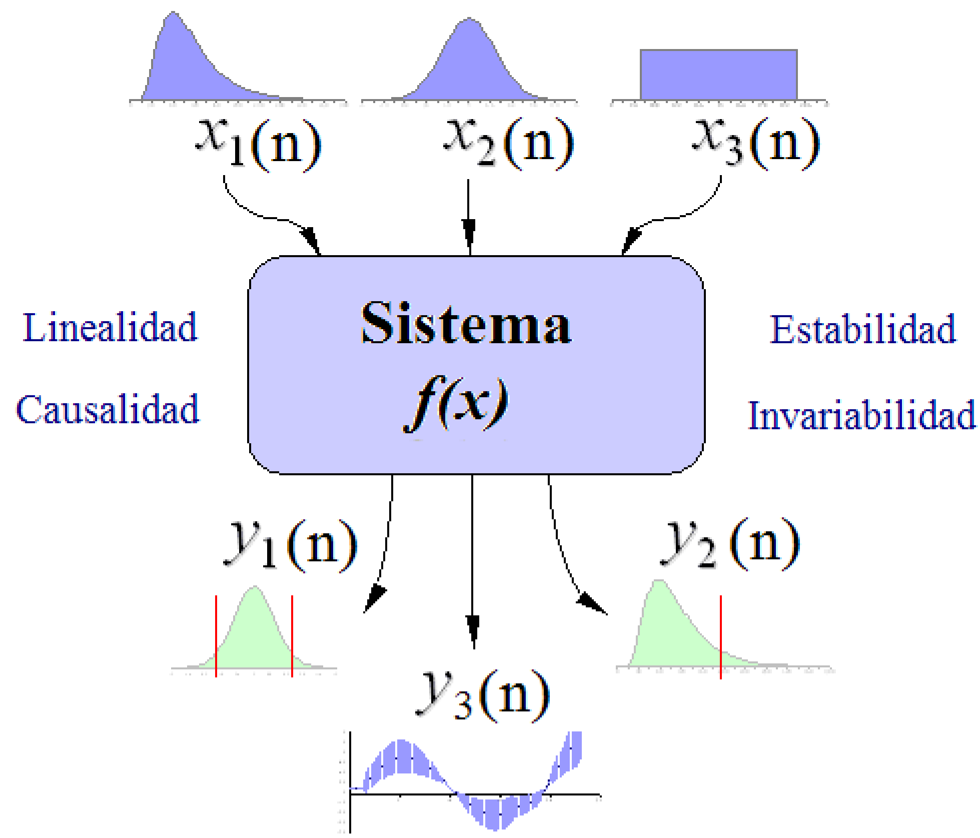
Análisis de Sistemas LTI

- **Análisis**

  Distinción y separación de las partes de un todo hasta llegar a conocer sus principios o elementos.



humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

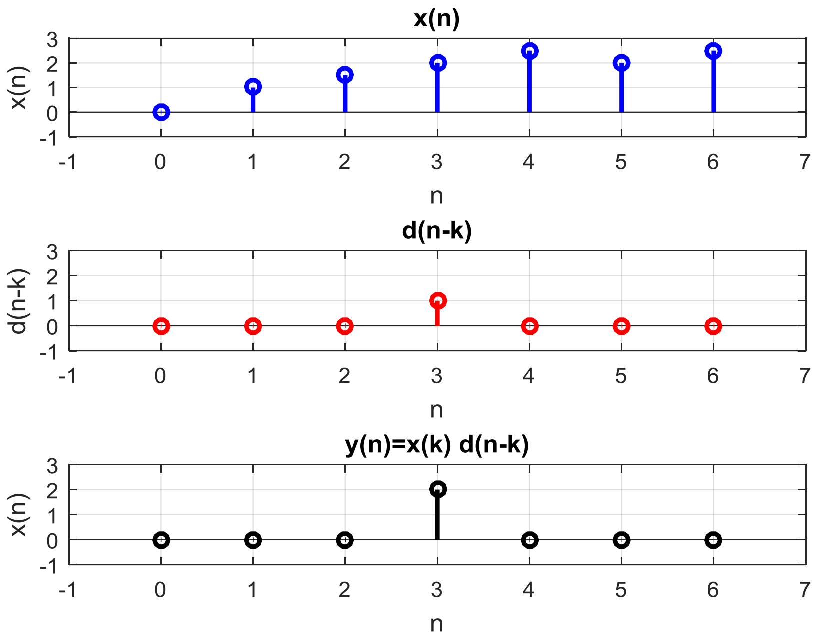
Análisis de Sistemas LTI

- **Motivación**
  - Existen gran variedad de técnicas matemáticas para el análisis de sistemas LTI.
  - Muchos sistemas prácticos son LTI o pueden aproximarse a sistemas LTI.
- **Técnicas**
  - Básicamente existen dos métodos
    - Convolución
    - Ecuaciones en diferencias
      - Método directo
      - Método indirecto

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

PSI Percepción y Sistemas Inteligentes

- **Principio**
  - Cualquier señal discreta $x(n)$ de excitación de un sistema puede descomponerse como una suma ponderada de impulsos unitarios desplazados $\delta(n-k)$.



  - Se tiene:

$$x(n)\,\delta(n-k) = x(k)\,\delta(n-k)$$

  - Por lo tanto:

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)$$

PSI Percepción y Sistemas Inteligentes

- **Ejemplo 1:** Descomponer en suma ponderada de impulsos las señales:
  - $x_1(n) = \{\underline{4}\ \ 3.5\ \ 2.1\ \ -8.6\}$
  - $x_2(n) = \{7.4\ \ 3.9\ \ \underline{1.5}\ \ 2.5\ \ 4.1\ \ -3.1\}$

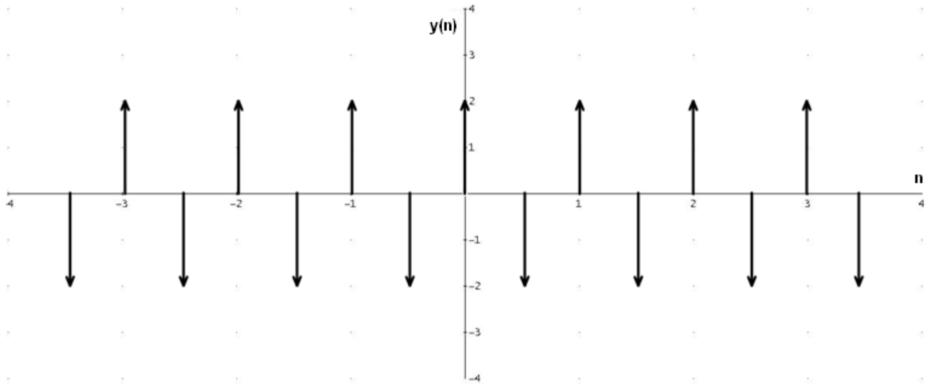
- **Solución**
  - $x_1(n) = 4\,\delta(n) + 3.5\,\delta(n-1) + 2.1\,\delta(n-2) - 8.6\,\delta(n-3)$
  - $x_2(n) = 7.4\,\delta(n+2) + 3.9\,\delta(n+1) + 1.5\,\delta(n) + 2.5\,\delta(n-1) + 4.1\,\delta(n-2) - 3.1\,\delta(n-3)$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Análisis por Convolución …

- **Ejemplo 2:** Descomponer en una suma ponderada de impulsos la señal

$$x(n) = (-1)^n = \{\ldots,\ -1,\ 1,\ -1,\ \underline{1}, -1,\ 1, -1, \ldots\}$$

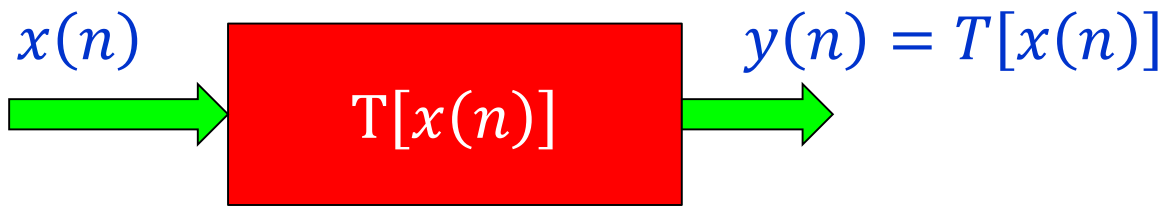


- **Solución**

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k\, \delta(n-k)$$

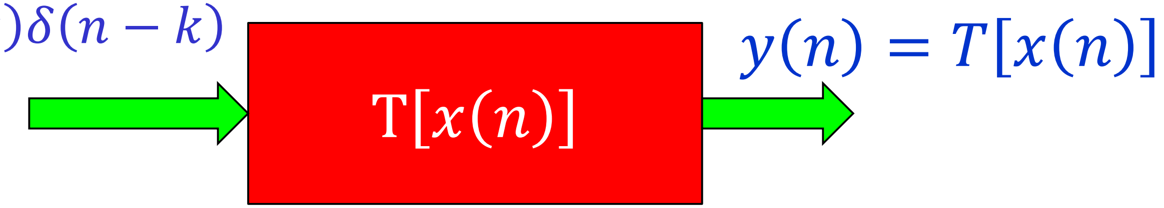
Análisis por Convolución…

- **Definición**
  - La respuesta $x(n)$ de un sistema **lineal** T[ ] a una entrada $x(n)$



  - es igual a la suma ponderada de la respuestas a cada uno de los impulsos que constituye la entrada $x(n)$:

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)$$



Análisis por Convolución…

- **Definición …**

  - Es decir,

$$y(n) = \mathrm{T}[x(n)]$$

$$y(n) = \mathrm{T}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)\right]$$

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\ \mathrm{T}[\delta(n-k)]$$

  - Definiendo $h(n,k) = \mathrm{T}[\delta(n-k)]$, se obtiene:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n,k)$$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Análisis por Convolución…

- **Definición …**
  - La ecuación

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n,k)$$

    - Constituye la respuesta de un sistema lineal $h(n,k)$ a cualquier entrada $x(n)$.
    - Dépende de $x(n)$ y de las respuestas del sistema $h(n,k)$ a los impulsos unitarios $\delta(n-k)$.
    - Se aplica a cualquier **sistema lineal** en reposo (variante o invariante en el tiempo)

Análisis por Convolución…

- **Definición …**
  - Para sistemas **invariantes con el tiempo**, la ecuación

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n,k)$$

se reescribe como,

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$$

Que define **la operación de convolución**.

  - **Observación.**
    - Los sistemas LTI en reposo quedan totalmente caracterizados por su *respuesta al impulso unitario*, $h(n)$.

- **Definición de Convolución**
  - Obtiene la respuesta $y(n)$ de un sistema LTI como función de la señal de entrada $x(n)$ y de la respuesta impulsional $h(n)$.

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$$

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n-k)h(k)$$

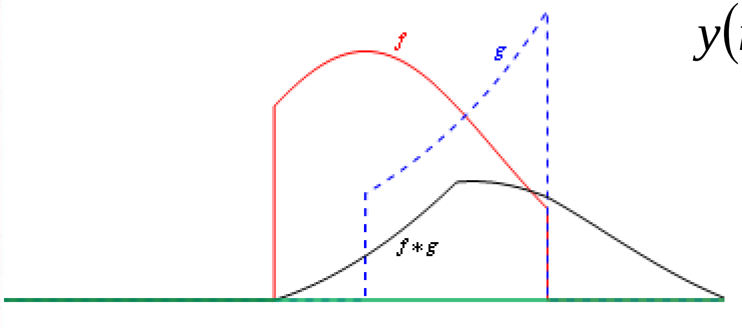
  - La convolución involucra cuatro operaciones sobre las señales:
    - *Reflexión* , *Desplazamiento* , *Multiplicación* , *Suma*

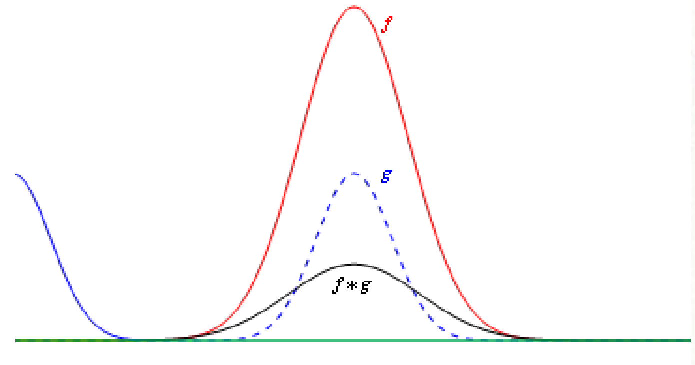
humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

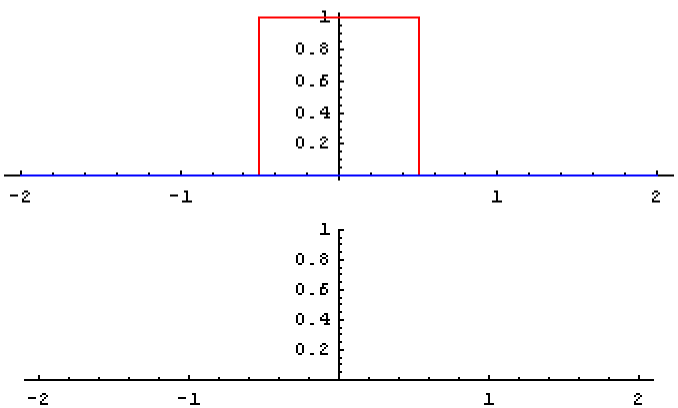
Análisis de Convolución

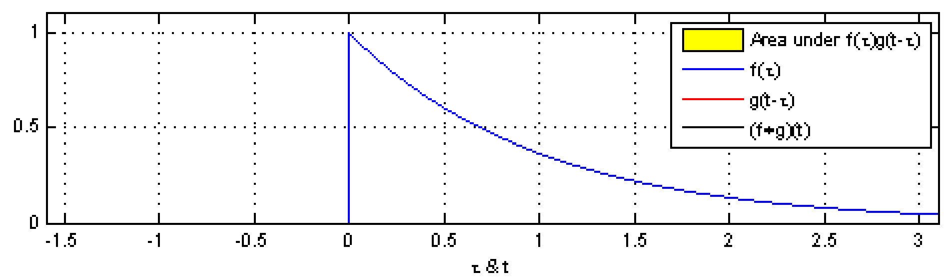
Definición de Convolución …

$$y(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)h(n-k)$$









Análisis por Convolución

- **Ejemplo 1.** Obtener por convolución la respuesta del sistema

$$h(n) = \{1 \ \underline{2} \ \ 1 \ \ -1\}$$

cuando la entrada es: $x(n) = \{\underline{1} \ \ 2 \ \ 3 \ \ 1\}$

- **Solución**
  - Usando la definición $y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$
  - Y considerando que:

$$Long\ [y(n)] = \ long\ [x(n)] + long\ [h(n)] - 1$$
$$n_{inicio}[y(n)] = n_{inicio}[x(n)] + n_{inicio}[h(n)]$$
$$n_{final}[y(n)] = n_{final}[x(n)] + n_{final}[h(n)]$$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Análisis por Convolución

- **Solución …**
  - $n_{inicio} = n_{inicio}[x(n)] + n_{inicio}[h(n)] = 0 + (-1) = -1$
  - $n_{final} = n_{final}[x(n)] + n_{final}[h(n)] = 3 + 2 = 5$
  - Con $x(n) = \{\underline{1}\ \ 2\ \ 3\ \ 1\}\quad h(n) = \{1\ \ \underline{2}\ \ 1\ \ -1\}$
  - **Para $\boldsymbol{n = -1}$**
    - $y(-1) = \sum_{k=0}^{3} x(k)h(-1-k)$
    - $y(-1) = x(0)h(-1-0) + x(1)h(-1-1) + x(2)h(-1-2) + x(3)h(-1-3)$
    - $y(-1) = x(0)h(-1) + x(1)h(-2) + x(2)h(-3) + x(3)h(-4)$
    - $y(-1) = 1x1 + 2x0 + 3x0 + 1x0 = 1$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

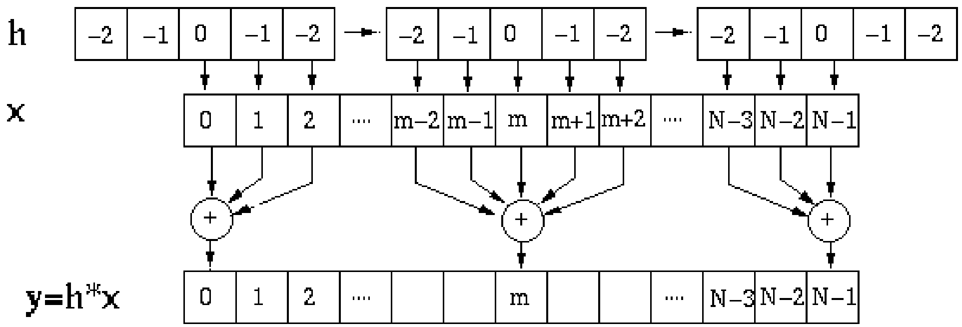
Análisis por Convolución

- **Solución …**
  - Con $x(n) = \{\underline{1}\ \ 2\ \ 3\ \ 1\}$ $\quad h(n) = \{1\ \ \underline{2}\ \ 1\ \ -1\}$
  - **Para $n = 0$**
    - $y(0) = \sum_{k=0}^{3} x(k)h(0-k)$
    - $y(0) = x(0)h(0-0) + x(1)h(0-1) + x(2)h(0-2) + x(3)h(0-3)$
    - $y(0) = x(0)h(0) + x(1)h(-1) + x(2)h(-2) + x(3)h(-3)$
    - $y(0) = 1x2 + 2x1 + 3x0 + 1x0 = 4$
  - **Para $n = 1$**
    - $y(1) = \sum_{k=0}^{3} x(k)h(1-k)$
    - $y(1) = x(0)h(1-0) + x(1)h(1-1) + x(2)h(1-2) + x(3)h(1-3)$
    - $y(1) = x(0)h(1) + x(1)h(0) + x(2)h(-1) + x(3)h(-2)$
    - $y(1) = 1x1 + 2x2 + 3x1 + 1x0 = 8$

Análisis por Convolución

- **Solución …**
  - Con $x(n) = \{\underline{1}\ \ 2\ \ 3\ \ 1\}\quad h(n) = \{1\ \ \underline{2}\ \ 1\ \ -1\}$
  - **Para $n = 2$**
    - $y(2) = \sum_{k=0}^{3} x(k)h(2-k)$
    - $y(2) = x(0)h(2) + x(1)h(1) + x(2)h(0) + x(3)h(-1)$
    - $y(2) = 1x(-1) + 2x1 + 3x2 + 1x1 = 8$
  - **Para $n = 3$** $\quad y(3) = \sum_{k=0}^{3} x(k)h(3-k) = 3$
  - **Para $n = 4$** $\quad y(4) = \sum_{k=0}^{3} x(k)h(4-k) = -2$
  - **Para $n = 5$** $\quad y(5) = \sum_{k=0}^{3} x(k)h(5-k) = -1$
- **Luego:** $\boldsymbol{y(n) = \{1\ \ \underline{4}\ \ 8\ \ 8\ \ 3\ \ -2\ \ -1\}}$

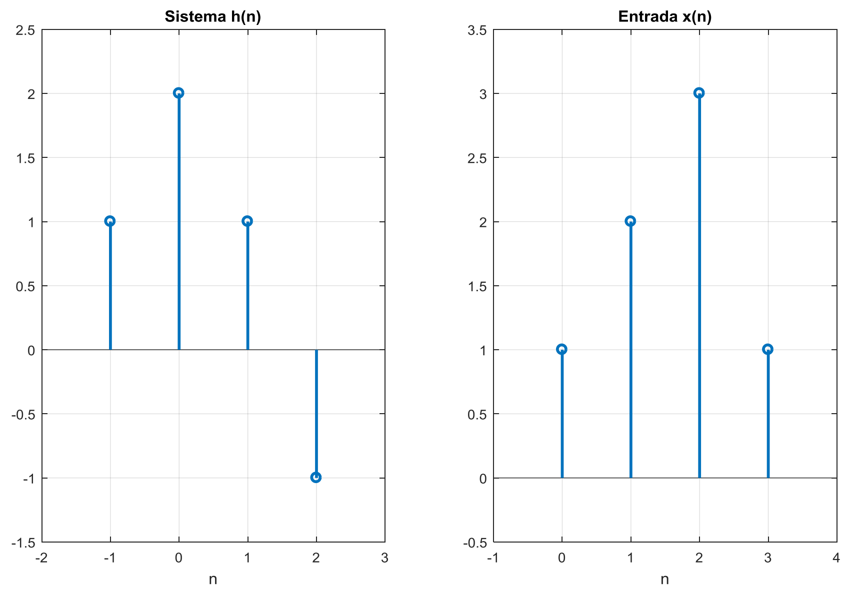
- **Ejemplo 2.**
  - Vídeo Convolution
    - https://www.youtube.com/watch?v=n59p3KNLYUQ



Análisis por Convolución …

- **Ejemplo 3:** Determine la respuesta del sistema LTI mediante el método tabular

Respuesta impulsional: $h(n)=\left\{1,\underset{\uparrow}{2},1,-1\right\}$ Señal de entrada: $x(n)=\left\{\underset{\uparrow}{1},2,3,1\right\}$



Análisis por Convolución …

- **Ejemplo:** …
  - Solución: Por convolución $$y(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)h(n-k)$$

n:	-1	0	1	2	3	4	5
x(n):		1	2	3	1		
h(n):	1	2	1	-1			
	1*1=1	1*2=2	1*3=3	1*1=1			
		2*1=2	2*2=4	2*3=6	2*1=2		
			1*1=1	1*2=2	1*3=3	1*1=1	
				(-1)*1=-1	(-1)*2=-2	(-1)*3=-3	(-1)*1=-1
y(n):	1	4	8	8	3	-2	-1

Método Tabular

- $y(n)=\{1\ \underline{4}\ \ 8\ \ 8\ \ 3\ \ -2\ \ -1\}$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Análisis por Convolución …

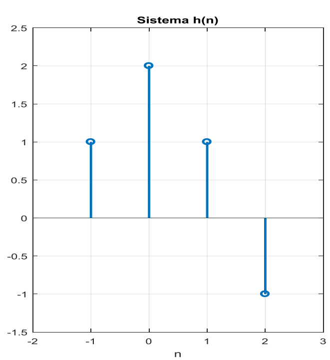
- **Ejemplo:** …
  - Solución:

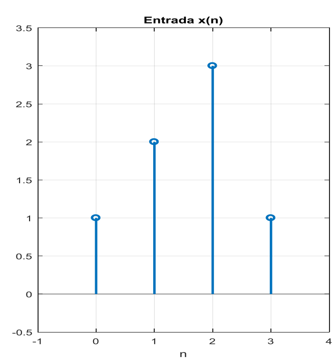
$$Long\ [y(n)] = long\ [x(n)] + long\ [h(n)] - 1 = 4 + 4 - 1 = 7$$

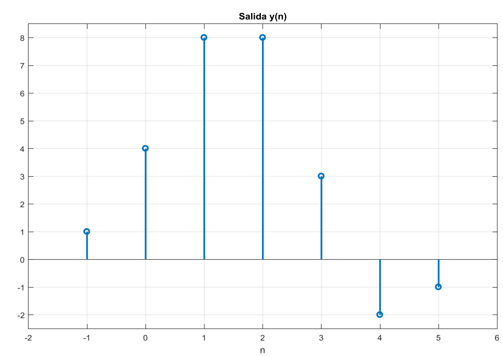
$$n_{inicio}[y(n)] = n_{inicio}[x(n)] + n_{inicio}[h(n)] = 0 + (-1) = -1$$

$$n_{final}[y(n)] = n_{final}[x(n)] + n_{final}[h(n)] = 3 + 2 = 5$$

$$y(n) = \{1\ \ \underline{4}\ \ 8\ \ 8\ \ 3\ \ -2\ \ -1\}$$







$$h(n) = \{1, \underset{\uparrow}{2}, 1, -1\}$$

$$x(n) = \{\underset{\uparrow}{1}, 2, 3, 1\}$$

- **Ejemplo 3:** Obtener por convolución la salida del sistema $h(n) = u(n-1)$ cuando la entrada es $x(n) = (^1/_3)^{-n}\, u(-n-1)$.

- **Solución:**
  - Aplicando la definición $y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$
  - Se tiene:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1/3)^{-k} u(-k-1)u(n-k-1)$$

  - Descomponiendo en dos partes la sumatoria, se llega a:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)h(n-k) + \sum_{k=-\infty}^{-1} x(k)h(n-k)$$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Análisis por Convolución …

- **Solución…**
  - Descomponiendo en dos partes la sumatoria, se llega a:

$$y(n) = y(n)_{k\geq 0} + y(n)_{k<0}$$

  - Analizando la sumatoria para $k \geq 0$

$$y(n)_{k\geq 0} = \sum_{k=0}^{\infty} (1/3)^{-k} u(-k-1) u(n-k-1)$$

  - Se observa que siempre $u(-k-1) = 0$, por lo tanto:

$$y(n)_{k\geq 0} = 0$$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Análisis por Convolución …

- **Solución…**
  - Analizando la sumatoria para $k < 0$

$$y(n)_{k<0} = \sum_{k=-\infty}^{-1} (1/3)^{-k} u(-k-1)u(n-k-1)$$

  - Se observa que siempre $u(-k-1) = 1$, por lo tanto:

$$y(n)_{k<0} = \sum_{k=-\infty}^{-1} (1/3)^{-k} \; u(n-k-1)$$

  - Haciendo $k = -k$, la expresión se reescribe como,

$$y(n)_{k<0} = \sum_{k=1}^{\infty} (1/3)^{k} \; u(n+k-1)$$

Análisis por Convolución …

- **Solución…**
  - Por lo tanto la respuesta total

$$y(n) = y(n)_{k\geq 0} + y(n)_{k<0}$$

  - se reduce a:

$$y(n) = \sum_{k=1}^{\infty} (1/3)^k \; u(n+k-1)$$

  - Aplicando el cambio de variables $m = n + k - 1$ se tiene:
    - $k = m + 1 - n$
    - $k = 1 \rightarrow m = n$
  - De donde,

$$y(n) = \sum_{m=n}^{\infty} (1/3)^{m+1-n} \; u(m)$$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

- **Solución…**

  - se reduce a:

$$y(n) = (1/3)^{-n+1} \sum_{m=n}^{\infty} (1/3)^m \; u(m)$$

  - La sumatoria se resuelve en dos partes: para $n \geq 0$ y $n < 0$.

$$y(n) = y(n)_{n\geq 0} + y(n)_{n<0}$$

- **Solución…**
  - **Análisis para $n \geq 0$**
    - Recordando que $\sum_{n=k}^{\infty} r^n = \frac{r^k}{1-r} \;\therefore\; |r| < 1$
    - Se llega a:

$$y(n)_{n\geq 0} = (1/3)^{-n+1} \sum_{m=n}^{\infty} (1/3)^m \; u(m) = \frac{1/3}{1-1/3}$$

$$y(n)_{n\geq 0} = \frac{1}{2}$$

- **Solución…**
  - **Análisis para $n < 0$**
    - Como n es negativo, el índice m de la sumatoria empieza con un valor negativo, pasa por cero y continua con valores positivos hasta infinito. Es decir,

$$y(n)_{n<0} = (1/3)^{-n+1}\left[\sum_{m=-|n|}^{-1}(1/3)^{m}\ u(m) + \sum_{m=0}^{\infty}(1/3)^{m}\ u(m)\right]$$

    - Luego,

$$y(n)_{n<0} = (1/3)^{-n+1}\sum_{m=0}^{\infty}(1/3)^{m}\ u(m)$$

Análisis por Convolución …

- **Solución…**

  - **Análisis para $n < 0$ …**
    - Luego,

$$y(n)_{n<0} = (1/3)^{-n+1} \sum_{m=0}^{\infty} (1/3)^m \; u(m)$$

    - Recordando que $\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r} \quad \therefore \quad |r| < 1$
    - Se llega a:

$$y(n)_{n<0} = (1/3)^{-n+1} \left[\frac{1}{1 - 1/3}\right] = \frac{3^n}{2}$$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

- **Solución…**
  - **Finalmente,**

$$y(n) = y(n)_{n\geq 0} + y(n)_{n<0}$$

$$y(n) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & n \geq 0 \\ \dfrac{3^n}{2} & n < 0 \end{cases}$$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Propiedades de la Convolución

- **Ejercicio**

  - Realizar una programa para calcular la convolución
  - Utilizar la definición $y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\, h(n-k)$
  - Los datos deben introducirse por ventanas de diálogo: *inputdlg()*
  - Visualizar en una misma gráfica
    - $x(n), h(n), y(n)$
    - Error entre la salida obtenida y la generada por la función *conv()*

Propiedades de la Convolución

Solución (Convolucion.m)

```
clc; clearvars; close all;
% Entrada h(n) y x(n)
dlg_title = 'Convolución';
prompt = { 'Entre h(n):','Entre n inicial:', 'Entre x(n):','Entre n inicial:'};
num_lines = 1;
defaultans = {'1/5 1/5 1/5 1/5 1/5 ', '0', ...
 '0.82  1  0.8  1.1  0.9   1.2  0.9  0.8  1.15  0.95  1.13  0.9  1.2  0.88  1.1', '-1'};
answer = inputdlg(prompt,dlg_title,num_lines,defaultans);

% Obtención de h(n)
h=str2num(answer{1});
nhi=str2num(answer{2});   %instante inicio
lh=length(h);   %longitud vector h
nhf=lh+nhi-1;      %instante final

% Obtención de x(n)
x=str2num(answer{3});
nxi=str2num(answer{4});
lx=length(x);
nxf=lx+nxi-1;
```

PSI Percepción y Sistemas Inteligentes

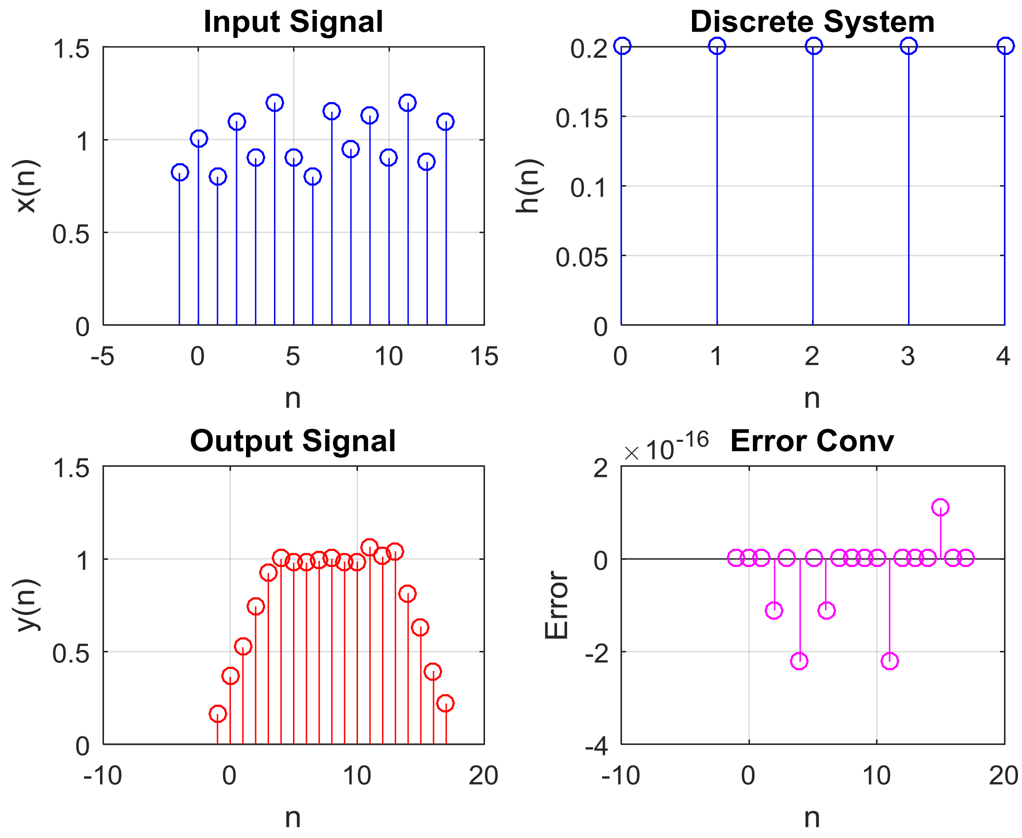
Solución (Convolucion.m) …

```
% Datos de salida y(n)
nyi=nhi+nxi;  % Instante inicio
nyf=nhf+nxf;  % Instante final

% Calculo de la convolución : y(n) = suma_k [x(k) h(n-k)]
y=zeros(1,lh+lx-1);
i=0;
for  n=nyi:nyf
   i=i+1;
   temp=0;
   for k= nxi: nxf
       kx=k-nxi+1; %ajuste del indice de x(n) para evitar salir rango de Matlab
       ind= n-k;
       if  ind >= nhi && ind <= nhf
         n_k= ind-nhi+1;  %ajuste del indice de h(n-k) para evitar salir rango de Matlab
         temp=temp+x(kx)*h(n_k);
       end
   end
   y(i)=temp;

end
```

Solución (Convolucion.m) …

```
% Error respecto a la función Matlab
ErrorConv=y-conv(x,h);

%Graficación
subplot(2,2,1); stem(nxi:nxf,x, 'b');title('Input
Signal');xlabel('n');ylabel('x(n)');grid on
subplot(2,2,2); stem(nhi:nhf,h,'b');title('Discrete
System');xlabel('n');ylabel('h(n)');grid on
subplot(2,2,3); stem(nyi:nyf,y, 'r');title('Output
Signal');xlabel('n');ylabel('y(n)');grid on
subplot(2,2,4); stem(nyi:nyf,ErrorConv, 'm'); title('Error
Conv');xlabel('n');ylabel('Error');grid on
```

- **Solución (Convolucion.m) …**



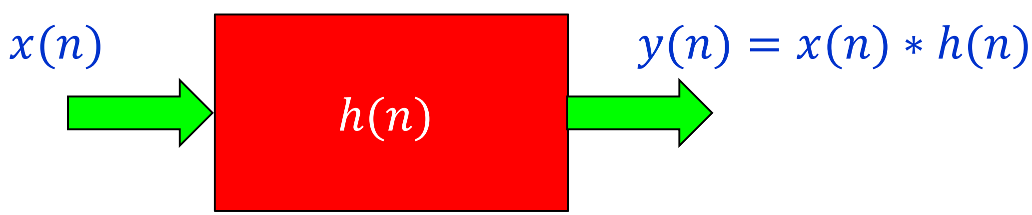
Propiedades de la Convolución

♦ Introducción:

Desde un punto de vista físico las **propiedades** pueden interpretarse como diferentes formas de **interconectar un sistema** para obtener el mismo resultado.

► **Notación:**

$$y(n) = x(n) * h(n) \equiv \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$$

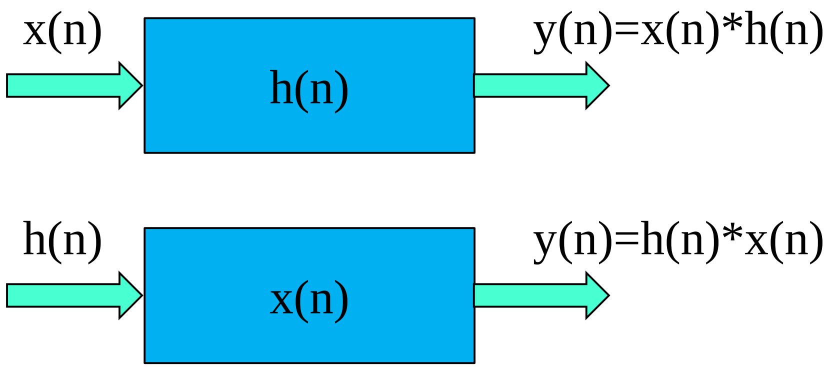


humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Propiedades de la Convolución…

Propiedad Conmutativa:

$$x(n) * h(n) = h(n) * x(n)$$

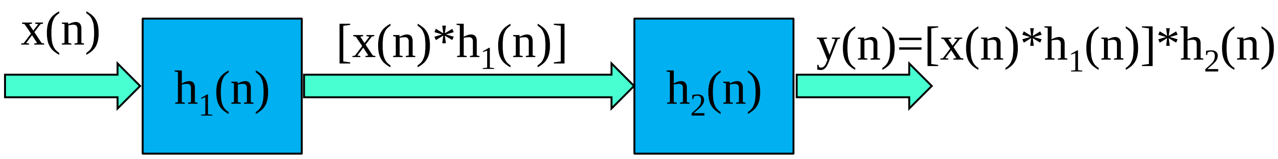


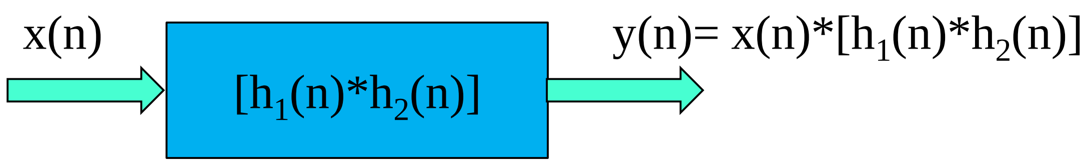
$$y(n) = h(n) * x(n) \equiv \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)\,x(n-k)$$

Propiedades de la Convolución

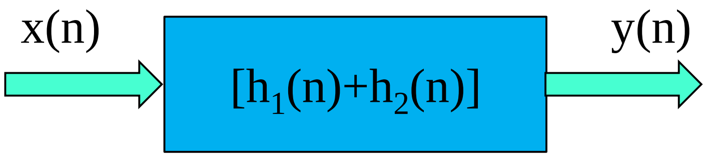
Propiedad Asociativa:

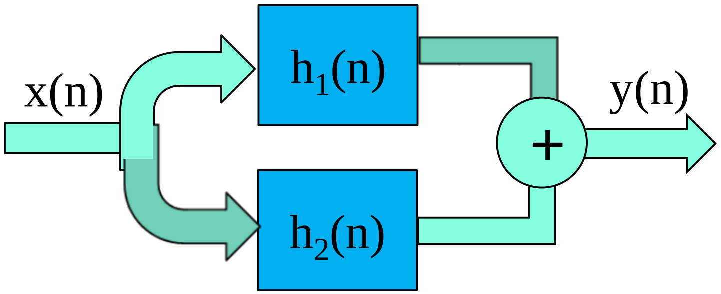
$$[x(n)*h_1(n)]*h_2(n)=x(n)*[h_1(n)*h_2(n)]$$





Propiedad Distributiva: $x(n)*[h_1(n)+h_2(n)] = x(n)*h_1(n) + x(n)*h_2(n)$





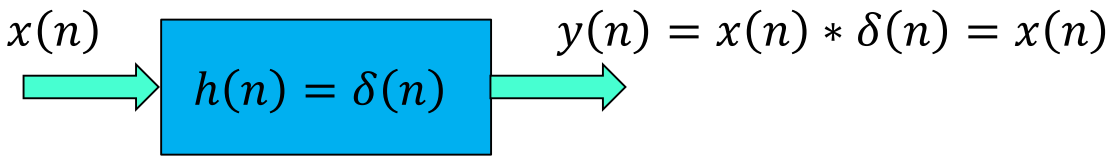
humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Propiedades de la Convolución

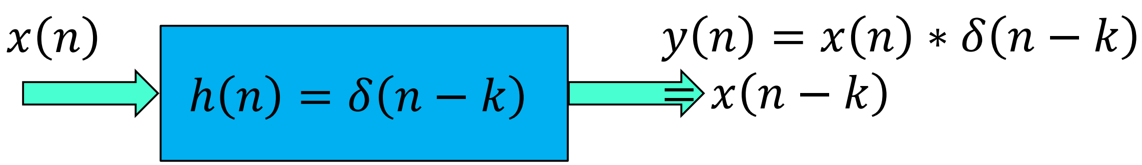
PSI Percepción y Sistemas Inteligentes

- **Sistemas $\boldsymbol{\delta(n)}$ y $\boldsymbol{\delta(n-k)}$**

$$x(n) * \delta(n) = x(n)$$



$$x(n) * \delta(n-k) = x(n-k)$$



humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Causalidad en sistemas LTI

Introducción

- Para sistemas LTI la causalidad se traduce en una determinada condición que ha de cumplir $h(n)$.

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

- **Introducción ..**
  - La convolución para un instante n_0 está dada por:

$$y(n_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n_0 - k)$$

ó,

$$y(n_0) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)x(n_0 - k) + \sum_{k=-\infty}^{-1} h(k)x(n_0 - k)$$

  - De donde,

$$y(n_0) \\ = [h(0)x(n_0) + h(1)x(n_0 - 1) + h(2)x(n_0 - 2) + \cdots] \\ + [\, h(-1)x(n_0 + 1) + h(-2)x(n_0 + 2) + h(-3)x(n_0 + 3) + \cdots]$$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Causalidad en sistemas LTI…

- Para que $y(n)$ dependa sólo de las muestras pasadas y presentes de la entrada, la respuesta impulsional debe satisfacer la condición:

$$h(n) = 0 \quad para \quad n < 0$$

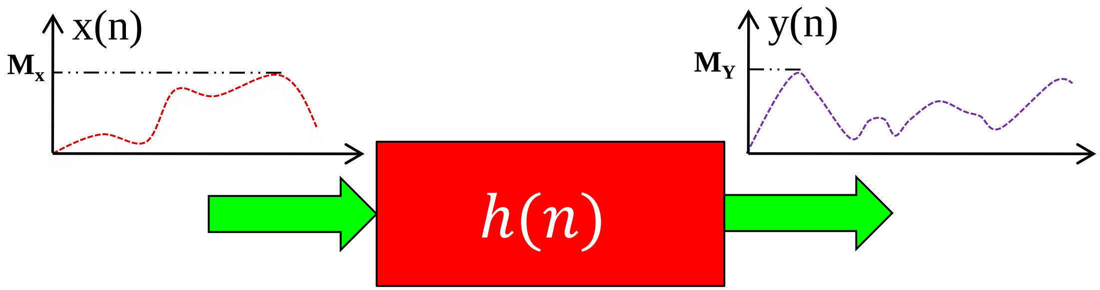
- Un sistema LTI es causal si y sólo si su respuesta impulsional es cero para valores negativos de n.

Causalidad en Sistemas LTI

- **Ejemplo**. Determinar si los siguientes sistemas representados por su respuesta impulsional son causales.
  - $h_1(n) = \{0 \quad 0 \quad \underline{0} \quad 1{,}2 \quad -1{,}5 \quad 1{,}2 \quad -1{,}5 \quad 1{,}2\}$
  - $h_2(n) = \{1 \quad 2 \quad 3 \quad 2 \quad \underline{1} \quad 2 \quad 3 \quad 2 \quad 1\}$
  - $h_3(n) = \{\underline{3{,}2} \quad 4{,}4 \quad -5{,}5 \quad 7{,}1 \quad 8{,}4 \quad \ldots\}$
  - $h_4(n) = \begin{cases} 2, & n\ par \\ -2, & n\ impar \end{cases}$
  - $h_5(n) = u(n)$
  - $h_6(n) = 0{,}5^n u(n)$
  - $h_7(n) = u(n+2) - u(n-2)$
  - $h_8(n) = \delta(n)$

Introducción

- Un sistema en reposo es estable (BIBO) si y sólo si su secuencia de salida $y(n)$ está acotada para cualquier entrada acotada $x(n)$.



- Si $x(n)$ está acotada, existe una constante M_x tal que: $|x(n)| \leq M_x < \infty$
- Si y(n) está acotada, existe una constante M_y tal que: $|y(n)| \leq M_y < \infty$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Estabilidad en Sistemas LTI

- **Introducción …**
  - Tomando el **valor absoluto** en ambos lados de la fórmula de convolución, se obtiene,

$$|y(n)| = \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)\, x(n-k) \right|$$

  - Puesto que el **valor absoluto** de una suma es **siempre menor o igual** que la suma de los valores absolutos de sus términos:

$$|y(n)| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)|\,|x(n-k)|$$

Estabilidad en Sistemas LTI

- **Introducción …**
  - Como la entrada es acotada $|x(n)| = M_x$, puede **sustituirse** el límite superior para $x(n)$ en la expresión anterior y obtener:

$$|y(n)| \leq M_x \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)|$$

  - Se puede concluir que la **salida está acotada** si la respuesta impulsional del sistema satisface la **condición**:

$$S_h \equiv \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| < \infty$$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Estabilidad en Sistemas LTI

- **Introducción …**

  - En consecuencia, un sistema LTI es estable si su respuesta impulsional es *absolutamente sumable*.
    - Condición necesaria y suficiente para garantizar la estabilidad del sistema.
    - Para sistemas causales, el **límite inferior** en la sumatoria de la condición de estabilidad es cero ($k = 0$).

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Estabilidad en Sistemas LTI

- **Ejemplo 1**. Determinar si los siguientes sistemas representados por su respuesta impulsional son estables.
  - $h_1(n) = \{0 \quad 0 \quad \underline{0} \quad 1{,}2 \quad -1{,}5 \quad 1{,}2 \quad -1{,}5 \quad 1{,}2\}$
  - $h_2(n) = \{1 \quad 2 \quad 3 \quad 2 \quad \underline{1} \quad 2 \quad 3 \quad 2 \quad 1\}$
  - $h_3(n) = \{\underline{3{,}2} \quad 4{,}4 \quad -5{,}5 \quad 7{,}1 \quad 8{,}4 \quad \ldots\}$
  - $h_4(n) = \begin{cases} 2, & n \; par \\ -2, & n \; impar \end{cases}$
  - $h_5(n) = u(n)$
  - $h_6(n) = 0{,}5^n u(n)$
  - $h_7(n) = u(n+2) - u(n-2)$
  - $h_8(n) = \delta(n)$

Ejemplo 2: Determinar el rango de valores del parámetro *a* para el cual el sistema LTI de respuesta $h(n) = a^n u(n)$ es estable.

Solución

- De la definición: $$S_h \equiv \sum_{k=0}^{\infty} |h(k)| < \infty$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a^k| = \sum_{k=0}^{\infty} |a|^k = 1 + |a| + |a|^2 + \dots$$

- Claramente, esta serie geométrica converge a:

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a|^k = \frac{1}{1-|a|}$$

siempre que $|a|<1$.

Por lo tanto, el sistema **es estable si $|a|<1$.**

► **Ejemplo 3:** Determinar el rango de valores de los parámetros ***a*** y ***b*** para el cual el sistema LTI de respuesta impulsional $h(n)$ **es estable**.

$$h(n) = \begin{cases} a^n, & n \geq 0 \\ b^n, & n < 0 \end{cases}$$

Solución

El sistema no es causal. Por lo tanto, de la condición de estabilidad se tiene:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| = \sum_{k=0}^{\infty} |a|^k + \sum_{k=-\infty}^{-1} |b|^k$$

Del ejemplo anterior, la primera suma converge **si** $|a| < 1$.

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Estabilidad en Sistemas LTI

Ejemplo 2: …

- La segunda suma puede escribirse como,

$$\sum_{k=-\infty}^{-1} |b|^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|b|^k} = \frac{1}{|b|}\left(1 + \frac{1}{|b|} + \frac{1}{|b|^2} + \ldots\right) = \frac{1/|b|}{1 - 1/|b|}$$

donde **1/|*b*| < 1** para que la serie converja.

- En consecuencia, el sistema es estable si **|*a*|<1 y |*b*|>1.**

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Introducción

- Los sistemas LTI quedan caracterizados completamente por su respuesta impulsional $h(n)$.

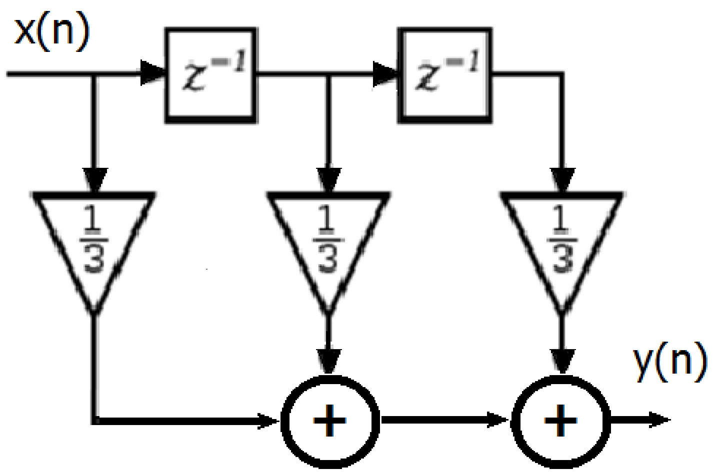
- Según la duración de $h(n)$ se clasifican en FIR e IIR.
  - FIR : Finite-duration Impulse Reponse
  - IIR: Infinite-duration Impulse Reponse

- La *duración* de $h(n)$ suministra información sobre las características del sistema.

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

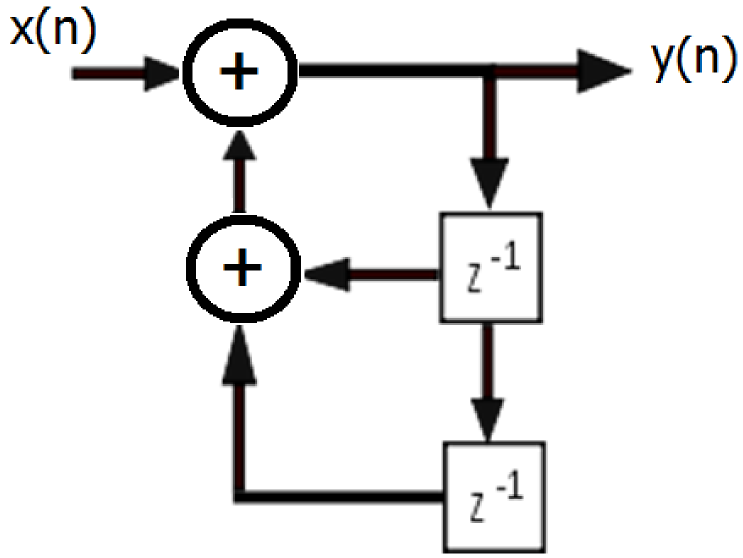
Sistema FIR

- $h(n)$ está definida en un intervalo finito de tiempo.
- Presenta una memoria finita, de longitud igual al intervalo de definición.



humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

- **Sistema IIR**
  - $h(n)$ considera la muestra presente y las pasadas de la señal de entrada para calcular la salida por *convolución*.
  - Presenta memoria infinita.



Sistemas Recursivos y No Recursivos

- **Sistemas Recursivos**
  - Sistema cuya salida $y(n)$ depende de los valores anteriores de la misma salida, $y(n-1), y(n-2), \dots$.

$$y(n) = F[y(n), y(n-1), \dots y(n-N), x(n), x(n-1), \dots x(n-M)]$$

  - **Ejemplos:**
    - $y(n) = 1.1y(n-1) - 2.3\,y(n-2) + x(n) - 1.5x(n-1)$
    - $y(n) = y(n-2) - 1.3\,y(n-4) + x(n)$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Sistemas Recursivos y No Recursivos

- **Sistemas NO-Recursivos**
  - Sistemas cuya salida $y(n)$ depende sólo de los valores presentes y/o pasados de la señal de entrada $x(n)$.

$$y(n) = F[x(n), x(n-1), \ldots x(n-M)]$$

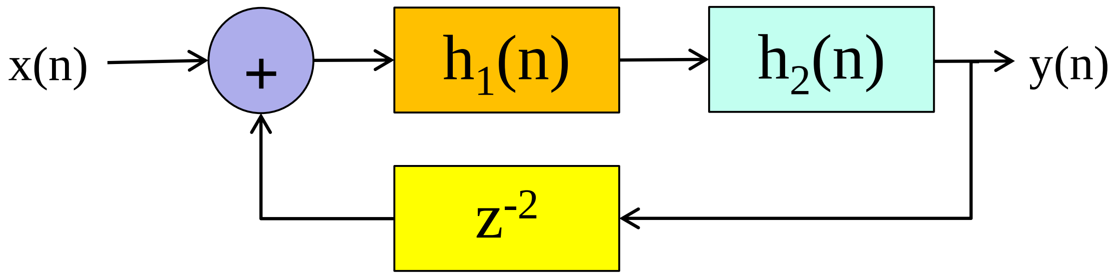
  - **Ejemplos:**
    - $y(n) = x(n) - 1.5\,x(n-1) - 2.3\,x(n-2)$
    - $y(n) = 0.33x(n+1) + 0.33x(n) + 0.33x(n-1)$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Sistemas Recursivos y No Recursivos

■ Observaciones:

- La implementación de muchos sistemas discretos prácticos requiere de la recursividad.
- Los sistemas recursivos **se diferencian** de los no recursivos por la presencia de **lazos de realimentación** y/o **atrasos entre la entrada y la salida**.



- La salida de un sistema **recursivo** debe calcularse **consecutivamente** mientras que la salida de un sistema **no recursivo** se puede calcular en **cualquier orden**.

Ejemplos

- **Ejemplo1: Obtener un sistema recursivo** a partir del sistema de promedio acumulado de una señal $x(n)$ en el intervalo $0 \leq k \leq n$.

$$y(n) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} x(k) \qquad n = 0,1,.....$$

Solución: Modificando la expresión anterior es posible obtener un sistema recursivo que requiere mucho menos memoria.

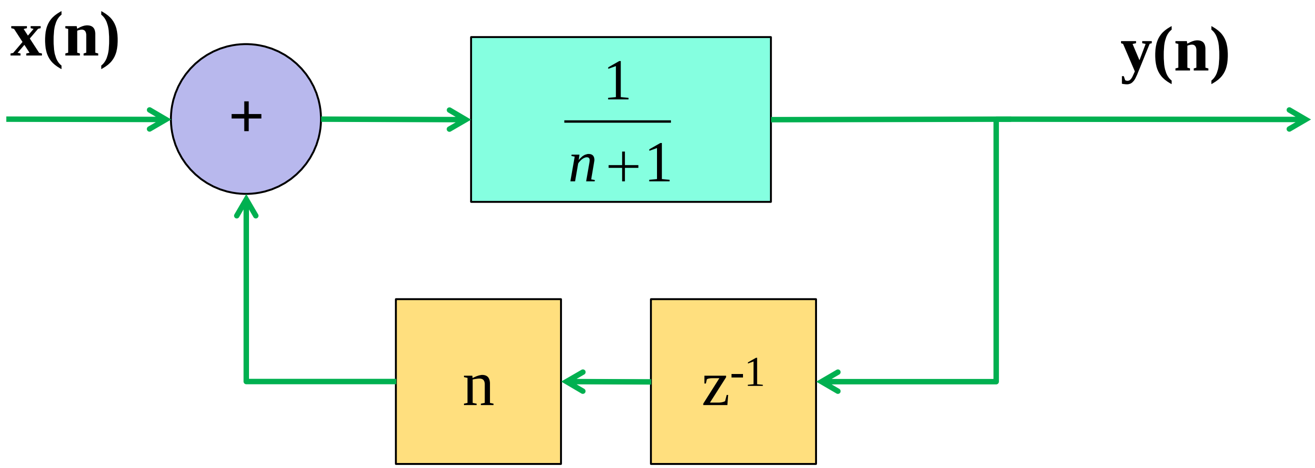
$$(n+1)y(n) = \sum_{k=0}^{n-1} x(k) + x(n) = n\,y(n-1) + x(n)$$

$$y(n) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} x(k) \qquad n = 0,1,.....$$

Ejemplo

Diagrama de Bloques

$$y(n) = \frac{n}{n+1} y(n-1) + \frac{1}{n+1} x(n)$$



- **Ejemplo 2:**
  - Para el siguiente sistema recursivo

$$y(n) = \frac{1}{2}\left(y(n-1) + \frac{x(n)}{y(n-1)}\right)$$

  - a) Especificar la operación que realiza
  - b) Obtener el diagrama de bloques
  - c) Realizar un programa

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Ejemplo 2

- **Solución a)**
  - El sistema recursivo

$$y(n) = \frac{1}{2}\left(y(n-1) + \frac{x(n)}{y(n-1)}\right)$$

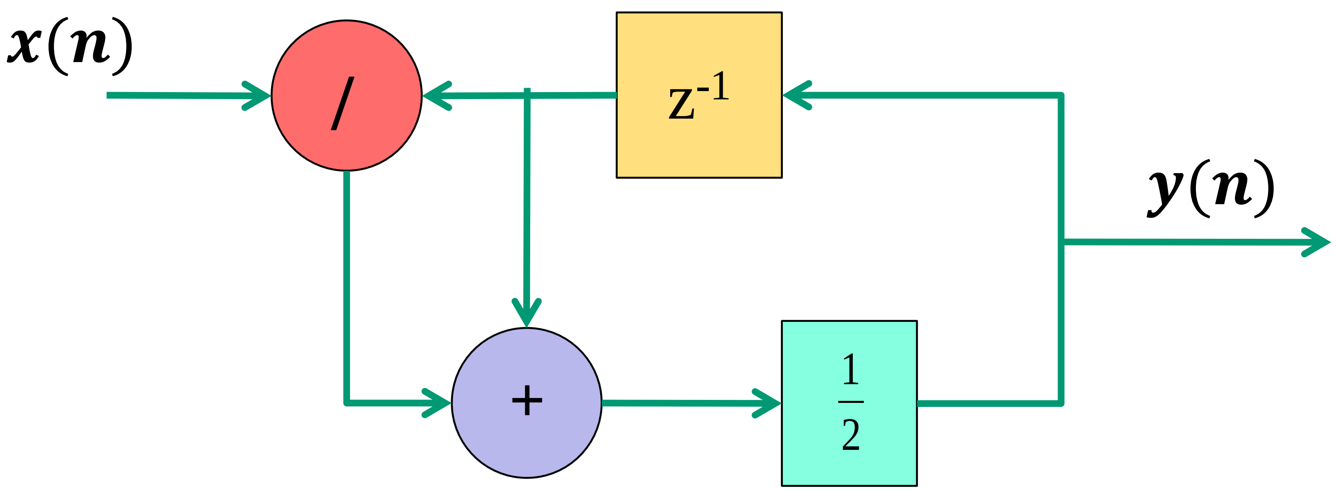
  - Calcula iterativamente la raíz cuadrada de un número positivo A.
    - $x(n) = A\,u(n)$
  - Debe entregarse una condición inicial
    - $y(-1)$ estimación de $\sqrt{A}$.
  - Verificación para $A = 2$
    - $x(n) = 2\,u(n)$ y $y(-1) = 1$
    - Resultado: $y(0) = 1.5,\;\; y(1) = 1.4166667,\;\; y(2) = 1.4142157$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Ejemplo 2

- **Solución b)**
  - El diagrama de bloques del sistema recursivo

$$y(n) = \frac{1}{2}\left(y(n-1) + \frac{x(n)}{y(n-1)}\right)$$



humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Ejemplo 2

Solución c)

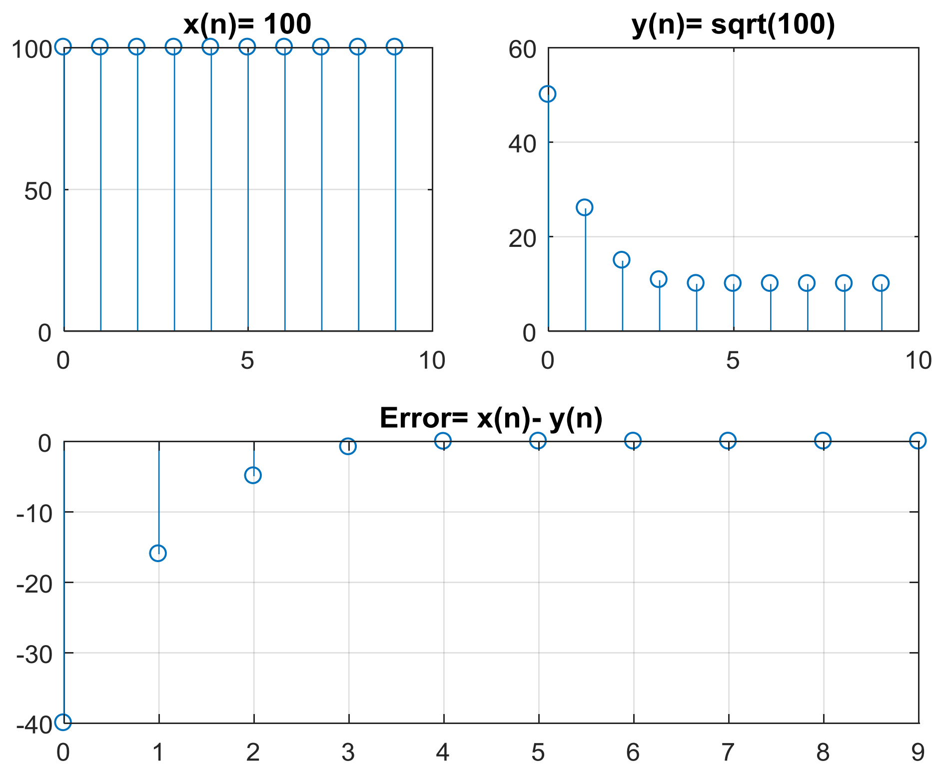
- Implementar en Matlab el sistema: $y(n) = \frac{1}{2}\left(y(n-1) + x(n)/y(n-1)\right)$

```
clc; clear all; close all;%Raiz2_iterativo.m
a=100.0; L=10;
x=a*ones(1,L);
if a==0
   errordlg('Error: a debe SER MAYOR A CERO','Valor Error');
end
% Valor de y(0)
y(m)=a/2 ; % Se asume y(-1)=a/2;
n=0; m=n+1;
for n=1:L-1
   m=n+1;
   y(m)=0.5*(y(m-1)+x(m)./y(m-1));
end
Err_raiz=sqrt(a)-y; %Error en cada iteración;
subplot(2,2,1); stem([0:L-1],x); title('x(n)=a u(n) '); grid on;
subplot(2,2,2); stem([0:L-1],y); title('y(n)= sqrt(a)');grid on;
subplot(2,2,3:4);stem([0:L-1],Err_raiz); title('Error= x(n)- y(n)');
grid on;
```


humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

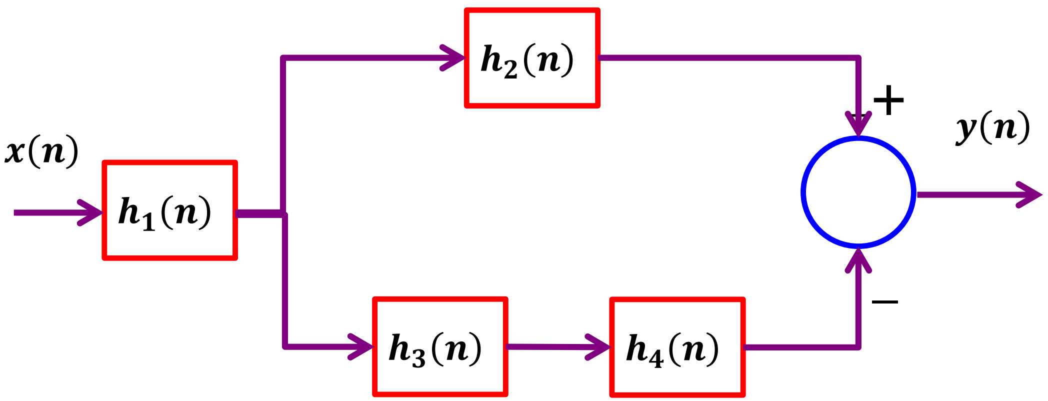
Ejemplo 2

- **Solución c) …**
  - Operación $\sqrt{100}$, $A > 1$



Ejemplo 3

- Dado el sistema representado por el diagrama de bloques



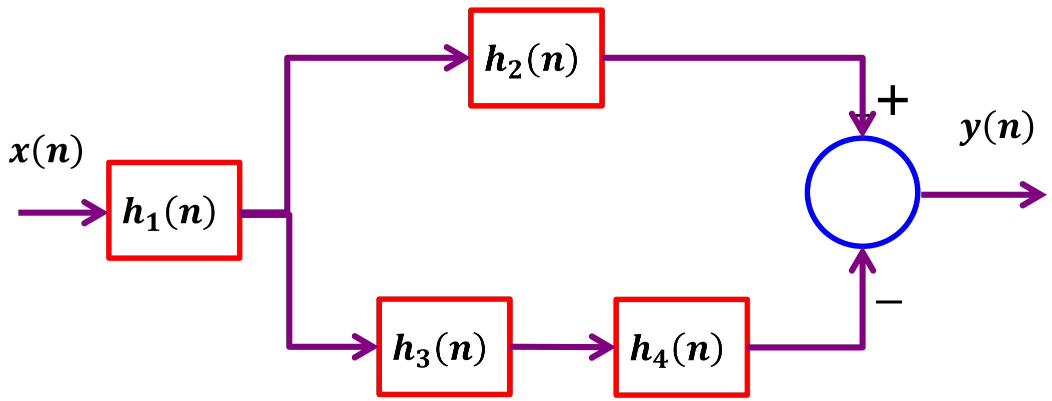
- a) Obtener la respuesta impulsional global $h(n)$, en términos de $h_1(n)$, $h_2(n)$, $h_3(n)$ y $h_4(n)$

Ejercicio..

- b) Obtener $h(n)$ cuando
  - $h_1(n) = \left\{\underline{\frac{1}{2}}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right\}$
  - $h_2(n) = h_3(n) = (n+1)u(n)$
  - $h_4(n) = \delta(n-2)$
- c) Obtener la respuesta $y(n)$ del sistema $h(n)$ definido en el punto b) estando en reposo y con entrada:
  - $x(n) = \delta(n+2) + 3\delta(n-1) - 4\delta(n-3)$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

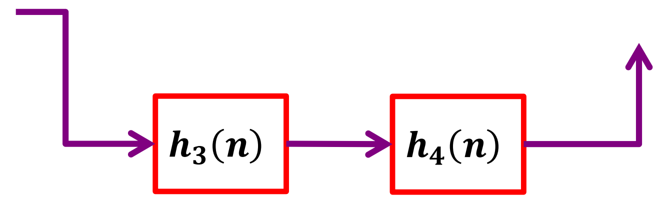
- **Solución**
  - a) Por álgebra de bloques :



- $h(n) = h_1(n) * h_2(n) - h_1(n) * h_3\ (n) * h_4(n)$
- $h(n) = h_1(n) * [h_2(n) - h_3(n) * h_4\ (n)]$

Solución ...

- b) Reemplazando los valores de $h_3(n)$ y $h_4(n)$ se tiene:



  - $h_A(n) = h_3(n) * h_4(n)$

$$h_A(n) = [(n+1)u(n)] * \delta(n-2)$$

  - Por las propiedades:

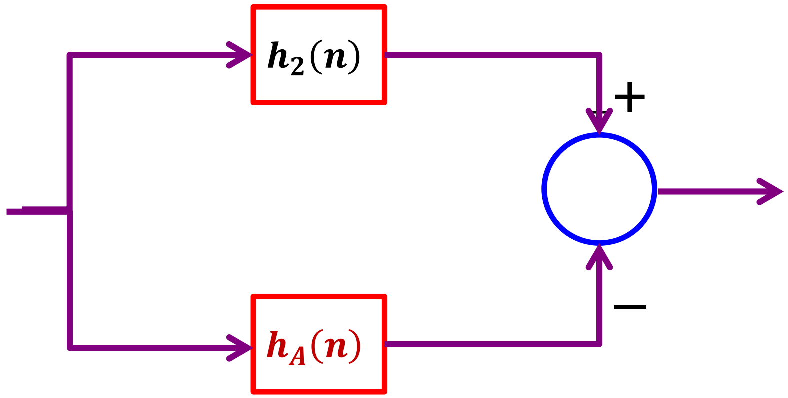
$$x(n) * \delta(n) = x(n) \quad \text{y} \quad x(n) * \delta(n-k) = x(n-k)$$

  - Se llega a:

$$h_A(n) = (n-1)u(n-2)$$

Solución ...

- b) Reemplazando: $h(n) = h_1(n) * [h_2(n) - h_A(n)]$
  - Calculando $h_B(n) = h_2(n) - h_A(n)$ se tiene:



$$h_B(n) = (n+1)u(n) - (n-1)u(n-2)$$
$$h_B(n) = n\,u(n) + u(n) - n\,u(n-2) + u(n-2)$$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Solución ...

- Se tiene: $h_B(n) = n\,u(n) + u(n) - n\,u(n-2) + u(n-2)$

- Dado que:

$$n\,u(n) - n\,u(n-2) = \delta(n-1)$$

$$u(n) + u(n-2) = \delta(n) + \delta(n-1) + 2\,u(n-2)$$

Se obtiene:

$$h_B(n) = \delta(n) + 2u(n-1)$$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

- **Solución ...**
  - b) Finalmente: $h(n) = h_1(n) * h_B(n)$

$$\longrightarrow \boxed{h_1(n)} \longrightarrow \boxed{h_B(n)} \longrightarrow$$

  - Reescribiendo $h_1(n) = \frac{1}{2}\,\delta(n) + \frac{1}{4}\,\delta(n-1) + \frac{1}{2}\,\delta(n-2)$
  - Luego,

$$h(n) = \left[\frac{1}{2}\,\delta(n) + \frac{1}{4}\,\delta(n-1) + \frac{1}{2}\,\delta(n-2)\right] * [\delta(n) + 2u(n-1)]$$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Solución ...

- b) Utilizando: $x(n) * \delta(n) = x(n)$ y $x(n) * \delta(n-k) = x(n-k)$

  - Se llega a:

$$h(n) = \frac{1}{2}\,\delta(n) + \frac{1}{4}\,\delta(n-1) + \frac{1}{2}\,\delta(n-2) + u(n-1) + \frac{1}{2}u(n-2) + u(n-3)$$

  - Puesto que:

$$\frac{1}{4}\,\delta(n-1) + u(n-1) = \frac{5}{4}\,\delta(n-1) + u(n-2)$$

  - Luego

$$h(n) = \frac{1}{2}\,\delta(n) + \frac{5}{4}\,\delta(n-1) + u(n-2) + \frac{1}{2}\,\delta(n-2) + \frac{1}{2}u(n-2) + u(n-3)$$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Solución ...

- b) Agrupando términos

$$h(n) = \frac{1}{2}\,\delta(n) + \frac{5}{4}\,\delta(n-1) + \frac{1}{2}\,\delta(n-2) + \frac{3}{2}u(n-2) + u(n-3)$$

- Y repitiendo el proceso, se llega a:

$$h(n) = \frac{1}{2}\,\delta(n) + \frac{5}{4}\,\delta(n-1) + 2\delta(n-2) + \frac{5}{2}u(n-3)$$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Solución ...

- c) La respuesta $y(n)$ del sistema definido en el punto b) estando en reposo y con entrada:

$$x(n) = \delta(n+2) + 3\delta(n-1) - 4\delta(n-3)$$

- Se obtiene como $y(n) = h(n) * x(n)$

$$y(n) = \left[\frac{1}{2}\,\delta(n) + \frac{5}{4}\,\delta(n-1) + 2\delta(n-2) + \frac{5}{2}u(n-3)\right] * [\delta(n+2) + 3\delta(n-1) - 4\delta(n-3)]$$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Solución ...

- c) Utilizando las propiedades:

$$x(n) * \delta(n) = x(n) \quad \text{y} \quad x(n) * \delta(n-k) = x(n-k)$$

en la expresión

$$y(n) = \left[\frac{1}{2}\,\delta(n) + \frac{5}{4}\,\delta(n-1) + 2\delta(n-2) + \frac{5}{2}u(n-3)\right] * \left[\delta(n+2) + 3\delta(n-1) - 4\delta(n-3)\right]$$

Solución ...

- c) se llega a:

$$y(n) = \frac{1}{2}\,\delta(n+2) + \frac{5}{4}\,\delta(n+1) + 2\delta(n) + 4\delta(n-1) + \frac{25}{4}\,\delta(n-2) + \frac{13}{2}\,\delta(n-3) + 5\delta(n-4) + 2\delta(n-5)$$

De donde:

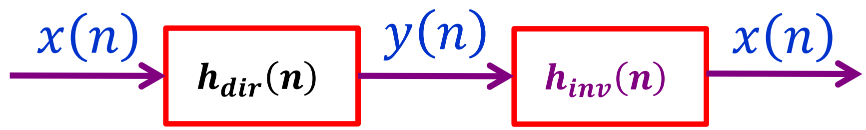
- $y(n) = \left\{\frac{1}{2},\ \frac{5}{4}, \underline{2},\ 4,\ \frac{25}{4},\ \frac{13}{2},\ \ 5,\ \ 2\right\}$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

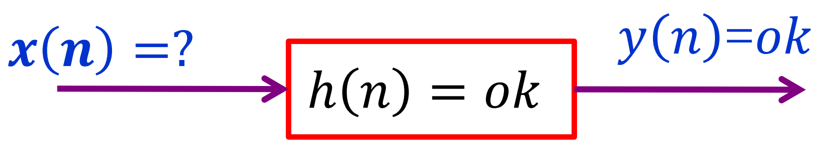
Deconvolución

Introducción

- Si se conocen la respuesta impulsional $h(n)$ y la respuesta $y(n)$ para $n \geq 0$ de un sistema causal, es posible recuperar recursivamente $x(n)$ *sin determinar* el sistema inverso.



- El proceso para obtener $x(n)$ a partir de la convolución se denomina **deconvolución**.



Deconvolución…

- **Procedimiento**
  - La salida está dada por

$$y(n) = \sum_{k=0}^{n} x(k)h(n-k) \ , \qquad n \geq 0$$

  - Para $n = 0 \quad \rightarrow \quad y(0) = x(0)h(0) \ \Longrightarrow \ x(0) = y(0)/h(0)$
  - Para $n \geq 1$
    - Se reescribe la convolución

$$y(n) = \sum_{k=0}^{n-1} x(k)h(n-k) + x(n)h(n-n)$$

    - Y despeja $x(n)$:

$$x(n) = \frac{y(n) - \sum_{k=0}^{n-1} x(k)h(n-k)}{h(0)}, \quad n \geq 1 \ , \ \ h(0) \neq 0$$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Deconvolución…

- **Ejemplo 1**
  - Encontrar $x(n)$ para el sistema causal con $h(n) = \{\underline{1}\ \ 2\ \ 0\ \ -1\}$ y salida $y(n) = \{\underline{-2}\ \ -4\ \ 1\ \ 3\ \ 1\ \ 5\ \ 1\ \ -3\}$.
- **Solución**
  - $x(0) = y(0)/h(0) = -2/1 = -2$
  - $x(n) = \frac{y(n) - \sum_{k=0}^{n-1} x(k)h(n-k)}{h(0)}, \quad n \geq 1$
  - $x(1) = \frac{y(1) - \sum_{k=0}^{0} x(k)h(1-k)}{h(0)} = \frac{y(1) - x(0)h(1)}{h(0)} = \frac{-4 - (-2)(2)}{1} = 0$
  - $x(2) = \frac{y(2) - \sum_{k=0}^{1} x(k)h(2-k)}{h(0)} = \frac{y(2) - [x(0)h(2) + x(1)h(1)]}{h(0)} = 1$
  - $x(3) = \frac{y(3) - \sum_{k=0}^{2} x(k)h(3-k)}{h(0)} = -1$
  - $x(4) = 3$

Deconvolución…

- **Ejemplo 2**
  - Realizar un programa en Matlab para realizar la deconvolución.
  - Encontrar $x(n)$ para el sistema causal con $h(n) = \{\underline{1}\ \ 2\ \ 3\ \ -2\ \ -1\}$ y salida

$$y(n) = \{\underline{-3}\quad -8\quad -14\quad -2\quad 5\quad 8\quad 11\quad 10\quad 4\quad -8\quad -3\}.$$

- **Solución**

```
h=[1  2  3  -2  -1 ];
y =[-3 -8  -14 -2  5 8 11 10 4 -8 -3];
x=Deconvolucion(h,y)
```

x =   -3   -2   -1   0   1   2   3

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Deconvolución…


```
function [ x ] = Deconvolucion( h,y)

 if h(1)~=0.0
  x(1)=y(1)/h(1);
  ly=length(y); lh=length(h);
  lx=ly-lh+1;
  for n=1:lx-1
    temp=0;
    for k=0: n-1
      m=n-k+1; %verificar tamaño de h
      if m<=lh
        temp=temp+ x(k+1)*h(m);
      end
    end
    x(n+1)=(y(n+1)-temp)/h(1);
  end
 else
  msgbox('división por cero: h(0)=0','Deconvolucion','warn')
 end
end
```

Introducción

- Si se conocen la entrada causal $x(n)$ y la respuesta $y(n)$ para $n \geq 0$ de un sistema causal LTI, es posible recuperar recursivamente $h(n)$

$$x(n) = ok \longrightarrow \boxed{\boldsymbol{h(n)} = ?} \longrightarrow y(n) = ok$$

- El proceso para obtener $h(n)$ a partir de la convolución se denomina **identificación** del sistema.

- **Procedimiento**
  - La salida está dada por

$$y(n) = \sum_{k=0}^{n} x(k)h(n-k) \,, \qquad n \geq 0$$

  - Para $n = 0 \quad \rightarrow \quad y(0) = x(0)h(0) \implies h(0) = y(0)/x(0)$
  - Para $n \geq 1$
    - Se reescribe la convolución

$$y(n) = x(0)h(n-0) + \sum_{k=1}^{n} x(k)h(n-k)$$

    - Y despeja $h(n)$:

$$h(n) = \frac{y(n)-\sum_{k=1}^{n} x(k)h(n-k)}{x(0)}, \quad n \geq 1 \,, \quad x(0) \neq 0$$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

- **Ejemplo**
  - Encontrar $h(n)$ para el sistema LTI causal con

$$y(n) = \{\underline{-2} \;\; -4 \;\; 1 \;\; 3 \;\; 1 \;\; 5 \;\; 1 \;\; -3\} \text{ y } x(n) = \{\underline{-2} \;\; 0 \;\; 1 \;\; -1 \;\; 3\}$$

- **Solución**
  - $h(0) = y(0)/x(0) = -2/-2 = 1$
  - $h(n) = \frac{y(n) - \sum_{k=1}^{n} x(k)h(n-k)}{x(0)}, \quad n \geq 1$
  - $h(1) = \frac{y(1) - \sum_{k=1}^{1} x(k)h(1-k)}{x(0)} = \frac{y(1) - x(1)h(0)}{x(0)} = \frac{-4 - (0)(1)}{-2} = 2$
  - $h(2) = \frac{y(2) - \sum_{k=1}^{2} x(k)h(2-k)}{x(0)} = \frac{y(2) - [x(1)h(1) + x(2)h(0)]}{h(0)} = 0$
  - $h(3) = \frac{y(3) - \sum_{k=1}^{3} x(k)h(3-k)}{x(0)} = -1$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

- **Ejemplo 2**
  - Realizar un programa en Matlab para realizar la identificación.
  - Encontrar $h(n)$ para el sistema LTI causal con

$$x(n) = \{3\ \ -4\ \ 4\ -3\ \ 5\ -2\ \ \}$$

$$y(n) = \{-3 \quad 7 \quad 7 \quad -10 \quad 5 \quad 0 \quad 16 \quad -2 \quad -7 \quad 2\}.$$

- **Solución**

```
x=[3  -4  4 -3  5 -2 ];
y=[-3 7  7 -10 5 0  16  -2   -7  2];
h=IdentificacionSist(x,y)
```

h = -1 1 5 1 -1

```
function [ h ] = IdentificacionSist( x, y )
 if x(1)~=0.0
   h(1)=y(1)/x(1);
   lx=length(x); %longitud de y(n)
   ly=length(y); %longitud de x(n)
   lh=ly-lx+1; %longitud de la señal h(n)

   for n=1:lh-1
      temp=0;
      for k=1:n
        m=n-k+1; %verificar tamaño de h
        if k<lx
          temp=temp+ x(k+1)*h(m);
        end
      end
      h(n+1)=(y(n+1)-temp)/x(1);
   end
 else
   msgbox('división por cero: x(0)=0','Identificacion','warn')
 end
end
```