

Ecuaciones Diferenciales 1

Universidad Simón Bolívar

EDUARDO GAVAZUT
CARNET: 13-10524
ENERO - MARZO 2024

Clase 3

Ecuaciones de Variables Separables

Son de la forma

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y) = F(X)G(y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Donde se tiene que:

1. $f(x, y) \in C(D \subset \mathbb{R}^2) \iff F, G \in C(D \subset \mathbb{R}^2)$.
2. f es Lipschitz en segunda variable.

En particular, si tenemos

$$\frac{dy}{dx} = f(a + bx + cy) \iff \begin{cases} z = a + bx + cy \\ z' = b + cy' \end{cases}$$

Luego

$$\frac{z' - b}{c} = f(z) \implies z' = cf(z) + b = F(z)G(z)$$

donde $F(z) = cf(z) + b$ y $G(z) = 1$.

Ejemplo 1. Resolver los siguientes PVI:

1. $y' = \sin(x - y)$.
2. Ley de Calor de Newton: Siendo T_0 la temperatura ambiente, queremos resolver lo siguiente:

$$\begin{cases} \frac{dT}{dt} = -k(T - T_0) \\ T(t_0) = T_1 \end{cases}$$

Ecuaciones Homogéneas

Definición 1. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ se tiene

$$f(\alpha x, \alpha y) = \alpha^n f(x, y), \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

Tal f es llamada homogénea de grado n . Si $f(\alpha x, \alpha y) = f(x, y)$ entonces f es llamada simplemente homogénea.

Proposición 1. *Dada*

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

con f Homogéneas, entonces $f(x, y) = \psi(y/x)$. Además si $u = y/x$,

$$\frac{dy}{dx} = \Psi\left(\frac{y}{x}\right) \implies \underbrace{x \frac{du}{dx} = \Psi(u) - u}_{\text{Variables Separables}}$$