Vektor hossza

$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \leftarrow$ vektor

$|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$

Skalárral való szorzás

A vektor hosszát és/vagy irányítását változtatja meg.

$a * \vec{v} = \dots$

a - skalár

1. $a > 0 \Rightarrow$ a vektor irányítása megmarad, hossza változik
2. $a < 0 \Rightarrow$ a vektor irányítása és hossza is változik
3. $a = 0 \Rightarrow$ a szorzat eredménye $\vec{0}$

Lineáris függetlenség

$\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \dots \in V$
V - Vektortér (pl. $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$)

$\alpha * \vec{v} + \beta * \vec{u} + \gamma \vec{w} + \dots \leftarrow$ vektorok lineáris kombinációja
$\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ lineárisan független, ha lineáris kombinációjuk $= \vec{0}$
Generátor rendszer: vektortér elemeinek részhalmaza, melyek kombinációjával bármelyik vektor kifejezhető.
Bázis: vektortér elemeinek halmaza, melyek lineárisan függetlenek egymástól és lineáris kombinációjukkal a vektortér összes elemét meghatározhatjuk.

Pl: $V = \mathbb{R}^2 \Rightarrow \vec{u}\vec{v}$ lineárisan független

$a * \vec{u} + b * \vec{v} = \vec{w} \Rightarrow \vec{u}, \vec{v}$ generátor rendszer

$\Rightarrow \{\vec{u}, \vec{v}\} = B \leftarrow$ bázist alkotnak

Két vektor skaláris szorzata

Legyen $\vec{u}, \vec{v}$
$\vec{u} * \vec{v} = |\vec{u}| * |\vec{v}| * \cos \varphi$
$\varphi \in (\vec{u}, \vec{v}) \in [0, \pi]$

1. két vektor merőleges, ha a skaláris szorzatuk $= 0$
   $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} * \vec{v} = 0$
2. két vektor párhuzamos, ha egymás többszörösei
   $\vec{u} = x * \vec{v}$

$\vec{u} = u_1 * \vec{i} + u_2 * \vec{j} + u_3 * \vec{k} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$ $\vec{v} = v_1 * \vec{i} + v_2 * \vec{j} + v_3 * \vec{k} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$

$\vec{u} * \vec{v} = u_1 * v_1 + u_2 * v_2 + u_3 * v_3$
$\vec{u} * \vec{v} = |\vec{u}| * |\vec{v}| * \cos\varphi$
$\cos\varphi = \frac{\vec{u} * \vec{v}}{|\vec{u}| * |\vec{v}|}$

Két vektor vektoriális szorzata

$\vec{u} \times \vec{v} = \vec{w}$
$\vec{w} \perp (\vec{u}, \vec{v})$ síkjára

$\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \quad \vec{u} \times \vec{v} = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}$

Tétel

1. $|\vec{u} \times \vec{v}| = \vec{u}$ és $\vec{v}$-re épített paralelogramma területével
2. $\vec{u}$ és $\vec{v}$-re épített háromszög területe $=$ $\vec{u}$ és $\vec{v}$-re épített paralelogramma területe felével

$$T_{ABC} = \frac{1}{2}|\vec{u} \times \vec{v}|$$

Vegyes szorzat

$\vec{u} \times \vec{v} * \vec{w} = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$
I vektoriális szorzat II skaláris szorzat
Eredménye egy skalár

Tétel

$\vec{u} \times \vec{v} * \vec{w} =$ az $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ által épített hasáb térfogatával
$V_{ABCD} = \frac{1}{6}(\vec{AB} \times \vec{AC} * \vec{AD})$

Vektor tengelyekkel bezárt szöge

Szögfüggvények inverz függvényeivel (arcsin, arccos etc.) lehet meghatározni.

Egyenes egyenlete

Legyen $\vec{PQ} = \vec{OP} + \vec{OQ}$ az e egyenes irányvektora és $\vec{v} \parallel \vec{PQ}$
$P(x_P, y_P, z_P)$
$Q(x_Q, y_Q, z_Q)$

$\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$

$\vec{v} \parallel \vec{PQ} \Rightarrow \vec{PQ} = t * \vec{v}$
$\vec{OP} + \vec{QP} = \vec{OP}$

$$\begin{aligned} x_Q &= x_P + t * v_1 \\ e: y_Q &= y_P + t * v_2 \\ z_Q &= z_P + t * v_3 \end{aligned}$$

Sík egyenlete

Egy pont és egy normál vektor határoz meg egy síkot ($n \parallel S$)
n - normál vektor, S - sík
Adott: $P(x_P, y_P)$
$P_0(x_{P0}, y_{P0})$
$\vec{n} : \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix}$

$\vec{P_0P} \in S, \vec{n} \perp S \Rightarrow \vec{n} \perp \vec{P_0P} \Leftrightarrow \vec{n} * \vec{P_0P} = \vec{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_P - x_{P0} \\ y_P - y_{P0} \\ z_P - x_{P0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$
$\begin{bmatrix} n_1(x_P - x_{P0}) \\ n_2(y_P - y_{P0}) \\ n_3(z_P - z_{P0}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} n_1(x_P - x_{P0} = 0 \\ n_2(y_P - y_{P0}) = 0 \\ n_3(z_P - z_{P0}) = 0 \end{matrix} \Rightarrow S : n_1(x_P - x_{P0}) + n_2(y_P - y_{P0}) + n_3(z_P - z_{P0}) = 0$

Egyenes - sík viszonya

$\vec{v}$ - az egyenes irányvektora
$\vec{n}$ - a sík normál vektora

Az egyenes párhuzamos a síkkal ha $\vec{v} \perp \vec{n} \Leftrightarrow \vec{n} * \vec{v} = 0$
Az egyenes merőleges a síkkal ha $\vec{v} \parallel \vec{n} \Leftrightarrow = k * \vec{v}$

Sík - sík viszonya

Sík párhuzamos síkkal ha $\vec{n} \parallel \vec{n'}$
Sík merőleges síkkal ha $\vec{n} \perp \vec{n'}$

Polár koordináták

Helyzetvektor hossza és a helyzetvektor tengelyekkel bezárt szöge
$P(r; \theta)$
A θ szöget szögfüggvények segítségével határozzuk meg.

$Q(x_Q, y_Q, z_Q)$
$P(x_P, y_P, z_P) \in e$
e - egyenes
$S: \ Ax + By + Cz + D = 0$

Távolság ponttól síkig

$d(Q,S) = \frac{Ax_Q + By_Q + Cz_Q + D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

Távolság ponttól egyenesig

$d(Q,e) = \frac{|\vec{v} \times \vec{PQ}|}{|\vec{v}|}$

Alterek

Egy altér egy nagyobb vektortér része.
(V,+,*,$\mathbb{R}$)
Pl: V=$\mathbb{R}^2 \rightarrow$ ($\mathbb{R}^2$,+,*,$\mathbb{R}$)

Tétel

$\vec{u}, \vec{u'} \in U$
(1.) $\quad \vec{u} + \vec{u'} \in U$ - U zárt a "+"-ra nézve
(2.) $\quad \alpha * \vec{u} \in U$ - U zárt a skalárral való szorzásra nézve

Ha a két feltétel igaz, U altere $\mathbb{R}$-nek

$\mathbf{R^n}$-ben lineáris függetlenség

$(V, +, *, \mathbb{R}) vt.$
$\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_n} \in V$
$\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_n}$ lineárisan függletlen ha $\alpha_1 * \vec{v_1} + \alpha_2 * \vec{v_2} + \dots + \alpha_n \vec{v_n} \Leftrightarrow \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n = 0$
$\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_n}$ generátor rendszert alkot ha $\forall \vec{w} \in V \qquad \vec{w} = \beta_1 * \vec{v_1} + \beta_2 * \vec{v_2} + \dots + \beta_n * \vec{v_n}$ $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_n}$ bázis, ha lineárisan független és generátor rendszer

Végtelen vektorterek

Pl. (F,+,*,$\mathbb{R}$) függvények vektortere

Wronskij determináns

$f_0, f_1, \dots, f_{n-1} \rightarrow$ deriválható függvény
$(f_0, f_1, \dots, f_{n-1}) \in F$ lin. függ. ?
$\alpha_0 * f_0(x) + \alpha_1 * f_1(x) + \dots \alpha_n * f_{n-1}(x) = 0$
$\alpha_0 * f_0'(x) + \alpha_1 * f_1'(x) + \dots + \alpha_n * f_{n-1}'(x) = 0$
$\alpha_0 * f_0''(x) + \alpha_1 * f_1''(x) + \dots + \alpha_n * f_{n-1}''(x) = 0$

$$\begin{bmatrix} f_0(x) & f_1(x) & \dots & f_{n-1}(x) \\ f_0'(x) & f_1'(x) & \dots & f_{n-1}'(x) \\ \vdots & & & \\ f_0^{n-1}(x) & f_1^{n-1}(x) & \dots & f_{n-1}^{n-1}(x) \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Wronskij-féle determináns

$$W(x) = \begin{bmatrix} f_0(x) & f_1(x) & \dots & f_{n-1}(x) \\ f_0'(x) & f_1'(x) & \dots & f_{n-1}'(x) \\ \vdots & & & \\ f_0^{n-1}(x) & f_1^{n-1}(x) & \dots & f_{n-1}^{n-1}(x) \end{bmatrix}$$

Tétel

$W(x) \neq 0 \Rightarrow (f_0, f_1, \dots, f_{n-1})$ - lineárisan független $W(x) = 0 \Rightarrow (f * 0, f_1, \dots, f * n - 1)$ - lineárisan függő

Bázis transzformáció

Pl: $v = \mathbb{R}^2$