# Sorozatok és sorok

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

### D'Alembert

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, a_n > 0$
$\lim_{n\to\infty} = \frac{a_{n+1}}{a_n} = g$
g < 1 => konvergens
g = 1 => nem lehet eldönteni
g > 1 => divergens

### Cauchy gyökkritérium

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$
l < 1 => konvergens
l = 1 => nem lehet eldönteni
l > 1 => divergens

### Raabe

$\lim_{n\to\infty} n * (\frac{a_{n+1}}{a_n} * 1) = l$
l < -1 => konvergens
l = -1 => nem lehet eldönteni
l > -1 => divergens

### Leibnitz

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n * a_n$, ha $(a_n)_{n\geq 1}$ csökkenő és $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ => konvergens

Csökkenő tesztelése:
$a_n - a_{n+1} > 0$ => csökkenő
$\frac{a_n}{a_{n+1}} > 1$ => csökkenő

## Hatványsorok

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n * (x - x_0)^n \frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| (*)$$

*Inkább ezt lehet használni
R - konvergencia sugár
| x - $x_0$ | < R => konvergens -> megnézem a határokat, hogy konv/div
| x - $x_0$ | > R => divergens

## Iterált határérték

$\lim_{y\to y_0}(\lim_{x\to x_0} f_{(x,y)}) = l_1$
$\lim_{x\to x_0}(\lim_{y\to y_0} f_{(x,y)}) = l_2$
Ha $l_1 \neq l_2$ => nem létezik f határértéke. Ez szükséges, de nem elég ahhoz, hogy tudjuk, hogy létezik a hatérték vagy sem.
Pl:

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}} = \frac{sin(x+y-1}{x-y} =? \lim_{y\to 0}(\lim_{x\to 1}\frac{sin(x+y-1)}{x-y}) = \lim_{y\to 0}\frac{siny}{1-y} = 0 \lim_{x\to 1}(\lim y \to 0 \frac{sin(x+y-1)}{x-y}) = \lim_{x\to 1}\frac{sinx -}{x}$$

$(1,0) \quad y-0 = m(x-1) => y = m(x-1)$
Ha $x \to 1 => y \to 0$

$\lim_{x\to 1}\frac{sin[x-m(x-1)-1]}{x-m(x-1)} = 0 \Rightarrow \lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}}\frac{sin(x+1-1)}{x-y} = 0$

## Minimum / Maximum pont

$f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y + 4 \qquad x,y > 0$

$$\begin{matrix}\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2+3y^2-15 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 6xy - 12\end{matrix} \Rightarrow \begin{cases}3x^2+3y^2-15=0 \\ 6xy-12=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=2\\ y=1\end{cases} \Rightarrow A(2,1) \text{ stacionárius pont}$$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) = 12$

$\frac{\partial f}{\partial y^2} = 6x \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y^2}(A) = 12$

$\frac{\partial f}{2x2y} = 6y \Rightarrow \frac{\partial f}{2x2y}(A) = 12$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \Delta_1 & \Delta_2 \end{array} \\ H = & \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} & \frac{\partial^2 f}{\partial x y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial xy} & \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y} \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \Delta_1 & \Delta_2 & \Delta_3 \end{array} \\ H = & \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial xy} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{bmatrix} \end{array}$$

$\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 > 0$ minimum pont
$\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 < 0$ maximum pont

**Ha van plusz feltétel is:**

Pl: $u_{(x,y,z)} = x + y + z$ $, F = x^2 + y^2 + z^2 = \underline{1} \leftarrow$ mellék feltétel $L_{(x,y,z,\lambda)} = x + y + z + \lambda * (x^2 + y^2 + z^2 - 1)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= 1 + 2\lambda x \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= 1 + 2\lambda y \\ \frac{\partial L}{\partial z} &= 1 + 2\lambda z \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= x^2 + y^2 + z^2 - 1 \end{aligned} \quad \begin{cases} 1 + 2\lambda x = 0 \\ 1 + 2\lambda y = 0 \\ 1 + 2\lambda z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0(*) \end{cases} \Rightarrow x = y = z = \frac{-1}{2\lambda} * \Rightarrow \frac{3}{4\lambda^2} = 1 \Rightarrow \lambda = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

*: Behelyettesítjük a nevezőbe

Ha $\lambda = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = y = z = \frac{-1}{\sqrt{3}} \Rightarrow A(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}})$ stacionárius pont

$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 2\lambda = \sqrt{3}$ $\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 0$

$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 2\lambda = \sqrt{3}$ $\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial z} = 0$

$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 2\lambda = \sqrt{3}$ $\frac{\partial^2 L}{\partial y \partial z} = 0$

Ha az eredményben lett volna x, y, z a stac. pontból helyettesítesz be.

**L másodrendű differenciál függvénye**

$d^2L = \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} h_1^2 + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} h_2^2 + \frac{\partial^2 L}{\partial z^2} h_3^2 + \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} h_1 h_2 + \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial z} h_1 h_3 + \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial z} h_2 h_3$
$d^2L = \sqrt{3} * (h_1^2 + h_2^2 + h_3^2)$ $> 0 \Rightarrow$ pozitív definit $\Rightarrow$ minimum pont

pozitív definit => minimum pont
negatív definit => maximum pont

Ha nem lehet eldönteni, hogy pozitív vagy negatív a mellék feltételt differenciálhatjuk és kifejezzük belőle $h_3$-at ( vagy egy másik $h$-t), amit behelyettesítünk $d^2L$-be
Mellék feltétel differenciálja:
$\frac{\partial F}{\partial x}h_1 + \frac{\partial F}{\partial x}h_2 + \frac{\partial F}{\partial x}h_3 = 0$

Ha ezután sem lehet eldönteni, hogy pozitív vagy negatív definit, akkor indefinit => nincs szélsőérték pont

## Taylor sorba fejtés

$f : (a,b) \to \mathbb{R} \qquad p+1$-szer deriválható
$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$

pl:

$f(x) = \frac{1}{2-3x+x^2} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}$
$f'(x) =$
$f''(x) =$

$\vdots f^n(x) = \downarrow$ behelyettesítek és kiszámolom
$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots = \frac{1}{2} + (1-\frac{1}{2^2})x + (1-\frac{1}{2^3})x^2 \dots + (\mathbf{1} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2^{n+1}}})\mathbf{x^n} \leftarrow a_n$

Ha megkell nézni, hogy konvergens vagy divergens:

$R = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = 1$
$|x| < R \Rightarrow \quad x \in (-1,1)$ konvergens

Lehet ilyen feladat is:

$f(x) = \frac{1}{(1-x+x^2)} \qquad f^5(0) = ?$

$f(x) = \frac{(1+x)^2}{(1+x)^2(1-x+x^2)^2} = \frac{(1+x)^2}{[(1+x)(1-x+x^2)]^2} = \frac{(1+x)^2}{[1^3+x^3]^2} = (1+2x+x^2) * \frac{1}{(1+x^3)^2} = (+x)^2 \frac{1}{(1+x^3)^2}$

$(\frac{1}{1-t})' = \frac{-1(1-t)'}{(1-t)^2} = \frac{+1}{(1-t)^2}$

$(1+t+t^2+\dots+t^n) = 0+1+2t = 3t^2+\dots+nt^{n-1}+\dots$
$t = -x^3$

$\frac{1}{(1+x^3)^2} = 0+1+2t+3t^2+\dots+nt^{n-1} / * (1+x)^2$

$f(x) \to [(\mathbf{1}+\mathbf{x})^\mathbf{2}\frac{\mathbf{1}}{(\mathbf{1}+\mathbf{x^3})^\mathbf{2}}] = (1+x)^2 * (0+1-2x^3+3x^6-4x^9+\dots) = 1+2x+x^2-2x^4-4x^4-\mathbf{2x^5}+3x^6+\dots$
$\frac{f^5(0)}{5!} = -2 \Rightarrow f^5(0) = -240$

## Taylor sorbafejtés többváltozós függvény esetén

$f(x,y) = ln(x^2+3y) \qquad Taylor(1,0)[(a,b)]$

$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{x^2+3y}$

$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{3}{x^2+3x}$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{-2x^2+6y}{(x^2+3y)^2}$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{-9}{(x2+3y)^2}$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{-6x}{(x^2+3y)^2}$

Taylor sor:

$f(x,y) = f(a,b)+\frac{1}{1!}[\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a)+\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)]+(\leftarrow$ első elem, második elem $\rightarrow$ $) + \frac{1}{2!}[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)(x-a)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)(x-a)(y-b) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)(y-b)^2] + \dots$

$f(x,y) \simeq 2(x-1)+3y-(x-1)^2-6(x-1)y-\frac{9}{2}y^2 \dots$ ilyen alakban kell hagyni

## Fourier sor

$f : [-l, l] \rightarrow \mathbb{R}$ periodikus függvény

$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n * cos\frac{n\pi x}{l} + b_n * sin\frac{n\pi x}{l})$

$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx$
$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x) * cos\frac{n\pi x}{l}dx$
$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x) * sin\frac{n\pi x}{l}dx$

$$\begin{cases} \cos n\pi = (-1)^n \\ \sin n\pi = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos(-x) = \cos x \\ \sin(-x) = -\sin x \end{cases}$$

Ha f páros => $b_n = 0$ => cos sor| páros: f(-x) = f(x)
Ha f páratlan => $a_n = 0$ => sin sor| páratlan: f(-x) = -f(x)