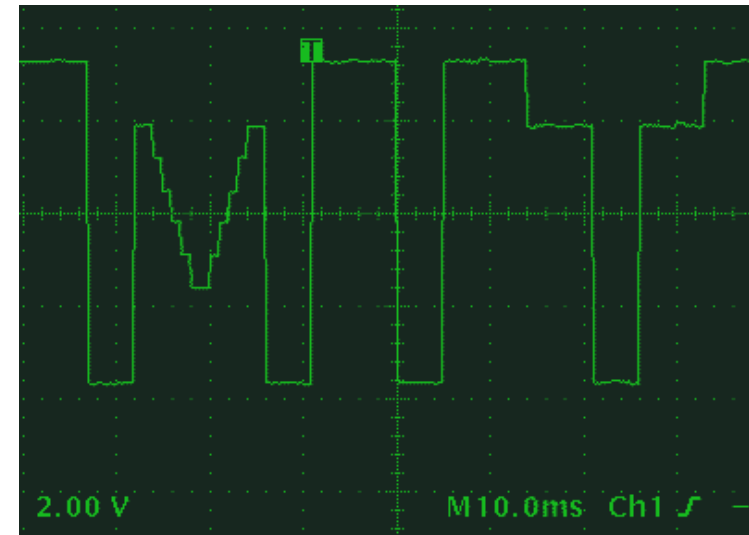


■ Introducción

■ Definición de Filtrado

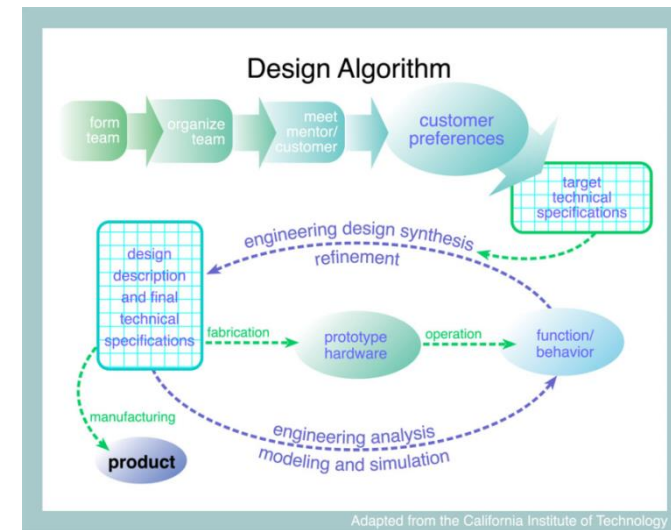
Proceso o algoritmo computacional que convierte una secuencia de números (señal de entrada) en otra secuencia de números (señal de salida), y en el cual la conversión cambia el carácter de la señal en una forma predeterminada.



■ Introducción...

■ Definición de Diseño

- Proceso para determinar los coeficientes del algoritmo de entrada/salida, mediante un procedimiento de aproximación.
- Proceso para determinar $H(w)$, $H(z)$, $h(n)$ o la ecuación de diferencia que pueda cumplir los requerimientos de filtrado de señal.

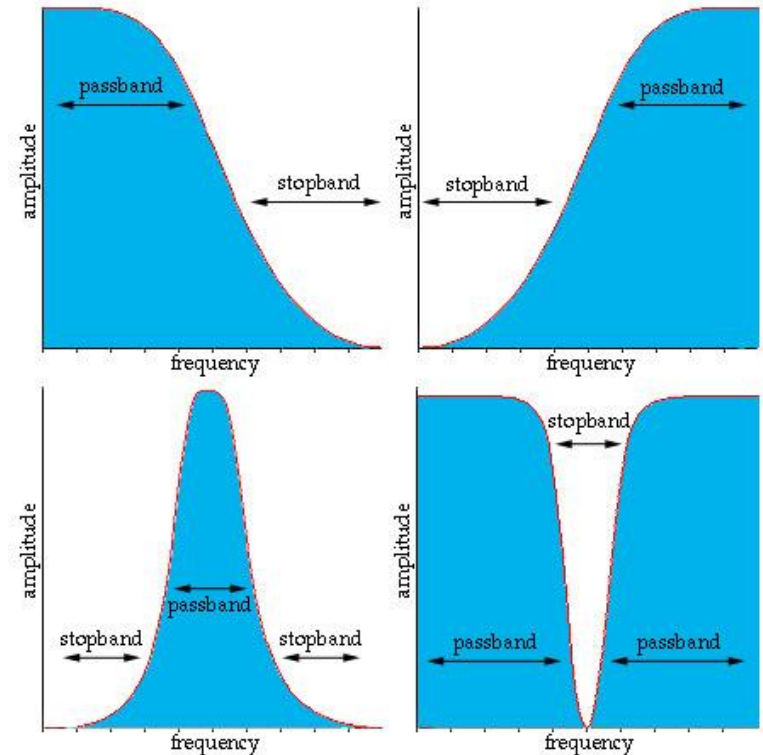


■ Introducción...

■ Clasificación

De acuerdo con las *características de su respuesta en frecuencia*.

- Filtros Paso-Bajo
- Filtros Paso-Alto
- Filtros Banda de Rechazo
- Filtros Banda de Paso



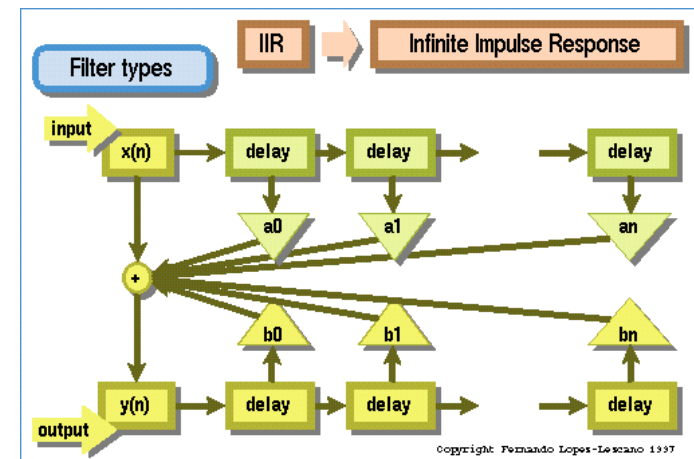
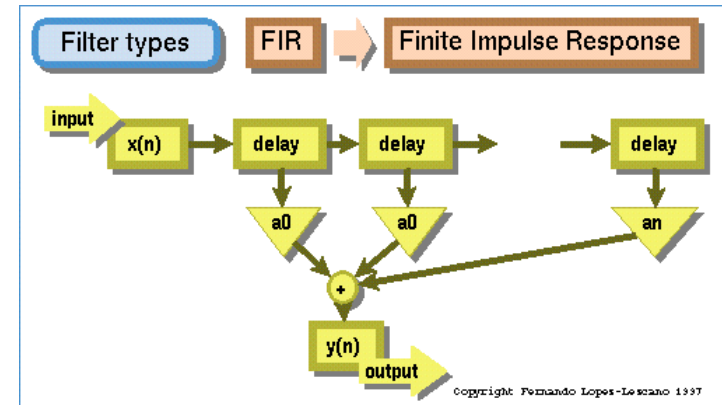
Diseño de Filtros Digitales LTI

■ Introducción...

■ Clasificación ...

Dependiendo de la *duración de la respuesta al impulso*

- De Respuesta Impulsional Finita (FIR)
- De Respuesta Impulsional Infinita (IIR)



■ Introducción...

■ Realizaciones (Puesta en operación)

■ Dominio del Tiempo

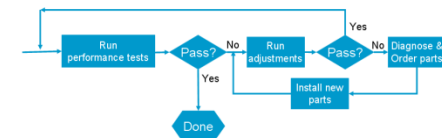
- Realización Recursiva (preferido para Filtros IIR)
- Realización No-Recursiva (preferido para Filtros FIR)

■ Dominio Frecuencial

- Realización vía Transformada de Fourier

■ Procedimiento de Diseño

1. Determinar una respuesta o un conjunto de respuestas deseadas (p.e. la respuesta de magnitud y/o fase deseada).
2. Seleccionar una clase de filtros para aproximar la respuesta deseada (p.e. Filtros FIR o IIR)
3. Establecer un criterio de “aceptabilidad” para la respuesta obtenida comparada con la deseada.



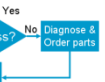
■ Procedimiento de Diseño...

4. Desarrollar un método para encontrar el mejor miembro de la clase de filtros seleccionada.

5. Sintetizar el mejor filtro usando una estructura y una forma de implementación apropiadas (p.e. un programa de computador, un dsp, o un chip VLSI).

6. Analizar el desempeño (performance) del filtro.

El procedimiento anterior es frecuentemente iterativo hasta que se satisfagan los requerimientos de la aplicación particular.



■ Consideraciones de Causalidad

■ Teorema de Paley-Wiener.

- Establece las condiciones suficientes y necesarias que debe satisfacer una característica de respuesta en frecuencia $H(w)$ para que el filtro resultante sea causal.
- Si $h(n)$ tiene energía finita y $h(n) = 0$ para $n < 0$, entonces debe cumplirse que:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left| \ln |H(w)| \right| dw < \infty$$

■ Teorema de Paley-Wiener...

- Recíprocamente y si además se cumple que $|H(w)|$ es *cuadráticamente integrable*, es decir:



$$\int_{-\pi}^{\pi} |H(w)|^2 dw < \infty$$

e se a $|H(w)|$ no resultante



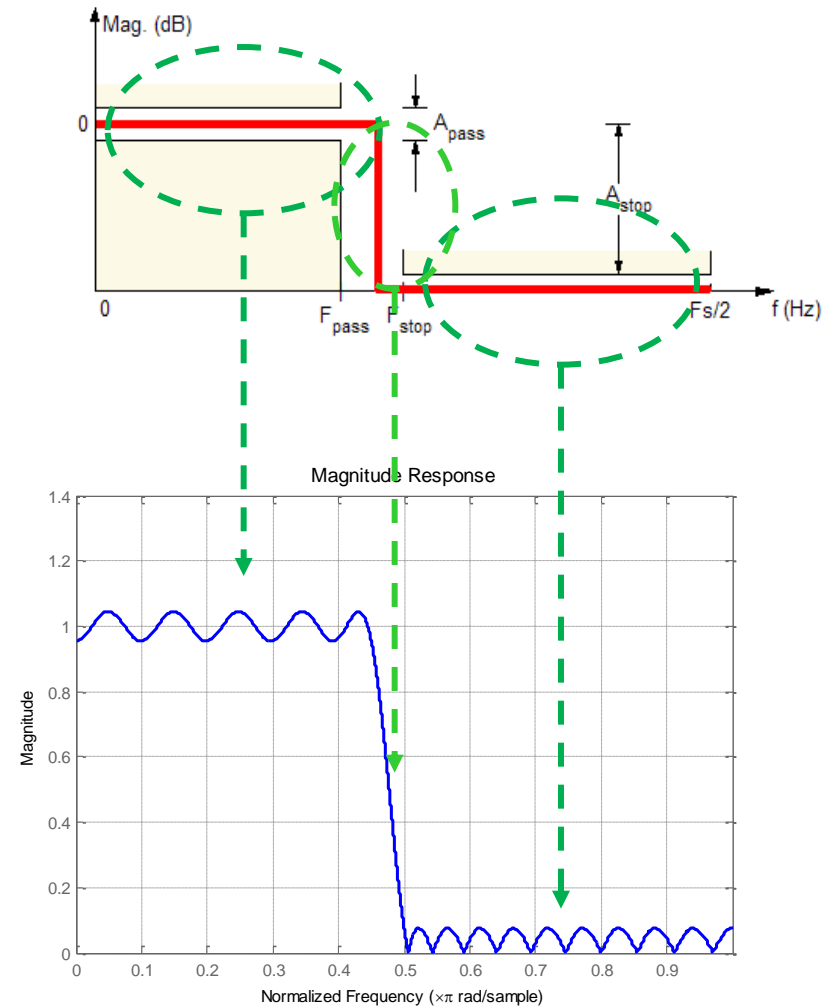
$$H(w) = |H(w)| e^{j\Theta(w)}$$

sea causal !!!

■ Consideraciones de Causalidad...

Implicaciones Tma de Paley-Wiener

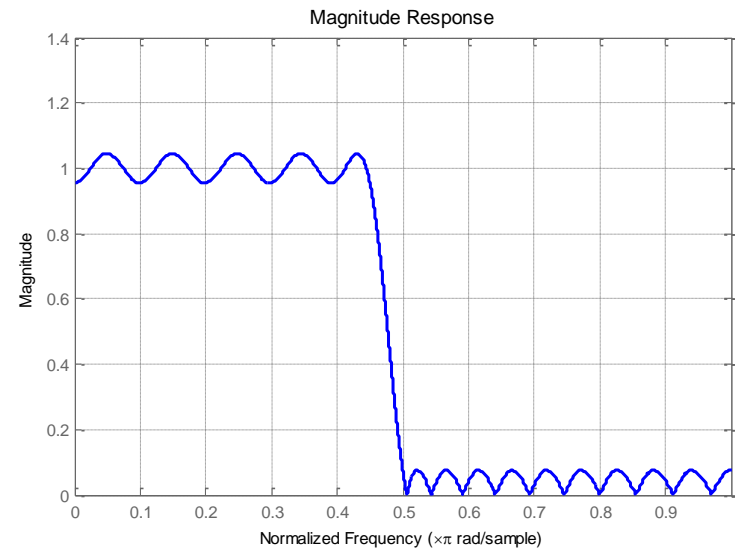
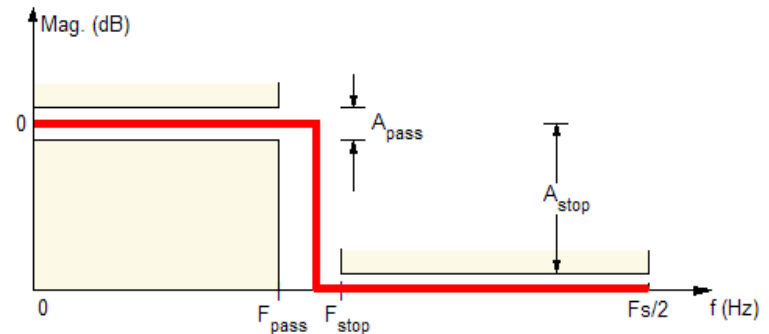
- $|H(w)|$ **no** puede ser **constante** sobre ninguna **banda finita** de frecuencias.
- $H(w)$ **puede** ser **cero** en algunas frecuencias, **pero no** puede serlo sobre cualquier **banda finita** de frecuencias.
- La **banda de transición** no puede ser **infinitamente abrupta**.



■ Consideraciones de Causalidad...

Implicaciones Tma de Paley-Wiener

- Lo anterior significa que:
 - Cualquier **filtro ideal** es **no causal**
 - Los filtros ideales **no son físicamente realizables**



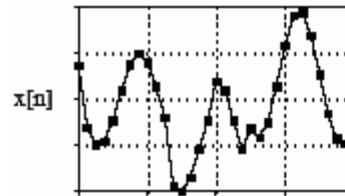
■ Consideraciones de Causalidad: Dependencia entre $H_R(w)$ y $H_I(w)$.

- Para ilustrar la dependencia se descompone $h(n)$ en una secuencia par y otra impar,

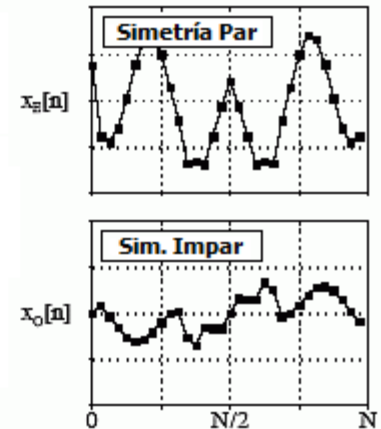
$$h(n) = h_e(n) + h_o(n)$$

$$h_e(n) = \frac{1}{2} [h(n) + h(-n)]$$

$$h_o(n) = \frac{1}{2} [h(n) - h(-n)]$$



Descomposición
par-impar



■ Consideraciones de Causalidad:

Dependencia entre $H_R(w)$ y $H_I(w)$.

- Si $h(n)$ es causal, es posible recuperarla sólo a partir de su parte par o impar [con $h(0)$].

- Par:
$$h(n) = 2h_e(n)u(n) - h_e(0)\delta(n) \quad 0 \leq n \leq \infty$$

- Impar:
$$h(n) = 2h_o(n)u(n) + h(0)\delta(n) \quad 1 \leq n \leq \infty$$

- De lo anterior se desprende que $h_o(n) = h_e(n)$ para $n \geq 1$, lo que implica una fuerte relación entre $h_o(n)$ y $h_e(n)$.

■ Consideraciones de Causalidad:

Dependencia entre $H_R(w)$ y $H_I(w)$...

- Si $h(n)$ es absolutamente sumable (estable BIBO), existe la respuesta $H(w)$ dada por,

$$H(w) = H_R(w) + j H_I(w)$$

- Si $h(n)$ es real y causal, las propiedades de simetría de la T.F implican que,

$$h_e(n) \xleftrightarrow{F} H_R(w) \qquad h_o(n) \xleftrightarrow{F} H_I(w)$$

- Dado que $h(n)$ se especifica completamente a partir de $h_e(n)$, entonces $H(w)$ se especifica completamente a partir de $H_R(w)$.

■ Consideraciones de Causalidad:

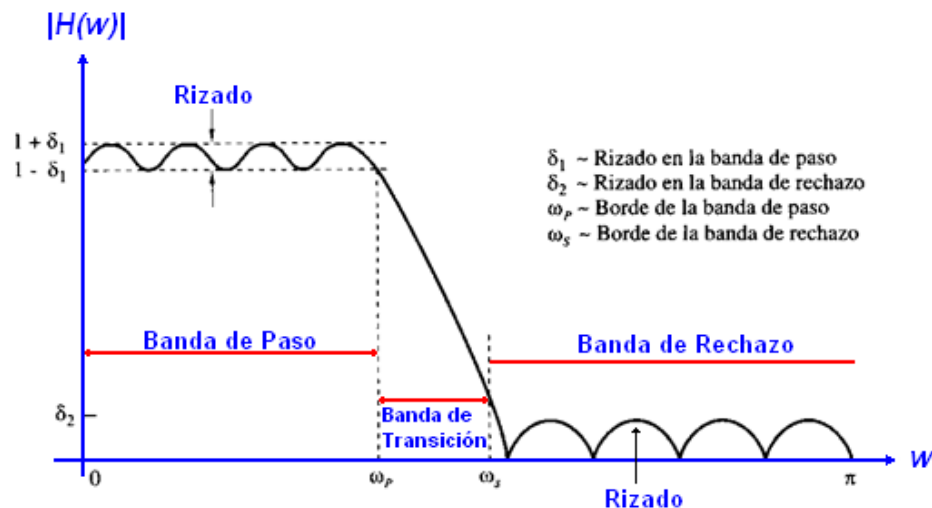
Dependencia entre $H_R(w)$ y $H_I(w)$...

- Para un sistema causal, $H_R(w)$ y $H_I(w)$ son interdependientes y no se pueden especificar independientemente.
 - Igual para $|H(w)|$ y $\Phi(w)$
- La relación entre $H_R(w)$ y $H_I(w)$ está dada por la T. Discreta de Hilbert

$$H_I(w) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_R(\lambda) \cot\left(\frac{w-\lambda}{2}\right) d\lambda$$

■ Especificaciones de diseño

- Máximo rizado en la banda de paso [δ_1]
- Máximo rizado en la banda de rechazo [δ_2]
- Frecuencia de corte en la banda de paso [ω_p]
- Frecuencia de corte en la banda de rechazo [ω_s]
- Banda de transición: 10%-90%



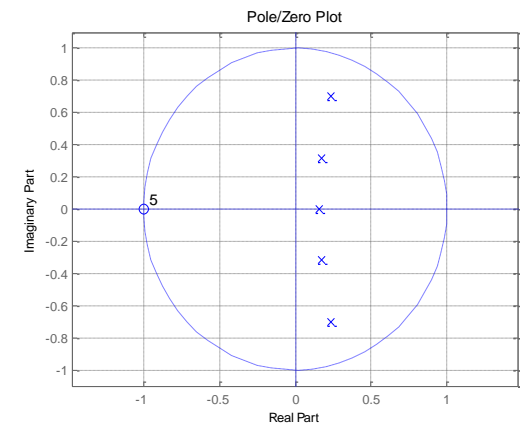
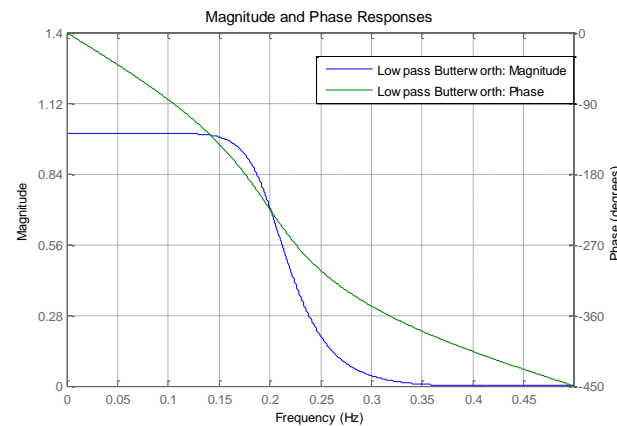
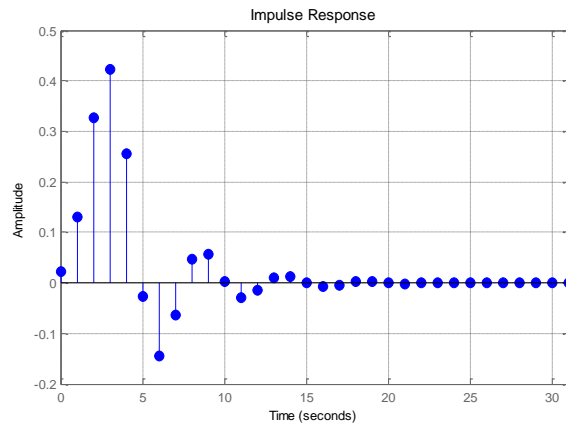
■ Exactitud del Diseño

- **Criterio** de **optimización** para determinar los coeficientes del filtro.
- El **orden** del numerador y denominador de la función de transferencia.

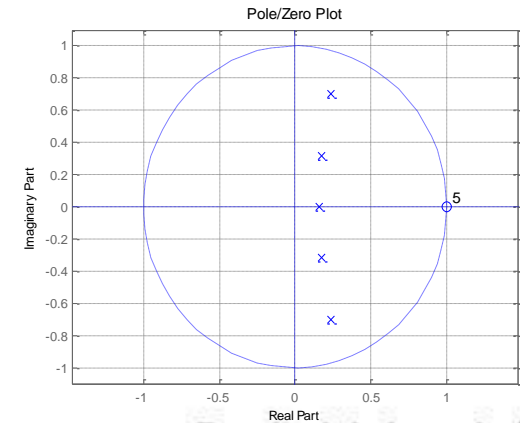
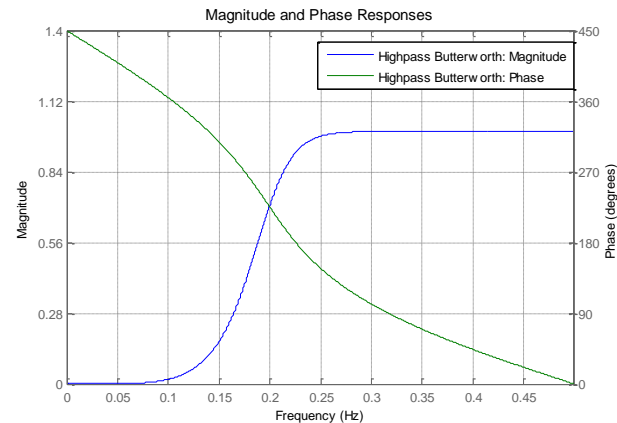
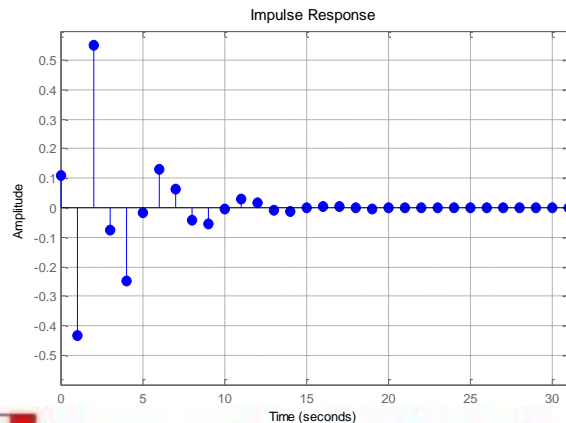
Filtros: Dominios de Representación



■ Filtro Paso Bajo (IIR)



■ Filtro Paso Alto (IIR)



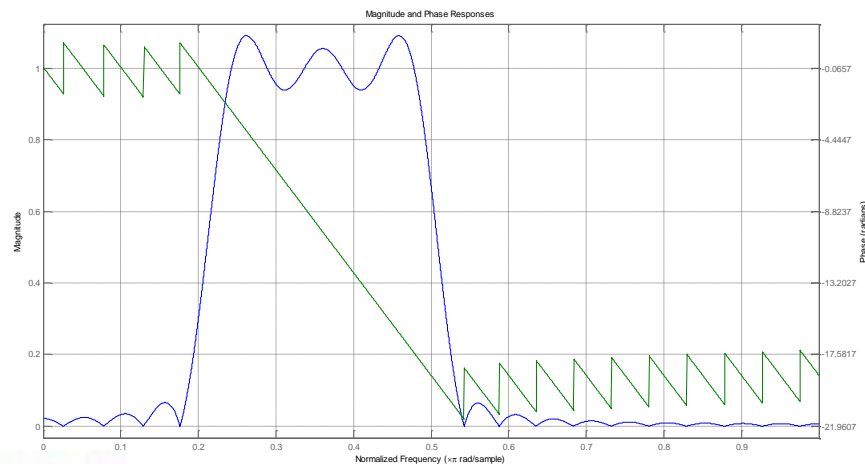
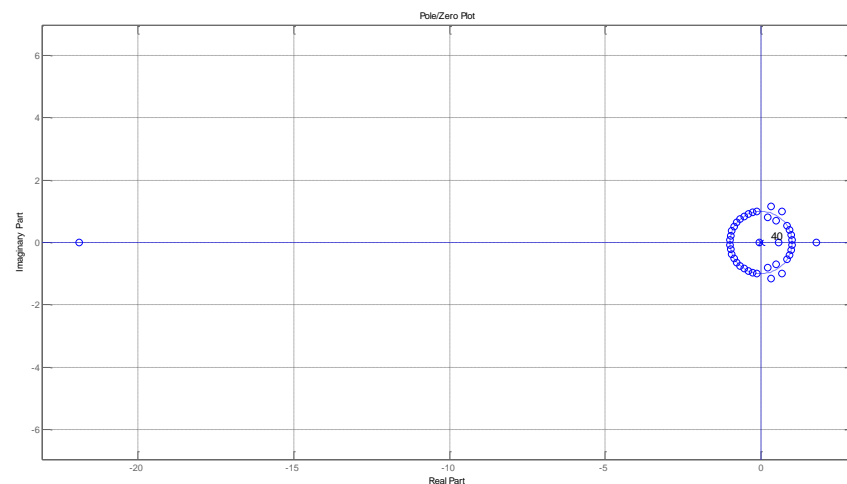
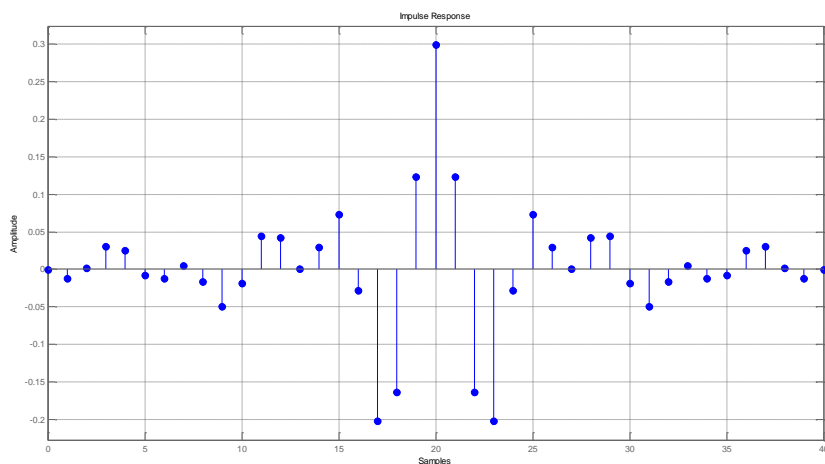
Universidad del Valle

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Facultad de Ingeniería
Escuela de Ingeniería Eléctrica y Electrónica

Filtros: Dominios de Representación

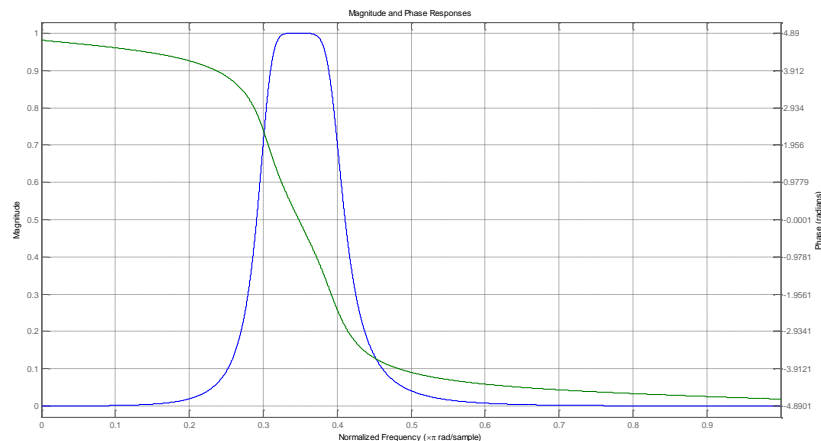
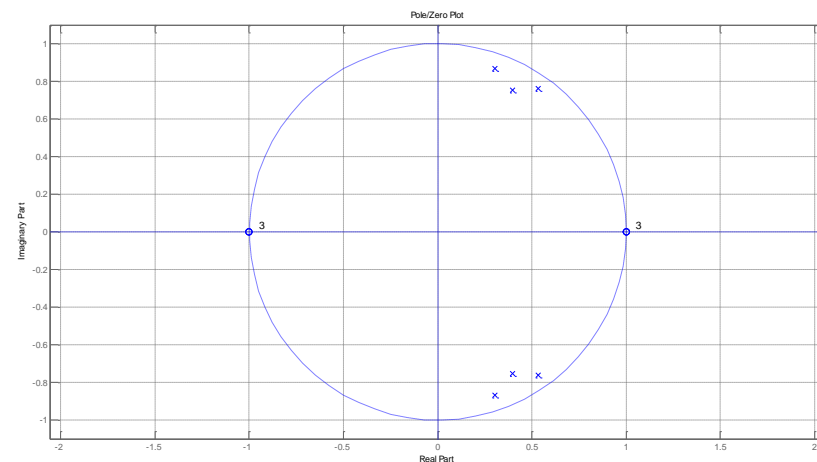
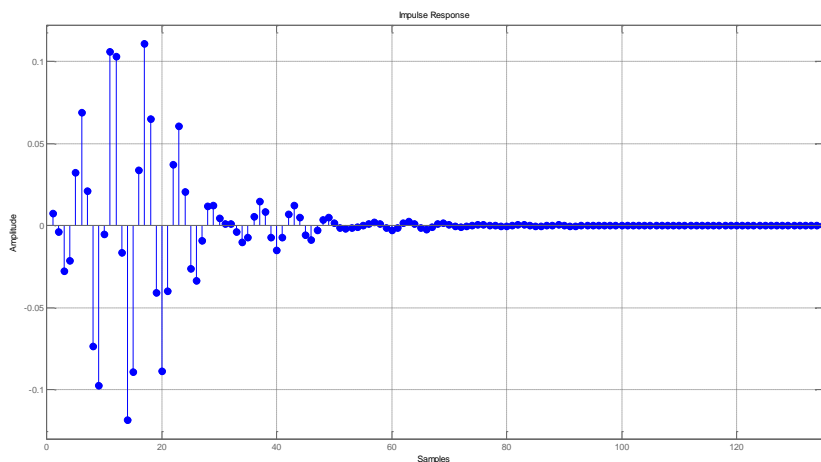
■ Filtro Banda de Paso – FIR



Filtros: Dominios de Representación



■ Filtro Banda de Paso - IIR



Universidad del Valle

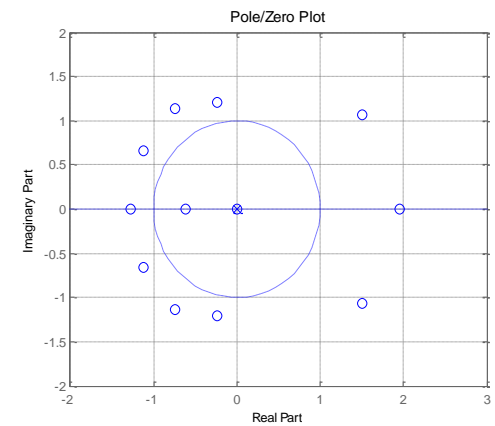
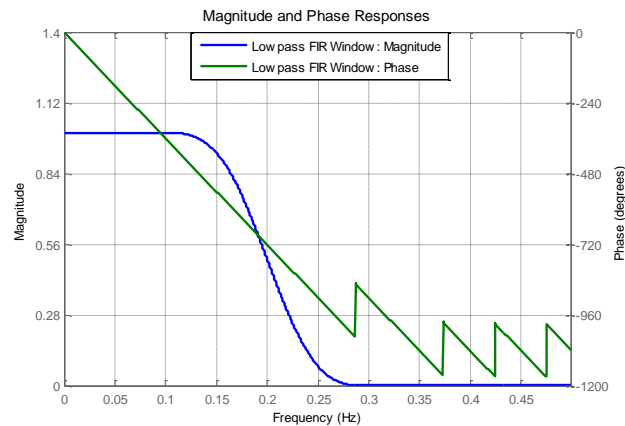
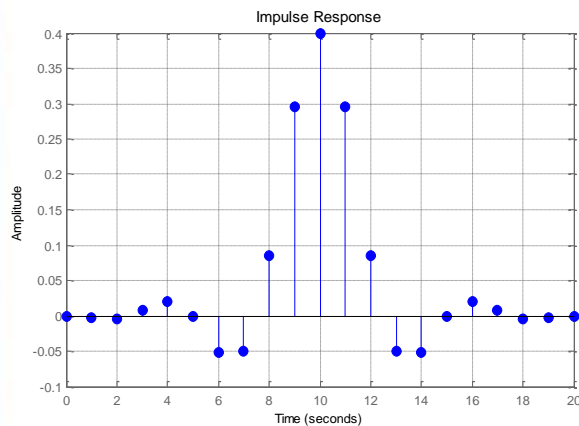
humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Facultad de Ingeniería
Escuela de Ingeniería Eléctrica y Electrónica

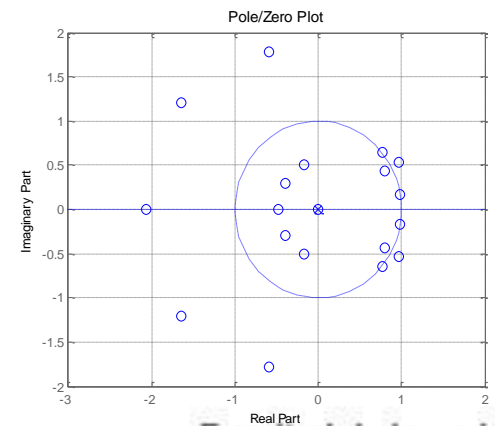
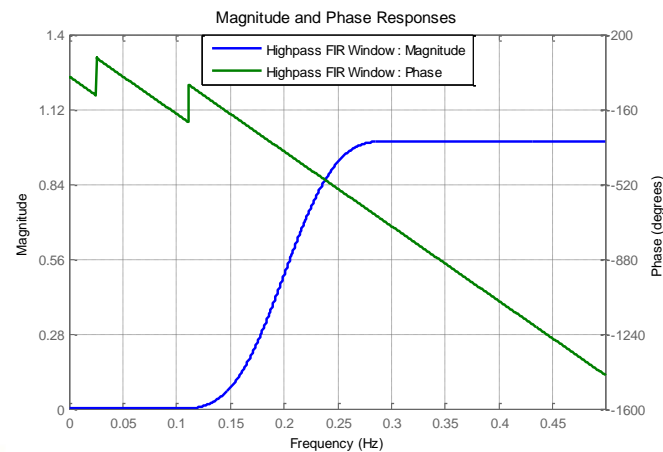
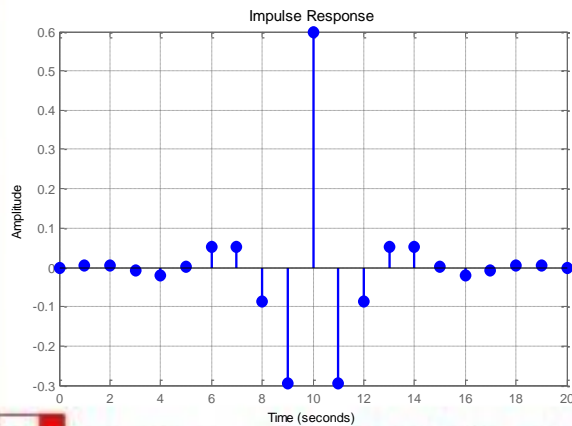
Filtros: Dominios de Representación



■ Filtro Paso Bajo (FIR)



■ Filtro Paso Alto (FIR)



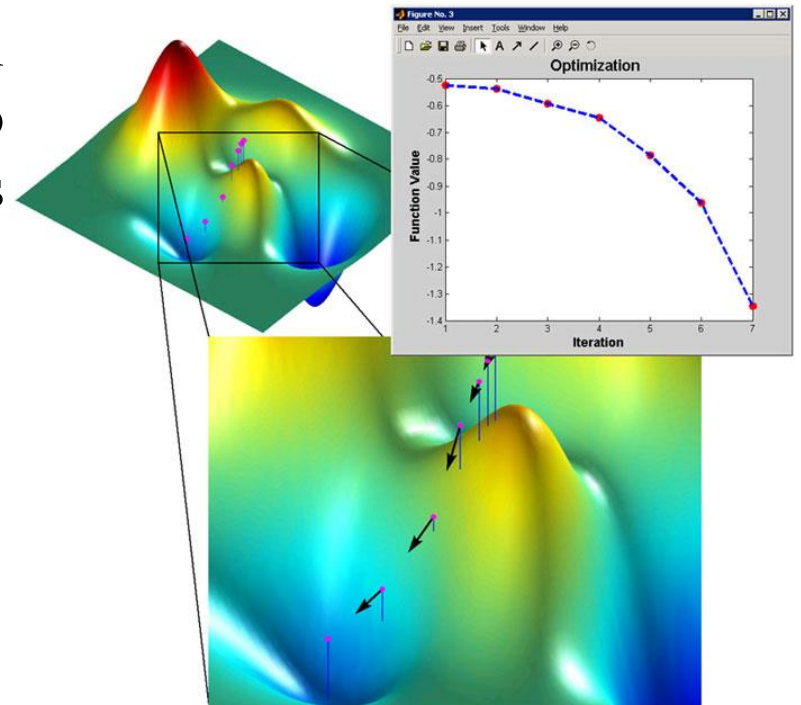
Universidad del Valle

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Facultad de Ingeniería
Escuela de Ingeniería Eléctrica y Electrónica

■ Introducción

- En el diseño es necesario optimizar el comportamiento en el dominio frecuencial de un filtro sujeto a unas condiciones.
- Condiciones del dominio del tiempo:
 - Valores determinados en la respuesta impulsional.
 - Limitación del sobresalto en la respuesta al impulso o al escalón.
 - Instantes de duración de $h(n)$



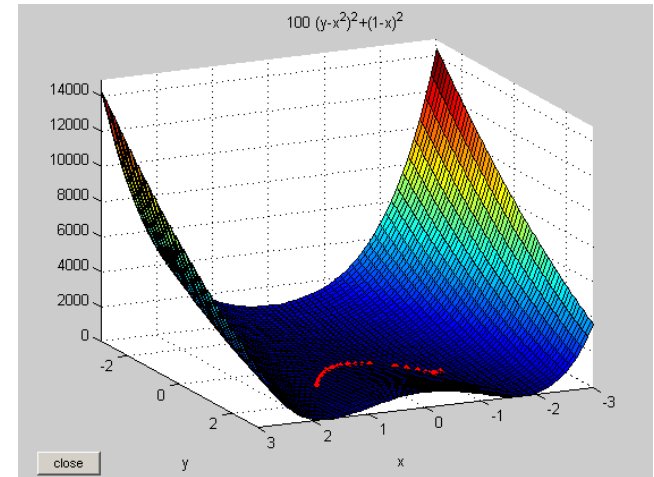
■ Introducción...

- Normalmente se utilizan en el diseño de filtros tres medidas de error como criterio a optimizar :
 - Error MinMax (minimax error)
 - Error de mínimos cuadrados (least-squared error)
 - Máxima planidad (maximally flat)
- Existen técnicas de diseño que no usan directamente criterios de optimización.
 - Ej. Diseño de filtro por enventanado, Método directo.

Criterio: Error MinMax (minmax error)

■ Objetivo

- Optimizar los coeficientes de la respuesta en frecuencia para minimizar el error máximo entre la respuesta obtenida y la deseada.
 - La solución que minimiza la función de error se denomina aproximación minmax o de Chebyshev.



- Se busca minimizar su valor absoluto pico de la función de error ponderado

$$E(w) = W(w)[H_d(w) - H(w)]$$

sobre todo el dominio de definición S de w , es decir:

$$\varepsilon = \max_{w \in S} |E(w)|$$

Criterio: Error MinMax (minmax error)



- Procedimiento: Para un valor máximo permitido de ε ,
 - Primero se encuentra el orden mínimo del filtro para satisfacer el criterio.
 - Luego se optimizan los coeficientes de $H(w)$ del filtro de orden mínimo para minimizar ε .
- Casos:
 - Diseño de filtros IIR elípticos (Cauer)
 - Diseño de filtros FIR de fase lineal con rizado constante



Criterio: Error de Mínimos Cuadrados (least-squared error)



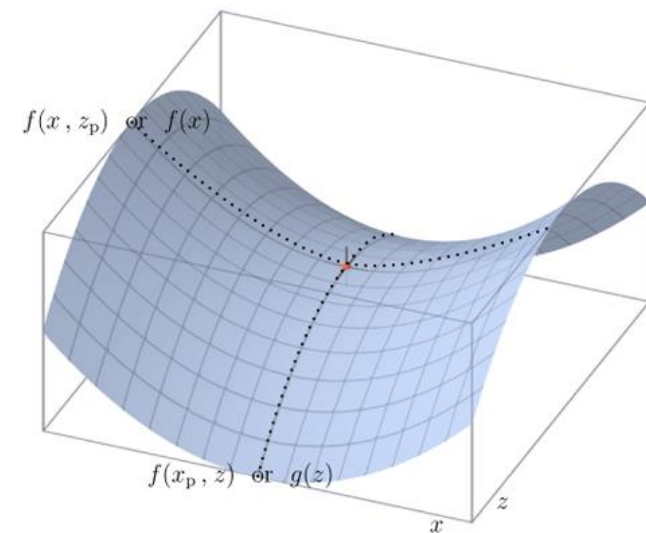
■ Objetivo

- Optimizar los coeficientes de la respuesta en frecuencia para minimizar la norma de error L_p (Least p).
- **Procedimiento:** para la función de error ponderado $E(w)$

$$E(w) = W(w)[H_d(w) - H(w)]$$

Se busca minimizar la integral del error elevado a una potencia p positiva entera:

$$E_p = \int_S E(w)^p dw$$



Criterio: Error de Mínimos Cuadrados (least-squared error)



■ Casos:

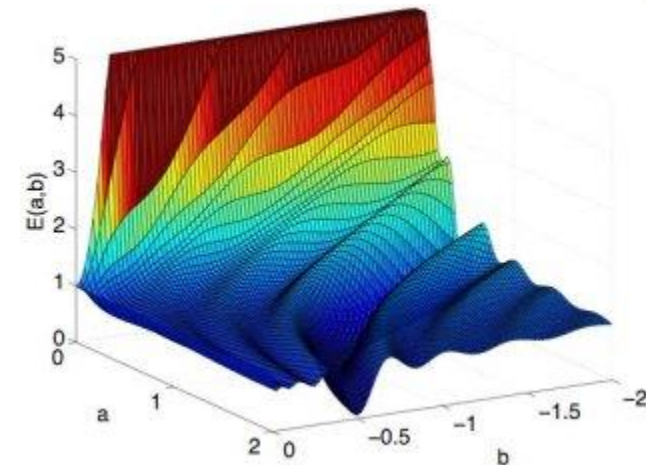
- **Filtros IIR:** se explota el hecho de que cuando $p \rightarrow \infty$ la solución se aproxima a la solución minmax.
- **Filtros FIR:** solo es de interés la norma L2 por su efectividad.



Criterio: Máxima Planidad (maximally flat)

■ Objetivo

- Obtener filtros con una respuesta máximamente plana alrededor de unas frecuencias establecidas.
- ▶ Generalmente se seleccionan dos valores de $H(w)$ en dos frecuencias: una en la banda de paso $w=0$ y otra en la banda de rechazo $w=\pi$.
- ▶ Filtros simples de diseñar y se utilizan donde se desee conservar la señal casi sin error cerca de la frecuencia cero.



Criterio: Máxima Planidad (maximally flat)



■ Procedimiento

Las respuestas de los filtros se obtienen a partir de las series de Taylor para lograr coincidir la respuesta en las frecuencias especificadas.

■ El filtro se expresa como:

$$H(w) = \sum_{n=0}^{\frac{M-1}{2}} \alpha(n) \cos^n w$$

y al satisfacer que:

$H(w)$ tenga $2K$ ceros en $w=\pi$ y $2L$ ceros en $w=0$

se logra que :

$$H(w=0)=1 \quad \text{y} \quad H(w=\pi)=0$$



Criterio: Máxima Planidad (maximally flat)



■ Procedimiento ...

- Para $M=2(K+L)-1$ se obtiene:

$$H(w) = \cos^{2K}\left(\frac{w}{2}\right) \sum_{n=0}^{L-1} d[n] \sin^{2n}\left(\frac{w}{2}\right) \quad \text{y} \quad H(w) = 1 - \sin^{2K}\left(\frac{w}{2}\right) \sum_{n=0}^{K-1} \bar{d}[n] \cos^{2n}\left(\frac{w}{2}\right)$$

$$\text{donde} \quad d[n] = \frac{(K-1+n)!}{(K-1)! n!}, \quad \bar{d}[n] = \frac{(L-1+n)!}{(L-1)! n!}$$

donde L y K son los parámetros a determinar a partir de las especificaciones de diseño. (pg.195 Mitra y Kaiser 1993)



■ Retardo de Grupo

- El retardo de grupo τ_g se define como:

$$\tau_g = -\frac{d\Theta(w)}{dw}$$

- Donde, $\Theta(w)$ es la fase de la respuesta en frecuencia del sistema
 - τ_g tiene unidades de tiempo.
- Se interpreta como el retardo temporal que sufre una componente de señal de frecuencia w al pasar de la entrada a la salida del sistema.

■ Retardo de Grupo...

- Generalmente la salida $y(n)$ de un filtro práctico presenta un retardo con respecto a la señal de entrada $x(n)$.
- Muchas aplicaciones requieren que todos los componentes frecuenciales de la señal de entrada sufran un mismo retardo n_0 .

- Se logra si el filtro presenta en su banda de paso una fase $\Theta(w)$ lineal,
$$\Theta(w) = -w n_0$$

- Puesto que,

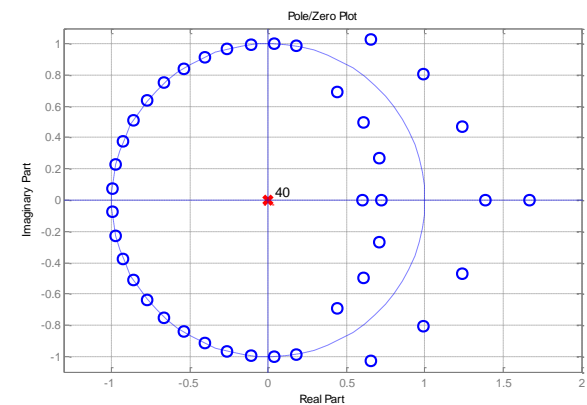
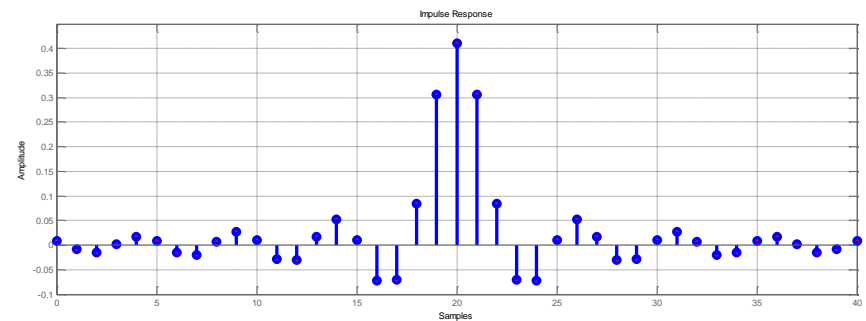
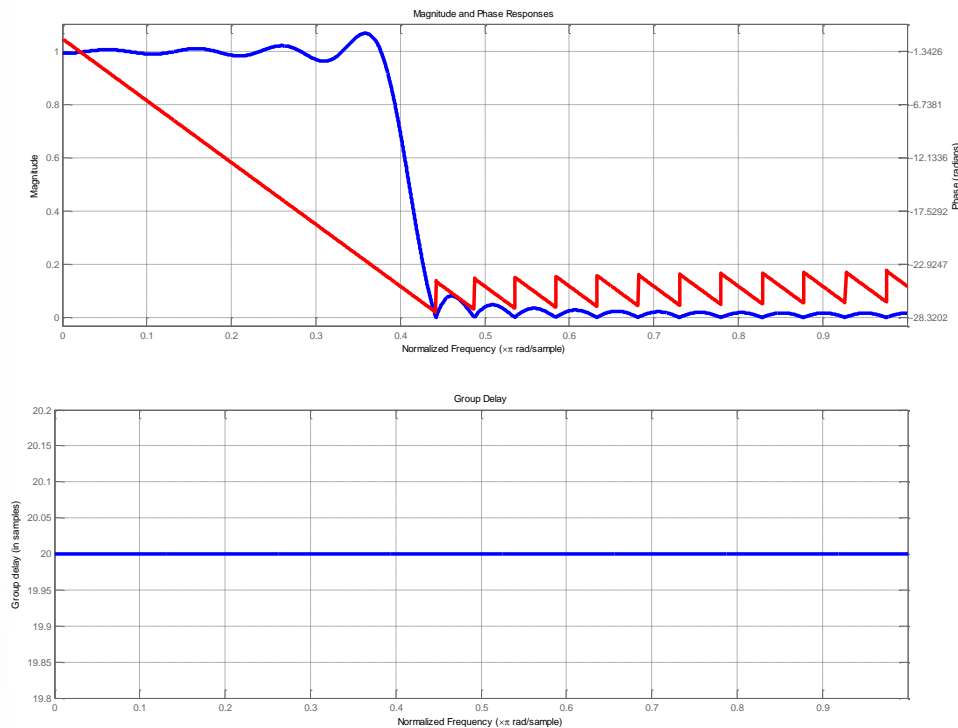
$$\tau_g = -\frac{d\Theta(w)}{dw} = n_0$$

- Un retardo puro es tolerable y no se considera distorsión de la señal.

Retardo de Grupo

■ Ejemplo 1

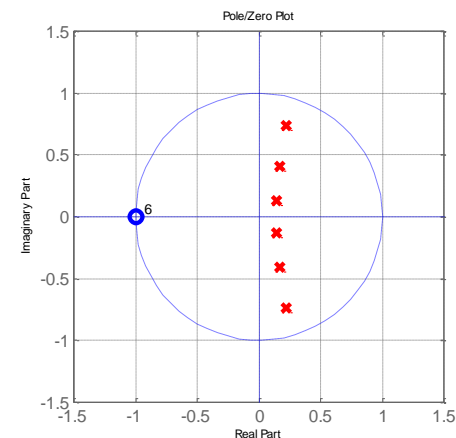
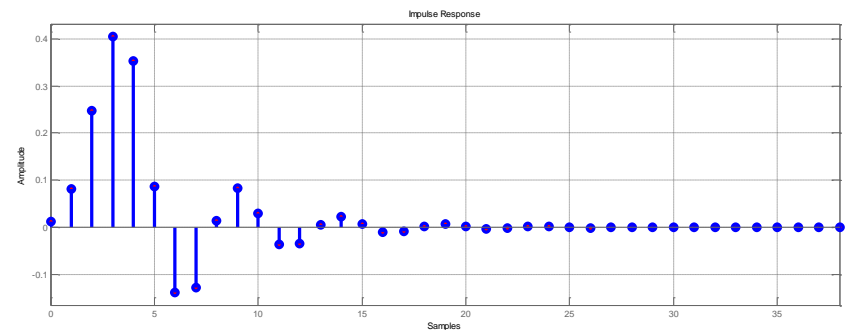
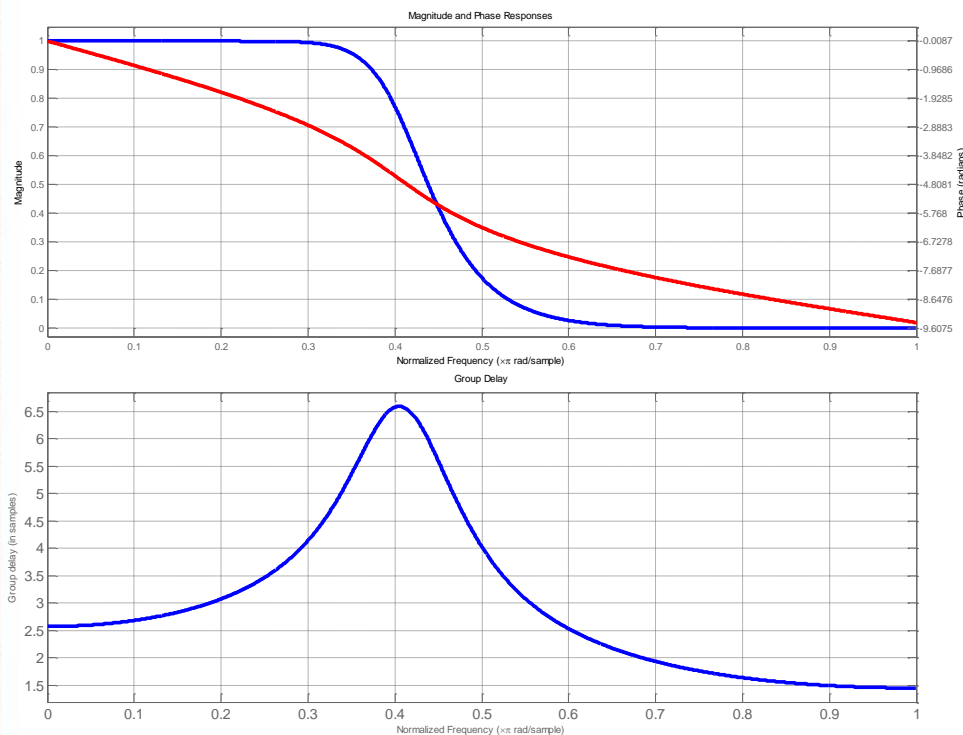
- Filtro Paso-Bajo, FIR, Fase Lineal, $M=40$, Diseño por Mínimos Cuadrados. $\tau_g = 20$ muestras



Retardo de Grupo

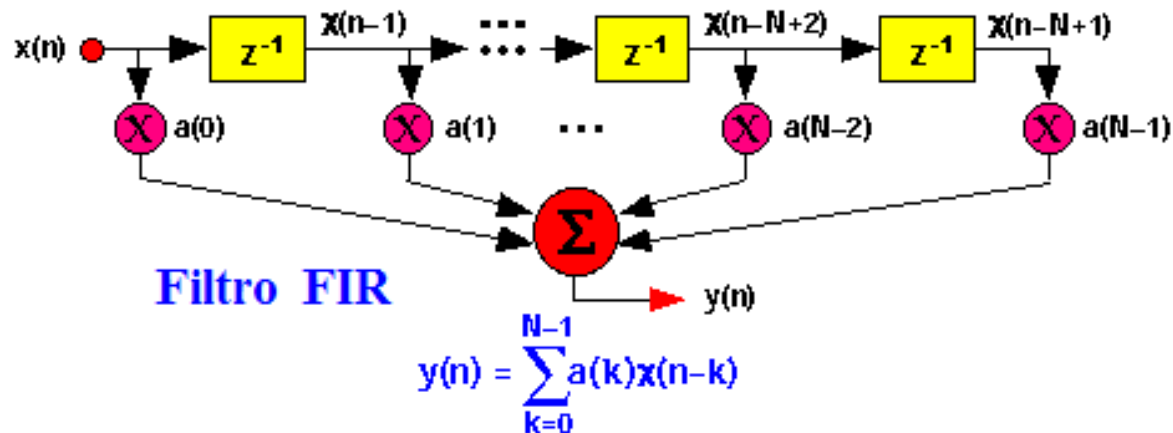
■ Ejemplo 2

- Filtro Paso-Bajo, IIR, Fase No-Lineal, Butterworth, $N=6$. $\tau_g =$
No constante



■ Introducción

- **Determinar** los **coeficientes** de $H(z)$, de $H(w)$, de $h(n)$ o de la ecuación de diferencia del Filtro.



- **Nota:** Una secuencia $x(n)$ de duración **finita** y **longitud** N está caracterizada por completo por N **muestras** de su T.F. en Tiempo Discreto $X(w)$.

■ Introducción

- Diseño **más restrictivo** por disponer de un **sólo** polinomio **numerador** en la función de transferencia del filtro FIR

- Representaciones:

- Respuesta impulsional

$$h(n) = \{b_0, b_1, \dots, b_{M-2}, b_{M-1}\}$$

- Ecuación de diferencia

$$y(n) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + \dots + b_{M-1} x(n-M+1) = \sum_{k=0}^{M-1} b_k x(n-k)$$

- Función de Transferencia

$$H(z) = h(0) + h(1) z^{-1} + h(2) z^{-2} + \dots + h(M-2) z^{-(M-2)} + h(M-1) z^{-(M-1)}$$

■ Propiedades Generales de los Filtros FIR

- Implementación no-recursiva o realización por medio de la convolución directa.
- Realización por convolución de alta velocidad mediante la transformada rápida de Fourier o por técnicas recursivas.
- Errores producidos por cuantización, redondeo e imprecisiones en los coeficientes son menos críticos en realizaciones no-recursivas (no realimentaciones) de filtros FIR que en filtros IIR.
- La función de transferencia de un filtro FIR no-recursivo tiene todos los polos en el origen y siempre es estable.

■ Propiedades Generales de los Filtros FIR...

- Pueden diseñarse con características de **fase lineal**. (Poco posible para filtros IIR).
- El “**orden**” (longitud) es **más alto** que de uno IIR para obtener las mismas prestaciones.
- El **retardo de tiempo** incrementa con el número de términos y puede hacerse muy **grande** para filtros de ordenes relativamente altos.
- En general los métodos de **diseño** son más “**complejos**” que para filtros IIR por involucrar ecuaciones para el diseño.

■ Descripción de Filtros FIR

- Un **filtro FIR** causal con longitud M , entrada $x(n)$ y salida $y(n)$ puede **describirse** mediante:

- **Ecuación de Diferencia:**

$$y(n) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + \dots + b_{M-1} x(n-M+1) = \sum_{k=0}^{M-1} b_k x(n-k)$$

donde $\{b_k\}$ es el conjunto de coeficientes del filtro.

■ Descripción de Filtros FIR ...

■ Puede describirse mediante...

■ **Convolución:**
$$y(n) = \sum_{k=0}^{M-1} h(k) x(n-k)$$

donde $h(k) = b_k$, $k = 0, 1, \dots, M-1$

■ **Función de Transferecia:**
$$H(z) = \sum_{k=0}^{M-1} h(k) z^{-k}$$

es un polinomio de grado $M-1$ en la variable z^{-1} .

■ Condición de Fase lineal

- Un filtro FIR tiene **fase lineal** si $h(n)$ satisface la **condición de simetría o antisimetría**:

$$h(n) = \pm h(M-1-n) \quad n = 0, 1, \dots, M-1$$

■ $H(z)$ del Filtro FIR de Fase lineal

- Incorporando las condiciones de simetría y antisimetría en $H(z)$ se tiene:

$$H(z) = h(0) + h(1)z^{-1} + h(2)z^{-2} + \dots + h(M-2)z^{-(M-2)} + h(M-1)z^{-(M-1)}$$

- Considerando el valor de M :

$$H(z) = z^{-(M-1)/2} \left\{ h\left(\frac{M-1}{2}\right) + \sum_{n=0}^{(M-3)/2} h(n) \left[z^{(M-1-2k)/2} \pm z^{-(M-1-2k)/2} \right] \right\} \quad M \text{ impar}$$

$$H(z) = z^{-(M-1)/2} \sum_{n=0}^{(M/2)-1} h(n) \left[z^{(M-1-2k)/2} \pm z^{-(M-1-2k)/2} \right] \quad M \text{ par}$$

■ Simetría y Localización de las Raíces

- Sustituyendo z^{-1} por z en

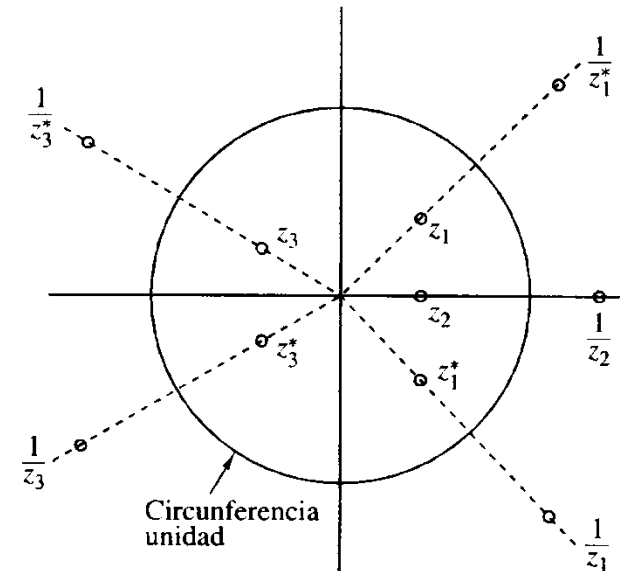
$$H(z) = \sum_{k=0}^{M-1} h(k) z^{-k}$$

- y multiplicando por $z^{-(M-1)}$ se obtiene:

$$z^{-(M-1)} H(z^{-1}) = \pm H(z)$$

- Lo que **implica** que:

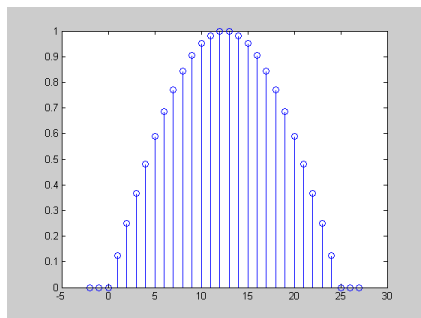
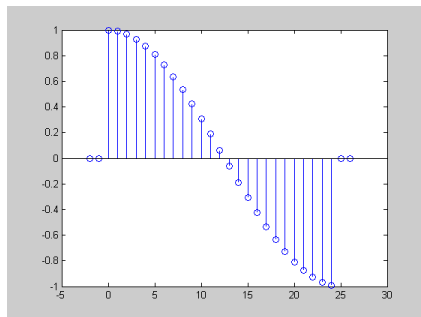
- Las **raíces** de $H(z)$ son **idénticas** a las raíces de $H(z^{-1})$
- Las **raíces** de $H(z)$ deben ocurrir en pares **recíprocos**.
- Si z_1 es raíz, $1/z_1$ también es raíz.



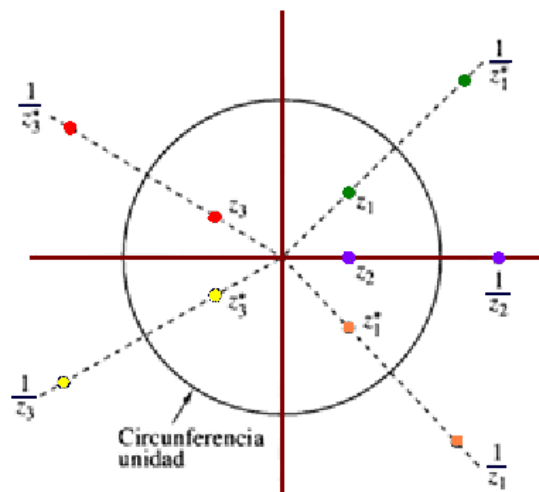
Implicaciones de la Simetría de $h(n)$



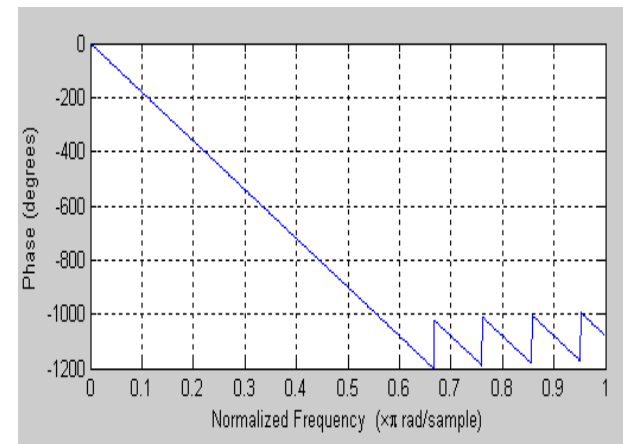
Dominio
Temporal



Dominio
T.z



Dominio
T. F



Universidad del Valle

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Facultad de Ingeniería
Escuela de Ingeniería Eléctrica y Electrónica

■ $H(w)$ del Filtro FIR de Fase Lineal

- ▶ La Respuesta en Frecuencia $H(w)$ se obtiene al evaluar $H(z)$ en la circunferencia unitaria, $z=e^{jw}$.

$$H(w) = H(z) \Big|_{z=e^{jw}}$$

$$H(z) = h(0) + h(1) z^{-1} + h(2) z^{-2} + \dots + h(M-2) z^{-(M-2)} + h(M-1) z^{-(M-1)}$$

$$H(w) = h(0) + h(1) e^{-jw} + h(2) e^{-2jw} + \dots + h(M-2) e^{-(M-2)jw} + h(M-1) e^{-(M-1)jw}$$

- ▶ $H(w)$ puede **reescribirse** para cada condición de **simetría** de $h(n)$ y valor de **M** (par o impar).

■ $H(w)$ del Filtro FIR de Fase Lineal ...

- **Simétrico:** $h(n) = h(M-1-n)$, $H(w)$ puede expresarse como,

$$H(w) = H_r(w) e^{-jw(M-1)/2}$$

donde $H_r(w)$ es una función real de w y está dada por:

$$H_r(w) = h\left(\frac{M-1}{2}\right) + 2 \sum_{n=0}^{(M-3)/2} h(n) \cos\left[w\left(\frac{M-1}{2} - n\right)\right] \quad M \text{ impar}$$

$$H_r(w) = 2 \sum_{n=0}^{(M/2)-1} h(n) \cos\left[w\left(\frac{M-1}{2} - n\right)\right] \quad M \text{ par}$$

- Cuando $\mathbf{h(n) = h(M-1-n) \dots}$

La característica de **fase** del filtro para **M par e impar** es,

$$\Theta(w) = \begin{cases} -w \left(\frac{M-1}{2} \right) & \text{si } H_r(w) > 0 \\ -w \left(\frac{M-1}{2} \right) + \pi & \text{si } H_r(w) < 0 \end{cases}$$

- Número de coeficientes: M impar = (M+1)/2 ; M par = M/2

■ $H(w)$ del Filtro FIR de Fase Lineal ...

► **Antisimétrico:** $h(n) = -h(M-1-n)$, $H(w)$ puede expresarse como,

$$H(w) = H_r(w) e^{j[-w(M-1)/2 + \pi/2]}$$

donde $H_r(w)$ es una función real de w y está dada por,

$$H_r(w) = 2 \sum_{n=0}^{(M-3)/2} h(n) \operatorname{sen} w \left(\frac{M-1}{2} - n \right) \quad M \text{ impar}$$

$$H_r(w) = 2 \sum_{n=0}^{(M/2)-1} h(n) \operatorname{sen} w \left(\frac{M-1}{2} - n \right) \quad M \text{ par}$$

- ▶ Cuando $h(n) = -h(M-1-n) \dots$

La característica de fase del filtro para M par e impar es,

$$\Theta(w) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - w \left(\frac{M-1}{2} \right) & \text{si } H_r(w) > 0 \\ \frac{3\pi}{2} - w \left(\frac{M-1}{2} \right) & \text{si } H_r(w) < 0 \end{cases}$$

- ▶ Punto central de la antisimetría de $h(n)$ es $n=(M-1)/2$, donde $h(n)=0$.
- ▶ Número de coeficientes: M impar = $(M-1)/2$; M par = $M/2$

Selección: Simétrico o Antisimétrico??

Simetría del
Filtro?

Simetría Par

Depende de la
aplicación!

Simetría Impar

Condicionado a que las
especificaciones de diseño en el
dominio frecuencial sean compatibles
con las del filtro $H_r(\omega)$

■ Selección: Simétrico o Antisimétrico??

- Depende de la aplicación. Cada función de transferencia, $H_r(w)$, simétrica o antisimétrica, tiene características particulares en el dominio frecuencial.
- **Ejemplo.** No puede emplearse un $h(n)$ antisimétrico para el diseño de un filtro FIR paso bajo de fase lineal $\rightarrow H_r(0) = 0$.

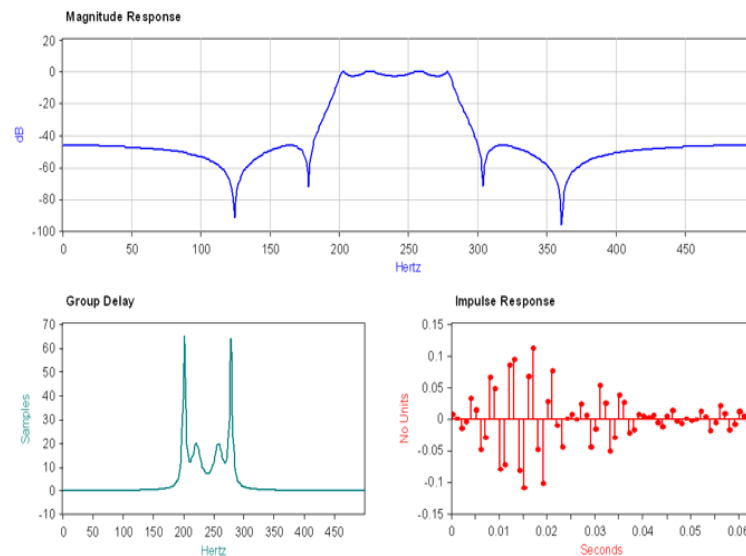
$$H_r(w) = 2 \sum_{n=0}^{(M-3)/2} h(n) \operatorname{sen} w \left(\frac{M-1}{2} - n \right) \quad M \text{ impar}$$

$$H_r(w) = 2 \sum_{n=0}^{(M/2)-1} h(n) \operatorname{sen} w \left(\frac{M-1}{2} - n \right) \quad M \text{ par}$$

■ Método Directo

- Utiliza condiciones de diseño para determinar los coeficientes del filtro mediante la solución de un sistema de ecuaciones.
- Generalmente se logra soluciones para las condiciones de diseño
- No se garantiza el comportamiento en rangos de frecuencia diferentes a las especificaciones puntuales.

Elliptic Band Pass Filter Response



■ Ejemplo 1

- Obtenga la respuesta impulsional $h(n)$ de un filtro FIR paso bajo de fase lineal de longitud $M = 4$ cuyas muestras de la respuesta en frecuencia $H_r(w)$ deseada se especifica como:

$$H_r(0) = 1 \text{ y } H_r(\pi/2) = 1/2$$

■ Solución

- Por ser un filtro paso-bajo no puede ser anti-simétrico.
- Se utilizará la ecuación general para un filtro FIR de Fase Lineal, simétrico y con M par:

$$H_r(w) = 2 \sum_{n=0}^{(M/2)-1} h(n) \cos \left[w \left(\frac{M-1}{2} - n \right) \right] \quad M \text{ par}$$

■ Solución ...

- Reemplazando el valor de $M = 4$,

$$H_r(w) = 2 \sum_{n=0}^1 h(n) \cos \left[w \left(\frac{3}{2} - n \right) \right]$$

- Evaluando en las condiciones de respuesta en frecuencia:

- $H_r(0) = 1$

- $2 \sum_{n=0}^1 h(n) = 1$
- $2h(0) + 2h(1) = 1$

- $H_r(\pi/2) = 1/2$

- $2 \sum_{n=0}^1 h(n) \cos \left[\frac{\pi}{2} \left(\frac{3}{2} - n \right) \right] = 1/2$
- $\sqrt{2} [-h(0) + h(1)] = \frac{1}{2}$

■ Solución ...

■ Resolviendo el sistema

$$\begin{cases} h(0) + h(1) = \frac{1}{2} \\ -h(0) + h(1) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{cases}$$

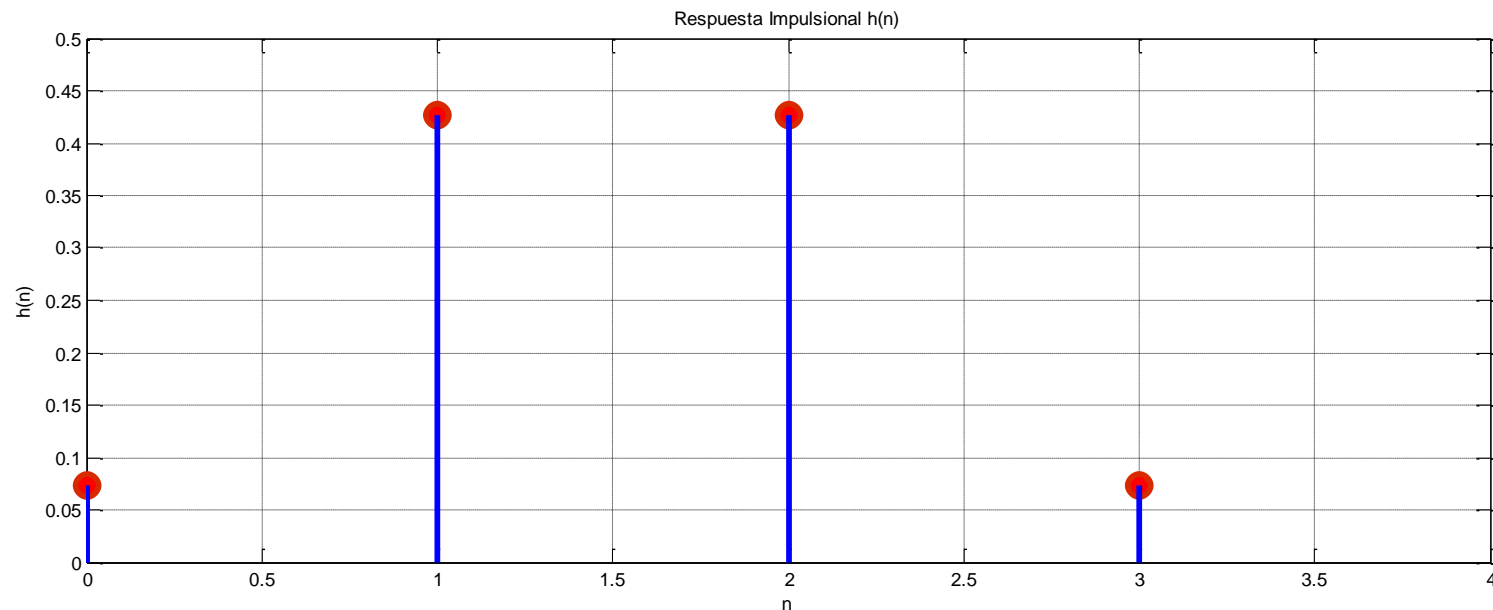
$$\text{■ Se tiene } \begin{cases} h(0) = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \\ h(1) = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \end{cases}$$

■ Por simetría par: $h(0) = h(3)$ y $h(1) = h(2)$

■ Solución ...

■ Por lo tanto, la respuesta impulsional es:

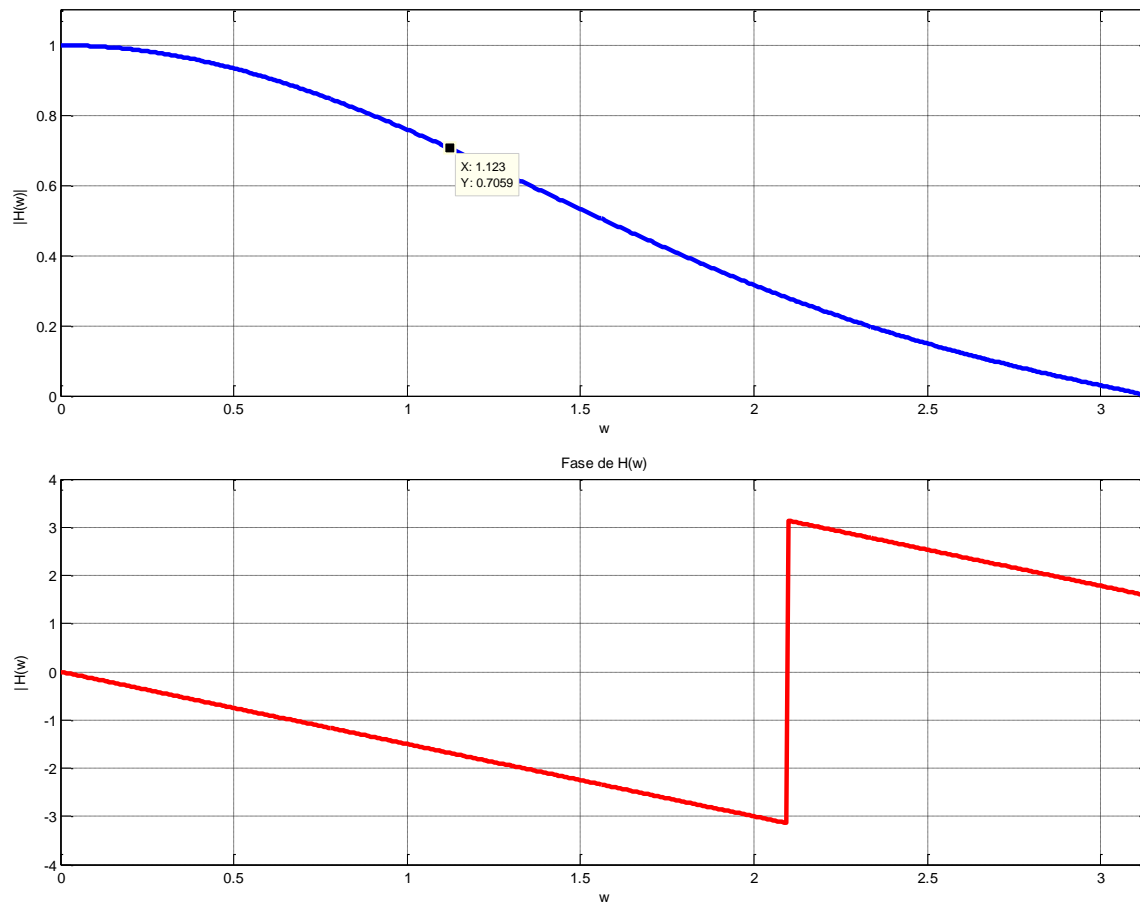
$$h(n) = \frac{1}{4} \left\{ \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \quad \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \quad \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \quad \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\}$$



Diseño de Filtros FIR

■ Solución ...

■ La magnitud y fase del filtro:



- **Ejemplo 2:** Determinar los coeficientes de un filtro FIR de fase lineal representado por la ecuación de diferencia

$$y(n) = b_0x(n) + b_1x(n - 1) + b_2x(n - 2)$$

De forma tal que:

- Elimine completamente las señales con frecuencia $\omega_0 = 2\pi/3$
- La respuesta en frecuencia $H(\omega)$ esté normalizada tal que $H(0) = 1$

■ Solución

- Puesto que las especificaciones están expresadas en el dominio frecuencial, se obtiene la respuesta en frecuencia del filtro

$$H(w) = \frac{Y(w)}{X(w)} = b_0 + b_1 e^{-jw} + b_2 e^{-j2w}$$

- Al evaluar las condiciones de diseño se llega a:
 - $H\left(w = \frac{2\pi}{3}\right) = 0 = b_0 + b_1 e^{-j\frac{2\pi}{3}} + b_2 e^{-j\frac{4\pi}{3}}$
 - $H(w = 0) = 1 = b_0 + b_1 + b_2$
- Debido a que existen tres parámetros desconocidos y dos ecuaciones, es necesario generar una tercera ecuación!!

■ Solución ...

- La tercera ecuación se obtiene de la condición de diseño:
 - Fase Lineal: simetría de los coeficientes de $h(n) = \{\underline{b_0}, b_1, b_2\}$
 - Por lo tanto: $b_0 = \pm b_2$ (simetría par o impar)
- Para simetría par se tiene:
 - $b_0 = b_2$
 - $H\left(w = \frac{2\pi}{3}\right) = 0 = b_0 + b_1 e^{-j\frac{2\pi}{3}} + b_2 e^{-j\frac{4\pi}{3}}$
 - $H(w = 0) = 1 = b_0 + b_1 + b_2$

■ Solución ...

- Resolviendo se encuentra que:

- $b_0 = \frac{1}{3}, b_1 = \frac{1}{3}, b_2 = \frac{1}{3}$

- Por lo tanto:

- $y(n) = \frac{1}{3}x(n) + \frac{1}{3}x(n-1) + \frac{1}{3}x(n-2)$

- $h(n) = \left\{ \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right\}$

- $H(w) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}e^{-jw} + \frac{1}{3}e^{-j2w}$

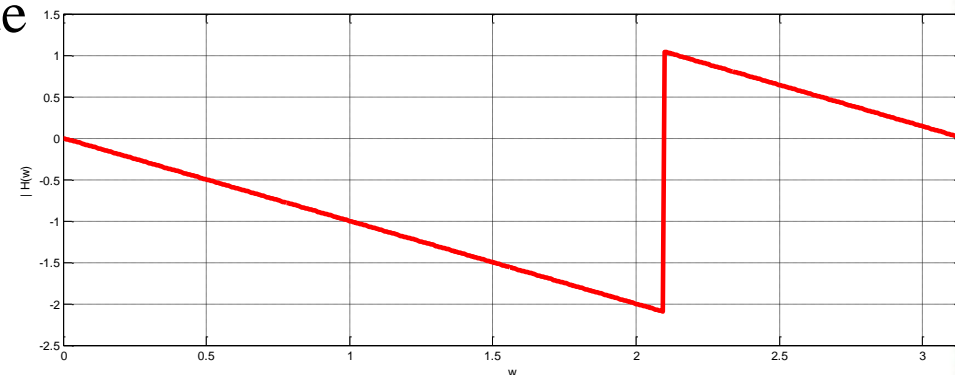
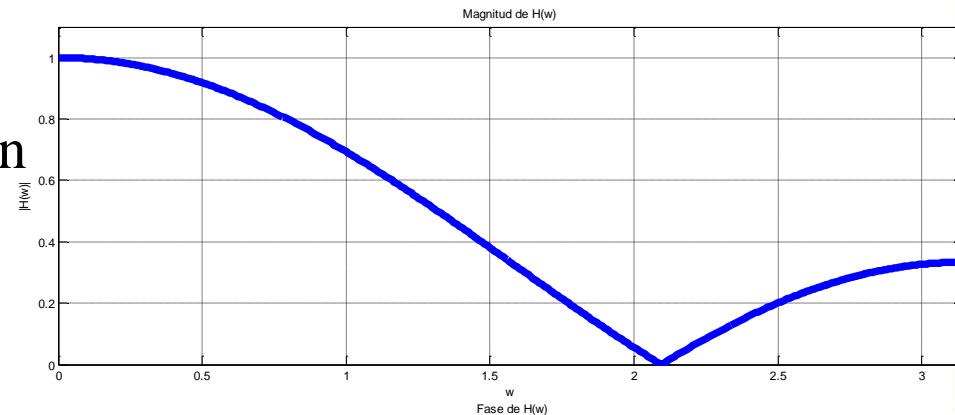
■ Solución ...

- Reescribiendo la Respuesta en Frecuencia:

$$H(w) = \frac{1}{3} e^{-jw} [1 + 2\cos(w)]$$

- Se verifica las condiciones de diseño:

- $H(w = 0) = 1$
- $H\left(w = \frac{2\pi}{3}\right) = 0$
- Fase lineal



■ **Ejemplo 3:** Para el filtro encontrado en el ejemplo anterior, calcular:

- a) La magnitud $|H(w)|$ y fase $\angle H(w)$
- b) La frecuencia w_c donde la ganancia del filtro cae en $3dB$.
- c) La respuesta $y(n)$ del filtro a la entrada

$$x(n) = 5 + 2\text{sen}\left(\frac{2\pi}{3} n\right), \quad -\infty < n < \infty$$

■ Solución

- a) Del ejemplo anterior, se tiene:

$$H(w) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}e^{-jw} + \frac{1}{3}e^{-j2w}$$

- Que es equivalente a:

$$H(w) = \frac{1}{3}e^{-jw}(e^{jw} + 1 + e^{-jw}) = \frac{1}{3}e^{-jw} [1 + 2\cos(w)]$$

- La magnitud $|H(w)|$ se determina como:

$$|H(w)| = \frac{1}{3} |1 + 2\cos(w)|$$

- y la fase $\angle H(w)$ como:

$$\angle H(w) = \begin{cases} -w & \text{para } [1 + 2\cos(w)] \geq 0; |w| \leq 2\pi/3 \\ -w + \pi & \text{para } [1 + 2\cos(w)] < 0; \pi > |w| > 2\pi/3 \end{cases}$$

■ Solución ...

- b) La frecuencia w_c donde la ganancia del filtro cae en $3dB$ se obtiene como:

$$|H(w_c)| = \frac{1}{3} |1 + 2\cos(w_c)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

- De donde:

$$w_c = \cos^{-1} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{3}{\sqrt{2}} - 1 \right) \right]$$
$$w_c = 0.9756 \text{ rad/muest} = 55.8985^\circ/\text{muest}$$

■ Solución ...

- c) La respuesta $y(n)$ del filtro a la entrada

$$x(n) = 5 + 2\text{sen}\left(\frac{2\pi}{3} n\right), \quad -\infty < n < \infty$$

- Se calcula con base en la respuesta en frecuencia en $w = 0$ y $w = \frac{2\pi}{3}$

- $|H(w = 0)| = 1, \quad \angle H(w = 0) = 0$

- $\left|H\left(w = \frac{2\pi}{3}\right)\right| = 0, \quad \angle H\left(w = \frac{2\pi}{3}\right) = -2\pi/3$

- De donde,

$$y(n) = 5, \quad -\infty < n < \infty$$

■ Metodología

- Especificar la respuesta en frecuencia deseada $H_d(w)$
- Determinar la correspondiente respuesta impulsional $h_d(n)$, mediante la transformada de Fourier.

$$H_d(w) = \sum_{n=0}^{\infty} h_d(n) e^{-jwn} \quad \text{donde} \quad h_d(n) = \int_{-\pi}^{\pi} H_d(w) e^{jwn} dw$$

- Introducir un desplazamiento a la respuesta $h_d(n)$
 - Es necesario conservar las características de simetría para garantizar la fase lineal del filtro resultante.

■ Metodología...

- Truncar la respuesta $h_d(n)$
 - Generalmente $h_d(n)$ es de *duración infinita* y debe ser *truncada* en algún punto, $n = M - 1$, para producir un filtro FIR de longitud M .
- El truncamiento de $h_d(n)$ es equivalente a multiplicar $h_d(n)$ por una **ventana rectangular** de longitud M , definida como,

$$w(n) = \begin{cases} 1, & n = 0, 1, \dots, M - 1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

■ Metodología...

- Así, la respuesta impulsional del filtro FIR se convierte en,

$$h(n) = h_d(n) w(n) = \begin{cases} h_d(n), & n = 0, 1, \dots, M-1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

y por la convolución en el dominio frecuencial se llega a,

$$H(w) = H_d(w) * W(w) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(v) W(w-v) dv$$

■ Metodología...

- La transformada de Fourier de la *ventana rectangular* es

$$W(w) = \sum_{n=0}^{M-1} w(n) e^{-jwn} = \frac{1 - e^{-jwM}}{1 - e^{-jw}} = e^{-jw(M-1)/2} \frac{\text{sen}(wM/2)}{\text{sen}(w/2)}$$

- Y su respuesta en *magnitud* y fase lineal a tramos es:

$$|W(w)| = \frac{|\text{sen}(wM/2)|}{|\text{sen}(w/2)|}, \quad -\pi \leq w \leq \pi$$

$$\Theta(w) = \begin{cases} -w\left(\frac{M-1}{2}\right), & \text{cuando } \text{sen}(wM/2) \geq 0 \\ -w\left(\frac{M-1}{2}\right) + \pi, & \text{cuando } \text{sen}(wM/2) < 0 \end{cases}$$

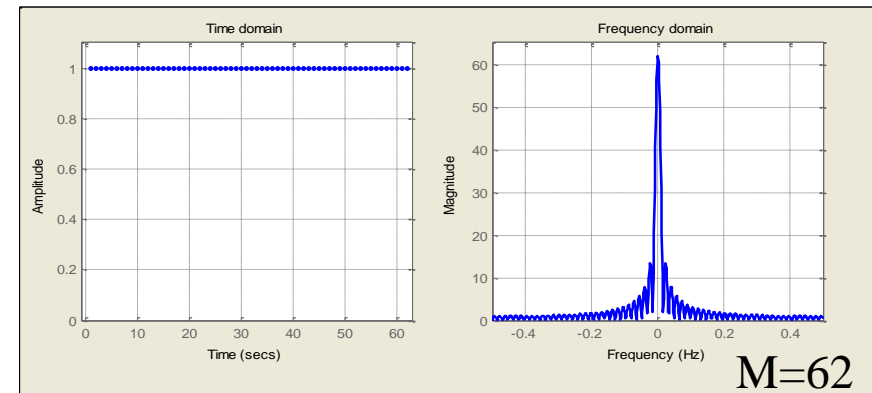
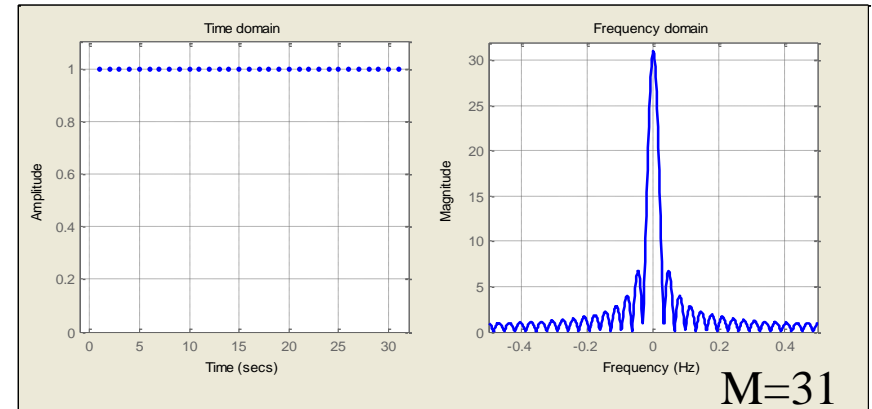
Diseño de Filtros FIR por Ventanas



PSI Percepción y Sistemas Inteligentes

■ Comportamiento de la respuesta en magnitud de $W(w)$

- El lóbulo principal se hace más estrecho a medida que M crece.
- El área de cada lóbulo lateral se conserva con variaciones de M .

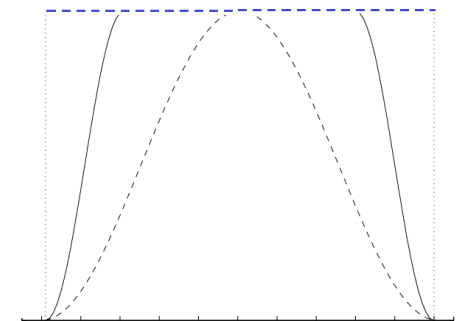
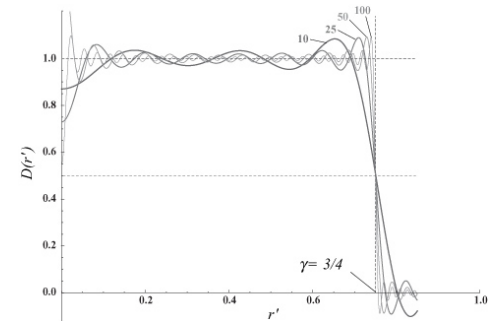


■ Observaciones

- Las características de la ventana ayudan a determinar la respuesta en frecuencia $H(w)$ del filtro FIR al truncar $h_d(n)$ a la longitud M .
- La convolución de $H_d(w)$ con $W(w)$ tiene el efecto de suavizar $H_d(w)$.
- A medida que M crece, los lóbulos laterales de $W(w)$ se estrechan más y el suavizado producido por $W(w)$ se reduce.
- Los lóbulos laterales grandes de $W(w)$ producen rizado y lóbulos grandes en $H(w)$.

■ Observaciones ...

- El truncamiento de las series de Fourier introduce rizado en $H(w)$, particularmente en la vecindad de discontinuidades.
 - *Fenómeno de Gibbs.*
- Ventanas sin discontinuidades abruptas en el dominio temporal, producen lóbulos laterales bajos en sus respuestas frecuenciales,
 - contribuyen a aliviar las oscilaciones indeseables.



■ Observaciones ...

- Las ventanas “suavizadas” al compararse con la rectangular producen:
 - Lóbulos laterales más bajos.
 - Un lóbulo central más amplio para el mismo valor de M .
 - Mayor suavizado a través de la convolución en el dominio de la frecuencia.
 - Región de transición de la respuesta del filtro FIR más amplia.
 - Puede reducirse incrementando la longitud de la ventana

Algunas funciones ventana para el diseño de filtros FIR

Nombre de la ventana

Secuencia en el dominio temporal,

$$h(n), 0 \leq n \leq M-1$$

Barlett (triangular)

$$1 - \frac{2 \left| n - \frac{M-1}{2} \right|}{M-1}$$

Blackman

$$0.42 - 0.5 \cos \frac{2\pi n}{M-1} + 0.08 \cos \frac{4\pi n}{M-1}$$

Hamming

$$0.54 - 0.46 \cos \frac{2\pi n}{M-1}$$

Hanning

$$\frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{2\pi n}{M-1} \right)$$

Kaiser

$$\frac{I_0 \left[\alpha \sqrt{\left(\frac{M-1}{2} \right)^2 - \left(n - \frac{M-1}{2} \right)^2} \right]}{I_0 \left[\alpha \left(\frac{M-1}{2} \right) \right]}$$



Algunas funciones ventana para el diseño de filtros FIR...

Nombre de la ventana

Secuencia en el dominio temporal,

$h(n), \quad 0 \leq n \leq M-1$

Lanczos

$$\left\{ \frac{\sin \left[2\pi \left(n - \frac{M-1}{2} \right) / (M-1) \right]}{2\pi \left(n - \frac{M-1}{2} \right) / \left(\frac{M-1}{2} \right)} \right\}^L \quad L > 0$$

Tukey

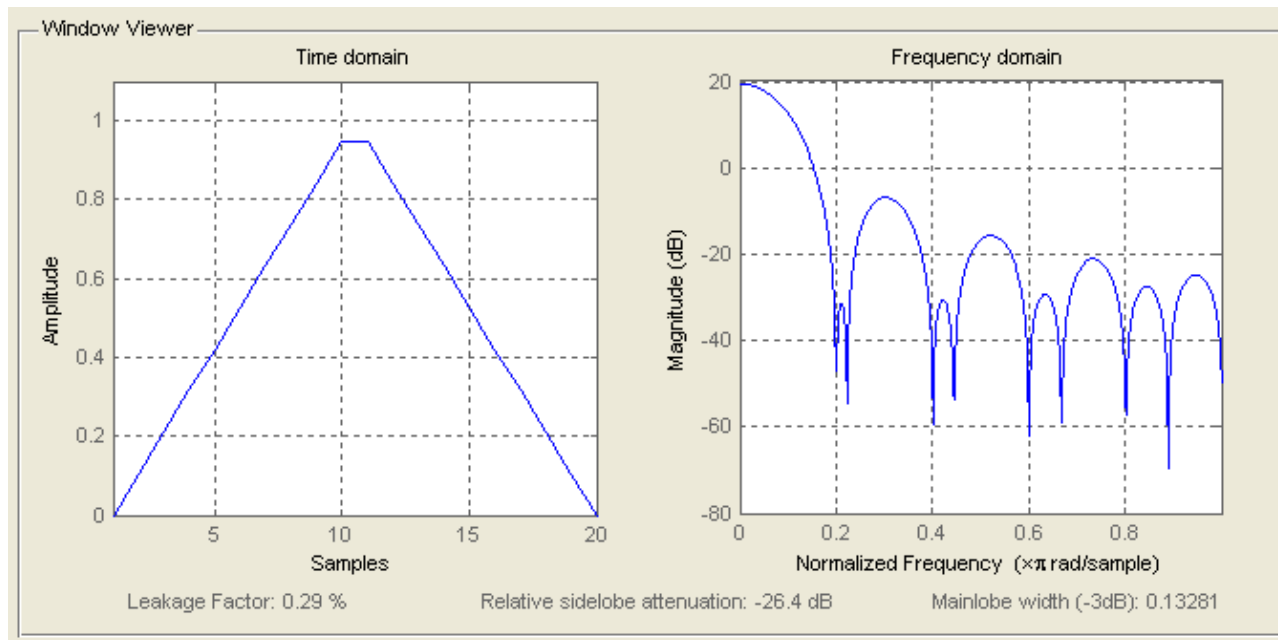
$$w(n) = \begin{cases} 1, & \text{para } n \text{ que cumplan } \left| n - \frac{M-1}{2} \right| \leq \alpha \frac{M-1}{2} \quad \text{con } 0 < \alpha < 1 \\ \frac{1}{2} \left[1 + \cos \left(\frac{n - (1+\alpha)(M-1)/2}{(1-\alpha)(M-1)/2} \pi \right) \right] & \text{para } n \text{ que cumplan } \alpha(M-1)/2 \leq \left| n - \frac{M-1}{2} \right| \leq \frac{M-1}{2} \end{cases}$$



Algunas funciones ventana para el diseño de filtros FIR

■ Ventana Barlett (triangular) para $h(n), 0 \leq n \leq M-1$

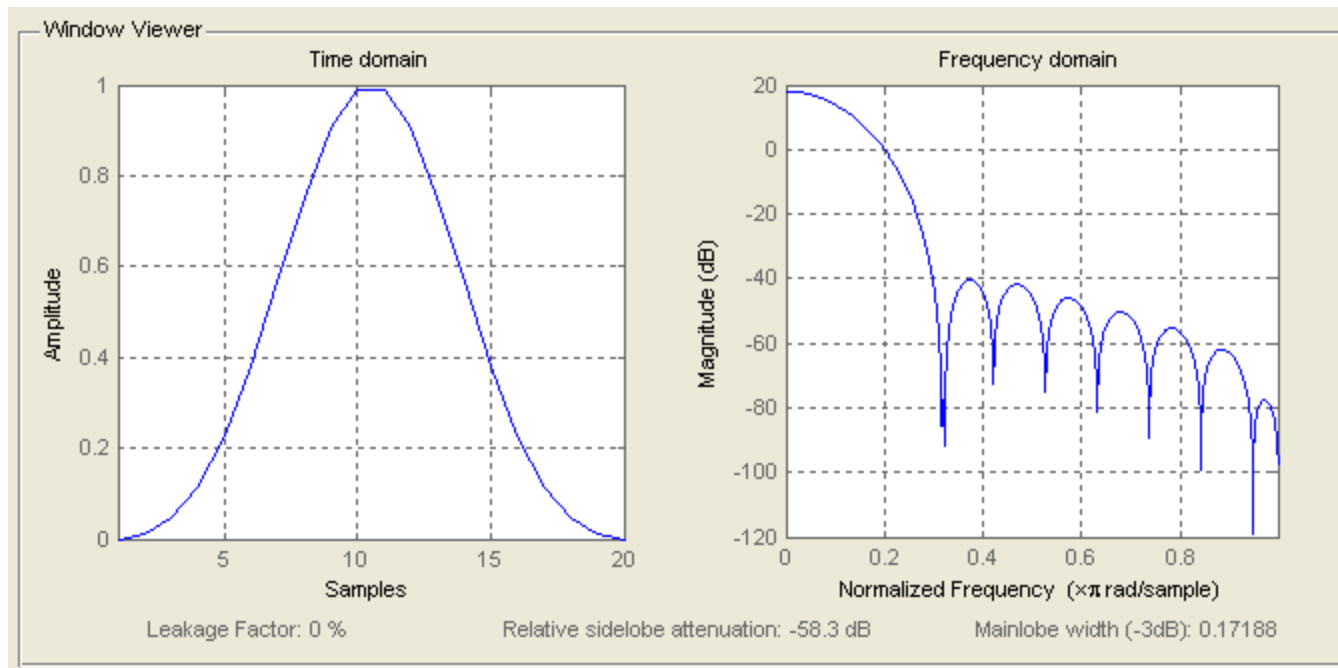
$$w(n) = 1 - \frac{2 \left| n - \frac{M-1}{2} \right|}{M-1}$$



Algunas funciones ventana para el diseño de filtros FIR

■ Ventana Blackman para $h(n), 0 \leq n \leq M-1$

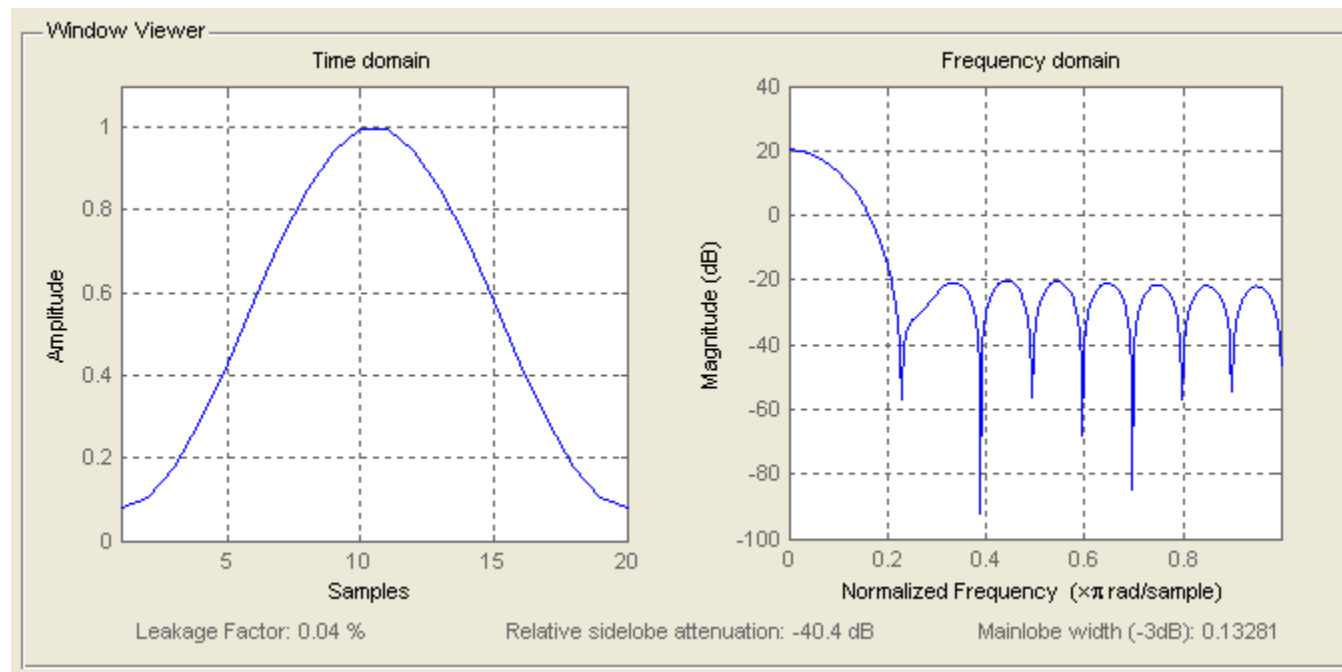
$$w(n) = 0.42 - 0.5 \cos \frac{2\pi n}{M-1} + 0.08 \cos \frac{4\pi n}{M-1}$$



Algunas funciones ventana para el diseño de filtros FIR

■ Ventana Hamming para $h(n), 0 \leq n \leq M-1$

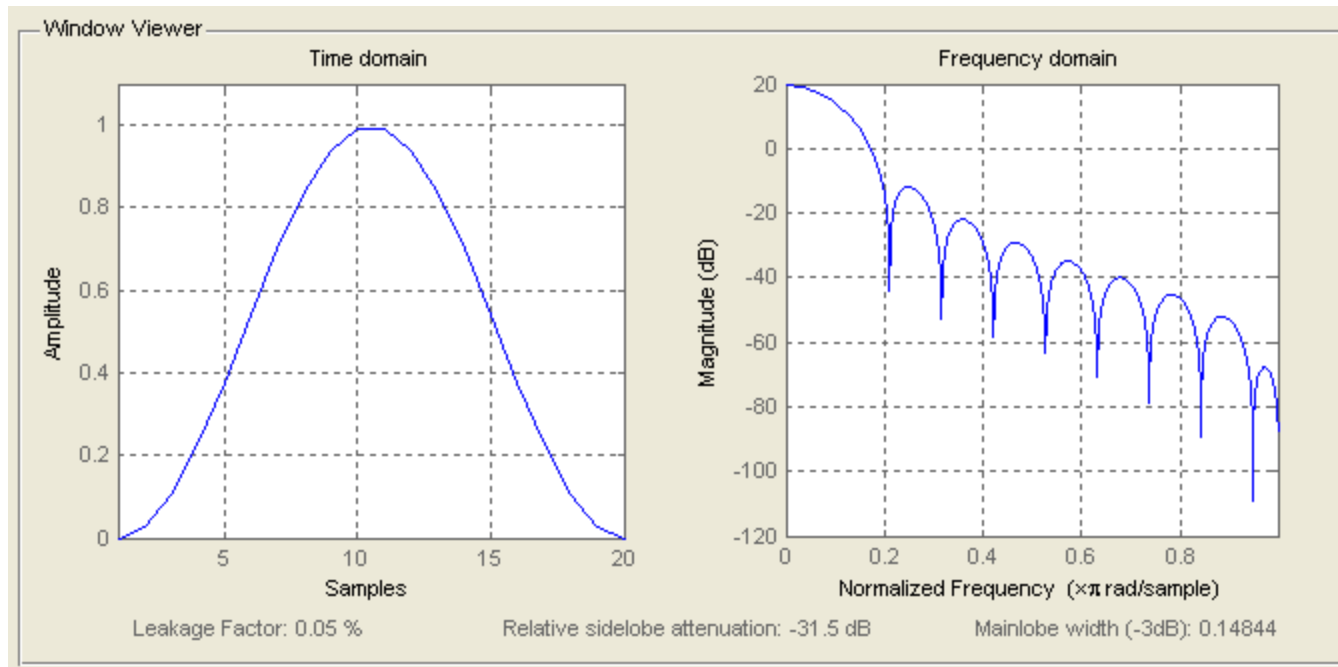
$$w(n) = 0.54 - 0.46 \cos \frac{2\pi n}{M-1}$$



Algunas funciones ventana para el diseño de filtros FIR

■ Ventana Hanning para $h(n), 0 \leq n \leq M-1$

$$w(n) = \frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{2\pi n}{M-1} \right)$$



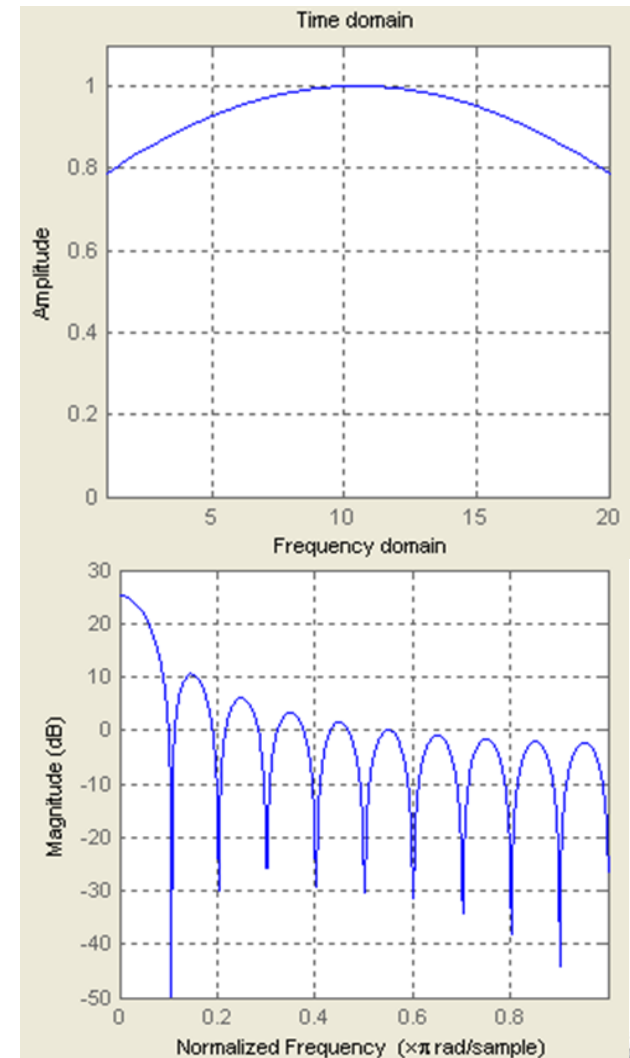
■ Ventana Kaiser para $h(n), 0 \leq n \leq M-1$

$$w(n) = \frac{I_0 \left[\alpha \sqrt{\left(\frac{M-1}{2} \right)^2 - \left(n - \frac{M-1}{2} \right)^2} \right]}{I_0 \left[\alpha \left(\frac{M-1}{2} \right) \right]}$$

■ Donde,

- α es un factor de forma ajustable.
- $I_0(x)$ es la función Bessel de orden cero modificada dada por,

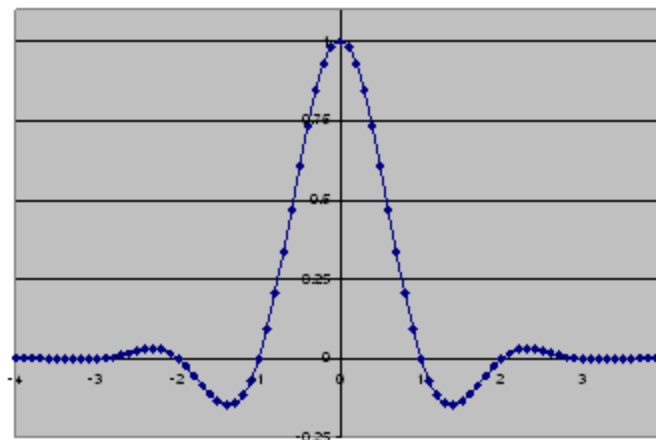
$$I_0(x) = 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \left[\frac{(x/2)^r}{r!} \right]^2$$



Algunas funciones ventana para el diseño de filtros FIR

■ Ventana Lanczos para $h(n), 0 \leq n \leq M-1$

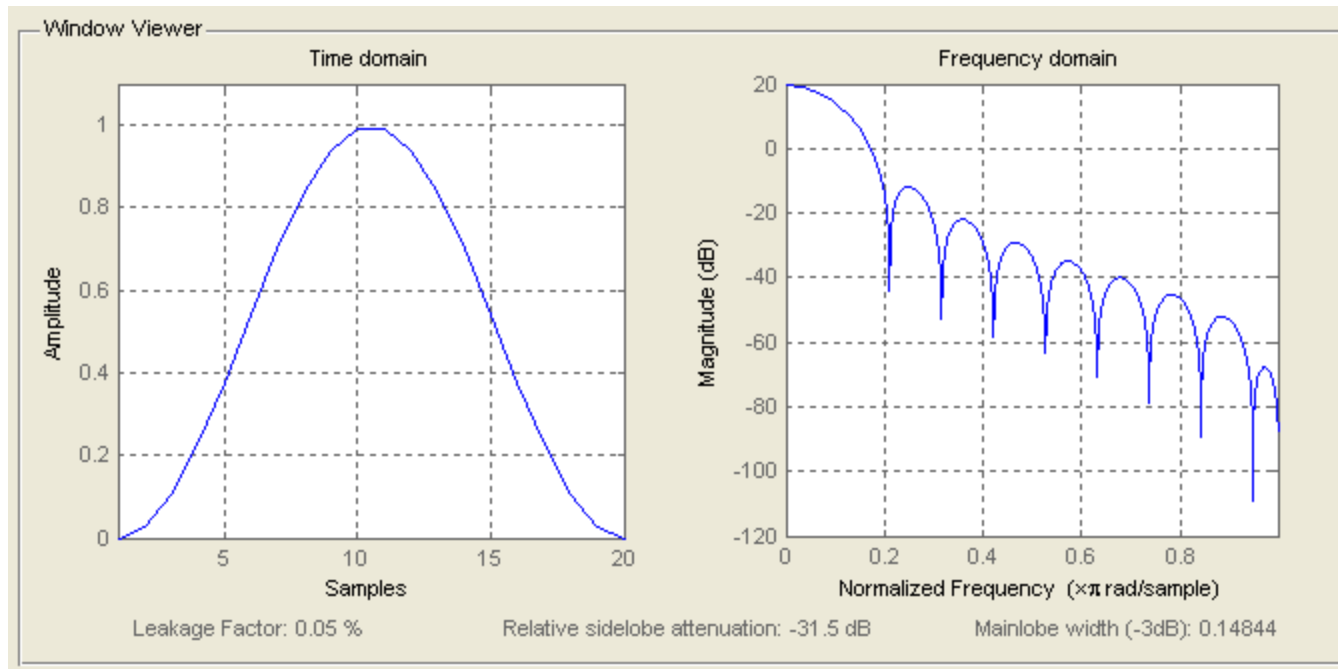
$$w(n) = \left\{ \frac{\text{sen} \left[2\pi \left(n - \frac{M-1}{2} \right) / (M-1) \right]}{2\pi \left(n - \frac{M-1}{2} \right) / \left(\frac{M-1}{2} \right)} \right\}^L \quad L > 0$$



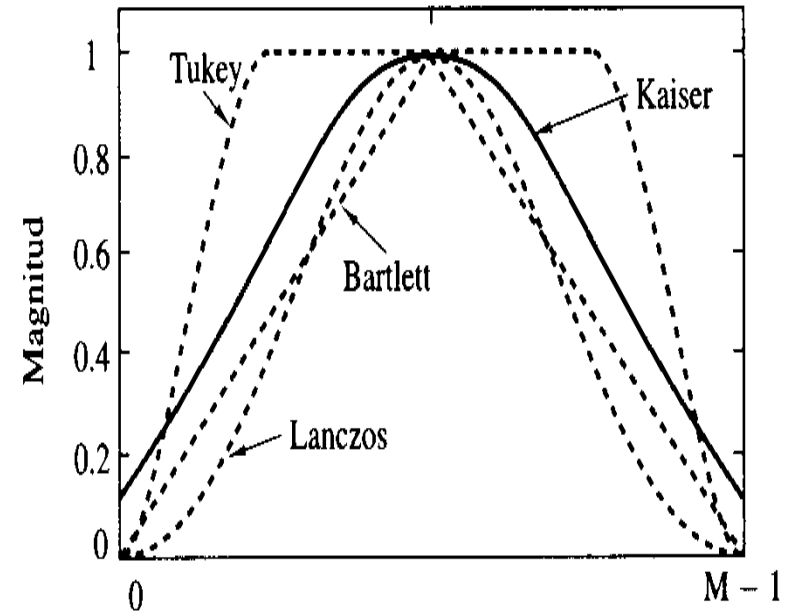
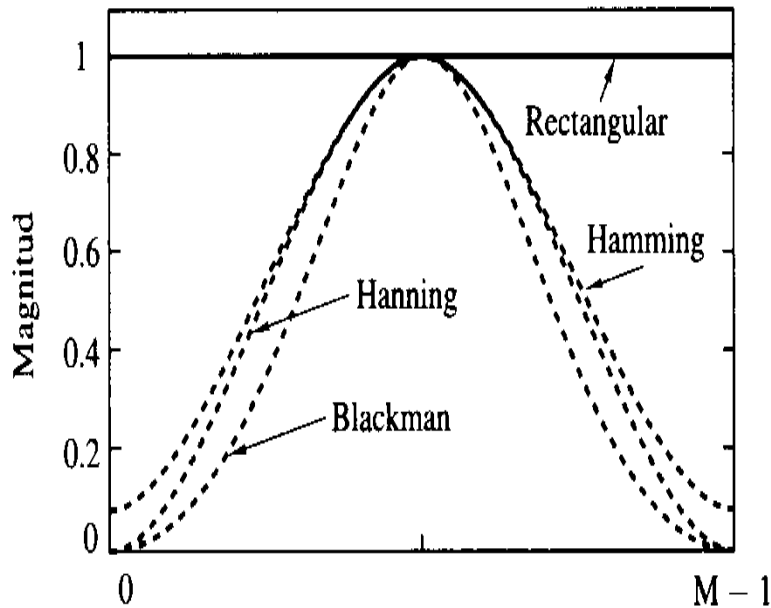
Algunas funciones ventana para el diseño de filtros FIR

■ Ventana Tukey para $h(n), 0 \leq n \leq M-1$

$$w(n) = \begin{cases} 1, & \text{para } n \text{ que cumplan } \left| n - \frac{M-1}{2} \right| \leq \alpha \frac{M-1}{2} \quad \text{con } 0 < \alpha < 1 \\ \frac{1}{2} \left[1 + \cos \left(\frac{n - (1+\alpha)(M-1)/2}{(1-\alpha)(M-1)/2} \pi \right) \right] & \text{para } n \text{ que cumplan } \alpha(M-1)/2 \leq \left| n - \frac{M-1}{2} \right| \leq \frac{M-1}{2} \end{cases}$$



Comparación de funciones ventana



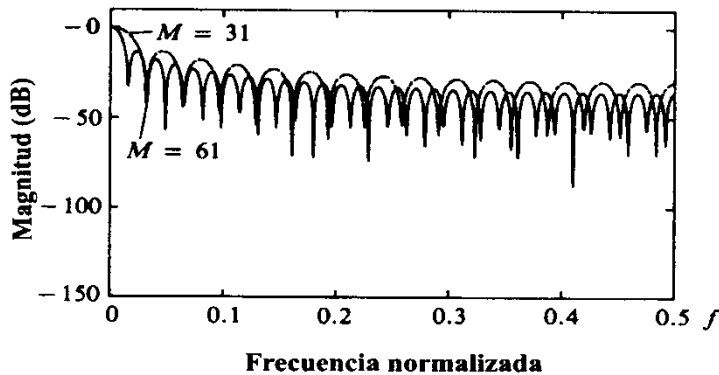
Algunas funciones ventana para el diseño de filtros FIR



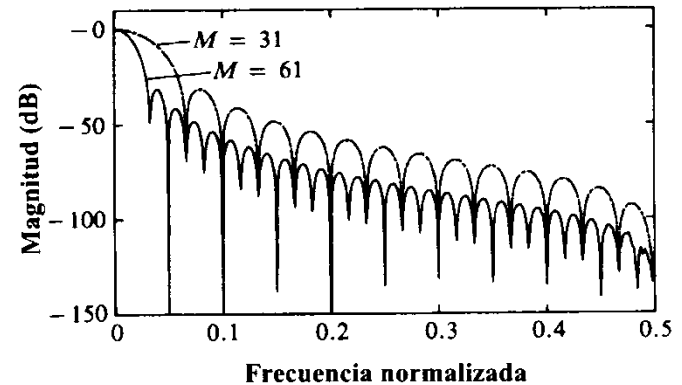
PSI Percepción y Sistemas Inteligentes

Comparación de funciones ventana ...

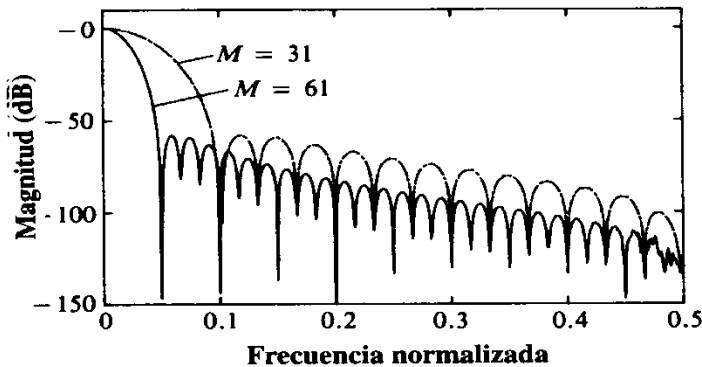
V. Rectangular



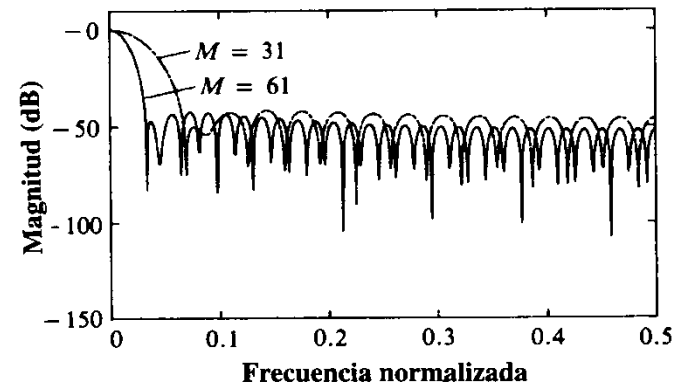
V. Hanning



V. Blackman



V. Hamming



Universidad del Valle

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Facultad de Ingeniería
Escuela de Ingeniería Eléctrica y Electrónica

Algunas funciones ventana para el diseño de filtros FIR

Comparación entre Ventanas

PSI Percepción y Sistemas Inteligentes

<i>Tipo de Ventana</i>	<i>Ancho Lóbulo Principal</i>	<i>Nivel relativo del Lóbulo Lateral</i>	<i>Atenuación mínima Banda de Rechazo</i>	<i>Ancho Banda de Transición</i>
Rectangular	$4\pi/M$	-13.3 dB	20.9 dB	$1.84 \pi/(M-1)$
Bartlett	$8\pi/(M+1)$	-26.5 dB	24.8 dB	$2.37 \pi/(M-1)$
Hanning	$8\pi/M$	-31.5 dB	43.9 dB	$5.01 \pi/(M-1)$
Hamming	$8\pi/M$	-42.7 dB	54.5 dB	$6.27 \pi/(M-1)$
Blackman	$12\pi/M$	-58.1 dB	75.3 dB	$9,19 \pi/(M-1)$
Valores para $\omega_c=0.4\pi$ y $M= 257$				



Diseño de Filtros FIR de Fase Lineal por Ventanas



- **Ejemplo 1:** Diseñar mediante ventana rectangular un filtro FIR paso bajo de fase lineal, con una respuesta en frecuencia deseada,

$$H_d(w) = \begin{cases} 1 e^{-jw(M-1)/2} & 0 \leq |w| \leq w_c \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- **Solución:** Al aplicar la transformada inversa de Fourier,

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-w_c}^{w_c} e^{jw\left(n - \frac{M-1}{2}\right)} dw = \frac{\text{sen}\left[w_c\left(n - \frac{M-1}{2}\right)\right]}{\pi\left(n - \frac{M-1}{2}\right)} \quad n \neq \frac{M-1}{2}$$



■ Solución:...

- Claramente, $h_d(n)$ es **no causal** y de **duración infinita**.
- Multiplicando $h_d(n)$ por la **ventana rectangular** $w(n)$, se obtiene el filtro FIR $h(n)$ de longitud M :

$$w(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq M-1 \\ 0, & \text{para otro } n \end{cases}$$

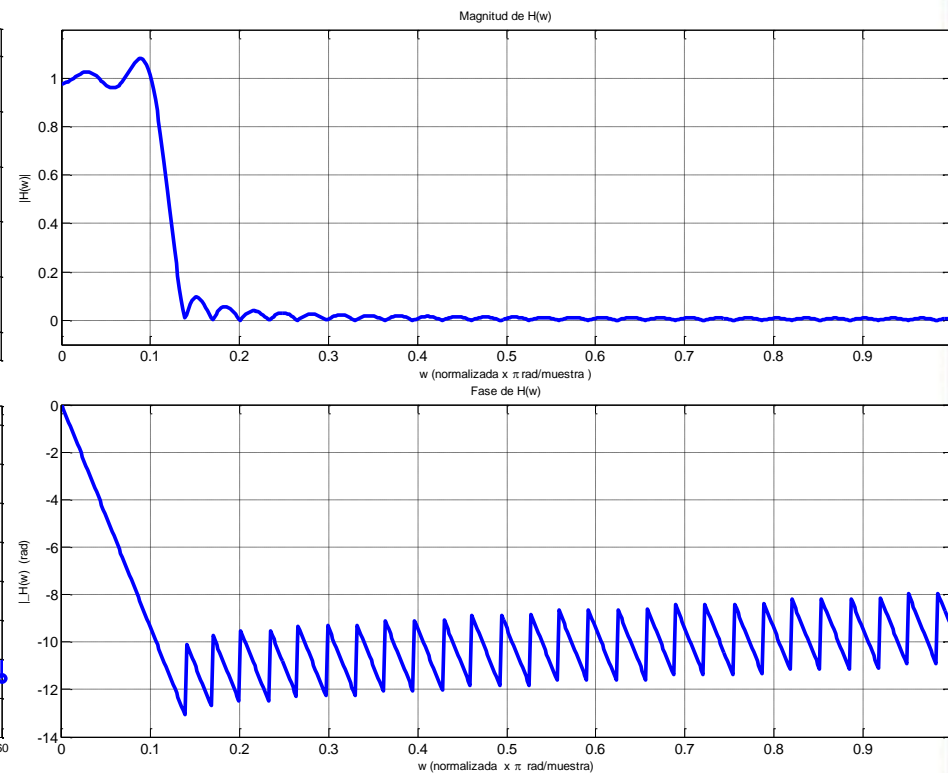
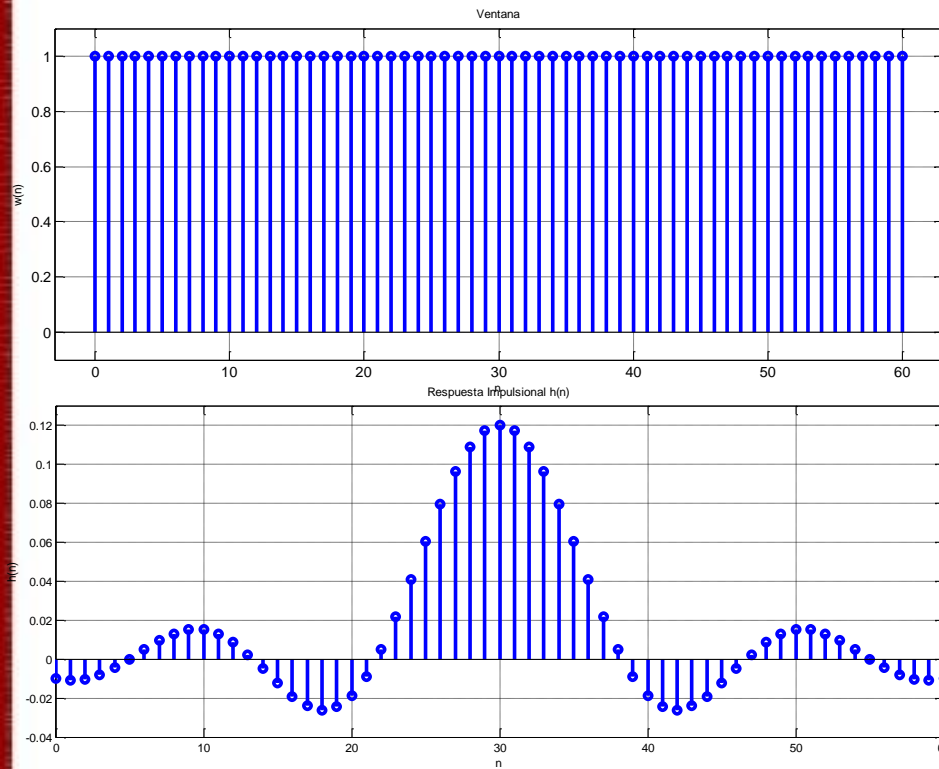
$$h(n) = \frac{\text{sen} \left[w_c \left(n - \frac{M-1}{2} \right) \right]}{\pi \left(n - \frac{M-1}{2} \right)} w(n) \quad 0 \leq n \leq M-1, \quad n \neq \frac{M-1}{2}$$

$$h(n) = \frac{w_c}{\pi}, \quad n = \frac{M-1}{2}$$

Diseño de Filtros FIR de Fase Lineal por Ventanas

■ Solución:...

■ Para $M = 61$, $w_c = 0.12\pi$, Ventana Rectangular



Diseño de Filtros FIR de Fase Lineal por Ventanas



- **Ejemplo 2:** Diseñar mediante ventana Hanning un filtro FIR paso bajo de fase lineal, con una respuesta en frecuencia deseada,

$$H_d(w) = \begin{cases} 1 e^{-jw(M-1)/2} & 0 \leq |w| \leq w_c \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- **Solución:** Al aplicar la transformada inversa de Fourier,

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-w_c}^{w_c} e^{jw\left(n - \frac{M-1}{2}\right)} dw = \frac{\text{sen}\left[w_c\left(n - \frac{M-1}{2}\right)\right]}{\pi\left(n - \frac{M-1}{2}\right)} \quad n \neq \frac{M-1}{2}$$



■ Solución:...

- Claramente, $h_d(n)$ es **no causal** y de **duración infinita**.
- Multiplicando $h_d(n)$ por la **ventana Hanning** $w(n)$, se obtiene el filtro FIR $h(n)$ de longitud M :

$$w(n) = \frac{1}{2} \left[1 - \cos \left(\frac{2\pi n}{M-1} \right) \right], \quad 0 \leq n < M$$

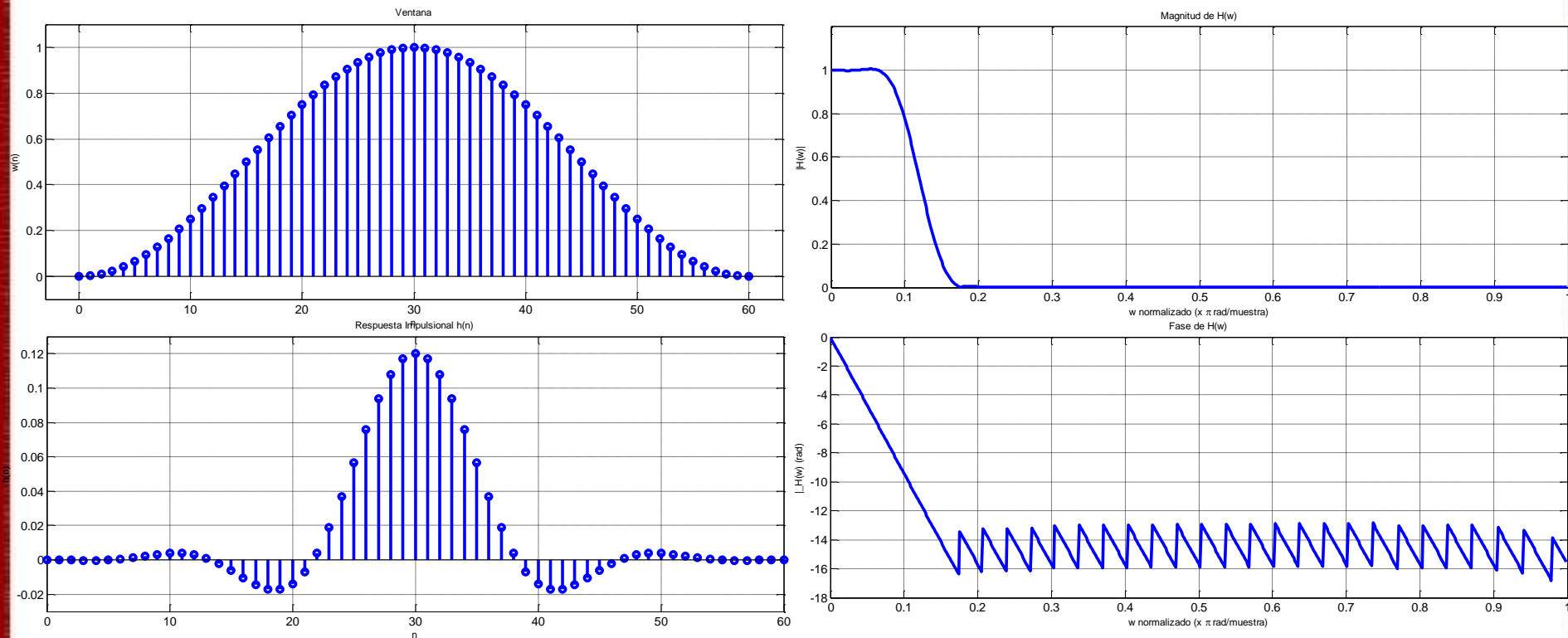
$$h(n) = \frac{\text{sen} \left[w_c \left(n - \frac{M-1}{2} \right) \right]}{\pi \left(n - \frac{M-1}{2} \right)} w(n) \quad 0 \leq n \leq M-1, \quad n \neq \frac{M-1}{2}$$

$$h(n) = \frac{w_c}{\pi}, \quad n = \frac{M-1}{2}$$

Diseño de Filtros FIR de Fase Lineal por Ventanas

■ Solución:...

■ Para $M = 61$, $w_c = 0.12\pi$, Ventana Hanning



■ Solución: ...

```

clc; clear all; close all;
%Parametros del Filtro FIR
wc=0.12*pi; M=61;
%Filtro Ideal Deseado (Recortado y desplazado)
n1=0:((M-1)/2)-1;
hd1= sin(wc.*(n1-(M-1)/2))./(pi.*(n1-(M-1)/2));

n2=(M-1)/2;
hd2=wc/pi;

n3=((M-1)/2)+1: M-1;
hd3= sin(wc.*(n3-(M-1)/2))./(pi.*(n3-(M-1)/2));
n=[n1 n2 n3];
hd=[hd1 hd2 hd3];

%Enventanado Rectangular
% V=ones(1,M);
% h=hd.*V;

%Enventanado Hanning
V=(1-cos(2*pi*n/(M-1)))/2;
h=hd.*V;

% Respuesta en Frecuencia
[H, w]=freqz(h);

% Graficación
figure, stem(n,V); grid on; title('Ventana');
xlabel('n'); ylabel('w(n)');
figure; plot(w/pi, abs(H)); grid on; title('Magnitud de H(w)');
xlabel('w normalizado (x \pi rad/muestra)'); ylabel('|H(w)|');
figure; plot(w/pi, unwrap(angle(H))); grid on; title('Fase de H(w)');
xlabel('w normalizado (x \pi rad/muestra)'); ylabel('\H(w) (rad)');
figure; stem(n, h); grid on; title('Respuesta Impulsional h(n)');
xlabel('n'); ylabel('h(n)');

```