Especificaciones Filtros IIR analógicos

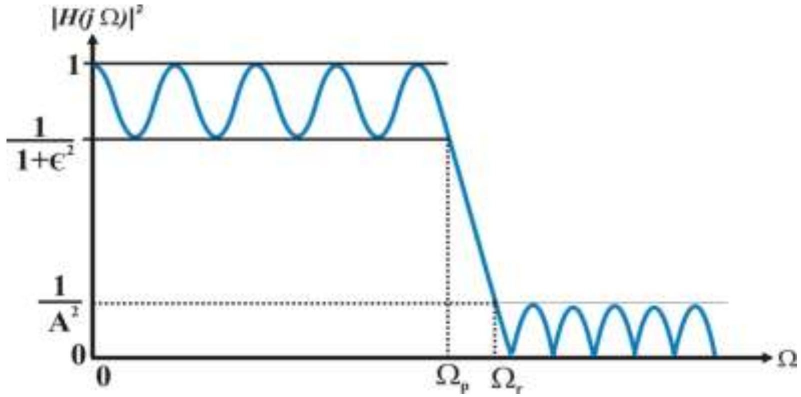
- **Introducción**
  - Generalmente se dan en términos de la magnitud al cuadrado de la respuesta en frecuencia $H(\Omega)$ de un filtro paso-bajo analógico.
  - Siendo,

ϵ rizado banda de paso

A atenuación banda de rechazo

Ω_p $[rad/s]$ f. de corte, banda de paso

Ω_r $[rad/s]$ f. de corte, banda de rechazo

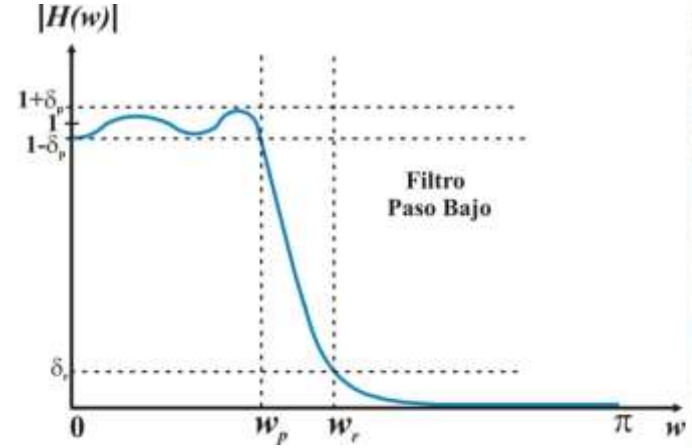


$$\begin{cases} \textit{banda de paso}: \\ \frac{1}{1+\epsilon^2} \le |H(\mathrm{j}\Omega)|^2 \le 1, \qquad |\Omega| \le \Omega_\mathrm{p} \\ \textit{banda de rechazo}: \\ 0 \le |H(\mathrm{j}\Omega)|^2 \le \frac{1}{A^2}, \qquad \Omega_\mathrm{r} \le |\Omega| \end{cases}$$

Especificaciones Filtros IIR analógicos

- **Introducción ...**
  - ϵ y A se relacionan con los rizados δ_p y δ_r según:

$$\epsilon = \frac{2\sqrt{\delta_p}}{1 - \delta_p} \qquad A = \frac{1+\delta_p}{\delta_r}$$



  - ϵ y A se relacionan con los parámetros relativos de rizado R_p [dB] y atenuación A_r [dB] según,

$$\epsilon = \sqrt{10^{R_p/10} - 1}, \qquad donde\ \ R_p = -20\,log_{10}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\epsilon^2}}\right)$$

$$A = 10^{\left(\frac{A_r}{20}\right)}, \qquad donde\ \ A_r = -20\,log_{10}(A^{-2})$$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Introducción …

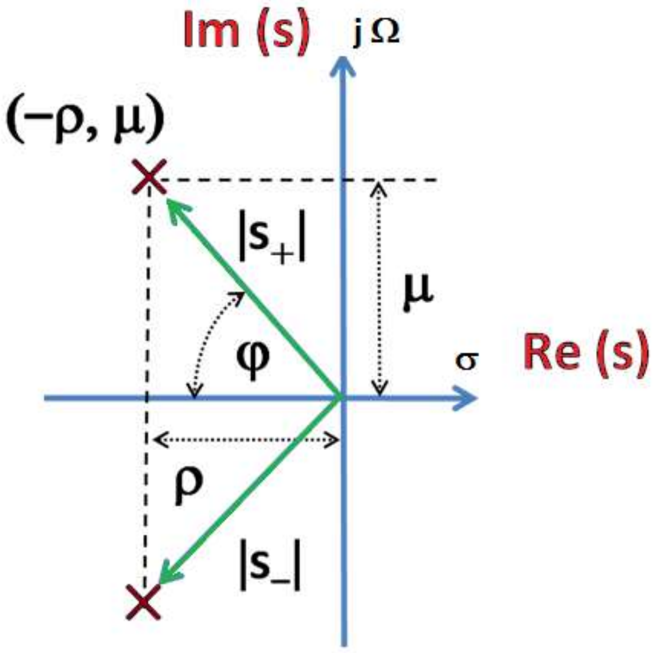
- La relación entre $H(\mathrm{j}\Omega)$ y $H(\mathrm{s})$ está dada por,

$$H(\mathrm{j}\Omega) = H(\mathrm{s})\Big|_{s=j\Omega}$$

- luego,

$$|H(\mathrm{j}\Omega)|^2 = H(\mathrm{j}\Omega)\ H^*(\mathrm{j}\Omega)$$

$$|H(\mathrm{j}\Omega)|^2 = H(\mathrm{s})H(-\mathrm{s})$$



- **Introducción …**
  - Los ceros y polos de $|H(j\Omega)|^2$ se distribuyen simétricamente con respecto al eje $j\Omega$.
  - *filtro con coeficientes reales*: polos y ceros son pares complejos conjugados.
  - *filtro estable*: los polos de $H(j\Omega)$ deben ubicarse en el lado izquierdo del plano-s y los ceros en cualquier lugar.

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Introducción …

- *Sistema de fase mínima*: todos los ceros deben estar en el semi-plano izquierdo o sobre el eje jΩ.
  - *Fase mínima*: diferencia de fase efectiva en las frecuencias *w*=0 y *w*=1 igual a cero, es decir,

$$\Theta(\pi) - \Theta(\pi) = 0$$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Filtros Prototipo

- **Introducción**
  - Los filtros prototipos básicos son:
    - F. Butterworth
    - F. Chebyshev Tipo I
    - F. Chebyshev Tipo II
    - Filtro Elíptico

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Filtro Butterworth

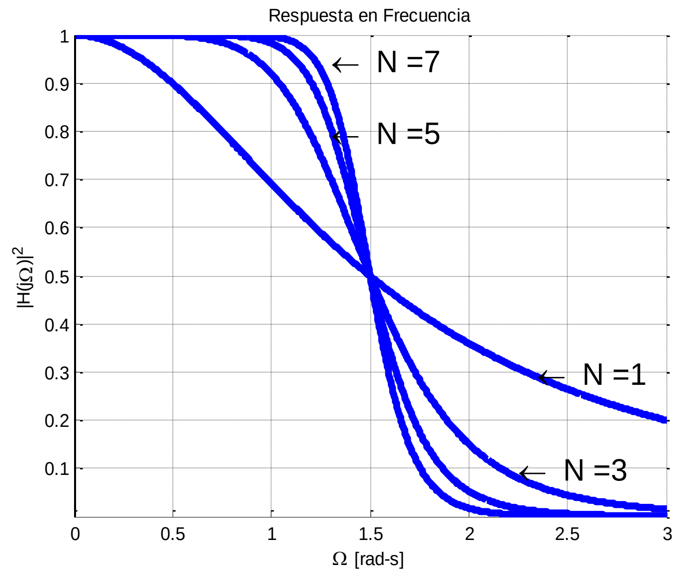
- **Características**
  - Respuesta de magnitud máximamente plana en la banda de paso.
  - Suaves variaciones en la banda de transición y de rechazo.
  - Sacrifican atenuación en las bandas de paso y rechazo para mejorar la respuesta en la banda de transición.

- **Magnitud Respuesta de frecuencia $|H(j\Omega)|^2$**
  - filtro paso-bajo orden N , todo polos, frecuencia de corte Ω_c

$$|H(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1+\left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2N}}$$

Filtro Butterworth

- **Magnitud Respuesta de frecuencia** $|H(\mathrm{j}\Omega)|^2$…



  - $|H(\mathrm{j}0)|^2 = 1$ para todos los valores de N.
  - $|H(\mathrm{j}\Omega_c)|^2 = 1/2$ para todos los valores de N.
  - $|H(\mathrm{j}\Omega)|^2$ se aproxima a un filtro ideal cuando $N \to \infty$.
  - $|H(\mathrm{j}\Omega)|^2$ es una función de Ω monótonamente decreciente.
  - $|H(\mathrm{j}\Omega)|^2$ es máximamente plano en $\Omega = 0$ debido a que todas las derivadas existen y son iguales a cero.

Filtro Butterworth

- **Función de Transferencia H(s)**
  - Los polos nunca se ubican sobre el eje imaginario y se posicionan sobre el eje real sólo cuando N es impar.
  - $H(\mathrm{s})$ de un filtro paso-bajo causal y estable:

$$H(\mathrm{s}) = \frac{\Omega_c^N}{\prod_{i=1}^{N}(s - p_i)}$$

  - sdonde, $\{p_i\}$ es el subconjunto de polos de $\{p_k\}$ que se encuentran en el semiplano izquierdo del plano-s.
  - N se determina por:

$$N = \frac{\log_{10}\left(10^{0,1\,R_p} - 1\right) - \log_{10}\left(10^{0,1\,A_r} - 1\right)}{2\ \log_{10}\left(\Omega_p/\Omega_r\right)}$$

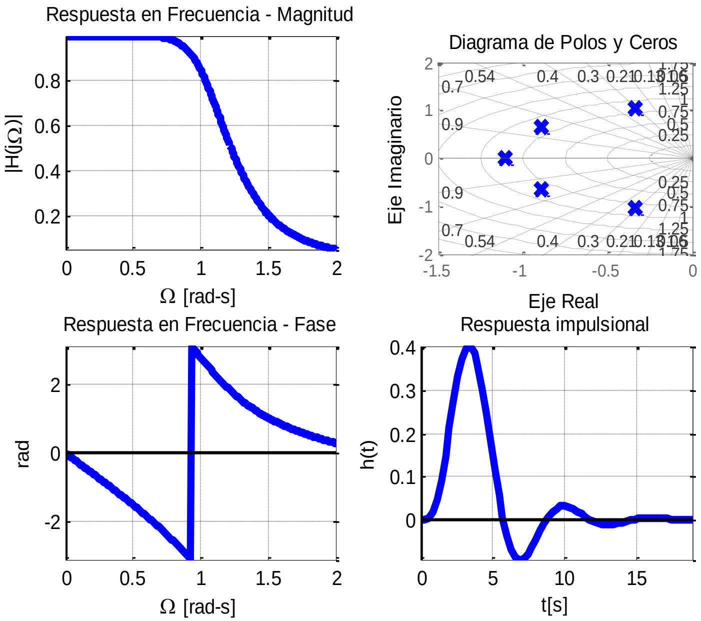
humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Filtro Butterworth

- **Ejemplo.**
  - Obtener un filtro con las siguientes especificaciones:

$$\Omega_p = 0{,}3\pi,\ \Omega_r = 0{,}4\pi,$$
$$R_p = 8\ dB\ ,\ A_r = 18\ dB$$

- **Solución.**
  - filtro con $N = 5$, $\delta_1 = 0{,}4305$ y $\delta_2 = 0{,}1801$.



$$H(s) = \frac{1{,}6073}{s^5 + 3{,}5582\ s^4 + 6{,}3305 s^3 + 6{,}9608\ s^2 + 4{,}7303\ s + 1{,}6073}$$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Filtro Chevyshev

- **Características**

  - Tipo I: Respuesta ondulada en la banda de paso y monótona en la banda de rechazo.
  - Tipo II: Respuesta monótona en la banda de paso y ondulada en la banda de rechazo.
  - Presenta una deviación mínima entre el rizado y la respuesta de magnitud sobre una banda de frecuencias.
  - Orden de magnitud relativo menor que el filtro Butterworth.

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Filtro Chevyshev – Tipo I

- **Filtro Tipo I: Magnitud Respuesta de frecuencia $|H(\mathrm{j}\Omega)|^2$**
  - Filtro paso-bajo orden N , todo polos,

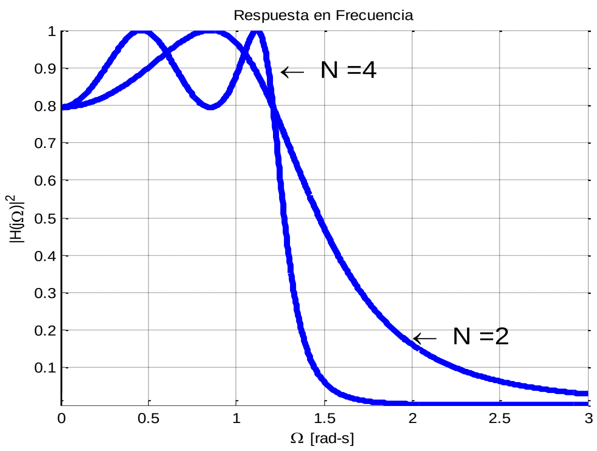
$$Tipo\ I: \qquad |H(\mathrm{j}\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2\, T_N^2\left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)}$$

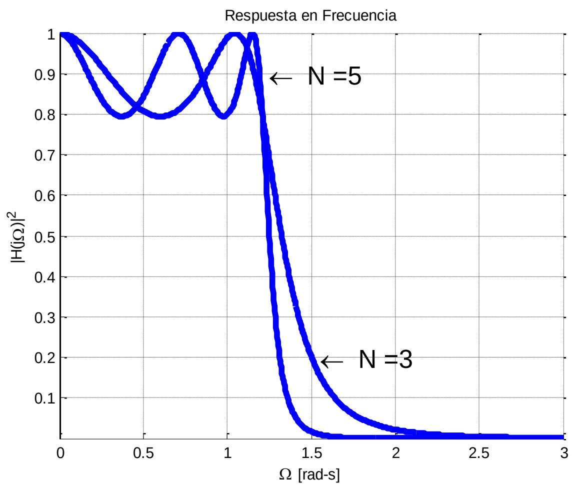
Ω_c es la frecuencia de corte de -3dB, ϵ es el factor de rizado y $T_N\left(\frac{\Omega_c}{\Omega}\right)$ es el polinomio Chebyshev de grado N dado por,

$$T_N\left(\frac{\Omega_c}{\Omega}\right) = \begin{cases} cos\left[N\, cos^{-1}\left(\frac{\Omega_c}{\Omega}\right)\right], & 0 \le \frac{\Omega_c}{\Omega} \le 1 \\ cos\left[cosh^{-1}\left(\frac{\Omega_c}{\Omega}\right)\right], & 1 < \frac{\Omega_c}{\Omega} \le \infty \end{cases}$$

Filtro Chevyshev – Tipo I

- **Magnitud Respuesta de frecuencia $|H(j\Omega)|^2$**
  - La respuesta cambia para *N* par o impar





Filtro Chevyshev – Tipo I

- **Magnitud Respuesta de frecuencia $|H(\mathrm{j}\Omega)|^2$**
  - $|H(\mathrm{j}0)|^2 = \begin{cases} \frac{1}{1+\epsilon^2}, & para\ N\ par \\ 1, & para\ N\ impar \end{cases}$
  - $|H(\mathrm{j}\Omega_\mathrm{c})|^2 = \frac{1}{1+\epsilon^2}$ para todos los valores de N.
  - $|H(\mathrm{j}\Omega)|^2 = \begin{cases} oscila\ entre\ 1\ y\ \frac{1}{1+\epsilon^2}, & 0 \leq \Omega \leq \Omega_\mathrm{c} \\ decrece\ monotonamente, & \Omega > \Omega_\mathrm{c} \end{cases}$
  - $\left|H\left(\mathrm{j}\frac{\Omega_\mathrm{r}}{\Omega_\mathrm{p}}\right)\right|^2 \leq \frac{1}{A^2}$ en toda la banda de rechazo
  - La banda de paso presenta N mínimos y máximos locales.

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Filtro Chevyshev – Tipo I

- **Función de Transferencia Tipo I**
  - $H(\mathrm{s})$ de un filtro paso-bajo causal y estable:

$$H(\mathrm{s}) = \frac{G}{\prod_{k=0}^{N-1}(s - p_k)}$$

    - G se selecciona de forma tal que garantice que,

$$H(\mathrm{j0}) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{1+\epsilon^2}}, & para\ N\ par \\ 1, & para\ N\ impar \end{cases}$$

    - N se determina como,

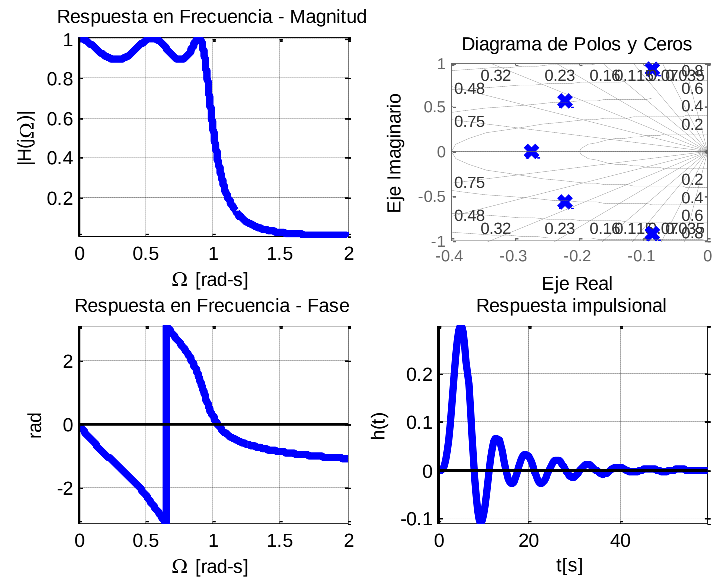
$$N = \frac{cosh^{-1}\left(\sqrt{A^2-1}/\epsilon\right)}{cosh^{-1}\left(\dfrac{\Omega_r}{\Omega_p}\right)}$$

    - Donde se toma, $\Omega_c = \Omega_\mathrm{p}$

Filtro Chevyshev – Tipo I

- **Ejemplo.**
  - Obtener un filtro PB con las siguientes especificaciones:

$$\Omega_p = 0{,}3\pi,\ \Omega_r = 0{,}4\pi,\ R_p = 1\ dB \text{ y } A_r = 18\ dB$$



- **Solución.**
  - Filtro de orden $N = 5$, $\epsilon = 0{,}5088$ y $A = 7{,}9433$.
  - Función de Transferencia

$$H(s) = \frac{0{,}0913}{s^5 + 0{,}8829\, s^4 + 1{,}5001 s^3 + 0{,}8157 s^2 + 0{,}4580\, s\ + 0{,}0913}$$

Filtro Chevyshev – Tipo II

- **Filtro Tipo II: Magnitud Respuesta de frecuencia $|H(\mathrm{j}\Omega)|^2$**
  - Filtro paso-bajo orden N , contienen polos y ceros.

$$Tipo\ II: \qquad |H(\mathrm{j}\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left[\epsilon^2\ T_N^2\left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)\right]^{-1}}$$

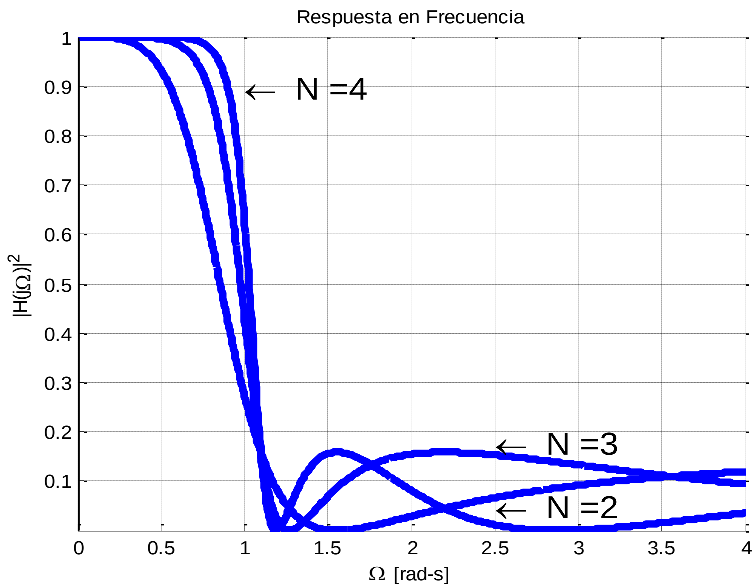
Ω_c es la frecuencia de corte de -3dB, ϵ es el factor de rizado y $T_N\left(\frac{\Omega_c}{\Omega}\right)$ es el polinomio Chebyshev de grado N dado por,

$$T_N\left(\frac{\Omega_c}{\Omega}\right) = \begin{cases} cos\left[N\ cos^{-1}\left(\frac{\Omega_c}{\Omega}\right)\right], & 0 \leq \frac{\Omega_c}{\Omega} \leq 1 \\ cos\left[cosh^{-1}\left(\frac{\Omega_c}{\Omega}\right)\right], & 1 < \frac{\Omega_c}{\Omega} \leq \infty \end{cases}$$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Filtro Chevyshev – Tipo II

- **Magnitud Respuesta de frecuencia $|H(\mathrm{j}\Omega)|^2$**
  - El número de rizados en la banda de paso es igual a *N*.



Filtro Chevyshev – Tipo II

- **Función de Transferencia Tipo II**

  - $H(\mathrm{s})$ de un filtro paso-bajo causal y estable:

$$H(\mathrm{s}) = K \prod_{k=0}^{N-1} \frac{(s - q_k)}{(s - p_k)}$$

    - Los ceros q_k se ubican sobre el eje imaginario

$$q_k = \begin{cases} \dfrac{j\Omega_\mathrm{r}}{cos[(2k+1)\pi/2N]}, & k = 0,1,\ldots,N-1 \\ \infty \quad para \;\; k = (N-1)/2 & si \;\; N \; impar \end{cases}$$

Filtro Chevyshev – Tipo II

- **Función de Transferencia Tipo II …**
  - Los polos p_k se ubican en

$$p_k = \sigma_k + \Omega_k, \quad \text{con} \begin{cases} \sigma_k = \frac{\Omega_r\,\mu_k}{\mu_k^2+\nu_k^2} \\ \Omega_k = \frac{-\Omega_r\,\nu_k}{\mu_k^2+\nu_k^2} \end{cases}, \quad k = 0,1,2\ldots, N-1$$

  - donde,

$$\mu_k = -a\,\Omega_p\, sen\left[\frac{(2k+1)\pi}{2N}\right]$$

$$\nu_k = b\,\Omega_p\, cos\left[\frac{(2k+1)\pi}{2N}\right]$$

    - siendo

$$\Omega_c = \Omega_\mathrm{r} \qquad a = \frac{\beta-\beta^{-1}}{2}, \quad b = \frac{\beta+\beta^{-1}}{2} \quad , \ \beta = \left(A+\sqrt{A^2-1}\right)^{1/N}$$

Filtro Chevyshev – Tipo II

- **Función de Transferencia Tipo II …**

  - La ecuación para obtener N es:

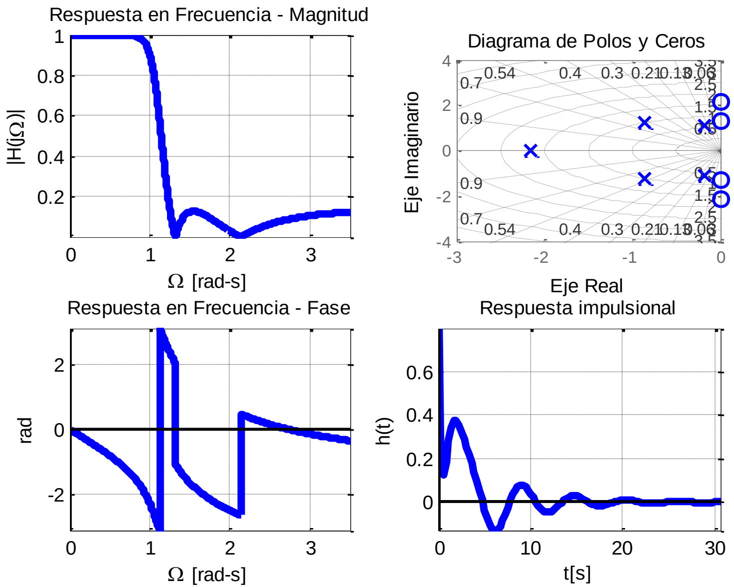
$$N = \frac{cosh^{-1}\left(\sqrt{A^2 - 1}/\epsilon\right)}{cosh^{-1}\left(\frac{\Omega_r}{\Omega_p}\right)}$$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Filtro Chevyshev – Tipo II

- **Ejemplo.**
  - Obtener un filtro PB con las siguientes especificaciones:

$\Omega_p = 0{,}3\pi,\ \Omega_r = 0{,}4\pi,\ R_p = 1\ dB$ y $A_r = 18\ dB$



- **Solución.**
  - Filtro de orden $N = 5$, $\epsilon = 0{,}5088$ y $A = 7{,}9433$.
  - Función de Transferencia

$$H(s) = \frac{0{,}7973\,(s^4 + 6{,}3165\,s^2 + 7{,}9798)}{s^5 + 0{,}8829\,s^4 + 1{,}5001 s^3 + 0{,}8157 s^2 + 0{,}4580\,s + 0{,}0913}$$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Filtro Elíptico ó Cauer

- **Características**

  - Presentan rizado constante en las bandas de paso y de rechazo de la respuesta de magnitud.
  - Presentan la banda de transición más corta para un determinado valor de N y especificaciones de rizado ϵ y A.
  - Respuesta similar a los filtros FIR de rizado constante y conducen a filtros óptimos pues alcanzan un valor de N mínimo.
  - Su diseño es más complejo que los filtros Butterworth y Chebyshev .
  - Presentan mejor respuesta de magnitud pero su fase no es lineal.

Filtro Elíptico ó Cauer

PSI Percepción y Sistemas Inteligentes

- **Magnitud Respuesta de frecuencia $|H(\mathrm{j}\Omega)|^2$**
  - filtro paso-bajo orden N , todo polos,

$$|H(\mathrm{j}\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 F_N^2\left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)}$$

    - Ω_c es la f. de corte de -3dB, ϵ es el factor de rizado en la banda de paso y

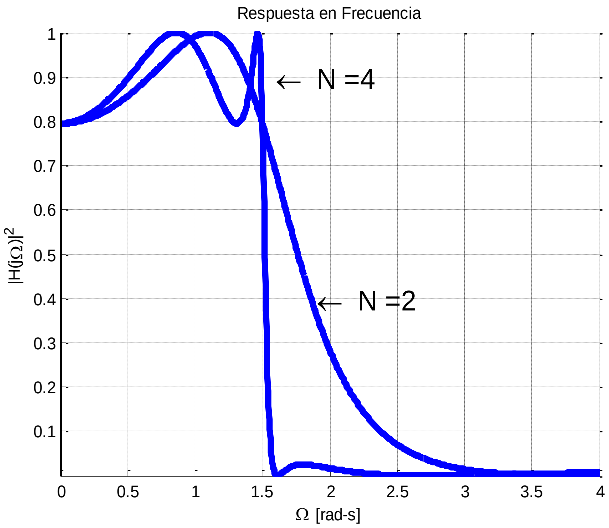
$$F_N(\Omega) = \begin{cases} \gamma^2 \prod_{k=1}^{N} \frac{\left(\Omega_{2k-1}^2 - \Omega^2\right)}{\left(1 - \Omega_{2k-1}^2 \Omega^2\right)}, & para\ N\ par \\ \gamma^2 \Omega \prod_{k=1}^{N} \frac{\left(\Omega_{2k}^2 - \Omega^2\right)}{\left(1 - \Omega_{2k}^2 \Omega^2\right)}, & para\ N\ impar \end{cases}$$

    - Ω_i frecuencias de los picos del rizado en la banda de paso y γ un parámetro ajustable.

Filtro Elíptico ó Cauer

- **Magnitud Respuesta de frecuencia $|H(j\Omega)|^2$…**

  - Se cumple que $F_N(1/\Omega) = 1/F_N(\Omega)$: las raíces del numerador y denominador son reciprocas entre ellas.
  - El total de máximos y mínimos en las bandas de paso y de rechazo es igual al orden N del filtro
  - $|H(j0)|^2 = \begin{cases} 1, & para\ N\ impar \\ \frac{1}{1+\epsilon^2}, & para\ N\ par \end{cases}$,
  - $|H(j\Omega_r)|^2 = \frac{1}{A^2}$, y $|H(j\Omega_c)|^2 = \frac{1}{1+\epsilon^2}$



Filtro Elíptico ó Cauer

PSI Percepción y Sistemas Inteligentes

- **Función de Transferencia**
  - $H(s)$ de un filtro paso-bajo causal y estable:

$$H(s) = G \prod_{i=0}^{N-1} \frac{(s - c_i)}{(s - p_i)}$$

  - Los polos se ubican en:

$$p_i = \sigma_i + \Omega_i, \quad \text{con} \begin{cases} \sigma_i = \Omega_p \dfrac{sn(q,k')\, cn(q,k')\, cn(r_i,k) dn(r_i,k)}{1-sn^2(q,k')\, dn^2(r_i,k)} \\ \Omega_k = \Omega_p \dfrac{sn(r_i,k) dn(r_i,k')}{1-sn^2(q,k')\, dn^2(r_i,k)} \end{cases}, \quad k = 0,1,2 \ldots, N-1$$

- $k = \frac{\Omega_p}{\Omega_r}$, $k' = \sqrt{1 - k^2}$
- $q = -j \frac{K(k)}{N\, K(k_1)} \; sn^{-1}\left(\frac{j}{\epsilon}, k_1\right)$ y $r_i = K(k)\left[\frac{(1+2i)}{N} - 1\right]$

Filtro Elíptico ó Cauer

- **Función de Transferencia …**

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 + k^2\, sen^2\varphi}}$$

  - $sn(u,k)$, $cn(u,k)$ y $dn(u,k)$ son tres funciones elípticas Jacobianas básicas relacionadas por,

$$sn^2(u,k) + cn^2(u,k) = 1$$
$$dn^2(u,k) + k^2\, sn^2(u,k) = 1$$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Filtro Elíptico o Cauer

Percepción y Sistemas Inteligentes

- **Función de Transferencia …**

  - Los ceros se calculan de forma similar a los polos, salvo que el parámetro q se define como,

$$q = -K\left(\sqrt{1-k^2}\right)$$

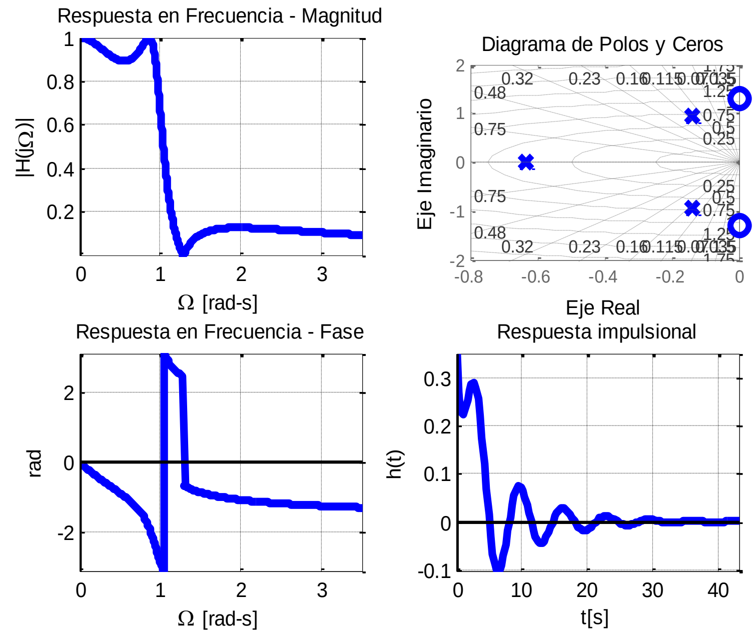
  - La ecuación para obtener N es

$$N = \frac{K(k)K\left(\sqrt{1-k_1^2}\right)}{K(k_1)K\left(\sqrt{1-k^2}\right)}$$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Filtro Elíptico o Cauer

- **Ejemplo.**
  - Obtener un filtro PB con las siguientes especificaciones:
    $$\Omega_p = 0{,}3\pi,\ \Omega_r = 0{,}4\pi,\ R_p = 1\ dB \text{ y } A_r = 18\ dB$$



- **Solución.**
  - Filtro de orden $N = 3$, $\epsilon = 0{,}5088$ y $A = 7{,}9433$.
  - Función de Transferencia

$$H(s) = \frac{0{,}3523\,(s^2 + 1{,}6539)}{s^3 + 0{,}9138s^2 + 1{,}0981s + 0{,}5826}$$