

**Необходимые сведения из линейной
алгебры, высшей и дискретной
математики**

§1. Векторы

§1.1. Определение вектора

Вектором называется направленный отрезок, то есть отрезок, у которого указаны начало (наз. также точкой приложения вектора) и конец.

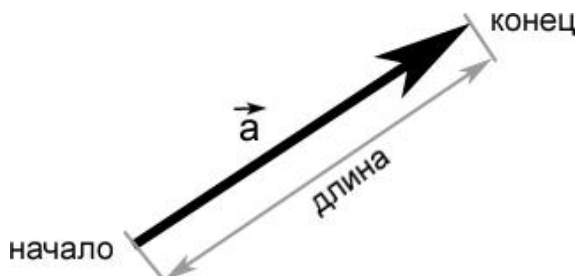


Рисунок 1. Изображение вектора

Длина направленного отрезка, изображающего вектор, называется **длиной**, или **модулем**, вектора. Длина вектора \vec{a} обозначается $|\vec{a}|$.

Нуль-вектор – вектор, начало и конец которого совпадают, его модуль равен 0, а направление неопределенное. Обозначается $(\vec{0})$.

Ортом, или единичным вектором, называется вектор, длина которого равна единице.

§1.2. Координатное представление

Пусть на плоскости задана декартова система координат XOY (рис. 2).

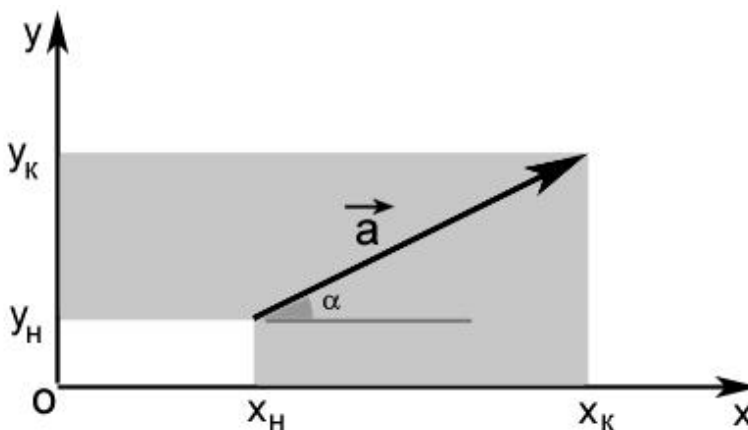


Рисунок 2. Изображение вектора в координатном представлении

Согласно рис. 2, вектор задан парой чисел, составляющих начало координат (x_n, y_n) и парой чисел, составляющих конец координат (x_k, y_k) .

Тогда вектор может быть задан двумя числами:

$$a_x = x_K - x_H \text{ и } a_y = y_K - y_H \quad (1)$$

Эти числа a_x и a_y в геометрии называют *координатами вектора*, а в физике – проекциями вектора на соответствующие оси координат. Вектор можно записать как:

$$\vec{a} = (a_x, a_y) \quad (2)$$

При таком определении вектора его модуль

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \quad (3)$$

Чтобы выполнить обратное действие – отобразить вектор в системе координат, необходимо знать систему координат, заданную единичными векторами – ортами.

Пусть на плоскости задана декартова система координат при помощи единичных векторов \vec{i} и \vec{j} :

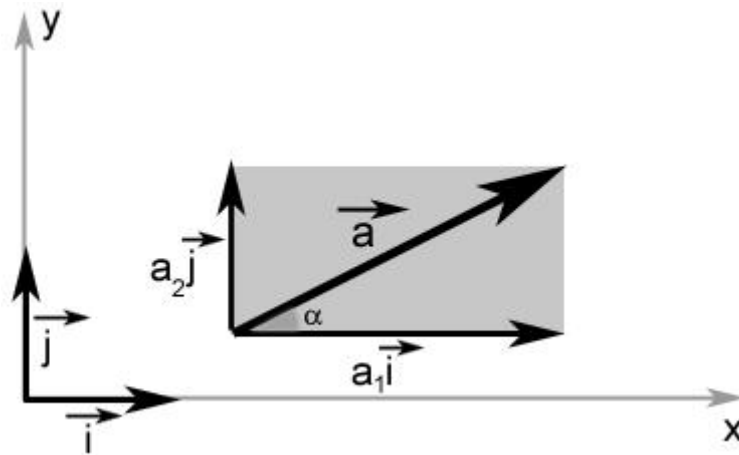


Рисунок 3. Изображение вектора в системе координат, заданной ортами

Тогда вектор может быть задан следующим образом:

$$\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} \quad (4)$$

Очевидно, что:

$$a_1 = a_x \text{ и } a_2 = a_y \quad (5)$$

§1.3. Коллинеарность векторов

Векторы называются **коллинеарными**, если они лежат либо на одной прямой, либо на параллельных прямых.

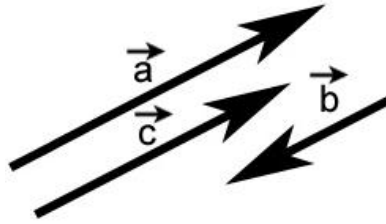


Рисунок 4. Коллинеарные вектора

Координаты коллинеарных векторов удовлетворяют соотношению:

$$\frac{a_x}{a_y} = \frac{b_x}{b_y} = \frac{c_x}{c_y} \quad (6)$$

§1.4. Равенство векторов

Два вектора называются **равными**, если они коллинеарны, имеют одинаковую длину и одинаково направлены.

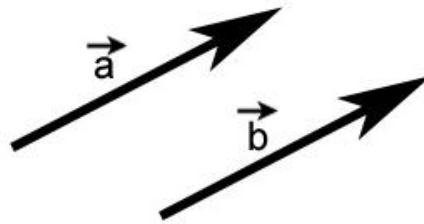


Рисунок 5. Равные вектора

Все нуль-векторы считаются равными.

Координаты равных векторов удовлетворяют соотношениям:

$$a_x = b_x \text{ и } a_y = b_y \quad (7)$$

§1.5. Ортогональность

Векторы, лежащие на перпендикулярных прямых или векторы, образующие угол в 90° , называются **ортогональными**.

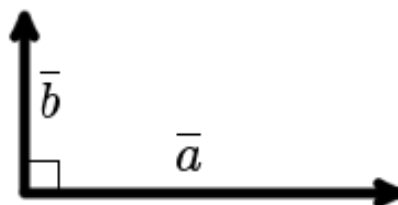


Рисунок 6. Ортогональные векторы

§1.6. Сумма векторов

Суммой $\vec{a} + \vec{b}$ векторов \vec{a} и \vec{b} называют вектор \vec{c} , идущий из начала вектора \vec{a} в конец вектора \vec{b} при условии, что начало вектора \vec{b} приложено к концу вектора \vec{a} (рис. 7а). Если векторы неколлинеарны, то можно воспользоваться правилом параллелограмма (рис. 7б):

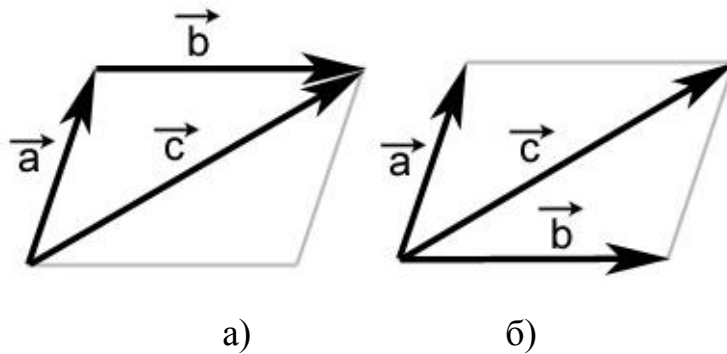


Рисунок 7. Сумма векторов: а – правило треугольника, б – правило параллелограмма

Координаты вектора суммы двух векторов удовлетворяют соотношениям:

$$c_x = a_x + b_x \text{ и } c_y = a_y + b_y \quad (8)$$

В случае вычисления суммы в системе координат, заданной ортами:

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1)\vec{i} + (a_2 + b_2)\vec{j} \quad (9)$$

Построение суммы нескольких векторов наглядно видно из рис. 8, где суммирующий вектор \vec{s} приложен к началу вектора \vec{a} и концу вектора \vec{d} .

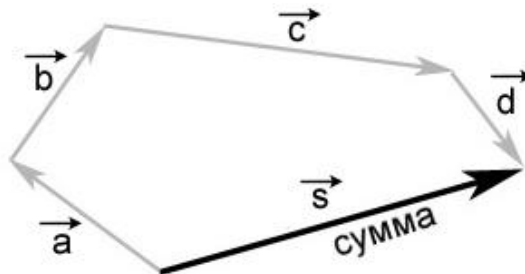


Рисунок 8. Пример суммы векторов

§1.7. Произведение вектора на число

Произведением $\alpha \vec{a}$ вектора \vec{a} на число α называют вектор, коллинеарный вектору \vec{a} , имеющий длину, равную $|\alpha| \cdot |\vec{a}|$, и направление, совпадающее с направлением \vec{a} при $\alpha > 0$ и противоположное \vec{a} при $\alpha < 0$.

Если взять вектор \vec{a} с противоположным $-\vec{a}$ знаком, то получим вектор с противоположным направлением, или вектор, противоположный $-\vec{a}$.

Координаты вектора произведения вектора на число удовлетворяют соотношениям:

$$(\alpha \vec{a})_x = \alpha a_x \text{ и } (\alpha \vec{a})_y = \alpha a_y \quad (10)$$

В случае вычисления суммы в системе координат, заданной ортами:

$$\alpha \vec{a} = \alpha a_1 \vec{i} + \alpha a_2 \vec{j} \quad (11)$$

§1.8. Свойства действий над векторами

Операции сложения векторов и умножения вектора на число обладают следующими свойствами:

- | | |
|--|--|
| 1) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ | 5) $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$ |
| 2) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ | 6) $\alpha(\beta \vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a}$ |
| 3) $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$ | 7) $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$ |
| 4) $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$ | 8) $(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$ |

§1.9. Свойства действий над векторами

Скалярное произведение векторов \vec{a} и \vec{b} (обозначается $\vec{a}\vec{b}$) – это скалярная величина, в алгебраической интерпретации равная сумме попарного произведения координат векторов.

§2. Матрицы

§2.1. Основные определения и виды матриц

Матрицей размерности $m \times n$ называют прямоугольную таблицу из чисел, которые расположены в m строках и n столбцах.

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix} \quad (12)$$

Числа, образующие матрицу называются *элементами матрицы*.

Если в матрице число строк равно числу столбцов, то матрица называется *квадратной*, причём число ее строк или столбцов называется *порядком* матрицы. Например:

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} \quad (13)$$

Матрица, в которой число строк не равно числу столбцов, называется *прямоугольной*. В примерах это первая матрица и третья. Например:

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{pmatrix} \quad (14)$$

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \end{pmatrix} \quad (15)$$

Матрицы обозначают большими латинскими буквами: A, B, C...

Существуют матрицы, имеющие только одну строку или один столбец.

Матрица, у которой всего одна строка $A = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n})$, называется **матрицей – строкой** (или строковой), а матрица, у которой всего один столбец, **матрицей – столбцом**.

Матрица – строка/столбец также представляет собой n -мерный вектор, который может быть записан как: $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$.

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется **нулевой** и обозначается (0) , или просто 0 . Например:

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad 0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (16)$$

Главной диагональю квадратной матрицы называется диагональ, идущая из левого верхнего в правый нижний угол.

$$\begin{pmatrix} \boxed{a_{1,1}} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & \boxed{a_{2,2}} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & \boxed{a_{3,3}} \end{pmatrix} \quad (17)$$

Квадратная матрица, у которой все элементы, лежащие ниже главной диагонали, равны нулю, называется **треугольной** матрицей:

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ 0 & a_{2,2} & a_{2,3} \\ 0 & 0 & a_{3,3} \end{pmatrix} \quad (18)$$

Квадратная матрица, у которой все элементы, кроме расположенных на главной диагонали, равны нулю, называется **диагональной** матрицей:

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & a_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & a_{3,3} \end{pmatrix} \quad (19)$$

Квадратная матрица, элементы главной диагонали которой равны единице поля, а остальные равны нулю, называется **единичной матрицей**:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (20)$$

§2.2. Равенство матриц

Две матрицы A и B называются равными, если они имеют одинаковое число строк и столбцов и их соответствующие элементы равны $a_{ij} = b_{ij}$. Так если

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \end{pmatrix}, \quad (21)$$

то $A=B$, если $a_{11} = b_{11}$, $a_{12} = b_{12}$, $a_{21} = b_{21}$ и $a_{22} = b_{22}$.

§2.3. Транспонирование

Транспонированная матрица — матрица A^T , полученная из исходной матрицы A заменой строк на столбцы:

Если задана следующая матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{3,1} & a_{3,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}, \quad (22)$$

то, применив операцию транспонирования, получим:

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{m,1} \\ a_{1,2} & \dots & a_{m,2} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{1,n} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}, \quad (23)$$

Например. Найдем транспонированные матрицы для матриц A и B :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 7 & -2 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad (24)$$

В результате, получим:

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 0 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } B^T = (1 \quad -2 \quad 3) \quad (25)$$

§2.4. Сложение матриц

Пусть A , B - матрицы одинаковой размерности. Суммой матриц A и B называется матрица $A + B$, определяемая равенством:

$$(A + B) = a_{ij} = b_{ij} \quad (26)$$

для всех $i = 1, 2, \dots, m$ и $j = 1, 2, \dots, n$.

$$\begin{aligned} (A + B) &= \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} a_{1,1} + b_{1,1} & a_{1,2} + b_{1,2} & a_{1,3} + b_{1,3} \\ a_{2,1} + b_{2,1} & a_{2,2} + b_{2,2} & a_{2,3} + b_{2,3} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (27)$$

Допустимо выполнять операцию сложения только между матрицами одинаковой размерности.

Сложение матриц подчиняется следующим законам: коммутативному $A+B=B+A$ и ассоциативному $(A+B)+C=A+(B+C)$.

§2.5. Умножение матрицы на число

Для того чтобы умножить матрицу A на число k нужно каждый элемент матрицы A умножить на это число. Таким образом, произведение матрицы A на число k есть новая матрица, которая определяется как:

$$kA = k \cdot \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_{1,1} & ka_{1,2} \\ ka_{2,1} & ka_{2,2} \\ ka_{3,1} & ka_{3,2} \end{pmatrix} \quad (28)$$

Для любых чисел α и β и матриц A и B выполняются равенства:

$$9) (\alpha\beta)A = \alpha(\beta A);$$

$$10) \quad \alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B;$$

$$11) \quad (\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A.$$

§2.6. Умножение матриц

Размеры матриц–сомножителей должны быть согласованы. Перемножать можно только те матрицы, у которых число столбцов первой матрицы совпадает с числом строк второй матрицы (т.е. длина строки первой равна высоте столбца второй).

Произведением матрицы A на матрицу B называется новая матрица $C=AB$, элементы которой составляются следующим образом:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} \quad (29)$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} \end{pmatrix} \quad (30)$$

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{1,1}b_{1,1} + a_{1,2}b_{2,1} & a_{1,1}b_{1,2} + a_{1,2}b_{2,2} & a_{1,1}b_{1,3} + a_{1,2}b_{2,3} \\ a_{2,1}b_{1,1} + a_{2,2}b_{2,1} & a_{2,1}b_{1,2} + a_{2,2}b_{2,2} & a_{2,1}b_{1,3} + a_{2,2}b_{2,3} \end{pmatrix} \quad (31)$$

В общем случае, если мы умножаем матрицу $A = (a_{ij})$ размера $m \times n$ на матрицу $B = (b_{ij})$ размера $n \times p$, то получим матрицу C размера $m \times p$, элементы которой вычисляются следующим образом: элемент c_{ij} получается в

результате произведения элементов i -ой строки матрицы A на соответствующие элементы j -го столбца матрицы B и их сложения.

Из этого правила следует, что всегда можно перемножать две квадратные матрицы одного порядка, в результате получим квадратную матрицу того же порядка. В частности, квадратную матрицу всегда можно умножить саму на себя, т.е. возвести в квадрат.

Другим важным случаем является умножение матрицы–строки на матрицу–столбец, причём ширина первой должна быть равна высоте второй, в результате получим матрицу первого порядка (т.е. один элемент):

$$(a_1 \quad a_2 \quad a_3) \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) \quad (32)$$

Важно учесть, что $A \cdot B \neq B \cdot A$. Поэтому при умножении матриц необходимо следить за порядком множителей.

Умножение матриц подчиняется ассоциативному и дистрибутивному законам, т.е. $(AB)C = A(BC)$ и $(A+B)C = AC + BC$.

Легко также проверить, что при умножении квадратной матрицы A на единичную матрицу E того же порядка вновь получим матрицу A , причём $AE = EA = A$.

Произведение 2-х не нулевых матриц может оказаться равным нулевой матрице, например:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (33)$$

§3. Пределы

Предел функции в заданной точке n_0 – это такая величина, к которой стремится значение рассматриваемой функции $f(n)$ при стремлении её аргумента к данной точке n_0 . Предел обозначается как:

$$\lim_{n \rightarrow n_0} f(n), \quad (34)$$

где \lim – символьное обозначение предела, n – аргумент функции, который стремится к значению (точке) n_0 .

Предел может стремиться к конкретному числу n_0 , так и к бесконечно большой величине ∞ ($+\infty$), либо бесконечно малой величине $-\infty$.

Предел функции является обобщением понятия предела последовательности. Рассмотрим примеры вычисления пределов простейших функций: числовых последовательностей.

Числовой последовательностью называется функция от натурального аргумента, то есть функция, заданная на множестве натуральных чисел N . Числовые последовательности принято обозначать следующим образом: $\{a_n\}$. Например,

$$\left\{\frac{1}{n}\right\}, \left\{\frac{n}{n+1}\right\}, \{\sqrt{n+1}\} \quad (35)$$

Последовательность $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ состоит из чисел $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$. Если изобразить эти точки на числовой прямой, то видно, что числовая последовательность движется к нулю. Говорят, что её предел равен нулю и записывают

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \quad (36)$$

Аналогично,

$$\left\{\frac{n}{n+1}\right\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots\right\} \quad (37)$$

Тогда,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1, \quad (38)$$

т.к., действует правило: если под знаком предела стоит дробь, в числителе и знаменателе которой многочлены одинаковых степеней, то предел равен отношению коэффициентов при старших степенях.

Рассмотрим последнюю последовательность:

$$\{\sqrt{n+1}\} = \{\sqrt{2}, \sqrt{3}, 2, \sqrt{5}, \dots\} \quad (39)$$

Соответственно, предел будет равен:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+1} = +\infty \quad (40)$$

Последовательность, имеющая конечный предел n_0 , называется *сходящейся*, а не имеющая конечного предела – *расходящейся*. $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ и $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ – сходящиеся числовые последовательности, $\sqrt{n+1}$ – расходящаяся.

§4. Производные

§4.1. Основные определения

Если функция $y = f(x)$ описывает какой-либо физический процесс, то производная есть скорость протекания этого процесса. В этом состоит физический смысл производной.

Например, если $y = f(t)$ – функция, которая описывает зависимость температуры ядерного реактора от времени, в который погрузили охлаждающие поглощающие стержни. Тогда производная от указанной функции, покажет скорость охлаждения ректора.

Производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется предел отношения приращения Δf функции в точке x_0 к приращению аргумента Δx при Δx стремящемся к нулю, если этот предел существует. Производная функции $f(x)$ в точке x_0 обозначается $f'(x)$:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad (41)$$

Производную функции $y = f(x)$ в точке x обозначают $f'(x), f'_x$.

Пример 1. Найдем производную функции $y = C, C = const$.

Решение.

Значению x даем приращение Δx .

Находим значение функции Δy :

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = C - C = 0$$

Значит,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0}{\Delta x} = 0$$

Следовательно,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 0 = 0, \text{ т. е. } (c)' = 0$$

Пример 2. Найдем производную функции $y = x^2$.

Решение.

Значению x даем приращение Δx .

Находим значение функции Δy :

$$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2$$

Составляем отношение

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x$$

Находим предела этого отношения

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x) = 2x$$

Таким образом, $(x^2)' = 2x$.

Необходимым условием существования производной функции в заданной точке является непрерывность функции в этой точке. Функция называется непрерывной в точке x_0 , если она определена в окрестности данной точки и

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(x_0) \quad (42)$$

Обратное утверждение является неверным. Например, функция $f(x) = |x|$ непрерывна на промежутке $(-\infty; +\infty)$, но в точке $x_0 = 0$ производной не имеет.

Операция нахождения производной функции называется **дифференцированием**. Функция, имеющая производную в точке x_0 , называется **дифференцируемой в этой точке**. Функция, имеющая производную в каждой точке интервала (a, b) , называется **дифференцируемой на этом интервале**.

Для упрощения вычисления производных используются правила дифференцирования и таблица производных.

§4.2. Таблица производных

$$(C)' = 0, \text{ где } C \in R;$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x};$$

$$(x^p)' = p \cdot x^{p-1}, \text{ где } p \in R;$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = \frac{1}{\sin^2 x};$$

$$(e^x)' = e^x;$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$(a^x)' = a^x \ln a, \text{ где } a > 0, a \neq 1;$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x};$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2};$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, \text{ где } a > 0, a \neq 1;$$

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2};$$

$$(\sin x)' = \cos x;$$

$$(\cos x)' = -\sin x;$$

§4.3. Правила дифференцирования

1) *Постоянный множитель* можно выносить за знак производной:

$$(C \cdot f(x))' = C \cdot f'(x), \text{ где } C \in R$$

2) Производная *суммы (разности)* двух функций, определённых на одном и том же промежутке, равна сумме (разности) производных этих функций:

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x),$$

3) Производная *произведения* двух функций, определённых на одном и том же промежутке, вычисляется по формуле

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

4) Если функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют в точке x производные и $g(x) \neq 0$, то в этой точке существует производная их *частного*, которая вычисляется по формуле

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

5) Если функция *сложная*, то есть $e = f(y)$, где $y = g(x)$, то её производная может быть вычислена по правилу

$$e'_x = f'_y \cdot g'_x$$

§4.4. Производные высших порядков

Производной второго порядка (второй производной) функции $y = f(x)$ называется производная от её первой производной, то есть предел

$$f''(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'(x_0 + \Delta x) - f'(x_0)}{\Delta x}, \quad (43)$$

если он существует.

Аналогично производную от второй производной называют **производной третьего порядка** или третьей производной.

В общем случае **производной n -го порядка** называется производная от производной $(n - 1)$ порядка: $y^{(n)} = (y^{(n-1)})'$.

Производные второго, третьего и более высоких порядков вычисляются последовательным дифференцированием заданной функции.

§4.5. Частные производные

Рассмотрим функцию двух переменных $z = f(x, y)$. Выберем в области определения произвольную точку (x, y) и зафиксируем ее. Дадим сначала первой переменной x точке приращение Δx и образуем новую точку – $(x + \Delta x, y)$. Вычислим приращение функции:

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y) \quad (44)$$

Такое приращение называется частным приращением по переменной x . Составим отношение приращений (0.44) к приращению аргумента $\frac{D_x z}{\Delta x}$. Если существует предел этого отношения при $\Delta x \rightarrow 0$, то этот предел называется

частной производной числовой функции двух переменных по x и обозначается

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = f'_x(x, y) = z'_x(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x} \quad (45)$$

Следует отметить, что в отличие от производной функции одной переменной, выражение $\frac{\partial z}{\partial x}$ не отношение дифференциалов, а единый слитный символ.

Пример 1. Найдем частную производную по переменной x для следующей функции от двух переменных:

$$f(x, y) = 2x + 3y$$

Тогда получим,

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial(2x + 3y)}{\partial x} = 2 + 3y$$

Пример 2. Найдем частную производную по переменной w для следующей функции:

$$f(w, x) = w^2 x$$

В результате, получим:

$$\frac{\partial(w, x)}{\partial w} = \frac{\partial(w^2 x)}{\partial w} = 2wx$$

§4.6. Градиент

Вектор с координатами $f'_x(x_0, y_0)$, $f'_y(x_0, y_0)$, называется **градиентом функции** $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ и обозначается

$$\nabla z(M_0) \quad (46)$$

или

$$\text{grad } z(M_0) \quad (47)$$

Градиент дифференцируемой функции $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ определяет направление, в котором функция в этой точке возрастает с

наибольшей скоростью. При этом его модуль равен наибольшей скорости изменения функции в точке M_0 .

Для функции n переменных градиент определяется и обозначается аналогичным образом, и сохраняет все свои свойства.

§5. Ряд Тейлора

Рядом Тейлора называется степенной ряд вида:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \quad (48)$$

§6. Поверхности и n -мерные пространства

Точка (1-мерная плоскость) в пространстве задается следующим уравнением:

$$Ax + B = 0 \quad (49)$$

Уравнение прямой (2-мерной плоскости) имеет вид:

$$Ax + By + C = 0 \quad (50)$$

Уравнение 3-мерной плоскости задается как:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (51)$$

Для того чтобы изобразить трехмерную плоскость в пространстве, по ее уравнению необходимо найти точки её пересечения с осями координат. Так, для нахождения точки пересечения гиперплоскости с осью Ox , надо в уравнении плоскости принять все остальные переменные равными 0:

$$Ax + D = 0 \quad (52)$$

Так, для нахождения точки пересечения гиперплоскости с осью Oy и осью Oz , соответственно:

$$By + D = 0 \quad (53)$$

$$Cz + D = 0 \quad (54)$$

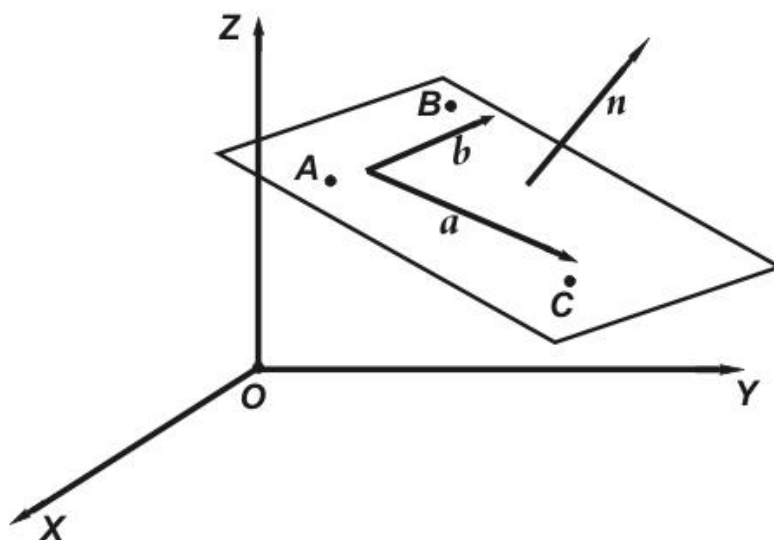


Рисунок 9. Изображение 2-мерной плоскости в пространстве

Плоскость может быть также n -мерной. Такая плоскость задается уравнением:

$$x_1 w_1 + \dots + x_n w_n + (-h) = 0, \quad (55)$$

Принцип построения гиперплоскости аналогичен построению 3-мерной плоскости.

§7. Булевы функции

В классической математике приняты такие операции как сложение, умножение, вычитание и деление. Аналогично в дискретной математике существуют элементарные булевы функции.

Булевы функции образуют самый простой нетривиальный класс дискретных функций - их аргументы и значения могут принимать всего два значения 0 или 1.

Теория распознавания образов изначально строилась на моделировании принципов мышления и работы головного мозга посредством логических функций – булевых функций. В настоящее время булевы функции находят применение в логике, цифровой электронике, в программировании, и во многих других областях науки и техники.

Рассмотрим основные функции, используемые в качестве элементарных функций в алгебре логики.

Функции одной переменной – функции, зависящие только от одного аргумента.

Всего существует четыре различные функции от одной переменной (табл. 1):

$f(x) = 0$ – тождественный ноль;

$f(x) = 1$ – тождественная единица;

$f(x) = x$ – тождественная функция или тождественный x ;

$f(x) = \neg x$ – отрицание x , логическое "НЕ", также обозначается как \bar{x} .

В табл. 1 в первом столбце заданы возможные входные значения, а в остальных столбцах указаны функции и их соответствующие выходные значения.

Таблица 1. Булевы функции от одной переменной

x	0	1	x	$\neg x$
0	0	1	0	1
1	0	1	1	0

Функции двух переменных – функции, зависящие от двух аргументов.

В первом столбике табл. 2 записаны всевозможные выходные наборы x , y или комбинации 0 и 1. В первом наборе оба аргумента равны 0, но потом $x = 0$, а $x = 1$, в третьем наоборот $x = 1$, а $y = 0$ и в четвертом $x = y = 1$. В последующих столбцах обозначены конкретные функции и их выходных значения на каждом из входных наборов x и y .

Таблица 2. Булевы функции от двух переменных

x	y	$x \vee y$	$x \wedge y$	$x \oplus y$	$x \rightarrow y$	$x \equiv y$	$x \mid y$	$x \downarrow y$
0	0	0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	0	1	0
1	0	1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	1	0	1	1	0	0

$f(x, y) = x \vee y$ – дизъюнкция, логическое "ИЛИ".

$f(x, y) = x \wedge y$ – конъюнкция, логическое "И", логическое умножение.

Также можно использовать обозначения $x \& y$ или $x y$.

$f(x, y) = x \oplus y$ – сложение по модулю два, логическое исключающее "ИЛИ". Также можно использовать обозначение $x + y$.

$f(x, y) = x \rightarrow y$ – импликация, "если, то". Также можно использовать обозначение $x \supset y$.

$f(x, y) = x \equiv y$ – эквивалентность. Также можно использовать обозначение $x \sim y$.

$f(x, y) = x \mid y$ – штрих Шеффера, логическое «И-НЕ».

$f(x, y) = x \downarrow y$ – стрелка Пирса, логическое «ИЛИ-НЕ»

Булеву функцию бывают от любого n -го количества переменных. Опираясь на таблицы 1 и 2 можно построить такие функции, например:

Пусть задана булева функция:

$$(x \wedge y) \vee z \quad (56)$$

При значениях $x = 0, y = 0$ и $z = 1$, получим:

$$(0 \wedge 0) \vee 1 = 0 \vee 1 = 1 \quad (57)$$

Одна функция может иметь множество реализаций различными формулами. Формулы, реализующие одну и ту же функцию, называются *равносильными*. Отношение равносильности формул является эквивалентностью. Имеют место следующие *основные равносильности*:

- 1) $x \wedge x = x$ (идемпотентность конъюнкции);
- 2) $x \vee x = x$ (идемпотентность дизъюнкции);
- 3) $x \wedge 1 = x$; 4) $x \vee 1 = 1$; 5) $x \wedge 0 = 0$; 6) $x \vee 0 = x$;
- 7) $x \wedge \bar{x} = 0$ (закон противоречия);
- 8) $x \vee \bar{x} = 1$ (закон исключенного третьего);
- 9) $\bar{\bar{x}} = x$ (закон снятия двойного отрицания);
- 10) $x \wedge (y \vee x) = x$ (первый закон поглощения);
- 11) $x \vee (y \wedge x) = x$ (второй закон поглощения);
- 12) $x \oplus y = \bar{x} \vee x \wedge \bar{y} = x \wedge \bar{\bar{y}}$;
- 13) $\overline{x \wedge y} = \bar{x} \vee \bar{y}$; $\overline{x \vee y} = \bar{x} \wedge \bar{y}$ (законы де Моргана);
- 14) $x \wedge y = y \wedge x$ (коммутативность конъюнкции);
- 15) $x \vee y = y \vee x$ (коммутативность дизъюнкции);
- 16) $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$ (ассоциативность конъюнкции);
- 17) $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$ (ассоциативность дизъюнкции);
- 18) $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ (дистрибутивность конъюнкции относительно дизъюнкции);

19) $x \dot{\cup} (y \& z) = (x \dot{\cup} y) \& (x \dot{\cup} z)$ (дистрибутивность дизъюнкции относительно конъюнкции).

$$20) x \mid y = \overline{x \& y}; \quad x \mid y = \overline{x \dot{\cup} y}.$$