Ecuaciones Diferenciales 1
Universidad Simón Bolívar

Eduardo Gavazut
Carnet: 13-10524
Enero - Marzo 2024

Clase 1

Definiciones Básicas

Definición 1. Sea x una variable independiente, y una variable dependiente de x y $D^{(i)}$ (con $i \in \mathbb{N} - \{0, +\infty\}$) el operador derivación. Una relación

$$\Phi\big(x, y, Dy, D^{(2)}y, \dots\big) = 0$$

es llamada una ecuación diferencial.

Una ecuación diferencial se dice que es ordinaria si el operador derivada es el operador derivada en una variable.

Definición 2. El orden de una EDO es el orden de la mayor derivada presente en la ecuación.

Definición 3. Una EDO se dice lineal si es lineal en términos de las variables $y, y', y'', \dots, y^{(n)}, \dots$.

En otro caso, se dice que la EDO es no lineal.

Definición 4. Una solución de una EDO es una función $y = y(x)$ tal que

$$\Phi\big(x, y(x), y'(x), \dots\big) = 0$$

EDO de Orden 1

Definición 5. Una EDO de orden 1 es una ecuación diferencial de tipo

$$\Phi\big(x, y, y'\big) = 0$$

Si la EDO es lineal, entonces tiene la forma

$$a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = f(x), \quad a_1 \neq 0$$

Pasaremos ahora a resolver la EDO general lineal de primer orden mediante el método de los factores integrantes:

Consideremos la ecuación

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = g(t) \tag{1}$$

donde p y g son funciones cualesquiera. Multipliquemos esta expresión por una función $\mu(t)$ y nos queda

$$\mu(t)\frac{dy}{dt} + \mu(t)p(t)y = \mu(t)g(t) \tag{2}$$

Ahora, si consideramos μ tal que satisface

$$\frac{d\mu(t)}{dt} = p(t)\mu(t) \tag{3}$$

vemos que el lado izquierdo de 2 es la derivada del producto $\mu(t)y$.

Si además asumimos que $\mu(t)$ es positivo entonces nos queda

$$\frac{d\mu(t)/dt}{\mu(t)} = p(t)$$

La derivada del logaritmo es conocida, entonces por el TFC esto implica que

$$\ln \mu(t) = \int p(t)dt + k$$

Escogiendo $k = 0$ obtenemos

$$\mu(t) = \exp\left(\int p(t)dt\right)$$

Así, la ecuación 2 equivale a

$$\frac{d}{dt}(\mu(t)y) = \mu(t)g(t)$$

Y se sigue que

$$\mu(t)y = \int \mu(s)g(s) + c$$

Y la solución general de 1 es

$$y = \frac{\int \mu(s)g(s) + c}{\mu(t)}$$

donde μ es el factor integrante de la ecuación.

Para aplicar este método vemos que necesitamos dos integraciones: Una para obtener μ y otra para obtener y.

Clase 2

El Problema De Cauchy

El problema de Cauchy, también llamado el problema del valor inicial consiste en resolver una ecuación diferencial sujeta a unas ciertas condiciones de frontera o valores iniciales sobre la solución cuando una de las variables que la definen toma un valor determinado.

Definición 6. Dado un intervalo I de la recta real y $f : I \to \mathbb{R}^n$ continua. Sea $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto de I. Diremos que $y : I \to \mathbb{R}^n$ es una curva solución del problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad \text{con} \quad y(x_0) = y_0$$

si $y = y(x)$ es diferenciable en I, $\frac{dy}{dx} = f(x, y(x))$ para todo $x \in I$ e $y(x_0) = y_0$.

Teorema 1. *Sea $U = [a,b] \times \mathbb{R}$, $f : U \to \mathbb{R}$ continua en U y* ***Lipschitz en U respecto a la segunda variable****. Para cada $(x_0, y_0) \in U$ el problema*

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

posee una única solución en $[a,b]$.

Demostración. Acá va la demostración $\square$

Otras EDOs de Primer Orden

Ecuación de Variables Separables: Tienen la forma $\frac{dy}{dx} = f(x,y) = F(x)G(y)$ y se resuelven tomando

$$\int \frac{dy}{G(y)} = \int F(x)dx + C$$

Utilizando este método se puede modelar el crecimiento poblacional:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = ky \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

donde $F(X) = k$ y $G(y) = y$. Desarrollando,

$$\int \frac{dy}{y} = k \int dt + C \implies \ln|y| = kt + C$$

La solución general es $y(t) = e^{kt+C} = k_1 e^{kt}$, k_1 constante.

Para la solución particular, tenemos que

$$y_0 = y(t_0) = k_1 e^{kt_0} \implies k_1 = \frac{y_0}{e^{kt_0}} \implies y(t) = y_0 e^{k(t-t_0)}$$