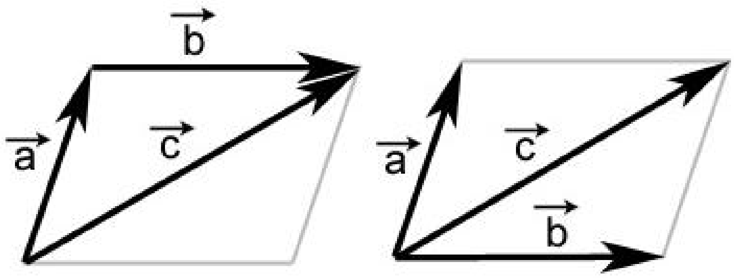


Рисунок 6. Ортогональные векторы

§1.6. Сумма векторов

Суммой $\vec{a}+\vec{b}$ векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называют вектор $\vec{c}$, идущий из начала вектора $\vec{a}$ в конец вектора $\vec{b}$ при условии, что начало вектора $\vec{b}$ приложено к концу вектора $\vec{a}$ (рис. 7а). Если векторы неколлинеарны, то можно воспользоваться правилом параллелограмма (рис. 7б):



а) б)

Рисунок 7. Сумма векторов: а – правило треугольника, б – правило параллелограмма

Координаты вектора суммы двух векторов удовлетворяют соотношениям:

$$c_x = a_x + b_x \text{ и } c_y = a_y + b_y \quad (8)$$

В случае вычисления суммы в системе координат, заданной ортами:

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1)\vec{i} + (a_2 + b_2)\vec{j} \quad (9)$$

Построение суммы нескольких векторов наглядно видно из рис. 8, где суммирующий вектор $\vec{s}$ приложен к началу вектора $\vec{a}$ и концу вектора $\vec{d}$.

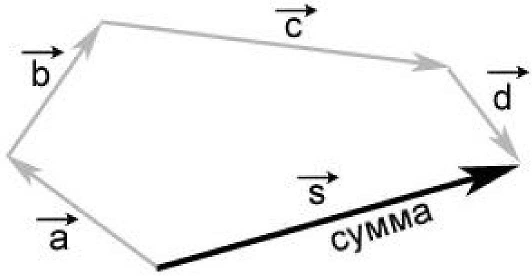


Рисунок 8. Пример суммы векторов

§1.7. Произведение вектора на число

Произведением $\alpha\vec{a}$ вектора $\vec{a}$ на число α называют вектор, коллинеарный вектору $\vec{a}$, имеющий длину, равную $|\alpha| \cdot |\vec{a}|$, и направление, совпадающее с направлением $\vec{a}$ при $\alpha > 0$ и противоположное $\vec{a}$ при $\alpha < 0$.

Если взять вектор $\vec{a}$ с противоположным $-\vec{a}$ знаком, то получим вектор с противоположным направлением, или вектор, противоположный $-\vec{a}$.

Координаты вектора произведения вектора на число удовлетворяют соотношениям:

$$(\alpha\vec{a})_x = \alpha a_x \text{ и } (\alpha\vec{a})_y = \alpha a_y \qquad (10)$$

В случае вычисления суммы в системе координат, заданной ортами:

$$\alpha\vec{a} = \alpha a_1\vec{i} + \alpha a_2\vec{j} \qquad (11)$$

§1.8. Свойства действий над векторами

Операции сложения векторов и умножения вектора на число обладают следующими свойствами:

1) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
2) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$
3) $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$
4) $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$
5) $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$
6) $\alpha(\beta\vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a}$
7) $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$
8) $(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$

§1.9. Свойства действий над векторами

Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (обозначается $\vec{a}\vec{b}$) – это скалярная величина, в алгебраической интерпретации равная сумме попарного произведения координат векторов.

§2. Матрицы

§2.1. Основные определения и виды матриц

Матрицей размерности m n называют прямоугольную таблицу из чисел, которые расположены в m строках и n столбцах.

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix} \quad (12)$$

Числа, образующие матрицу называются *элементами матрицы*.

Если в матрице число строк равно числу столбцов, то матрица называется *квадратной*, причём число ее строк или столбцов называется *порядком* матрицы. Например:

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} \quad (13)$$

Матрица, в которой число строк не равно числу столбцов, называется *прямоугольной*. В примерах это первая матрица и третья. Например:

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{pmatrix} \quad (14)$$

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \end{pmatrix} \quad (15)$$

Матрицы обозначают большими латинскими буквами: A,B,C...

Существуют матрицы, имеющие только одну строку или один столбец.

Матрица, у которой всего одна строка $A = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n})$, называется ***матрицей – строкой*** (или строковой), а матрица, у которой всего один столбец, ***матрицей – столбцом***.

Матрица – строка/столбец также представляет собой n-мерный вектор, который может быть записан как: $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$.

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется ***нулевой*** и обозначается (0), или просто 0. Например:

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},\ 0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (16)$$

Главной диагональю квадратной матрицы называется диагональ, идущая из левого верхнего в правый нижний угол.

$$\begin{pmatrix} \boxed{a_{1,1}} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & \boxed{a_{2,2}} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & \boxed{a_{3,3}} \end{pmatrix} \qquad (17)$$

Квадратная матрица, у которой все элементы, лежащие ниже главной диагонали, равны нулю, называется ***треугольной*** матрицей:

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ 0 & a_{2,2} & a_{2,3} \\ 0 & 0 & a_{3,3} \end{pmatrix} \qquad (18)$$

Квадратная матрица, у которой все элементы, кроме расположенных на главной диагонали, равны нулю, называется ***диагональной*** матрицей:

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & a_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & a_{3,3} \end{pmatrix} \qquad (19)$$

Квадратная матрица, элементы главной диагонали которой равны единице поля, а остальные равны нулю, называется ***единичной матрицей***:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (20)$$

§2.2. Равенство матриц

Две матрицы A и B называются равными, если они имеют одинаковое число строк и столбцов и их соответствующие элементы равны $a_{ij} = b_{ij}$. Так если

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}\ и\, B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & ab_{2,2} \end{pmatrix}, \qquad (21)$$

то $A=B$, если $a_{11} = b_{11}$, $a_{12} = b_{12}$, $a_{21} = b_{21}$ и $a_{22} = b_{22}$.

§2.3. Транспонирование

Транспонированная матрица — матрица A^T, полученная из исходной матрицы A заменой строк на столбцы:

Если задана следующая матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{3,1} & a_{3,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}, \tag{22}$$

то, применив операцию транспонирования, получим:

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{m,1} \\ a_{1,2} & \dots & a_{m,1} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{1,n} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}, \tag{23}$$

Например. Найдем транспонированные матрицы для матриц A и B:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 7 & -2 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \tag{24}$$

В результате, получим:

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 0 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } B^T = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \tag{25}$$

§2.4. Сложение матриц

Пусть A, B - матрицы одинаковой размерности. Суммой матриц A и B называется матрица $A + B$, определяемая равенством:

$$(A + B) = a_{ij} = b_{ij} \tag{26}$$

для всех $i = 1,2,\dots,m$ и $j = 1,2,\dots,n$.

$$\begin{gathered}(A + B) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} \\ b_{2,1} & a_{2,2} & b_{2,3} \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} a_{1,1} + b_{1,1} & a_{1,2} + b_{1,2} & a_{1,3} + b_{1,3} \\ a_{2,1} + b_{2,1} & a_{2,2} + b_{2,2} & a_{2,3} + b_{2,3} \end{pmatrix}\end{gathered} \tag{27}$$

Допустимо выполнять операцию сложения только между матрицами одинаковой размерности.

Сложение матриц подчиняется следующим законам: коммутативному $A+B=B+A$ и ассоциативному $(A+B)+C=A+(B+C)$.

§2.5. Умножение матрицы на число

Для того чтобы умножить матрицу A на число k нужно каждый элемент матрицы A умножить на это число. Таким образом, произведение матрицы A на число k есть новая матрица, которая определяется как:

$$kA = k \cdot \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_{1,1} & ka_{1,2} \\ ka_{2,1} & ka_{2,2} \\ ka_{3,1} & ka_{3,2} \end{pmatrix} \tag{28}$$

Для любых чисел a и b и матриц A и B выполняются равенства:

9) $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$;

10) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$;

11) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$.

§2.6. Умножение матриц

Размеры матриц–сомножителей должны быть согласованы. Перемножать можно только те матрицы, у которых число столбцов первой матрицы совпадает с числом строк второй матрицы (т.е. длина строки первой равна высоте столбца второй).

Произведением матрицы A не матрицу B называется новая матрица $C=AB$, элементы которой составляются следующим образом:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} \tag{29}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} \end{pmatrix} \tag{30}$$

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{1,1}b_{1,1} + a_{1,2}b_{2,1} & a_{1,1}b_{1,2} + a_{1,2}b_{2,2} & a_{1,1}b_{1,3} + a_{1,2}b_{2,3} \\ a_{2,1}b_{1,1} + a_{2,2}b_{2,1} & a_{2,1}b_{1,2} + a_{2,2}b_{2,2} & a_{2,1}b_{1,3} + a_{2,2}b_{2,3} \end{pmatrix} \tag{31}$$

В общем случае, если мы умножаем матрицу $A = (a_{ij})$ размера $m \times n$ на матрицу $B = (b_{ij})$ размера $n \times p$, то получим матрицу C размера $m \times p$, элементы которой вычисляются следующим образом: элемент c_{ij} получается в результате произведения элементов i-ой строки матрицы A на соответствующие элементы j-го столбца матрицы B и их сложения.

Из этого правила следует, что всегда можно перемножать две квадратные матрицы одного порядка, в результате получим квадратную матрицу того же порядка. В частности, квадратную матрицу всегда можно умножить саму на себя, т.е. возвести в квадрат.

Другим важным случаем является умножение матрицы–строки на матрицу–столбец, причём ширина первой должна быть равна высоте второй, в результате получим матрицу первого порядка (т.е. один элемент):

$$(a_1 \quad a_2 \quad a_3) \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) \tag{32}$$

Важно учесть, что <u>$A \cdot B \neq B \cdot A$</u>. Поэтому при умножении матриц необходимо следить за порядком множителей.

Умножение матриц подчиняется ассоциативному и дистрибутивному законам, т.е. $(AB)C=A(BC)$ и $(A+B)C=AC+BC$.

Легко также проверить, что при умножении квадратной матрицы A на единичную матрицу E того же порядка вновь получим матрицу A, причём $AE=EA=A$.

Произведение 2-х не нулевых матриц может оказаться равным нулевой матрице, например:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{33}$$

§3. Пределы

Предел функции в заданной точке n_0 – это такая величина, к которой стремится значение рассматриваемой функции $f(n)$ при стремлении её аргумента к данной точке n_0. Предел обозначается как:

$$\lim_{n \to n_0} f(n), \tag{34}$$

где lim – символьное обозначение предела, n – аргумент функции, который стремится к значению (точке) n_0.

Предел может стремиться к конкретному числу n_0, так и к бесконечно большой величине ∞ $(+\infty)$, либо бесконечно малой величине $-\infty$.

Предел функции является обобщением понятия предела последовательности. Рассмотрим примеры вычисления пределов простейших функций: числовых последовательностей.

Числовой последовательностью называется функция от натурального аргумента, то есть функция, заданная на множестве натуральных чисел N. Числовые последовательности принято обозначать следующим образом: $\{a_n\}$. Например,

$$\left\{\frac{1}{n}\right\},\ \left\{\frac{n}{n+1}\right\},\ \left\{\sqrt{n+1}\right\} \tag{35}$$

Последовательность $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ состоит из чисел $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ Если изобразить эти точки на числовой прямой, то видно, что числовая последовательность движется к нулю. Говорят, что её предел равен нулю и записывают

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0 \tag{36}$$

Аналогично,

$$\left\{\frac{n}{n+1}\right\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots\right\} \tag{37}$$

Тогда,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n}{n+1} = 1, \tag{38}$$

т.к., действует правило: если под знаком предела стоит дробь, в числителе и знаменателе которой многочлены одинаковых степеней, то предел равен отношению коэффициентов при старших степенях.

Рассмотрим последнюю последовательность:

$$\{\sqrt{n+1}\} = \{\sqrt{2}, \sqrt{3}, 2, \sqrt{5}, \dots\} \tag{39}$$

Соответственно, предел будет равен:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+1} =+\infty \tag{40}$$

Последовательность, имеющая конечный предел n_0, называется ***сходящейся***, а не имеющая конечного предела – ***расходящейся***. $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ и $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ – сходящиеся числовые последовательности, $\sqrt{n+1}$ – расходящаяся.

§4. Производные

§4.1. Основные определения

Если функция *y = f(x)* описывает какой-либо физический процесс, то производная есть скорость протекания этого процесса. В этом состоит физический смысл производной.

Например, если *y = f(t)* – функция, которая описывает зависимость температуры ядерного реактора от времени, в который погрузили охлаждающие поглощающие стержни. Тогда производная от указанной функции, покажет скорость охлаждения ректора.

Производной функции *y = f(x)* в точке x_0 называется предел отношения приращения Δf функции в точке x_0 к приращению аргумента Δx при Δx стремящемся к нулю, если этот предел существует. Производная функции *f(x)* в точке x_0 обозначается *f'(x)*:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \qquad (41)$$

Производную функции *y = f(x)* в точке *x* обозначают *f'(x)*, f'_x.

Пример 1. Найдем производную функции *y = C*, *C = const*.

Решение.

Значению *x* даем приращение *Δx*.

Находим значение функции *Δy*:

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = C - C = 0$$

Значит,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0}{\Delta x} = 0$$

Следовательно,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} 0 = 0, \quad т.е.\ (c)' = 0$$

Пример 2. Найдем производную функции $y = x^2$.

Решение.

Значению x даем приращение Δx.

Находим значение функции Δy:

$$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2$$

Составляем отношение

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x$$

Находим предела этого отношения

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x$$

Таким образом, $(x^2)' = 2x$.

Необходимым условием существования производной функции в заданной точке является непрерывность функции в этой точке. Функция называется непрерывной в точке x_0, если она определена в окрестности данной точки и

$$\lim_{x \to 0} f(x) = f(x_0) \tag{42}$$

Обратное утверждение является неверным. Например, функция $f(x) = |x|$ непрерывна на промежутке $(-\infty; +\infty)$, но в точке $x_0 = 0$ производной не имеет.

Операция нахождения производной функции называется ***дифференцированием***. Функция, имеющая производную в точке x_0, называется ***дифференцируемой в этой точке***. Функция, имеющая производную в каждой точке интервала (a, b), называется *дифференцируемой на этом интервале*.

Для упрощения вычисления производных используются правила дифференцирования и таблица производных.

§4.2. Таблица производных

$(C)' = 0,\ где\, C \in R;$

$(x^p)' = p \cdot x^{p-1},\ где\, p \in R;$

$(e^x)' = e^x;$

$(a^x)' = a^x lna,\ где\, a > 0, a \neq 1;$

$(lnx)' = \frac{1}{x};$

$(\log_a x)' = \frac{1}{xlna},\ где\, a > 0, a \neq 1;$

$(\sin x)' = \cos x;$

$(\cos x)' =- \sin x;$

$(\mathrm{tg}x)' = \frac{1}{\cos^2 x};$

$(\mathrm{ctg}x)' = \frac{1}{\sin^2 x};$

$(\mathrm{arcsin}x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$

$(\mathrm{arccos}x)' =- \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$

$(\mathrm{arctg}x)' = \frac{1}{1+x^2};$

$(\mathrm{arcctg}x)' =- \frac{1}{1+x^2};$

§4.3. Правила дифференцирования

1) *Постоянный множитель* можно выносить за знак производной:

$$\left(C \cdot f(x)\right)' = C \cdot f'(x),\ где\, C \in R$$

2) Производная *суммы (разности)* двух функций, определённых на одном и том же промежутке, равна сумме (разности) производных этих функций:

$$\left(f(x) \pm g(x)\right)' = f'(x) \pm g'(x),$$

3) Производная *произведения* двух функций, определённых на одном и том же промежутке, вычисляется по формуле

$$\left(f(x) \cdot g(x)\right)' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

4) Если функции *f(x)* и *g(x)* имеют в точке *x* производные и g(x) ≠ 0, то в этой точке существует производная их *частного*, которая вычисляется по формуле

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

5) Если функция *сложная*, то есть *e = f(y)*, где *y = g(x)*, то её производная может быть вычислена по правилу

$$e'_x = f'_y \cdot g'_x$$

§4.4. Производные высших порядков

Производной второго порядка (второй производной) функции *y = f(x)* называется производная от её первой производной, то есть предел

$$f''(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x_0 + \Delta x) - f'(x_0)}{\Delta x}, \qquad (43)$$

если он существует.

Аналогично производную от второй производной называют ***производной третьего порядка*** или третьей производной.

В общем случае ***производной*** n ***-го порядка*** называется производная от производной *(n – 1)* порядка: $y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)'$.

Производные второго, третьего и более высоких порядков вычисляются последовательным дифференцированием заданной функции.

§4.5. Частные производные

Рассмотрим функцию двух переменных *z = f(x, y)*. Выберем в области определения произвольную точку *(x, y)* и зафиксируем ее. Дадим сначала первой переменной *x* точке приращение *Δx* и образуем новую точку – *(x + Δx, y)*. Вычислим приращение функции:

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y) \qquad (44)$$

Такое приращение называется частным приращением по переменной *x*. Составим отношение приращений (0.44) к приращению аргумента $\frac{\Delta_x z}{\Delta x}$. Если существует предел этого отношения при *Δx→0*, то этот предел называется

частной производной числовой функции двух переменных по x и обозначается

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = f'_x(x, y) = z'_x(x, y) = \frac{\partial f}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} \quad (45)$$

Следует отметить, что в отличие от производной функции одной переменной, выражение $\frac{\partial z}{\partial x}$ не отношение дифференциалов, а единый слитный символ.

Пример 1. Найдем частную производную по переменной x для следующей функции от двух переменных:

$$f(x, y) = 2x + 3y$$

Тогда получим,

$$\frac{\partial f(x, y)}{dx} = \frac{\partial(2x + 3y)}{dx} = 2 + 3y$$

Пример 2. Найдем частную производную по переменной w для следующей функции:

$$f(w, x) = w^2 x$$

В результате, получим:

$$\frac{\partial(w, x)}{dw} = \frac{\partial(w^2 x)}{dw} = 2wx$$

§4.6. Градиент

Вектор с координатами $f'_x(x_0,y_0)$, $f'_y(x_0,y_0)$, называется ***градиентом функции*** $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ и обозначается

$$\nabla z(M_0) \quad (46)$$

или

$$grad\, \mathrm{z}(M_0) \quad (47)$$

Градиент дифференцируемой функции $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ определяет направление, в котором функция в этой точке возрастает с наибольшей скоростью. При этом его модуль равен наибольшей скорости изменения функции в точке M_0.

Для функции n переменных градиент определяется и обозначается аналогичным образом, и сохраняет все свои свойства.

§5. Ряд Тейлора

Рядом Тейлора называется степенной ряд вида:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{n}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \tag{48}$$

§6. Поверхности и n-мерные пространства

Точка (1-мерная плоскость) в пространстве задается следующим уравнение:

$$Ax + B = 0 \tag{49}$$

Уравнение прямой (2-мерной плоскости) имеет вид:

$$Ax + By + C = 0 \tag{50}$$

Уравнение 3-мерной плоскости задается как:

$$Ax + By + Cx + D = 0 \tag{51}$$

Для того чтобы изобразить трехмерную плоскость в пространстве, по ее уравнению необходимо найти точки её пересечения с осями координат. Так, для нахождения точки пересечения гиперплоскости с осью Ox, надо в уравнении плоскости принять все остальные переменные равными 0:

$$Ax + D = 0 \tag{52}$$

Так, для нахождения точки пересечения гиперплоскости с осью *Oy* и осью *Oz*, соответственно:

$$By + D = 0 \tag{53}$$

$$Cz + D = 0 \tag{54}$$

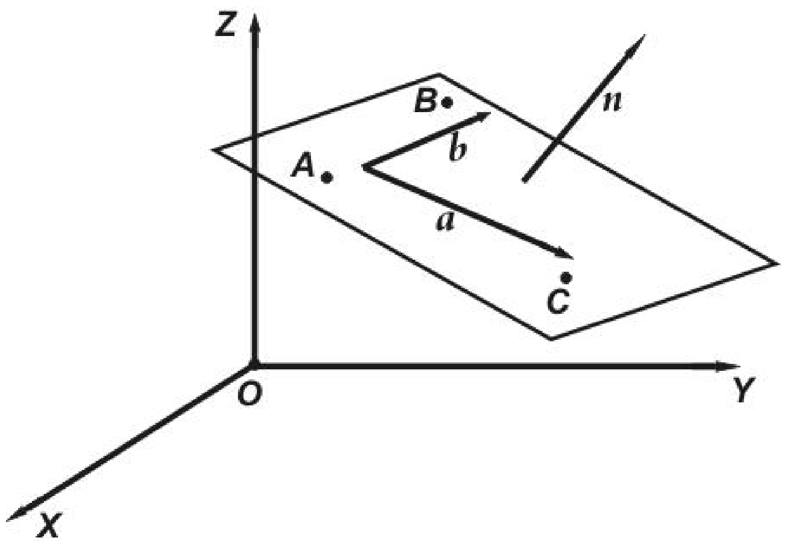


Рисунок 9. Изображение 2-мерной плоскости в пространстве

Плоскость может быть также *n*-мерной. Такая плоскость задается уравнением:

$$x_1 w_1 + \ldots + x_n w_n + (-h) = 0, \tag{55}$$

Принцип построения гиперплоскости аналогичен построению 3-мерной плоскости.

§7. Булевы функции

В классической математике приняты такие операции как сложение, умножение, вычитание и деление. Аналогично в дискретной математике существуют элементарные булевы функции.

Булевы функции образуют самый простой нетривиальный класс дискретных функций - их аргументы и значения могут принимать всего два значения 0 или 1.

Теория распознавания образов изначально строилась на моделировании принципов мышления и работы головного мозга посредством логических функций – булевых функций. В настоящее время булевы функции находят применение в логике, цифровой электронике, в программировании, и во многих других областях науки и техники.

Рассмотрим основные функции, используемые в качестве элементарных функций в алгебре логики.

Функции одной переменной – функции, зависящие только от одного аргумента.

Всего существует четыре различные функции от одной переменной (табл. 1):

$f(x) = 0$ – тождественный ноль;

$f(x) = 1$ – тождественная единица;

$f(x) = x$ – тождественная функция или тождественный x;

$f(x) = \neg x$ – отрицание x, логическое "НЕ", также обозначается как $\bar{x}$.

В табл. 1 в первом столбце заданы возможные входные значения, а в остальных столбцах указаны функции и их соответствующие выходные значения.

Таблица 1. Булевы функции от одной переменной

x	***0***	***1***	***x***	$\neg$***x***
0	0	1	0	1
1	0	1	1	0

Функции двух переменных – функции, зависящие от двух аргументов.

В первом столбике табл. 2 записаны всевозможные выходные наборы *x, y* или комбинации 0 и 1. В первом наборе оба аргумента равны 0, но потом *x = 0*, а *x = 1*, в третьем наоборот *x = 1*, а *y = 0* и в четвертом *x = y = 1*. В последующих столбцах обозначены конкретные функции и их выходных значения на каждом из входных наборов *x* и *y*.

Таблица 2. Булевы функции от двух переменных

x	y	$x \vee y$	$x \wedge y$	$x \oplus y$	$x \rightarrow y$	$x \equiv y$	$x \mid y$	$x \downarrow y$
0	0	0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	0	1	0
1	0	1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	1	0	1	1	0	0

$f(x, y) = x \vee y$ – дизъюнкция, логическое "ИЛИ".

$f(x, y) = x \wedge y$ – конъюнкция, логическое "И", логическое умножение. Также можно использовать обозначения *x & y* или *xy*.

$f(x, y) = x \oplus y$ – сложение по модулю два, логическое исключающее "ИЛИ". Также можно использовать обозначение $x + y$.

$f(x, y) = x \rightarrow y$ – импликация, "если, то". Также можно использовать обозначение x y.

$f(x, y) = x \equiv y$ – эквивалентность. Также можно использовать обозначение $x \sim y$.

$f(x, y) = x \mid y$ – штрих Шеффера, логическое «И-НЕ».

$f(x, y) = x \downarrow y$ – стрелка Пирса, логическое «ИЛИ-НЕ»

Булеву функцию бывают от любого n-го количества переменных. Опираясь на таблицы 1 и 2 можно построить такие функции, например:

Пусть задана булева функция:

$$(x \wedge y) \vee z \tag{56}$$

При значениях $x = 0$, $y = 0$ и $z = 1$, получим:

$$(0 \wedge 0) \vee 1 = 0 \vee 1 = 1 \tag{57}$$

Одна функция может иметь множество реализаций различными формулами. Формулы, реализующие одну и ту же функцию, называются *равносильными.* Отношение равносильности формул является эквивалентностью. Имеют место следующие *основные равносильности*:

1) $x \,\&\, x = x$ (идемпотентность конъюнкции);

2) $x \vee x = x$ (идемпотентность дизъюнкции);

3) $x \,\&\, 1 = x$; 4) $x \vee 1 = 1$; 5) $x \,\&\, 0 = 0$; 6) $x \vee 0 = x$;

7) $x \,\&\, \bar{x} = 0$ (закон противоречия);

8) $x \vee \bar{x} = 1$ (закон исключенного третьего);

9) $\bar{\bar{x}} = x$ (закон снятия двойного отрицания);

10) $x \,\&\, (y \vee x) = x$ (первый закон поглощения);

11) $x \vee (y \,\&\, x) = x$ (второй закон поглощения);

12) $x \to y = \bar{x} \vee y = \overline{x \,\&\, \bar{y}}$;

13) $\overline{x \,\&\, y} = \bar{x} \vee \bar{y}$; $\overline{x \vee y} = \bar{x} \,\&\, \bar{y}$ (законы де Моргана);

14) $x \,\&\, y = y \,\&\, x$ (коммутативность конъюнкции);

15) $x \vee y = y \vee x$ (коммутативность дизъюнкции);

16) $x \,\&\, (y \,\&\, z) = (x \,\&\, y) \,\&\, z$ (ассоциативность конъюнкции);

17) $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$ (ассоциативность дизъюнкции);

18) $x \,\&\, (y \vee z) = (x \,\&\, y) \vee (x \,\&\, z)$ (дистрибутивность конъюнкции относительно дизъюнкции);

19) $x \vee (y \,\&\, z) = (x \vee y) \,\&\, (x \vee z)$ (дистрибутивность дизъюнкции относительно конъюнкции).

20) $x \mid y = \overline{x \,\&\, y}$; $x \quad y = \overline{x \vee y}$.