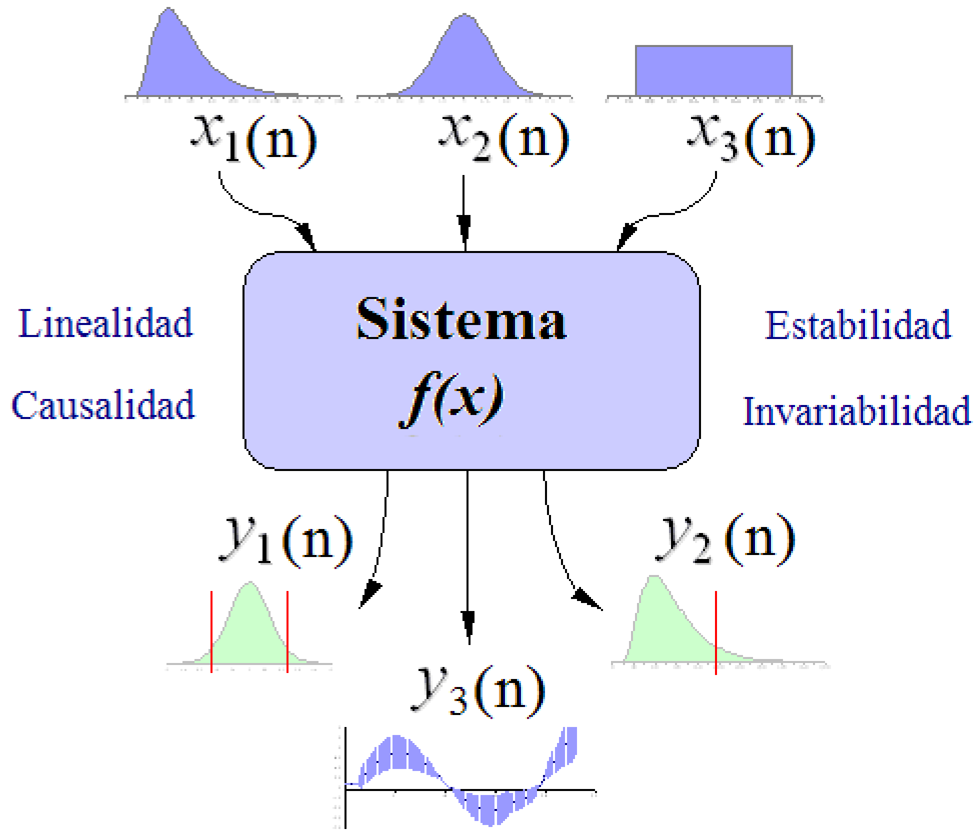
Análisis de Sistemas

♦ **Análisis**

Distinción y separación de las partes de un todo hasta llegar a conocer sus principios o elementos.



humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Análisis de Sistemas LTI en Tiempo

♦ Motivación

- Existen gran variedad de técnicas matemáticas para el análisis de sistemas LTI.
- Muchos sistemas prácticos son LTI o pueden aproximarse a sistemas LTI.

♦ Técnicas

Básicamente existen dos métodos

- **Convolución**
- **Ecuaciones en diferencias**
  - Método directo
  - Método indirecto

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

- **Principio**
  - Cualquier señal discreta x(n) de excitación de un sistema puede descomponerse como una suma ponderada de impulsos unitarios desplazados δ(n-k).

$$\text{Se tiene, } \; x(n)\,\delta(n-k) = x(k)\,\delta(n-k)$$

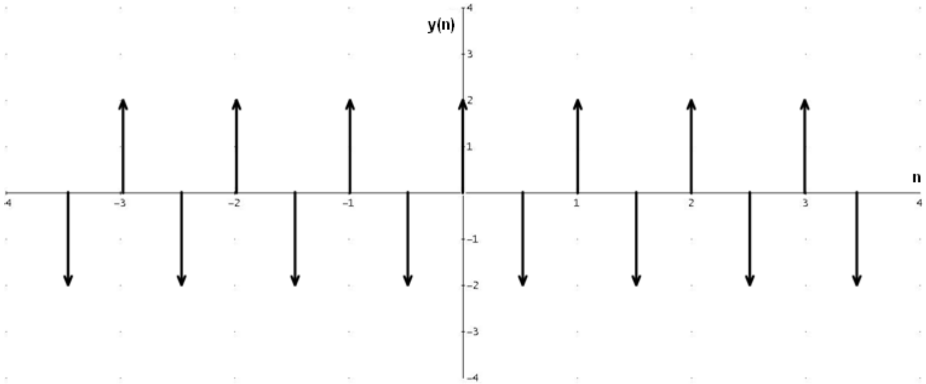
$$\text{Por lo tanto, } \; x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\,\delta(n-k)$$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

- **Ejemplo:** Descomponer en una suma ponderada de impulsos la señal

$$x(n)=(-1)^n=\{\ldots,\ -1,\ 1,\ -1,\ \underline{1},-1,\ 1,-1,\ldots\}$$

- **Solución.**



$$x(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k\delta(n-k)$$

- **Principio ...**
  - La respuesta del sistema lineal es la suma ponderada de respuestas a cada uno de los impulsos:

$$y(n) = \mathrm{T}[x(n)] = \mathrm{T}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)\right] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\mathrm{T}[\delta(n-k)]$$

  - Con $h(n,k) = \mathrm{T}[\delta(n-k)]$, la expresión se reescribe como,

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n,k)$$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Análisis por Convolución…

- **Principio …**
  - La ecuación

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n,k)$$

    - Constituye la respuesta de un sistema lineal a cualquier entrada *x*(n).
    - Dépende de *x*(n) y de las respuestas *h*(n,k) del sistema a los impulsos unitarios δ(n-k).
    - Se aplica a cualquier sistema lineal en reposo (variante o invariante en el tiempo)

- **Principio …**
  - Para sistemas *invariantes con el tiempo*, la ecuación

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n,k)$$

se reescribe como,

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n-k)h(k)$$

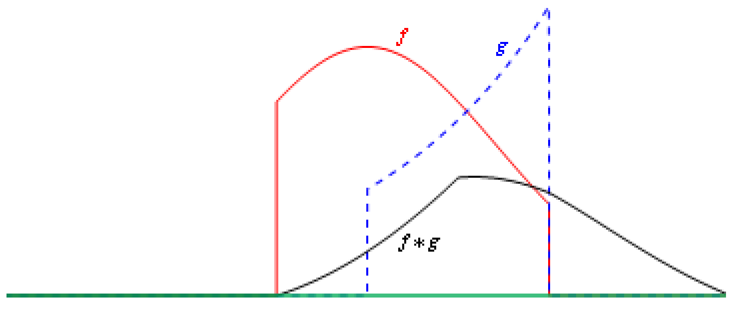
  - **Observación.**
    - La expresión anterior se denomina **convolución**.
    - Los sistemas LTI en reposo quedan totalmente caracterizados por su *respuesta al impulso unitario, h(n).*

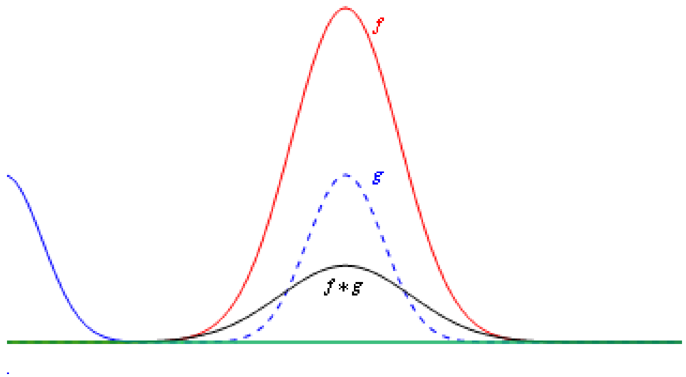
Definición Convolución

- Expresión que da la respuesta $y(n)$ de un sistema LTI como función de la señal de entrada $x(n)$ y de la respuesta impulsional $h(n)$.

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$$

- La convolución involucra cuatro pasos: reflexión, desplazamiento, multiplicación, y suma de señales.





humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Análisis por Convolución

- **Ejemplo 1.** Obtener por convolución la respuesta del sistema $h(n) = \{1 \ \underline{2} \ 1 \ \ -1\}$ cuando la entrada es $x(n) = \{\underline{1} \ 2 \ \ 3 \ 1\}$.

- **Solución**
  - Usando la definición $y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$
  - Y considerando que:

$$Long\ [y(n)] = long\ [x(n)] + long\ [h(n)] - 1$$
$$n_{inicio}[y(n)] = n_{inicio}[x(n)] + n_{inicio}[h(n)]$$
$$n_{final}[y(n)] = n_{final}[x(n)] + n_{final}[h(n)]$$

- **Solución …**
  - $n_{inicio} = n_{inicio}[x(n)] + n_{inicio}[h(n)] = 0 + (-1) = -1$
  - $n_{final} = n_{final}[x(n)] + n_{final}[h(n)] = 3 + 2 = 5$
  - Con $x(n) = \{\underline{1}\ \ 2\ \ \ 3\ \ 1\}$ $\quad h(n) = \{1\ \ \underline{2}\ \ 1\ \ \ -1\}$
  - **Para $\boldsymbol{n = -1}$**
    - $y(-1) = \sum_{k=0}^{3} x(k)h(-1-k)$
    - $y(-1) = x(0)h(-1-0) + x(1)h(-1-1) + x(2)h(-1-2) + x(3)h(-1-3)$
    - $y(-1) = x(0)h(-1) + x(1)h(-2) + x(2)h(-3) + x(3)h(-4)$
    - $y(-1) = 1x1 + 2x0 + 3x0 + 1x0 = 1$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Análisis por Convolución

- **Solución …**
  - Con $x(n) = \{\underline{1}\ \ 2\ \ \ 3\ \ 1\}\quad h(n) = \{1\ \ \underline{2}\ \ 1\ \ \ -1\}$
  - **Para $\boldsymbol{n = 0}$**
    - $y(0) = \sum_{k=0}^{3} x(k)h(0-k)$
    - $y(0) = x(0)h(0-0) + x(1)h(0-1) + x(2)h(0-2) + x(3)h(0-3)$
    - $y(0) = x(0)h(0) + x(1)h(-1) + x(2)h(-2) + x(3)h(-3)$
    - $y(0) = 1x2 + 2x1 + 3x0 + 1x0 = 4$
  - **Para $\boldsymbol{n = 1}$**
    - $y(1) = \sum_{k=0}^{3} x(k)h(1-k)$
    - $y(1) = x(0)h(1-0) + x(1)h(1-1) + x(2)h(1-2) + x(3)h(1-3)$
    - $y(1) = x(0)h(1) + x(1)h(0) + x(2)h(-1) + x(3)h(-2)$
    - $y(1) = 1x1 + 2x2 + 3x1 + 1x0 = 8$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

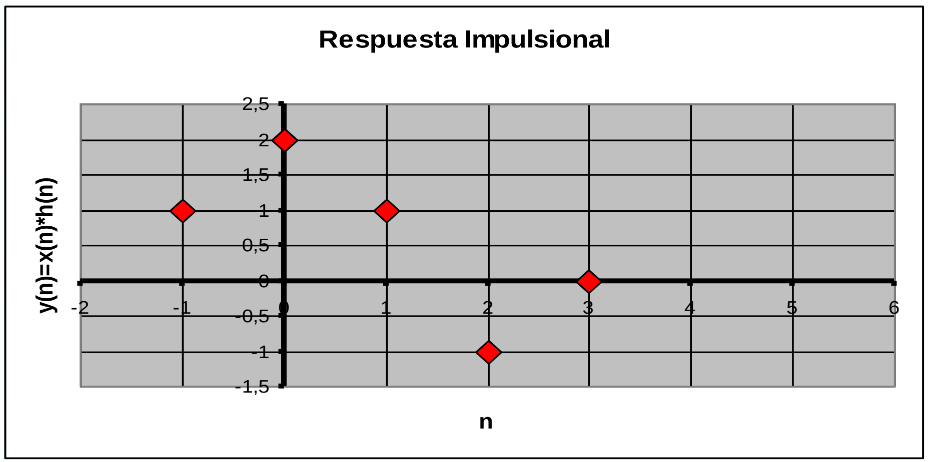
Análisis por Convolución

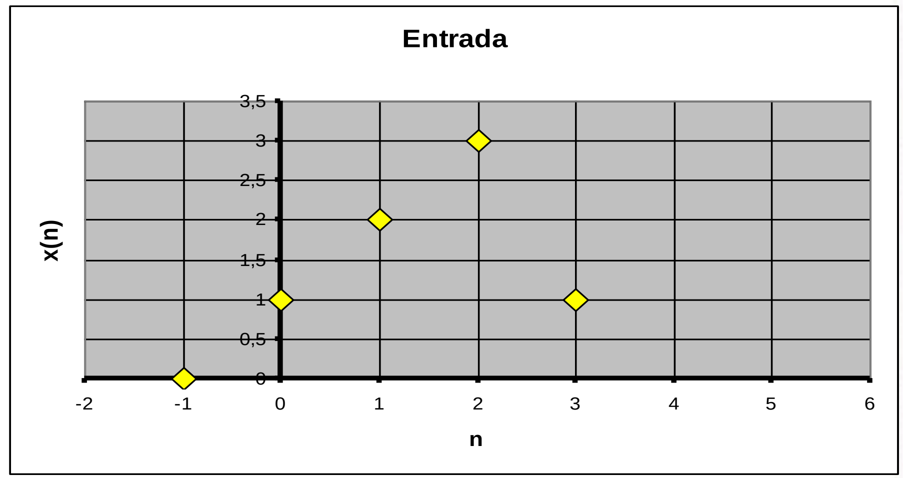
- **Solución …**
  - Con $x(n) = \{\underline{1} \;\; 2 \;\; 3 \;\; 1\}$ $\quad h(n) = \{1 \;\; \underline{2} \;\; 1 \;\; -1\}$
  - **Para $\boldsymbol{n = 2}$**
    - $y(2) = \sum_{k=0}^{3} x(k)h(2-k)$
    - $y(2) = x(0)h(2) + x(1)h(1) + x(2)h(0) + x(3)h(-1)$
    - $y(2) = 1x(-1) + 2x1 + 3x2 + 1x1 = 8$
  - **Para $\boldsymbol{n = 3}$** $\quad y(3) = \sum_{k=0}^{3} x(k)h(3-k) = 3$
  - **Para $\boldsymbol{n = 4}$** $\quad y(4) = \sum_{k=0}^{3} x(k)h(4-k) = -2$
  - **Para $\boldsymbol{n = 5}$** $\quad y(5) = \sum_{k=0}^{3} x(k)h(5-k) = -1$
- **Luego:** $\boldsymbol{y(n) = \{1 \;\; \underline{4} \;\; 8 \;\; 8 \;\; 3 \;\; -2 \;\; -1\}}$

Análisis por Convolución …

- **Ejemplo 2:** Determine la respuesta del sistema LTI mediante el método tabular

Respuesta impulsional : $h(n) = \{1, \underset{\uparrow}{2}, 1, -1\}$ Señal de entrada : $x(n) = \{\underset{\uparrow}{1}, 2, 3, 1\}$





Análisis por Convolución …

- **Ejemplo:** …
  - Solución: Por convolución $y(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$

n:	-1	0	1	2	3	4	5
x(n):		1	2	3	1		
h(n):	1	2	1	-1			
	1*1=1	1*2=2	1*3=3	1*1=1			
		2*1=2	2*2=4	2*3=6	2*1=2		
			1*1=1	1*2=2	1*3=3	1*1=1	
				(-1)*1=-1	(-1)*2=-2	(-1)*3=-3	(-1)*1=-1
y(n):	1	4	8	8	3	-2	-1

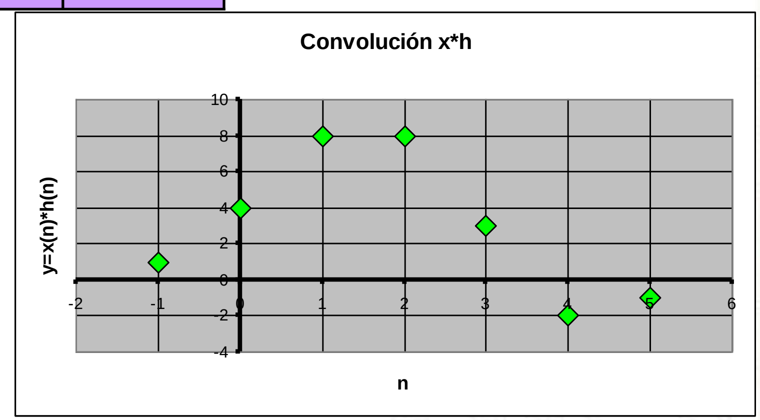
Método Tabular

$$y(n)=\left\{1,\underset{\uparrow}{4},8,8,3,-2,-1\right\}$$

$$Long\ [y(n)]=\ long\ [x(n)]+long\ [h(n)]-1=4+4-1=7$$

$$n_{inicio}[y(n)]=n_{inicio}[x(n)]+n_{inicio}[h(n)]=0+(-1)=-1$$

$$n_{final}[y(n)]=n_{final}[x(n)]+n_{final}[h(n)]=3+2=5$$



- **Ejemplo 3:** Obtener por convolución la salida del sistema $h(n) = u(n-1)$ cuando la entrada es $x(n) = (1/3)^{-n}\, u(-n-1)$.

- **Solución:**
  - Aplicando la definición $y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$
  - Se tiene:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1/3)^{-k} u(-k-1)u(n-k-1)$$

  - Descomponiendo en dos partes la sumatoria, se llega a:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)h(n-k) + \sum_{k=-\infty}^{-1} x(k)h(n-k)$$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

- **Solución…**
  - Descomponiendo en dos partes la sumatoria, se llega a:

$$y(n) = y(n)_{k\geq 0} + y(n)_{k<0}$$

  - Analizando la sumatoria para $k \geq 0$

$$y(n)_{k\geq 0} = \sum_{k=0}^{\infty} (1/3)^{-k} u(-k-1) u(n-k-1)$$

  - Se observa que siempre $u(-k-1) = 0$, por lo tanto:

$$y(n)_{k\geq 0} = 0$$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

- **Solución…**
  - Analizando la sumatoria para $k < 0$

$$y(n)_{k<0} = \sum_{k=-\infty}^{-1} (1/3)^{-k} u(-k-1) u(n-k-1)$$

  - Se observa que siempre $u(-k-1) = 1$, por lo tanto:

$$y(n)_{k<0} = \sum_{k=-\infty}^{-1} (1/3)^{-k} \; u(n-k-1)$$

  - Haciendo $k = -k$, la expresión se reescribe como,

$$y(n)_{k<0} = \sum_{k=1}^{\infty} (1/3)^{k} \; u(n+k-1)$$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

- **Solución…**
  - Por lo tanto la respuesta total se reduce a:

$$y(n) = \sum_{k=1}^{\infty} (1/3)^k \; u(n+k-1)$$

  - Aplicando el cambio de variables $m = n + k - 1$ se tiene:

$$y(n) = (1/3)^{-n+1} \sum_{m=n}^{\infty} (1/3)^m \; u(m)$$

  - La sumatoria resuelve en dos partes: para $n \geq 0$ y $n < 0$.

- **Solución…**
  - **Análisis para $n \geq 0$**
    - Recordando que $\sum_{n=k}^{\infty} r^n = \frac{r^k}{1-r} \;\therefore\; |r| < 1$
    - Se llega a:

$$y(n)_{n\geq 0} = (1/3)^{-n+1} \sum_{m=n}^{\infty} (1/3)^m \; u(m) = \frac{1/3}{1 - 1/3}$$

$$y(n)_{n\geq 0} = \frac{1}{2}$$

Análisis por Convolución …

- **Solución…**

  - **Análisis para $n < 0$**
    - Puesto que n es negativo, el índice m de la sumatoria empieza con un valor negativo, pasa por cero y continua con valores positivos hasta infinito. Es decir,

$$y(n)_{n<0} = (1/3)^{-n+1}\left[\sum_{m=-|n|}^{-1} (1/3)^m \ u(m) + \sum_{m=0}^{\infty} (1/3)^m \ u(m)\right]$$

    - Luego,

$$y(n)_{n<0} = (1/3)^{-n+1} \sum_{m=0}^{\infty} (1/3)^m \ u(m)$$

- **Solución…**

  - **Análisis para $n < 0$ …**
    - Luego,

$$y(n)_{n<0} = (1/3)^{-n+1} \sum_{m=0}^{\infty} (1/3)^{m}\ u(m)$$

    - Recordando que $\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r} \quad \therefore \quad |r| < 1$
    - Se llega a:

$$y(n)_{n<0} = (1/3)^{-n+1} \left[\frac{1}{1 - 1/3}\right] = \frac{3^n}{2}$$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

- **Solución…**
  - **Finalmente,**

$$y(n) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & n \geq 0 \\ \dfrac{3^n}{2} & n < 0 \end{cases}$$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Propiedades de la Convolución

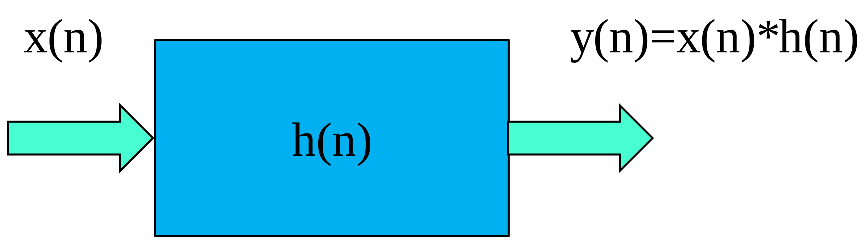
Percepción y Sistemas Inteligentes

♦ Introducción:

Desde un punto de vista físico las **propiedades** pueden interpretarse como diferentes formas de **interconectar un sistema** para obtener el mismo resultado.

► **Notación:**

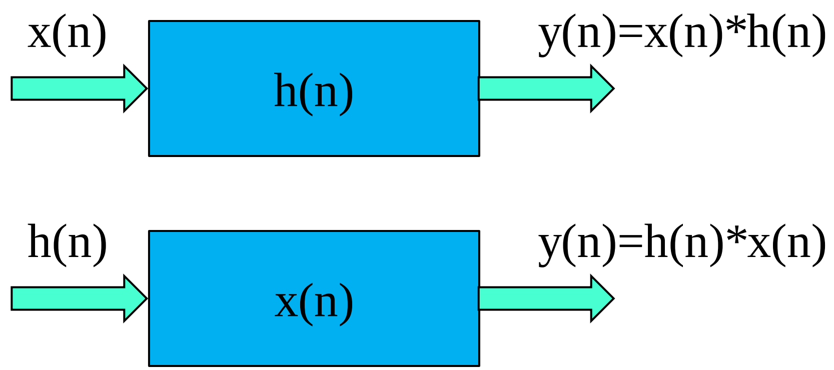
$$y(n) = x(n) * h(n) \equiv \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$$



Propiedades de la Convolución…

Propiedad Conmutativa:

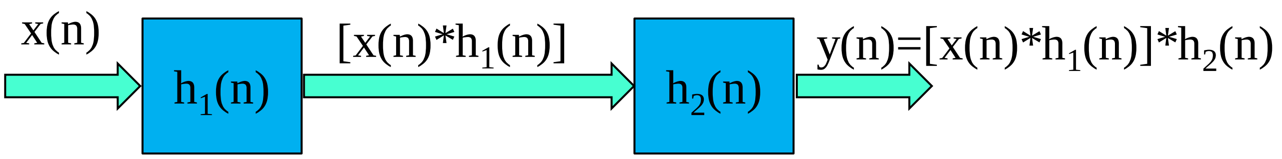
$$x(n)*h(n)=h(n)*x(n)$$

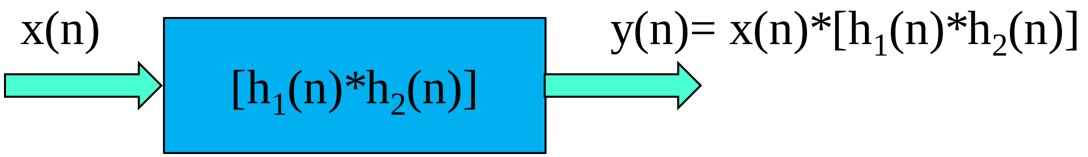


$$y(n)=h(n)*x(n)\equiv\sum_{k=-\infty}^{\infty}h(k)x(n-k)$$

Propiedades de la Convolución

Propiedad Asociativa: $$[x(n) * h_1(n)] * h_2(n) = x(n) * [h_1(n) * h_2(n)]$$

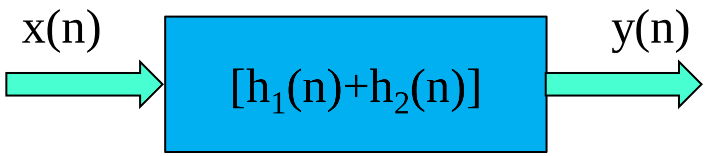


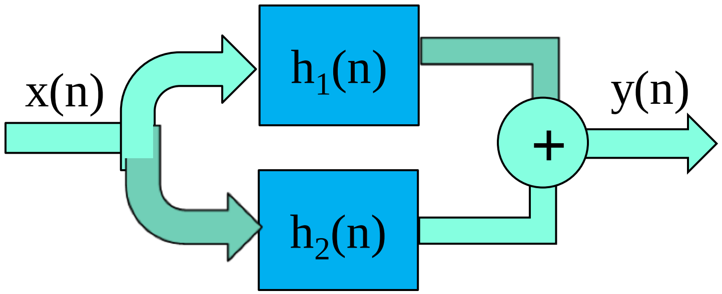


humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Propiedades de la Convolución…

Propiedad Distributiva: $x(n)*[h_1(n)+h_2(n)]=x(n)*h_1(n)+x(n)*h_2(n)$





Causalidad en sistemas LTI

- **Introducción**

  - Para sistemas LTI la causalidad se traduce en una determinada condición que ha de cumplir $h(n)$.

Causalidad en sistemas LTI

Introducción ..

- La convolución para un instante n_0 está dada por:

$$y(n_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n_0 - k)$$

ó,

$$y(n_0) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)x(n_0 - k) + \sum_{k=-\infty}^{-1} h(k)x(n_0 - k)$$

- De donde,

$$\begin{aligned} y(n_0) = {} & [h(0)x(n_0) + h(1)x(n_0 - 1) + h(2)x(n_0 - 2) + \cdots] \\ & + [\, h(-1)x(n_0 + 1) + h(-2)x(n_0 + 2) + h(-3)x(n_0 + 3) + \cdots] \end{aligned}$$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Causalidad en sistemas LTI…

- Para que y(n) dependa sólo de las muestras **pasadas y presentes** de la entrada, la respuesta impulsional debe **satisfacer** la condición:

$$h(n) = 0 \quad para \;\; n < 0$$

- Un sistema LTI **es causal** si y sólo si su **respuesta impulsional es cero** para **valores negativos de n.**

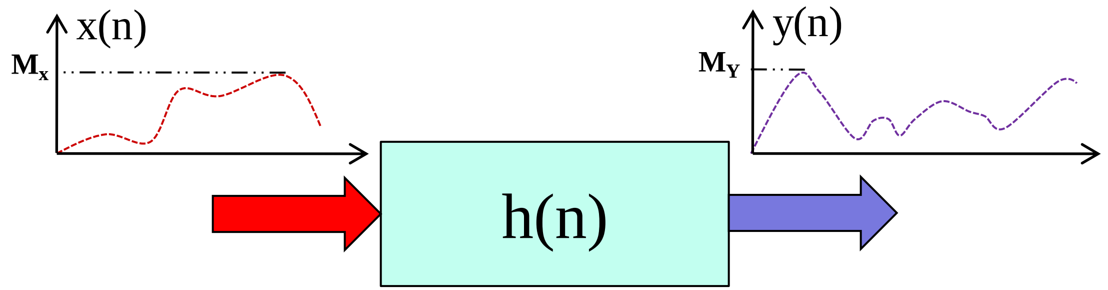
humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Causalidad en Sistemas LTI

- **Ejemplo**. Determinar si los siguientes sistemas representados por su respuesta impulsional son causales.
  - $h_1(n) = \{0 \quad 0 \quad \underline{0} \quad 1{,}2 \quad -1{,}5 \quad 1{,}2 \quad -1{,}5 \quad 1{,}2\}$
  - $h_2(n) = \{1 \quad 2 \quad 3 \quad 2 \quad \underline{1} \quad 2 \quad 3 \quad 2 \quad 1\}$
  - $h_3(n) = \{\underline{3{,}2} \quad 4{,}4 \quad -5{,}5 \quad 7{,}1 \quad 8{,}4 \quad \ldots\}$
  - $h_4(n) = \begin{cases} 2, & n\ par \\ -2, & n\ impar \end{cases}$
  - $h_5(n) = u(n)$
  - $h_6(n) = 0{,}5^n u(n)$
  - $h_7(n) = u(n+2) - u(n-2)$
  - $h_8(n) = \delta(n)$

Introducción

- Un sistema en reposo es estable (BIBO) si y sólo si su secuencia de salida $y(n)$ está acotada para cualquier entrada acotada $x(n)$.



- Si $x(n)$ está acotada, existe una constante M_x tal que: $|x(n)| \leq M_x < \infty$
- Si y(n) está acotada, existe una constante M_y tal que: $|y(n)| \leq M_y < \infty$

Estabilidad en Sistemas LTI

- **Introducción …**
  - Tomando el **valor absoluto** en ambos lados de la fórmula de convolución, se obtiene,

$$|y(n)| = \left|\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k)\right|$$

  - Puesto que el **valor absoluto** de una suma es **siempre menor o igual** que la suma de los valores absolutos de sus términos:

$$|y(n)| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)||x(n-k)|$$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

- **Introducción …**
  - Como la entrada es acotada $|x(n)| \leq M_x$, puede **sustituirse** el límite superior para $x(n)$ en la expresión anterior y obtener:

$$|y(n)| \leq M_x \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)|$$

  - Se puede concluir que la **salida está acotada** si la respuesta impulsional del sistema satisface la **condición**:

$$S_h \equiv \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| < \infty$$

Estabilidad en Sistemas LTI

- **Introducción …**

  - En consecuencia, un sistema LTI es estable si su respuesta impulsional es *absolutamente sumable*.
    - Condición necesaria y suficiente para garantizar la estabilidad del sistema.
    - Para sistemas causales, el **límite inferior** en la sumatoria de la condición de estabilidad es cero (k=0).

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Ejemplo: Determinar el rango de valores del parámetro *a* para el cual el sistema LTI de respuesta **h(n)=*a*ⁿ *u*(n)** es estable.

Solución

- De la definición: $$S_h \equiv \sum_{k=0}^{\infty} |h(k)| < \infty$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left|a^k\right| = \sum_{k=0}^{\infty} |a|^k = 1 + |a| + |a|^2 + \ldots$$

- Claramente, esta serie geométrica converge a:

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a|^k = \frac{1}{1-|a|}$$

siempre que $|a|<1$.

Por lo tanto, el sistema **es estable si $|a|<1$.**

- **Ejemplo 2:** Determinar el rango de valores de los parámetros ***a*** y ***b*** para el cual el sistema LTI de respuesta impulsional h(n) **es estable**.

$$h(n) = \begin{cases} a^n, & n \geq 0 \\ b^n, & n < 0 \end{cases}$$

Solución

El sistema no es causal. Por lo tanto, de la condición de estabilidad se tiene:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| = \sum_{k=0}^{\infty} |a|^k + \sum_{k=-\infty}^{-1} |b|^k$$

Del ejemplo anterior, la primera suma converge **si |*a*|<1.**

Ejemplo 2: …

- La segunda suma puede escribirse como,

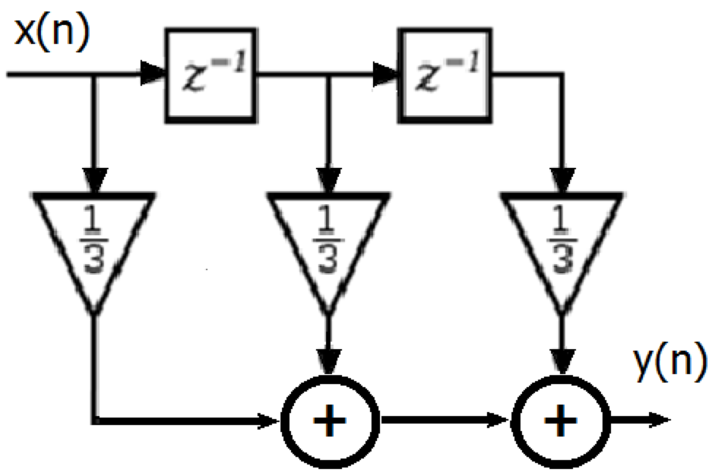
$$\sum_{k=-\infty}^{-1} |b|^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|b|^k} = \frac{1}{|b|}\left(1 + \frac{1}{|b|} + \frac{1}{|b|^2} + \ldots\right) = \frac{1/|b|}{1 - 1/|b|}$$

donde **1/|*b*| < 1** para que la serie converja.

- En consecuencia, el sistema es estable si **|*a*|<1 y |*b*|>1.**

- **Introducción**
  - Los sistemas LTI quedan caracterizados completamente por su respuesta impulsional $h(n)$.
  - Según la duración de $h(n)$ se clasifican en FIR e IIR.
    - FIR : Finite-duration Impulse Reponse
    - IIR: Infinite-duration Impulse Reponse
  - La duracción de $h(n)$ suministra información sobre las características del sistema.

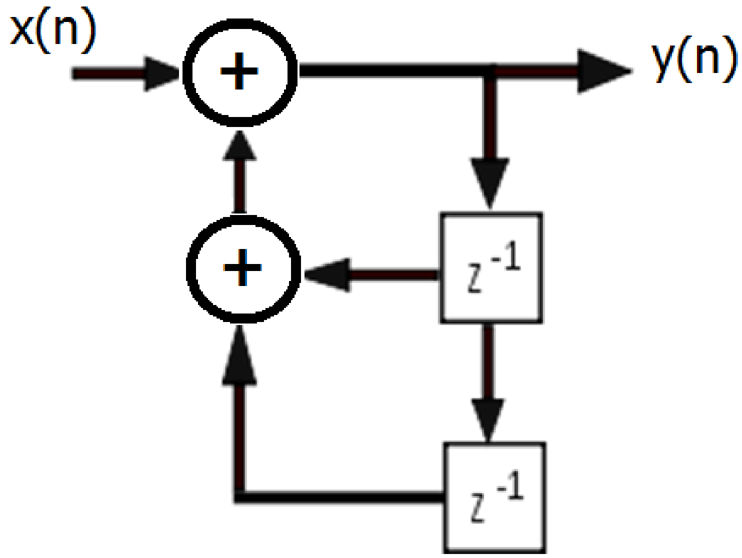
- **Sistema FIR**
  - $h(n)$ está definida en un intervalo finito de tiempo.
  - Presenta una memoria finita, de longitud igual al intervalo de definición.



humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Sistema IIR

- $h(n)$ considera la muestra presente y las pasadas de la señal de entrada para calcular la salida por *convolución.*
- Presenta memoria infinita.



Sistemas Recursivos y No Recursivos

Definiciones

Sistemas recursivos

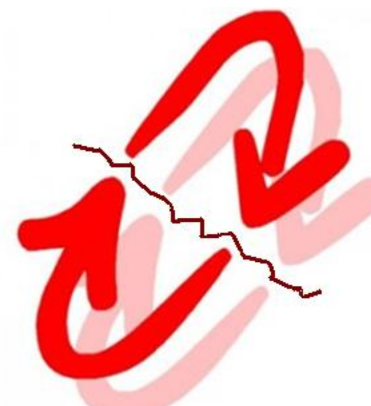
y(n) en el instante n depende de los valores anteriores de la misma salida, y(n-1), y(n-2), ….

$$y(n) = F[y(n-1), y(n-2),...., y(n-N), x(n), x(n-1),...., x(n-M)]$$

Sistemas no recursivos

$y(n)$ depende sólo de los valores presentes y/o pasados de la señal de entrada $x(n)$.

$$y(n) = F[x(n), x(n-1),...., x(n-M)]$$

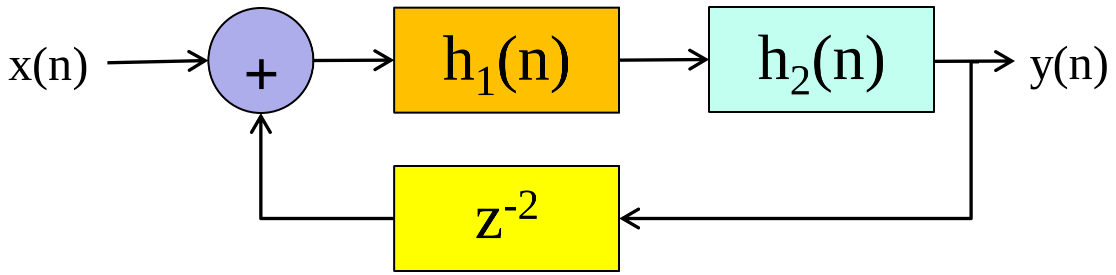


humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Sistemas Recursivos y No Recursivos

■ Observaciones:

- La implementación de muchos sistemas discretos prácticos requiere de la recursividad.
- Los sistemas recursivos **se diferencian** de los no recursivos por la presencia de **lazos de realimentación** y/o **atrasos entre la entrada y la salida**.



- La salida de un sistema **recursivo** debe calcularse **consecutivamente** mientras que la salida de un sistema **no recursivo** se puede calcular en **cualquier orden**.

Universidad del Valle
Facultad de Ingeniería
Escuela de Ingeniería Eléctrica y Electrónica
humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Ejemplo 1:

- **Problema: Obtener un sistema recursivo** a partir del sistema de promedio acumulado de una señal x(n) en el intervalo 0≤k≤n.

$$y(n) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} x(k) \qquad n = 0,1,.....$$

Solución: Modificando la expresión anterior es posible obtener un sistema recursivo que requiere mucho menos memoria.

$$(n+1)y(n) = \sum_{k=0}^{n-1} x(k) + x(n) = n\,y(n-1) + x(n)$$

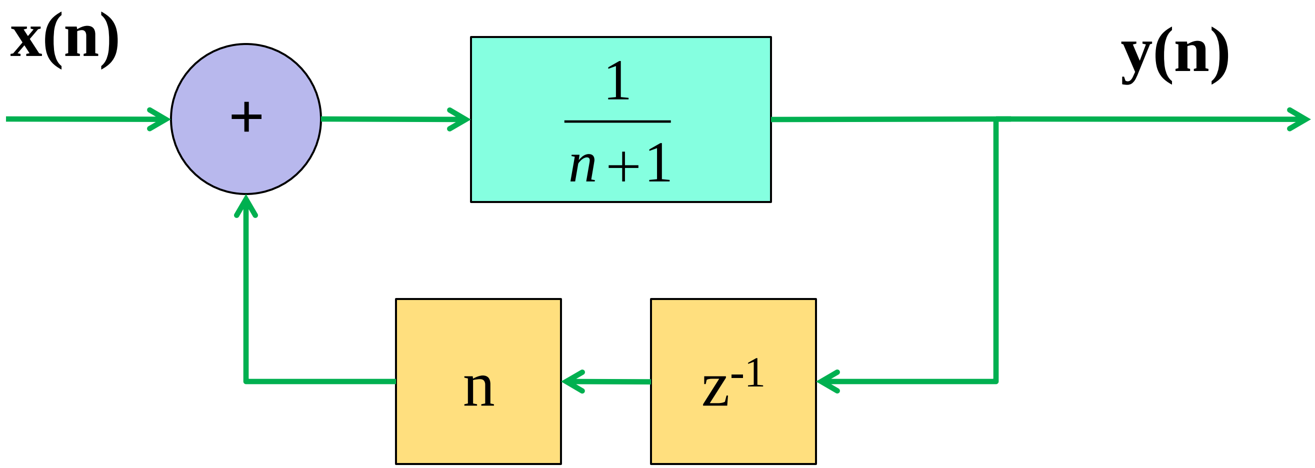
$$y(n) = \frac{n}{n+1}y(n-1) + \frac{1}{n+1}x(n)$$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Ejemplo 1:

■ Diagrama de Bloques

$$y(n) = \frac{n}{n+1} y(n-1) + \frac{1}{n+1} x(n)$$



humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Ejemplo 2:

- **Problema:** Encontrar que operación realiza el siguiente sistema recursivo.

$$y(n) = \frac{1}{2}\left[y(n-1) + \frac{x(n)}{y(n-1)} \right]$$

- **Respuesta:**
  - Obtiene la raíz cuadrada de un número positivo A:
    - y(-1) debe ser igual a una estimación de √A y $x(n)$=A u(n).

  - **Verificación:**

  Con **A=2**, $y(-1)=1 \quad \Rightarrow \quad x(\mathrm{n}) = 2\,u(n)$

  Resultado: y(0)=3/2, y(1)=1.4166667, y(2)=1.4142157.

Ejemplo 2:

- **Diagrama de Bloques:**

$$y(n) = \frac{1}{2}\left[y(n-1) + \frac{x(n)}{y(n-1)} \right]$$