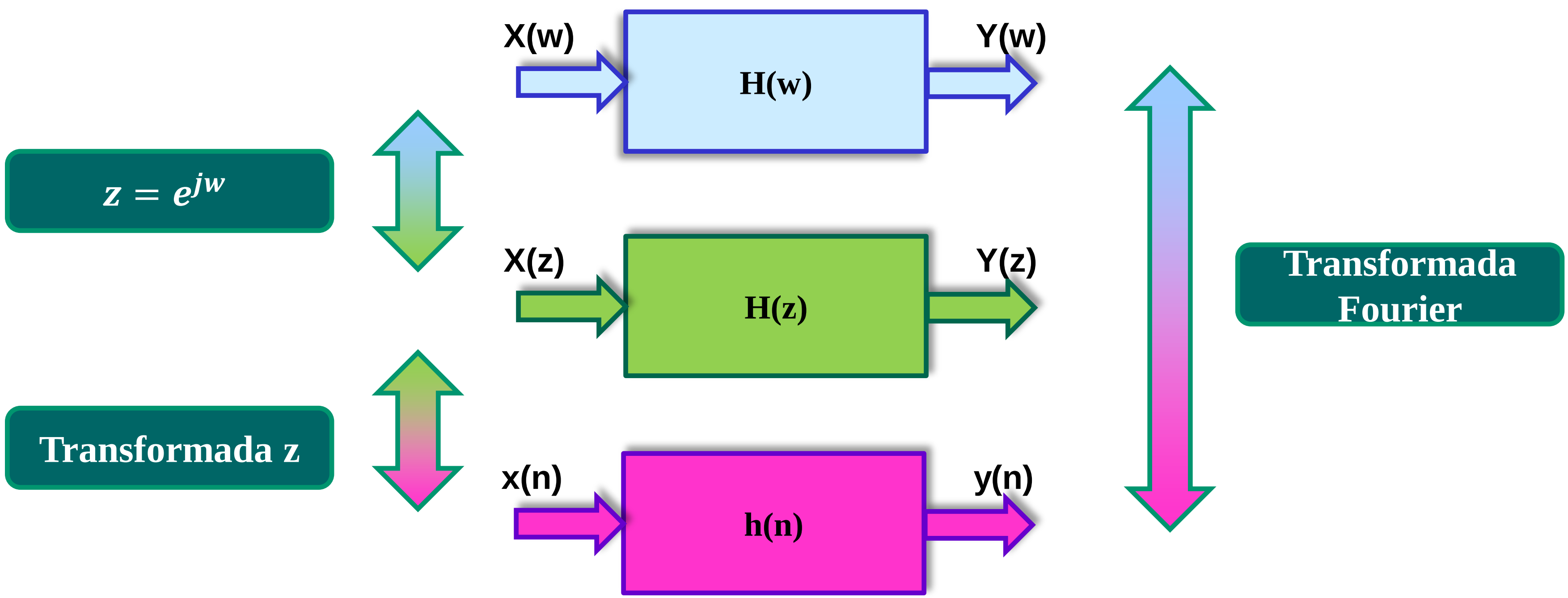
Análisis Frecuencial de Sistemas LTI

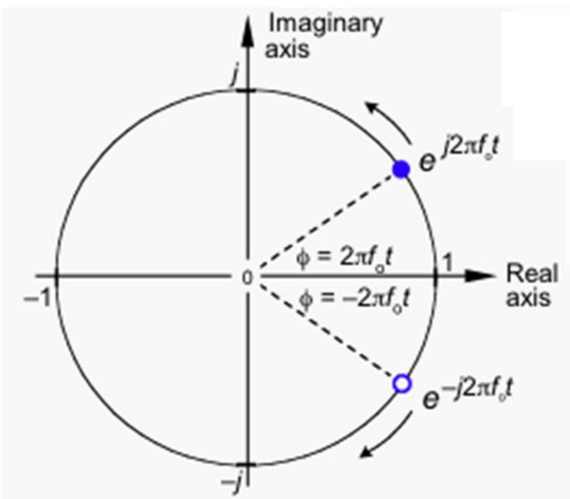
Introducción

- Los sistemas LTI se describen mediante la *respuesta en frecuencia* *H(w)*, la cual es la transformada de Fourier de *h*(*n*).

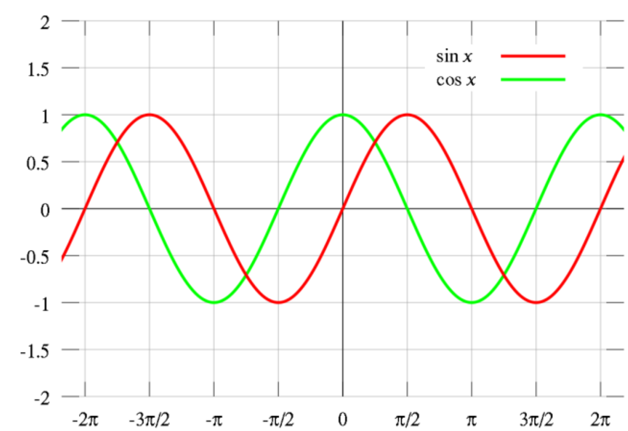


Introducción …

- La caracterización de sistemas LTI utiliza señales de excitación exponenciales complejas o sinusoidales.



$$x(n) = Ae^{jwn}$$
$$x(n) = A\,sen(wn + \theta)$$
$$x(n) = A\cos(wn + \phi)$$



humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

- **Introducción…**

  - La respuesta en frecuencia *H(w)* de un sistema LTI permite determinar las respuestas transitoria y permanente cuando es excitado con cualquier combinación lineal de sinusoides o exponenciales complejas.

  - Las señales periódicas y aperiódicas pueden descomponerse en sumas ponderada de exponenciales complejas armónicamente relacionadas, por lo tanto es posible determinar la respuesta de un sistema LTI a esta clase de señales.

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

- **Respuesta a Señales Exponenciales Complejas**

  - La respuesta en el tiempo de un sistema LTI en reposo a una entrada arbitraria *x*(*n*) está dada por la convolución,

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) \qquad -\infty < n < \infty$$

  - Para obtener una caracterización en el dominio frecuencial se excita el sistema con una exponencial compleja

$$x(n) = Ae^{jwn} \qquad -\infty < n < \infty$$

donde A es la amplitud y *w* es cualquier frecuencia arbitraria en el intervalo [-π, π].

Respuesta a Exponenciales Complejas…

- Al reemplazar $x(n)$ =A e $^{j\,w\,n}$ en la convolución se obtiene,

$$y(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h(k)\left[A\ e^{jw(n-k)}\right]=A\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty}h(k)\,e^{-jwk}\right]e^{jwn}$$

en donde el término entre corchetes es la T.F. de la respuesta impulsional, $h(k)$, del sistema. De lo anterior,

$$H(w)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h(k)e^{-jwk}$$

Es claro que la función $H(w)$ existe si el sistema es estable BIBO; es decir, si

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left|h(k)\right|<\infty$$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Respuesta a Exponenciales Complejas…

- Por lo tanto, la respuesta del sistema a la exponencial compleja es,

$$y(n) = A\, H(w)\, e^{j\,w\,n}$$

- La respuesta también es una exponencial compleja de igual frecuencia que $x(n)$, pero modificada por el factor multiplicativo $H(w)$.

- **Autofunciones y Autovalores**
  - Por este comportamiento la señal exponencial $x(n)$ =A e $^{j\,w\,n}$ recibe el nombre de *autofunción* del sistema,
  - El factor multiplicativo $H(w)$ evaluado en la frecuencia de la señal de entrada se denomina *autovalor* del sistema.

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Respuesta a Exponenciales Complejas…

- **Ejemplo 1**. Determinar la secuencia de salida del sistema

$$h(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$$

ante la entrada $\quad x(n) = Ae^{j\pi n/2} \quad -\infty < n < \infty$

TIPS: Recordar que:

$$\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1-a^{n-1}}{1-a} \qquad y \qquad \sum_{k=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a} \qquad |a| < 1$$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

- **Solución**
  - La transformada de Fourier de *h* (*n*) está dada por,

$$H(w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) e^{-jwn} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} e^{-jw}}$$

  - Para $w = \pi/2$:

$$H\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{1 + j\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}} e^{-j0.46}$$

  - Por lo tanto:

$$y(n) = A\left(\frac{2}{\sqrt{5}} e^{-j0.46}\right) e^{j\pi n/2} = \frac{2A}{\sqrt{5}} e^{j(\pi n/2 - 0.46)} \qquad -\infty < n < \infty$$

    - El sistema escala por $2/\sqrt{5}$ y desplaza por $-26.6°$ (0.46 rad) la señal de entrada.

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

- **Respuesta a Exponenciales Complejas…**

  - **Ejemplo 2.** Determine la salida del sistema del ejemplo 1, pero para la entrada (cambio en la frecuencia):

$$x(n) = Ae^{j\pi n} \qquad -\infty < n < \infty$$

  - **Solución**. Mismo procedimiento, pero se evalúa $H(w)$ en $w = \pi$,

$$H(\pi) = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}e^{-j\pi}} = \frac{2}{3}$$

  - Con lo que se obtiene: $y(n) = \frac{2}{3}Ae^{j\pi n}$

PSI Percepción y Sistemas Inteligentes

- **Ejemplo 3.** Dibujar la magnitud y fase de $H(w)$ para el sistema de *media móvil* de tres puntos,

$$y(n)=\frac{1}{3}\left[x(n+1)+x(n)+x(n-1)\right]$$

- **Solución**
  - Obtener $h(n)$ y transformar.
  - $h(n)$ puede obtenerse por inspeccíón directa de la definición de la convolución,

$$y(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h(k)x(n-k) \qquad -\infty<n<\infty$$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Solución…

- $h(n) = \{1/3\ ,\ \underline{1/3}\ 1/3\}$

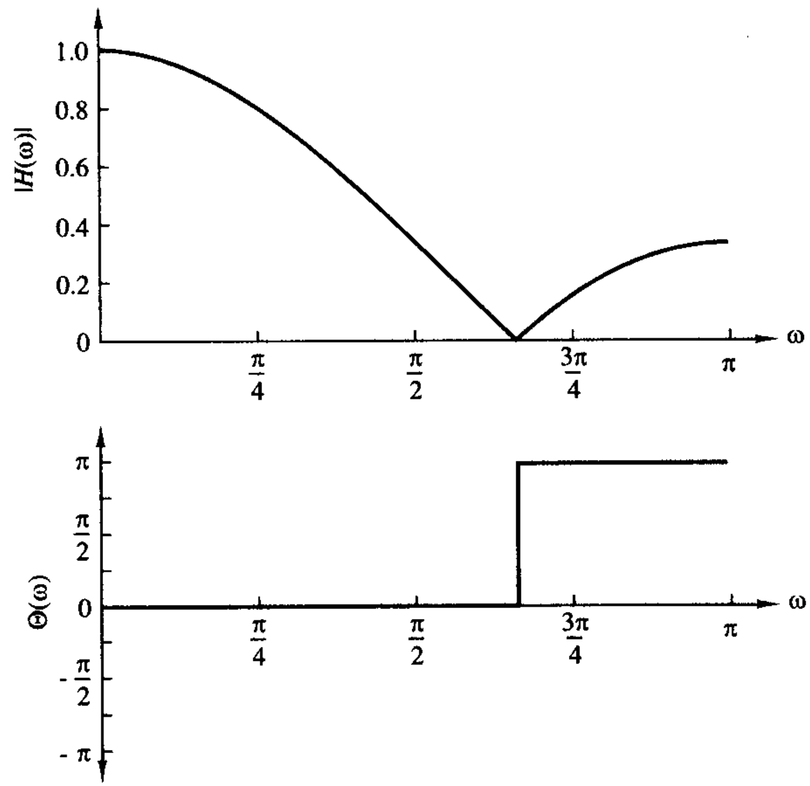
- Su transformada de Fourier es,

$$H(w) = \frac{1}{3}\left(e^{jw} + 1 + e^{-jw}\right) = \frac{1}{3}(1 + 2\cos w)$$

- La magnitud y fase están dados por,

$$|H(w)| = \frac{1}{3}\,|1 + 2\cos w|$$

$$\Theta(w) = \begin{cases} 0, & 0 \le w \le 2\pi/3 \\ \pi, & 2\pi/3 < w \le \pi \end{cases}$$



Respuesta a Señales Sinusoidales

- La respuesta de un sistema LTI a una sinusoide es parecida a la respuesta generada por una exponencial compleja debido a:
  - La magnitud $|H(w)|$ y fase $\Theta(w)$ de $H(w)$, **son simétricas**.
  - Una **sinusoide** puede expresarse como la **sumatoria** de **dos exponenciales complejas** conjugadas.

- **Respuesta a Señales Sinusoidales…**

  - **Primero**: con entradas exponenciales se tiene,

$$entrada \quad x_1(n) = Ae^{jwn}$$

$$salida \quad y_1(n) = A|H(w)|\, e^{j\Theta(w)}\, e^{jwn}$$

$$entrada \quad x_2(n) = Ae^{-jwn}$$

$$salida \quad y_2(n) = A|H(-w)|\, e^{j\Theta(-w)}\, e^{-jwn}$$

$$= A|H(w)|\, e^{-j\Theta(w)}\, e^{-jwn}$$

Respuesta a Señales Sinusoidales…

- **Segundo**: dos exponenciales complejas igual a una sinusoide:
- **Senoidal:**

$$x(n) = \frac{1}{2j}\left[x_1(n) - x_2(n)\right] = A \operatorname{sen} wn$$

$$y(n) = \frac{1}{2j}\left[y_1(n) - y_2(n)\right]$$

$$= A\left|H(w)\right| \operatorname{sen}\left[wn + \Theta(w)\right]$$

- **Cosenoidal:**

$$x(n) = \frac{1}{2}\left[x_1(n) + x_2(n)\right] = A\cos wn$$

$$y(n) = \frac{1}{2}\left[y_1(n) + y_2(n)\right]$$

$$= A\left|H(w)\right| \cos\left[wn + \Theta(w)\right]$$

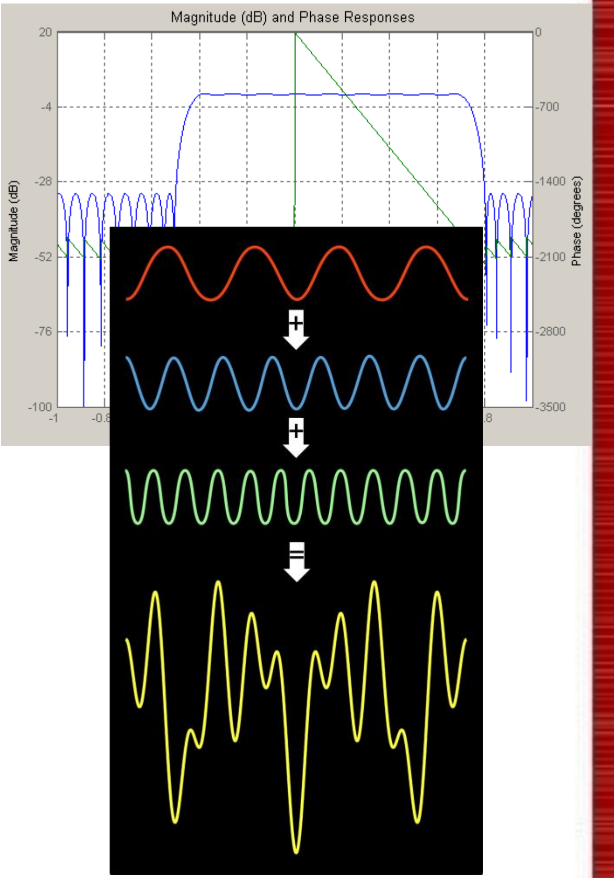
humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

- **Respuesta a Señales Sinusoidales…**

  - **Conclusión**

    - El **conocimiento** de ***H*(*w*)** permite determinar la **respuesta** del sistema ante **cualquier entrada sinusoidal.**

    - Si la **entrada** puede descomponerse en **sinusoides**, puede usarse el principio de **superposición** de los **sistemas lineales** para determinar la **salida** ante estas entradas.



humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

- **Respuesta a Señales Sinusoidales…**

- **Ejemplo 1.** Determinar la respuesta del sistema

$$h(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$$

ante la entrada

$$x(n) = 10 - 5\,\mathrm{sen}\left(n\frac{\pi}{2}\right) + 20\cos(n\pi) \qquad -\infty < n < \infty$$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

PSI Percepción y Sistemas Inteligentes

- **Solución**
  - La respuesta en frecuencia del sistema es,

$$H(w)=\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-jw}}$$

  - Primer término de $x(n)$ $\Rightarrow$ $w=0$,

$$H(0)=\frac{1}{1-1/2}=2$$

  - Segundo término de $x(n)$ $\Rightarrow$ $w=\pi/2$,

$$H\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{2}}}=\frac{2}{\sqrt{5}}e^{-j0.46}$$

  - Tercer término de $x(n)$ $\Rightarrow$ $w=\pi$,

$$H(\pi)=\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\pi}}=\frac{2}{3}$$

- **Solución…**

  - Para la entrada

$$x(n)=10-5\ \mathrm{sen}\left(n\frac{\pi}{2}\right)+20\ \cos\left(n\pi\right) \qquad -\infty < n < \infty$$

  - La respuesta del sistema es,

$$y(n)=20-\frac{10}{\sqrt{5}}\ \mathrm{sen}\left(n\frac{\pi}{2}-0.46\right)+\frac{40}{3}\ \cos\left(n\pi\right) \qquad -\infty < n < \infty$$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Ejemplo 2

- Para el sistema,

$$y(n) = a\,y(n-1) + b\,x(n) \qquad 0 < a < 1$$

Determine:

a) La magnitud y la fase de la respuesta en frecuencia $H(w)$ del sistema.

b) El parámetro b de manera que el valor máximo de $|H(w)|$ sea la unidad.

c) La salida ante la entrada:

$$x(n) = 5 + 12\ \mathrm{sen}\left(n\frac{\pi}{2}\right) - 20\cos\left(n\pi + \frac{\pi}{4}\right) \qquad -\infty < n < \infty$$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

- **Solución a)**
  - Calcular la Respuesta en Frecuencia:
    - **Método Temporal:**
      - Se calcula $h(n)$ a partir de la ecuación homogénea haciendo condiciones iniciales cero y $x(n) = u(n)$.
      - Se obtiene $H(w)$ aplicando la T. Fourier a $h(n)$
      - Respuesta

$$h(n) = b\,a^n\,u(n)$$

    - **Método Frecuencial:**
      - Se calcula H(z) aplicando T.z. a la ecuación de diferencia.
      - Se obtiene H(w) reemplazando $z = e^{jw}$ en H(z)
      - Respuesta

$$H(z) = \frac{b}{1 - az^{-1}}$$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

- **Solución a)…**

  - Se observa que h(n) es estable BIBO debido a que 0<a<1, por lo tanto su T.F existe.

  - La respuesta en frecuencia es:

$$H(w) = \frac{b}{1 - a\,e^{-jw}}$$

$$|H(w)| = \frac{|b|}{\sqrt{1 + a^2 - 2a\cos w}} \qquad \Theta(w) = \angle b - \tan^{-1}\left[\frac{a \operatorname{sen} w}{1 - a\cos w}\right]$$

- **Solución b)**
  - Dado que el parámetro *a* es positivo, se observa que el denominador de $H(w)$ tiene un mínimo en $w=0$ ($e^{jw}=1$)
  - Por lo tanto, $|H(w)|$ tiene un máximo en $w=0$.
    - Para esta frecuencia,

$$H(0)=\frac{|b|}{1-a}=1 \quad \rightarrow \quad b=\pm(1-a)$$

    - Se selecciona b positivo

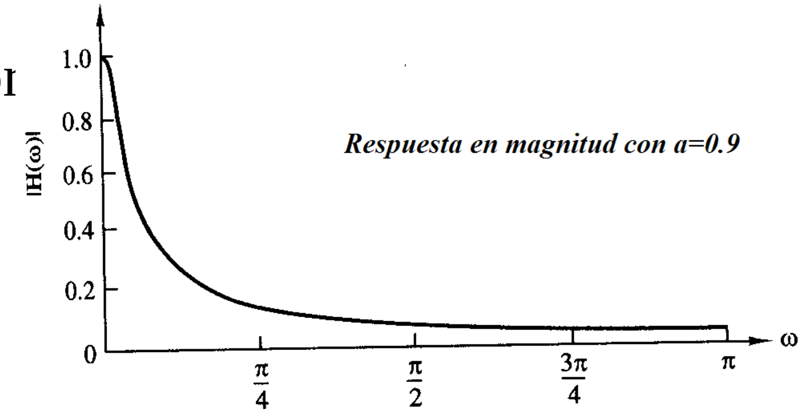
$$b=1-a$$

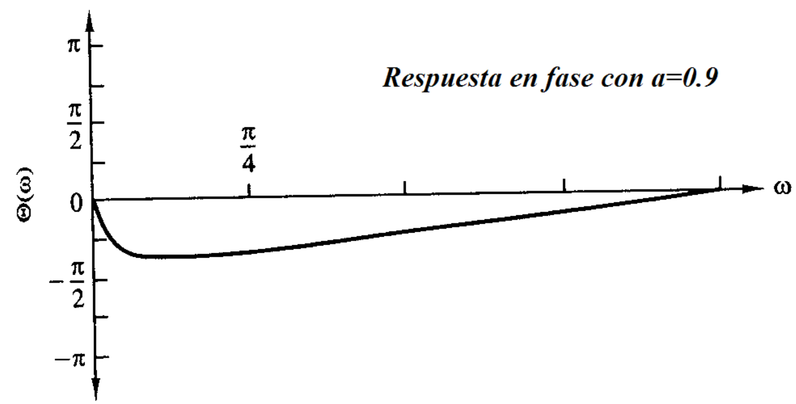
- **Solución b)…**

  - Luego, H(w) queda determinado por

$$|H(w)| = \frac{1-a}{\sqrt{1+a^2-2a\cos w}}$$

$$\Theta(w) = -\tan^{-1}\left[\frac{a\,\mathrm{sen}\,w}{1-a\cos w}\right]$$





Solución c)

- La señal de entrada consta de tres componentes

$$w = 0 \qquad |H(0)| = 1 \qquad \Theta(0) = 0$$

$$w = \pi/2 \qquad |H(\pi/2)| = 0.074 \qquad \Theta(\pi/2) = -42^\circ$$

$$w = \pi \qquad |H(\pi)| = 0.053 \qquad \Theta(\pi) = 0$$

- Por lo tanto, la salida del sistema es,

$$y(n) = 5|H(0)| + 12|H(\pi/2)| \operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{2} + \Theta(\pi/2)\right) - 20|H(\pi)| \cos\left(n\pi + \frac{\pi}{4} + \Theta(\pi)\right)$$

$$y(n) = 5 + 0.888 \operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{2} - 42^\circ\right) - 1.06 \cos\left(n\pi + \frac{\pi}{4}\right) \qquad -\infty < n < \infty$$

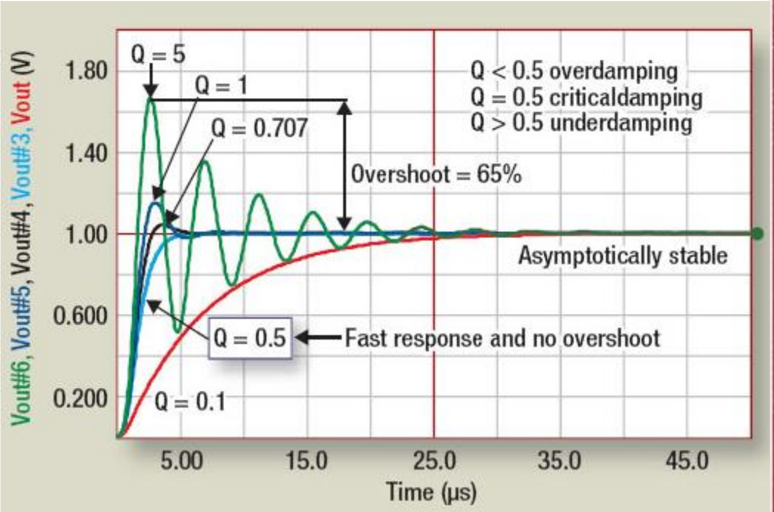
- **Respuesta Transitoria y Permanente**

  - Si el análisis se hace con señales exponenciales o sinusoidales aplicadas al sistema en $n = -\infty$ (señales eternas), la salida que se obtiene corresponde a la *respuesta en régimen permanente* y no hay respuesta transitoria.

  - Si la señal de entrada se aplica en un instante de tiempo finito, por ejemplo $n=0$, la respuesta consta de dos términos: respuesta *transitoria* y respuesta *permanente*.

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

- **Respuesta Transitoria y Permanente**
  - En muchas aplicaciones prácticas:
    - Los sistemas LTI emplean señales soinusoidales o exponenciales complejas como entrada
    - La respuesta transitoria es irrelevante.
    - El análisis sólo se enfoca en la respuesta estacionaria.
  - Es más útil calcular la respuesta transitoria con técnicas del dominio temporal o a través de la Transformada z.



humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

- **Respuesta Transitoria y Permanente ante una entrada exponencial**
  - La respuesta transitoria y permanente de un sistema LTI caracterizado por su respuesta impulsional $h(n)$ en reposo cuando es excitado por la señal:

$$x(n) = A\, e^{j\,wn}\, u(n)$$

  - Se obtiene a través de la convolución

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k)$$

  - Al reemplazar x(n)

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)\, Ae^{j\,w(n-k)}u(n-k)$$

Respuesta Transitoria y Permanente ante una entrada exponencial

- Debido que el sistema $h(n)$ es causal y que $u(n-k)=0,\ \forall\ k>n_0=0$,

$$y(n)=\left[\sum_{k=0}^{n} h(k)\, e^{-j\,wk}\right] Ae^{j\,wn}$$

- Al descomponer la sumatoria anterior, se llega a:

$$y(n)=\left[\sum_{k=0}^{\infty} h(k)\, e^{-j\,wk}\right] Ae^{j\,wn}-\left[\sum_{k=n+1}^{\infty} h(k)\, e^{-j\,wk}\right] Ae^{j\,wn}$$

$$y(n)=H(w)\, Ae^{j\,wn}-\left[\sum_{k=n+1}^{\infty} h(k)\, e^{-j\,wk}\right] Ae^{j\,wn}$$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Respuesta Transitoria y Permanente ante una entrada exponencial

- De donde:

$$y_{estac}(n) = H(w)\, Ae^{j\,wn}$$

$$y_{trans}(n) = -\left[\sum_{k=n+1}^{\infty} h(k)\, e^{-j\,wk}\right] Ae^{j\,wn}$$

- Para $\boldsymbol{y_{trans}(n)}$ se observa que:

$$|y_{trans}(n)| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} h(k)\, e^{-j\,w(k-n)}\right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |h(k)| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |h(k)|$$

  - **Para sistemas LTI, IIR**, causal y estable: $y_{trans}(n)$ es acotada y decae a cero cuando n aumenta.
  - **Para sistemas LTI, FIR** de longitud M, causal y estable: $y_{trans}(n) = 0,\ \forall\, n > M$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

- **Ejemplo**
  - Obtener la respuesta transitoria y permanente del sistema LTI en reposo:

$$y(n) = ay(n-1) + x(n), \qquad |a| < 1$$

  - cuando la entrada es:

$$x(n) = A\, e^{jwn}\, u(n)$$

- **Solución**
  - Calcular la respuesta en frecuencia $H(w)$ y la respuesta impulsional $h(n)$:

$$H(w) = \frac{1}{1-ae^{-jw}} \qquad h(n) = a^n u(n)$$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

- **Solución …**
  - **Respuesta de estado estable**: $y_{estac}(n) = H(w)\, Ae^{j\,wn}$
    - Reemplazando $H(w)$

$$y_{estac}(n) = \frac{1}{1 - ae^{-jw}} Ae^{j\,wn}$$

  - **Respuesta Transitoria**: $y_{trans}(n) = -\left[\sum_{k=n+1}^{\infty} h(k)\, e^{-j\,wk}\right] Ae^{j\,wn}$
    - Reemplazando $h(k)$

$$y_{trans}(n) = -\left[\sum_{k=n+1}^{\infty} a^k u(k) e^{-j\,wk}\right] Ae^{j\,wn} = -Ae^{j\,wn} \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(ae^{-j\,w}\right)^k$$

dado que $n \geq 0 \Rightarrow u(k) = 1, \quad \forall\, k \in \mathbb{Z}^+$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Solución …

- Respuesta Transitoria
  - Recordando que:

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \beta^k = \beta^{n+1} + \beta^{n+2} + \beta^{n+3} + \cdots = \beta^n[\beta^1 + \beta^2 + \beta^3 + \cdots]$$

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \beta^k = \beta^n \sum_{k=1}^{\infty} \beta^k = \beta^n \frac{\beta}{1-\beta} = \frac{\beta^{n+1}}{1-\beta}, \qquad \forall \ \ |\beta| < 1$$

  - Luego, con $\beta = \left(ae^{-j\,w}\right)$:

$$y_{trans}(n) = -Ae^{j\,wn} \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(ae^{-j\,w}\right)^k = -Ae^{j\,wn} \ \frac{\left(ae^{-jw}\right)^{n+1}}{1-ae^{-jw}}$$

$$y_{trans}(n) = -A \ \frac{(a)^{n+1}e^{-jw}}{1-ae^{-jw}}$$