Notas de Análisis VI, Universidad Simón Bolívar

EDUARDO GAVAZUT, CARNET: 13-10524

ENERO-MARZO 2024

Contenido

Clase 2

Separación de Variables

Recordemos que la ecuación de calor que intentamos resolver es la siguiente:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \kappa \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 & \textbf{Condiciones de Frontera} \\ u(x,0) = f(x) & \textbf{Condición Inicial} \end{cases}$$

donde $x \in (0, L)$ y $t > 0$.

El método de Separación de Variables consiste en suponer que podemos reescribir $u(x,t)$ como el producto $u(x,t) = \phi(x)G(t)$. Esto va a implicar que

$$u(x,t) = \phi(x)G(t) \implies \begin{cases} u_t = \phi G_t \\ u_{xx} = \phi_{xx} G \end{cases}$$

Como $\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ entonces sustituyendo nos queda

$$\phi G_t = \kappa \phi_{xx} G \implies \frac{G_t}{G} = \kappa \frac{\phi_{xx}}{\phi}$$

El lado izquierdo solo depende de t y el derecho de x. Luego, $\exists \lambda$ constante tal que

$$\frac{1}{G}\frac{\partial G}{\partial t} = \frac{\kappa}{\phi}\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = -\lambda$$ [1]

[1] λ es negativo porque queremos hacer énfasis en que la temperatura decae a lo largo que pasa el tiempo.

De acá generaremos dos ecuaciones:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = -\lambda \phi \\ \phi(0) = \phi(L) = 0 \end{cases} \quad [2] \tag{1}$$

[2] Recordemos que las condiciones de frontera son $u(0,t) = u(L,t) = 0$.

$$\frac{\partial G}{\partial t} = -\lambda \kappa G \tag{2}$$

Resolvamos en primer lugar la ecuación **??**: Como G depende solo de t, y ϕ solo de x. u depende de ambas y hemos supuesto que $u = \phi G$. Luego, aplicando integración a ambos lados de la ecuación nos queda

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial t} = -\lambda \kappa G &\implies \frac{\partial G}{G} = -\lambda \kappa t + \beta \implies \ln G = -\lambda \kappa t + \beta \\ &\implies G(t) = ce^{-\lambda \kappa t} \end{aligned}$$

Ahora examinemos **??**. Esta es una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden. Un candidato para resolver esta ecuación es $\phi = e^{rx}$, entonces nos queda que:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = -\lambda \phi \implies r^2 e^{rx} = -\lambda e^{rx} \implies r^2 + 1 = 0 \quad [3]$$

[3] Este es el polinomio característico asociado a la ecuación diferencial ordinaria de segundo orden.

En el caso $\lambda \geq 0$, entonces

$$\phi(x) = \pm e^{\sqrt{\lambda} i x}$$

Por la fórmula de Euler, esto es

$$\phi(x) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda} x) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda} x) \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Como $\phi(0) = \phi(L) = 0$, entonces al sustituir en la ecuación anterior

Así, $\lambda = (n\pi/L)^2$ y queda que

$$\phi(x) = c_2 \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$