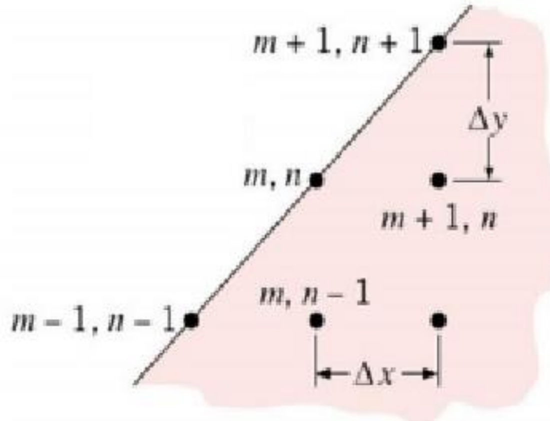
Introducción

- La relación entrada-salida de un sistema LTI puede **representarse** por una ecuación de diferencia lineal de coeficientes constantes (edcc).



$$y(n) = -\sum_{k=1}^{N} \frac{a_k}{a_0} y(n-k) + \sum_{k=1}^{M} \frac{b_k}{a_0} x(n-k) \ ,$$

donde, $a_0 \neq 0$ y N es el orden del sistema

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

- **Introducción …**
  - Un mismo sistema puede **representarse** por múltiples eedcc.
  - La **unicidad** de la **representación** se logra especificando información adicional o condiciones auxiliares del sistema.
  - La **respuesta** ante una entrada particular se especifica de forma única con una edcc si se conocen las condiciones auxiliares.
  - Las **condiciones auxiliares** ayudan a determinar las propiedades de linealidad, invarianza temporal y causalidad del sistema.
  - Con los valores de la salida en $\boldsymbol{N}$ instantes secuenciales, los valores posteriores de $y(n)$ se obtienen recursivamente incrementando n.

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

- **Ejemplo**
  - Determinar si las dos ecuaciones de diferencia son equivalentes:

$$y_1(n) = -0{,}2y_1(n-1) + 0{,}37\, y_1(n-2) - 0{,}01y_1(n-3) - 0{,}0168y_1(n-4) \\ + x(n) - 0{,}9x(n-1) + 0{,}08x(n-2) + 0{,}06x(n-3)$$

$$y_2(n) = 0{,}37y_2(n-2) - 0{,}084y_2(n-3) + x(n) - 1{,}1x(n-1) + 0{,}3x(n-2)$$

- **Solución**
  - Evaluando para $n \geq 0$ considerando $x(n) = u(n)$ y condiciones iniciales cero:

$$\begin{cases} y_1(0) = 1 \\ y_1(1) = -0{,}1 \\ y_1(2) = 0{,}57 \end{cases} \qquad \begin{cases} y_2(0) = 1 \\ y_2(1) = -0{,}1 \\ y_2(2) = 0{,}57 \end{cases}$$

PSI Percepción y Sistemas Inteligentes

- **Introducción …**
  - La ecuación de la **convolución** sugiere la forma de **realizar** cualquier **sistema discreto** FIR o IIR.

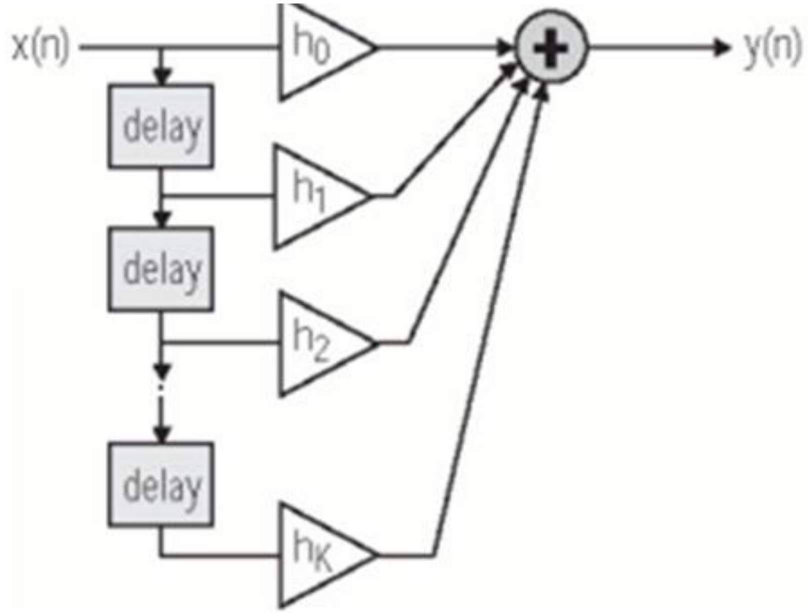
$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

■ Observación

- **Sistema FIR:**
  - Posible la implementación por convolución
  - Requiere un número finito de sumadores, multiplicadores y elementos de memoria.

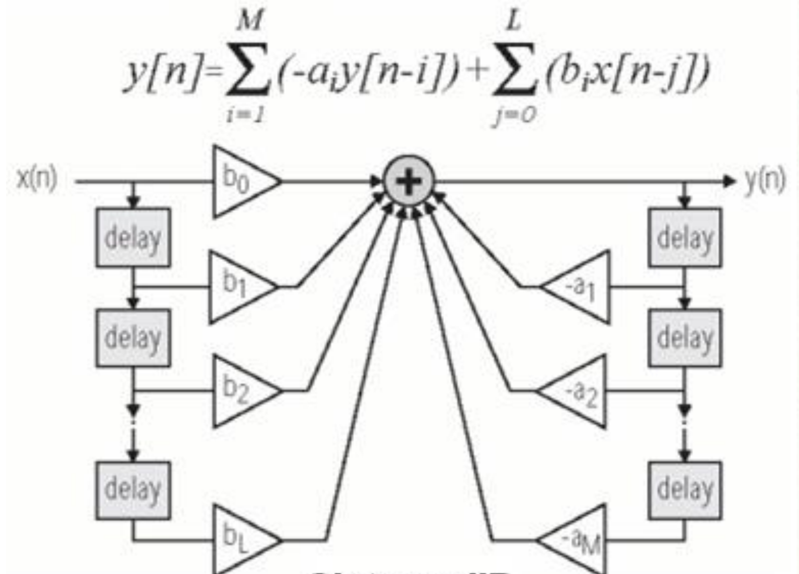
$$y[n]=\sum_{k=0}^{K}h[k]x[n-k]$$



- **Observación …**

  - **Sistema IIR:**
    - Imposible implementación por convolución.
    - Requiere un número infinito de componentes.

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$$



Sistema IIR

  - La implementación con edcc permite realizar aplicaciones prácticas de forma *efectiva y eficiente* computacionalmente.

- **Ecuación de Diferencia**
  - Es una descripción matemática de la relación entrada/salida de un sistema discreto.
  - Forma general de la **edcc** para un sistema recursivo lineal:

$$y(n) = -\sum_{k=1}^{N} a_k \, y(n-k) + \sum_{k=0}^{M} b_k \, x(n-k)$$

donde,

N orden de la ecuación o del sistema

y(n-k) condiciones iniciales.

Ec. de Dif. con Coeficientes Constantes

- **La respuesta *y(n)*** es el resultado de la **condición inicial** y de la **señal de entrada** al sistema.

$$y(n) = -\sum_{k=1}^{N} a_k \ y(n-k) + \sum_{k=0}^{M} b_k \ x(n-k)$$

  - **Respuesta en estado cero (forzada):** Respuesta del sistema a la entrada $x(n)$ con condiciones iniciales iguales a cero.

$$y_{zs}(n) = \sum_{k=0}^{M} b_k \ x(n-k)$$

  - **Respuesta con entrada cero (natural):** Respuesta del sistema con condiciones iniciales diferentes de cero y entrada $x(n)=0$.

$$y_{zi}(n) = -\sum_{k=1}^{N} a_k \ y(n-k)$$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Análisis Sistemas con edcc

Linealidad

- La respuesta de un sistema **lineal** debe satisfacer los siguientes requisitos:
  - *Aditividad* en las respuestas de entrada y estado cero:

$$y(n) = y_{zi}(n) + y_{zs}(n)$$

  - *Superposición* tanto en la respuesta de estado cero $y_{zs}(n)$ como en la entrada cero $y_{zi}(n)$.

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Análisis Sistemas con Ec. De Diferencia

- **Ejemplo:** Determinar si los siguientes sistemas representados por ecuaciones de diferencia son lineales:
  - a) $y(n) = 2x(n) + 1{,}5x(n-2)$
  - b) $y(n) = x(n) - y(n-1)$
  - c) $y(n) = x(n)+10$

- **Procedimiento**
  - Aplicar las entradas $x_1(n), x_2(n)$ y $x_3(n) = a_1 x_1(n) + a_2\, x_2(n)$
  - Encontrar las respuestas $y_1(n), y_2(n)$ y $y_3(n)$
  - Si se cumple que $y_3(n) = a_1 y_1(n) + a_2\, y_2(n)$ el sistema es lineal.

- **Solución a)**
  - Para $y(n) = 2x(n) + 1.5x(n-2)$

$$\begin{cases} x_1(n) & \rightarrow y_1(n) = 2\, x_1(n) + 1.5\, x_1(n-2) \\ x_2(n) & \rightarrow y_2(n) = 2\, x_2(n) + 1.5\, x_2(n-2) \\ x_3(n) & \rightarrow y_3(n) = 2\, x_3(n) + 1.5\, x_3(n-2) \end{cases}$$

Donde,

$$y_3(n) = 2\,[a_1 x_1(n) + a_2\, x_2(n)] + 1{,}5[a_1 x_1(n-2) + a_2\, x_2(n-2)]$$
$$y_3(n) = a_1[2x_1(n) + 1.5\, x_1(n-2)] + a_2[2\, x_2(n) + 1{,}5\, x_2\,(n-2)]$$

  - puesto que se cumple que: $y_3(n) = a_1 y_1(n) + a_2 y_2(n)$

El sistema es lineal !!

- **Solución b)**
  - Para $y(n) = x(n) - y(n-1)$

$$\begin{cases} x_1(n) & \rightarrow y_1(n) = x_1(n) - y_1(n-1) \\ x_2(n) & \rightarrow y_2(n) = x_2(n) - y_2(n-1) \\ x_3(n) & \rightarrow y_3(n) = x_3(n) - y_3(n-1) \end{cases}$$

Donde,

$$y_3(n) = [a_1 x_1(n) + a_2\, x_2(n)] - y_3(n-1)$$

Puesto que

$$a_1 y_1(n) + a_2 y_2(n) = a_1[\, x_1(n) - y_1(n-1)] + a_2[\, x_2(n) - y_2(n-1)]$$
$$= a_1\, x_1(n) + a_2\, x_2(n) - a_1 y_1(n-1) - a_2\, y_2(n-1)$$

  - El sistema es lineal si las condiciones iniciales son cero!!

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

- **Solución c)**
  - Para $y(n) = x(n) + 10$

$$\begin{cases} x_1(n) & \rightarrow y_1(n) = x_1(n) + 10 \\ x_2(n) & \rightarrow y_2(n) = x_2(n) + 10 \\ x_3(n) & \rightarrow y_3(n) = x_3(n) + 10 \end{cases}$$

Donde,

$$y_3(n) = [a_1 x_1(n) + a_2\, x_2(n)] + 10$$

- Como,

$$a_1 y_1(n) + a_2 y_2(n) = a_1[\,x_1(n) + 10] + a_2[\,x_2(n) + 10]$$
$$= a_1\, x_1(n) + a_2\, x_2(n) + 10\,[a_1 + a_2]$$

- Se tiene que: $y_3(n) \neq a_1 y_1(n) + a_2 y_2(n)$

El sistema es NO-lineal !!

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

- **Ejemplo 2.**

  - Determinar si los sistemas son lineales:

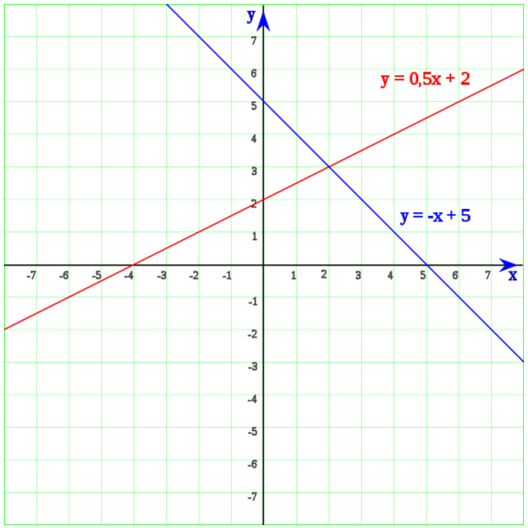
    - $$y(n) = \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \sum_{k=-M_1}^{M_2} x(n-k)$$ **Lineal**

    - $$y(n) = \left[x(n) \right]^2$$ **No Lineal**

    - $$y(n) = x(n) + K, \qquad K \in \mathbb{R}$$ **No Lineal**

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

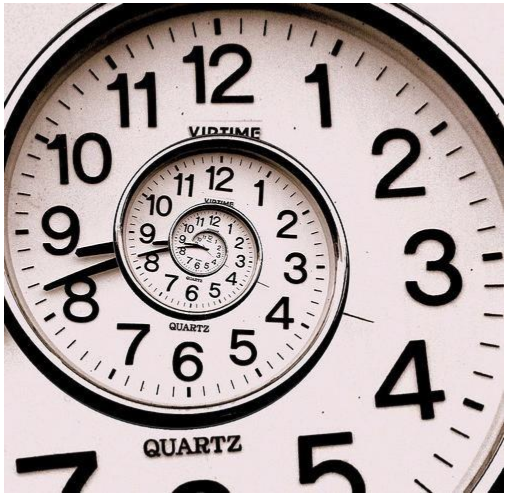
- **Observación**
  - **Función lineal**:
    - *En geometría y algebra*: es una función polinómica de primer grado.
    - *En señales y sistemas*: es una aplicación lineal entre dos espacios vectoriales.



humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Invarianza en el Tiempo

- Un **desplazamiento** en la **entrada** causa el mismo desplazamiento en la **salida**



$$x(n) \rightarrow \ y(n) \Leftrightarrow x(n-k) \rightarrow y(n-k)$$

- Un sistema invariante está descrito por una ecuación de diferencia lineal con coeficientes constantes.

Análisis Sistemas con Ec. De Diferencia

- **Ejemplo:** Determinar si los siguientes sistemas representados por ecuaciones de diferencia son invariantes con el tiempo:
  - a) $y(n) = 2x(n) + 1{,}5x(n-2)$
  - b) $y(n) = x(n) - y(n-1)$
  - c) $y(n) = n\,x(n)$

- **Procedimiento**
  - Aplicar las entradas $x_1(n)$ y $x_2(n) = x_1(n-k)$
  - Encontrar las respuestas $y_1(n)$ y $y_2(n)$
  - Si se cumple que $y_2(n) = y_1(n-k)$ el sistema es invariantes con el tiempo.

Análisis Sistemas con Ec. De Diferencia

PSI Percepción y Sistemas Inteligentes

- **Solución a)**
  - Para $y(n) = 2x(n) + 1.5x(n-2)$

$$\begin{cases} x_1(n) & \rightarrow y_1(n) = 2\, x_1(n) + 1.5\, x_1(n-2) \\ x_2(n) & \rightarrow y_2(n) = 2\, x_2(n) + 1.5\, x_2(n-2) \end{cases}$$

Donde,

$x_2(n) = x_1\,(n-k) \rightarrow y_2(n) = 2\, x_1(n-k) + 1.5\, x_1(n-2-k)$

  - Como: $y_1(n-k) = 2\, x_1(n-k) + 1.5\, x_1(n-2-k)$
  - Puesto que $y_2(n) = y_1(n-k)$ el sistema es invariante con el tiempo.

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

- **Solución b)**
  - Para $y(n) = x(n) - y(n-1)$

$$\begin{cases} x_1(n) & \rightarrow y_1(n) = x_1(n) - y_1(n-1) \\ x_2(n) & \rightarrow y_2(n) = x_2(n) - y_2(n-1) \end{cases}$$

Donde,

$$x_2(n) = x_1(n-k) \rightarrow y_2(n) = x_1(n-k) - y_2(n-1)$$

- Como $y_1(n-k) = x_1(n-k) - y_1(n-1-k)$
- Para que $y_2(n) = y_1(n-k)$ debe cumplirse que las condiciones iniciales sean cero (Sistema invariante).

Análisis: Ecuaciones de Diferencia

- **Solución c)**
  - Para $y(n) = n\,x(n)$

$$\begin{cases} x_1(n) & \rightarrow y_1(n) = n\,x_1(n) \\ x_2(n) & \rightarrow y_2(n) = n\,x_2(n) \end{cases}$$

Donde,

$$x_2(n) = x_1(n-k) \rightarrow y_2(n) = n\,x_1(n-k)$$

  - Como $y_1(n-k) = (n-k)\,x_1(n-k)$
  - Se observa que $y_2(n) \neq y_1(n-k)$: Sistema variante con el tiempo

Análisis: Ecuaciones de Diferencia

- **Ejemplo:** Determinar si los siguientes sistemas son variantes o invariantes con el tiempo:

  - $y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)$
    - Invariante
  - $y(n) = x(M\,n), \;\; M \in \mathbb{Z}, \;\; M \neq 0$
    - Variante

Causalidad

- Un sistema es causal si para cada valor de n_{o}, la secuencia de salida en $n = n_0$ solo depende de los valores de la entrada para $n \leq no$.

- **Ejemplo**

$$y(n) = x(n - n_d) \qquad \begin{cases} \text{Causal}: & n_d \geq 0 \\ \text{No Causal}: & n_d < 0 \end{cases}$$

$$y(n) = \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \sum_{k=-M_1}^{M_2} x(n-k) \qquad \begin{cases} \text{Causal}: & -M_1 \geq 0 \ y \ M_2 \geq 0 \\ \text{No Causal}: & \text{Otros valores de } M_{1,2} \end{cases}$$

$$y(n) = x(Mn) \qquad \begin{cases} \text{No Causal}: & M > 1 \\ \text{Causal}: & \text{Otro Valor de } M \end{cases}$$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Estabilidad

- Un sistema es estable si y sólo si para toda **entrada acotada** y toda condición inicial acotada la **respuesta** total del sistema **es acotada**.
- La condición de estabilidad se obtiene de la solución de la edcc, por lo que se analizará posteriormente.

PSI Percepción y Sistemas Inteligentes

- **Resolución de la Ecuación de Diferencia**
  - Obtener ***y(n)*** de **forma explícita** para un sistema LTI dada una **e.d.c.c**. lineal como relación de **entrada/salida** del mismo.
  - Existen dos métodos principales
    - **Método directo**
      - Solución homogénea + particular
    - **Método indirecto**
      - Transformada z

Percepción y Sistemas Inteligentes

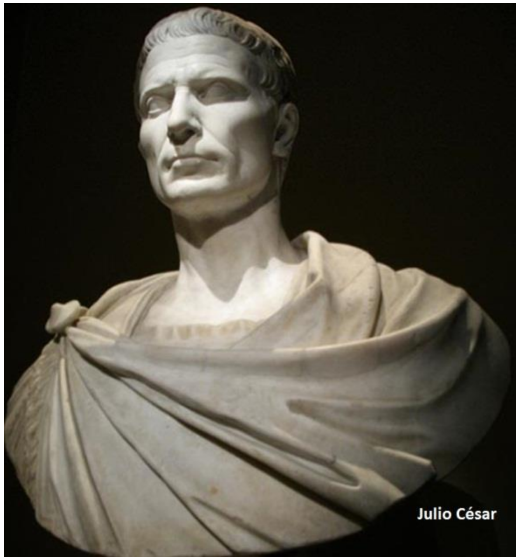
Método Directo

- La solución *y(n)* es dada por la suma de dos partes:

$$y(n) = y_h(n) + y_p(n)$$

donde, $y_h(n)$ *solución homogénea;*

$y_p(n)$ *solución particular*



- La ecuación general puede escribirse como:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k) \quad con\ a_0 \equiv 1 \quad y \quad n \geq 0$$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Solución Homogénea de la E.D.

- **Procedimiento**
  - 1. Considerar $x(n) = 0$, por lo que se obtiene:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = 0$$

  - 2. Suponer que la solución homogénea $y_h(n)$ es exponencial, es decir:

$$y_h(n) = \lambda^{n}$$

  - 3. Sustituir $y_h(n)$ en la ecuación anterior y formar el *polinomio característico* del sistema.

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \lambda^{n-k} = 0 \Leftrightarrow \lambda^{n-N}(\lambda^{N} + a_1\lambda^{N-1} + a_2\lambda^{N-2} + \ldots + a_{N-1}\lambda + a_N) = 0$$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Solución Homogénea de la E.D.

- **Procedimiento…**
  - 4. Calcular las N raíces λ del polinomio característico.
  - 5. Expresar la solución de $y_h(n)$ como
    - Sin raíces repetidas:

$$y_h(n) = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n + \dots C_N\lambda_N^n$$

    - Con raíces repetidas:

$$y_h(n) = C_1\lambda_1^n + C_2 n\lambda_1^n + C_3 n^2\lambda_1^n + \dots + C_m n^{m-1}\lambda_1^n + \dots + C_{N-1}\lambda_{N-1}^n + C_N\lambda_N^n$$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Solución Homogénea de la E.D..

- **Ejemplo 1:** Determine el orden y la respuesta $y_h(n)$ del siguiente sistema:

$$y(n)+a_1\, y(n-1)=x(n) \qquad [ec.\ 1]$$

- **Solución:**
  - Orden: 1
  - Suponer $y_h(n) = {}^{n}$ con $x(n) = 0$

entonces, $\lambda^n + a_1\, \lambda^{n-1} = 0$

$$\lambda^{n-1}(\lambda + a_1) = 0 \;\rightarrow\; \lambda = -a_1$$

Luego: $y_h(n)=C\,\lambda^n=C\,(-a_1)^n \quad [ec.2]$

Solución Homogénea de la E.D.

- **Ejemplo 2:** Determine el orden y la respuesta $y_h(n)$ del siguiente sistema:

$$y(n)-\frac{3}{4}y(n-1)+\frac{1}{16}y(n-3)=x(n)+2x(n-2) \qquad [ec.\ 1]$$

- **Solución:**
  - Orden: 3
  - Suponer $y_h(n)=\lambda^n$ con $x(n)=0$

  reemplazando en [ec.1]: $\lambda^n-\frac{3}{4}\lambda^{(n-1)}+\frac{1}{16}\lambda^{(n-3)}=0$

$$\lambda^{(n-3)}\left[\lambda^3-\frac{3}{4}\lambda^2+\frac{1}{16}\right]=0 \qquad \lambda_1=\frac{1}{2}\ ,\ \lambda_2=\frac{1}{2}\ ,\ \lambda_3=-\frac{1}{4}$$

Luego:

$$y_h(n)=C_1\left(\frac{1}{2}\right)^n+C_2\ n\left(\frac{1}{2}\right)^n+C_3\left(-\frac{1}{4}\right)^n \qquad [ec.2]$$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

$Y_{zi}(n)$ a partir de $y_h(n)$

Percepción y Sistemas Inteligentes

Introducción

- A partir de la **solución homogénea** se puede obtener la **respuesta a la entrada cero** del sistema $\boldsymbol{y_{zi}(n)}$.

$$y(n) = y_{zi}(n) + y_{zs}(n)$$

$$\uparrow$$

$$y_t(n) = y_h(n) + y_p(n)$$

- Debe determinarse los valores de C_i a partir de las condiciones iniciales del sistema.

$$y_{zi}(n) = y_h(n)\Big|_{Calculando\,Ci\ con\ las\ condiciones\ iniciales}$$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

$Y_{zi}(n)$ a partir de $y_h(n)$

- **Procedimiento**
  - **1**. Calcular la solución homogénea $y_h(n)$ de la ecuación en diferencias de orden N.
  - **2**. Establecer un sistema de N ecuaciones con N incógnitas para determinar los valores de los coeficientes C_i de la solución homogénea,
    - Igualar $y(n)$ de la edcc con la solución homogénea $y_h(n)$ para los valores de $n = 0,1, .. N - 1$, dadas las condiciones iniciales $y(-1), y(-2), \ldots, y(-N)$ y suponer $x(n) = 0$
  - **3**. La respuesta de entrada cero $y_{zi}(n)$ se obtiene al reemplazar los valores de C_i obtenidos en el paso anterior en $y_h(n)$.

$Y_{zi}(n)$ a partir de $y_h(n)$

Percepción y Sistemas Inteligentes

- **Ejemplo 1:**

Determine la respuesta a la entrada cero, $\boldsymbol{y_{zi}(n)}$, del sistema :

$$y(n)+a_1\, y(n-1)=x(n) \qquad [ec.\ \ 1]$$

- **Solución:**
  - La solución homogénea es: $y_h(n)=C\ \lambda^n = C\ (-a_1)^n \quad [ec.\ \ 2]$
  - De $[ec.1]$ con $x(n) = 0\ y\ n = 0,$ $\qquad y(0) = -a_1\ y(-1)$
  - De $[ec.2]$ con $n = 0,$ $\qquad y_h(0) = C$
  - Igualando los dos resultados anteriores: $\quad C = -a_1 y(-1)$
  - Reemplazando C en [ec.2]: $\quad y_{zi}(n)= (-a_1)^{n+1}\, y(-1)$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

$Y_{zi}(n)$ a partir de $y_h(n)$

- **Ejemplo 2.**

  Determine la repuesta $y_{zi}(n)$ del sistema descrito por la ecuación de diferencia homogénea:

$$y(n)-3y(n-1)-4y(n-2)=x(n)-0.5x(n-2) \quad [ec.1]$$

- **Solución:**
  - Suposición: $x(n)=0, \qquad y(n)=\lambda^n \quad [ec.2]$
  - Reemplazando **[ec.2]** en **[ec.1]** :

$$\lambda^n - 3\lambda^{n-1} - 4\lambda^{n-2} = 0$$

$$\lambda^{n-2}\left(\lambda^2 - 3\lambda - 4\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 4$$

  - La solución homogénea es:

$$y_h(n) = C_1\,\lambda_1^n + C_2\,\lambda_2^n$$

$$= C_1\,(-1)^n + C_2\,(4)^n$$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

$Y_{zi}(n)$ a partir de $y_h(n)$

- **Ejemplo 2…**
  - **y_{zi}(n)** puede obtenerse a partir de **y_h(n)** encontrando las constantes **C_i** a partir de las ecuaciones **[ec.1]** y **[ec.2]**, dadas las condiciones y(-1), y(-2).
    - Evaluando la [ec.1] en n=0,1 $\Rightarrow$

$$y(0) = 3y(-1) + 4y(-2)$$
$$y(1) = 3y(0) + 4y(-1)$$
$$= 13y(-1) + 12y(-2)$$

    - Evaluando la [ec.2] en n=0,1 $\Rightarrow$

$$y_h(0) = C_1 + C_2$$
$$y_h(1) = -C_1 + 4C_2$$

$Y_{zi}(n)$ a partir de $y_h(n)$

- **Ejemplo 2…**
  - Igualando los dos conjuntos de ecuaciones:

$$\begin{aligned} C_1 + \ \ C_2 &= 3y(-1) + 4y(-2) \\ -C_1 + 4C_2 &= 13y(-1) + 12y(-2) \end{aligned}$$

  - De donde,

$$\begin{aligned} C_1 &= -\frac{1}{5}y(-1) + \frac{4}{5}y(-2) \\ C_2 &= \frac{16}{5}y(-1) + \frac{16}{5}y(-2) \end{aligned}$$

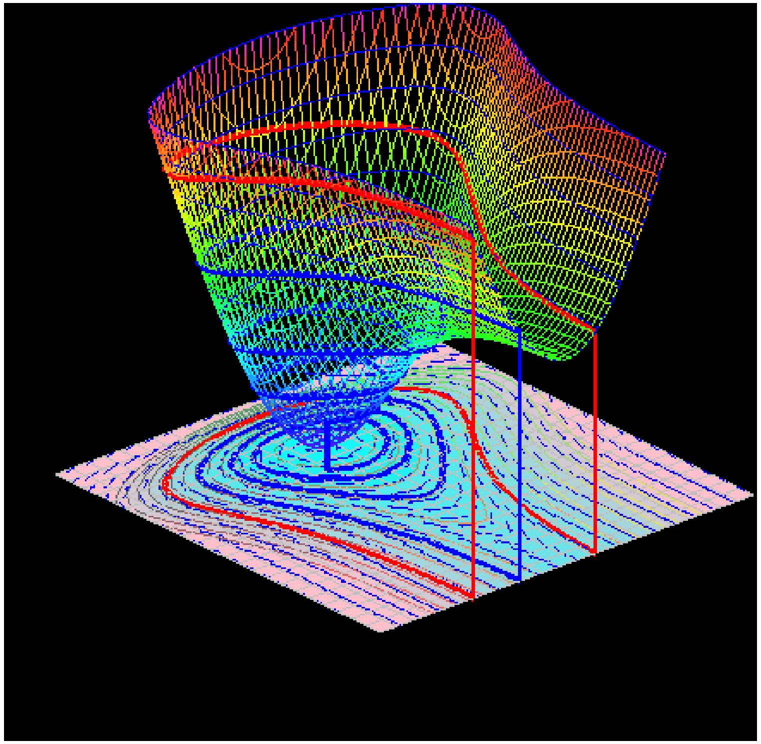
  - Reemplazando los C_i en $y_h(n)$ se obtiene $y_{zi}(n)$:

$$y_{zi}(n) = \left[-\frac{1}{5}y(-1) + \frac{4}{5}y(-2)\right](-1)^n + \left[\frac{16}{5}y(-1) + \frac{16}{5}y(-2)\right]4^n \qquad n \geq 0$$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Solución Particular de la E.D.

- **Introducción**
  - Se utiliza la propiedad de los sistemas LTI de presentar señales de salida similar a las señales de excitación.



Solución Particular de la E.D.

- **Introducción …**
  - Señales típicas

Señal de Entrada	Solución Particular	Notación
A	K	A,B,C, K Constantes
$A\ B^n$	$K\ B^n$	
$A\ n^C$	$K_0 n^C + K_1 n^{C-1} + \cdots + K_C$	
$A^n\ \ n^C$	$A^n(K_0 n^C + K_1 n^{C-1} + \cdots + K_C)$	
$\begin{cases} A\ cos(w_0\ n) \\ A\ sen(w_0 n) \end{cases}$	$K_1\ cos(w_0\ n) + K_2\ sen(w_0\ n)$	

Solución Particular de la E.D.

- **Procedimiento para obtener $y_p(n)$**
  - **1**. Considerar que la solución particular $y_p(n)$ es de la misma forma que la señal de entrada $x(n)$ escalada por una constante K.

$$y_p(n) = K\ x(n)$$

  - **2**. Si $y_h(n)$ presenta en algunos de sus términos la misma forma de $x(n)$, entonces la solución particular se trata de igual forma que el caso para raíces múltiples.

$$y_p(n) = K\,n\,x(n)$$

  - **3**. Determinar el factor de escala K a partir de la ecuación de diferencia para valores de $n \geq$ orden del sistema.

Solución Particular de la edcc

- **Ejemplo 1.** Determinar el orden y la solución particular de la edcc:

$$y(n) + a_1 y(n-1) = x(n), \qquad con \quad x(n) = u(n)$$

- **Solución**
  - Orden: 1
  - Solución tentativa: $y_p(n) = K\, u(n)$
    - Reemplazando en la edcc:

$$Ku(n) + a_1 Ku(n-1) = u(n)$$

    - Evaluando en $n = 1$, (en $n \geq 1$ donde no se anulan términos)

$$K + a_1 K = 1, \quad \rightarrow \quad K = \frac{1}{1+a_1}$$

    - Por lo tanto: $y_p(n) = \frac{1}{1+a_1} u(n)$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Solución Particular de la E.D.

- **Ejemplo 2:** Determinar la solución particular de la e.d.c.c.

$$y(n) = \frac{5}{6} y(n-1) - \frac{1}{6} y(n-2) + x(n) \quad con \;\; x(n) = 2^n \; u(n)$$

- **Solución:**
  - Solución tentativa: $y_p(n) = K\, 2^n u(n)$
  - Reemplazando: $K 2^n u(n) = \frac{5}{6} K\, 2^{n-1} u(n-1) - \frac{1}{6} K 2^{n-2} u(n-2) + 2^n u(n)$
  - Evaluando en $\boldsymbol{n} \geq \mathbf{2}$ para determinar K (donde ningún término se anula)

$$4K = \frac{5}{6}(2K) - \frac{1}{6} K + 4 \qquad \Rightarrow K = \frac{8}{5}$$

  - La solución es: $y_p(n) = \frac{8}{5} 2^n \qquad n \geq 0$

Solución Total de la E.d.

- ## Introducción

  - La propiedad de **linealidad** de las edcc permite obtener la solución total $y_t(n)$ como:

$$y_t(n) = y_h(n) + y_p(n)$$

  - $y_t(n)$ queda totalmente definida al encontrar las constantes C_i de la ecuación $y_h(n)$

Solución Total de la E.d.

- **Procedimiento**
  - **1.** Calcular la solución homogénea $y_h(n)$ y la solución particular $y_p(n)$ de la ecuación de diferencia de orden N.
  - **2.** Formar la solución total $y_t(n)$ como la suma de las soluciones homogénea y particular,

$$y_t(n) = y_h(n) + y_p(n)$$

  - **3.** Establecer un sistema de N ecuaciones con N incógnitas para determinar los valores de los coeficientes C_i de la solución homogénea.
    - Igualar $y(n)$ de la edcc del sistema con la solución total $y_t(n)$ para los valores de $n = 0,1,..,N-1$, dadas las condiciones iniciales.

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Solución Total de la E.d.

- **Ejemplo1:** Determine la solución total del sistema dado para n ≥0

$$y(n) + a_1\, y(n-1) = x(n), \qquad con\;\; x(n) = u(n) \;\; y \;\; y(-1) \neq 0$$

- **Solución**

  - De los ejemplos anteriores:

$$y_h(n) = C\lambda^n = C(-a_1)^n\,, \qquad\qquad y_p(n) = \frac{1}{1+a_1}\, u(n)$$

  - Por lo tanto,

$$y_t(n) = C\,(-a_1)^n + \frac{1}{1+a_1}, \qquad n \geq 0$$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

- **Solución ..**
  - C se determina evaluando la edcc y $y_t(n)$ en n=0 considerando la condición inicial $y(-1)$:
    - Se obtiene el sistema de ecuaciones,

$$\begin{cases} y(0) = -a_1 y(-1) + 1 \\ y_t(0) = C + \dfrac{1}{1+a_1} \end{cases}$$

    - De donde, $C = 1 - a_1 y(-1) - \frac{1}{1+a_1}$
    - Finalmente:

$$y_t(n) = \left(1 - a_1 y(-1) - \frac{1}{1+a_1}\right)(-a_1)^n + \frac{1}{1+a_1}, \qquad n \geq 0$$

Solución Total de la E.d.

- **Ejemplo 2.** Determine la solución total del sistema dado para n≥0,

$$y(n)+ y(n\text{-}1)\text{-}6y(n\text{-}2)=x(n) \quad para\ n>0; \quad y \quad x(n)=2^n\, u(n)$$

$$Condiciones\ iniciales: \quad y(-1)=1,\ y(-2)=-1$$

- **Solución**
  - Solución **homogénea**:
    - Solución supuesta: $y_h(n) = \lambda^n$
    - $\lambda^2 + \lambda - 6 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = -3$
    - $y_h(n) = C_1(2)^n + \ C_2(-3)^n\ , \quad n \geq 0$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Solución Total de la E.d.

- **Solución …**
  - Solución **particular**
    - Solución particular supuesta: $y_p(n) = K\,(2)^n u(n)$
    - Observación: el término aparece en $y_h(n)$

      Luego, $y_p(n) = K\,n\,(2)^n\,u(n)$
    - Sustituyendo en la ecuación de diferencia

$$Kn\,2^n u(n) + K(n-1)2^{n-1}u(n-1) - 6K\,(n-2)2^{n-2}u(n-2) = 2^n u(n)$$

- Evaluando en $n \geq 2$

$$K8 + K2 - 6K\ = 4\ \rightarrow\ K = 1$$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Solución total de la E.d.

- **Ejemplo 2…**
  - Solución **total**

$$y_t(n) = [C_1(2)^n + C_2(-3)^n + n\,(2)^n]u(n),$$

  - Los parámetros C_1 y C_2 se obtienen igualando la solución total y la edcc para $n = 0,1$, considerando las condiciones iniciales dadas.
  - De la edcc:

$$y(0) = -y(-1) + 6y(-2) + 1 = -6$$
$$y(1) = -y(0) + 6y(-1) + 2 = 14$$

  - De la solución total:

$$y_t(0) = C_1 + C_2$$
$$y_t(1) = 2C_1 - 3C_2 + 2$$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Solución total de la E.d.

- **Ejemplo 2…**
  - El sistema de ecuaciones queda determinado por:

$$\begin{cases} -6 = C_1 + C_2 \\ 14 = 2C_1 - 3C_2 + 2 \end{cases}$$

  - Resolviendo,

$$\begin{cases} C_1 = -6/5 \\ C_2 = -24/5 \end{cases}$$

  - Por lo tanto,

$$y_t(n) = \left[-\frac{6}{5}(2)^n - \frac{24}{5}(-3)^n + n\,(2)^n\right]u(n)$$

$Y_{zs}(n)$ a partir de $y_t(n)$

- **Introducción**
  - $\boldsymbol{y_{zs}(n)}$ puede obtenerse a partir de la solución total $y_t(n)$,

$$y(n) = y_{zi}(n) + y_{zs}(n)$$

$$y_t(n) = y_h(n) + y_p(n)$$

  - Para el cálculo de $y_{zs}(n)$ se encuentran las constantes C_i asumiendo que las condiciones iniciales iguales son cero, es decir:

$$y_{zs}(n) = y_t(n)\Big|_{Calculando\ C_i\ con\ y(-i)=0}$$

$Y_{zs}(n)$ a partir de $y_t(n)$

- **Procedimiento**
  - **1**. Calcular la solución total y_t (n) de la ecuación en diferencias de orden N.
  - **2**. Establecer un sistema de N ecuaciones con N incógnitas para determinar los valores de los coeficientes C_i (provenientes de la solución homogénea),
    - igualar y(n) de la edcc del sistema con la solución total y_t (n), para n=0,1,..N-1, la entrada especificada y asumiendo que todas las condiciones iniciales son cero.
  - **3**. La respuesta de estado cero y_{zs} (n) se obtiene al reemplazar los valores de C_i obtenidos en el paso anterior en y_t (n).

$Y_{zs}(n)$ a partir de $y_t(n)$

Ejemplo 1.

Calcular la respuesta de **estado cero** ***$y_{zs}(n)$*** del sistema dado cuando x(n)=u(n)

$$y(n)+a_1 y(n-1)=x(n) \qquad [ec.1]$$

Solución

- Encontrar la solución total: $$y_t(n)=C(-a_1)^n+\frac{1}{1+a_1}u(n) \qquad n\geq 0 \quad [ec.2]$$

- Evaluando la [ec.1] para **y(-1) = 0** y **n = 0**: $$\begin{aligned} y(0)&=a_1\, y(-1)+u(0)\\ &=1 \end{aligned}$$

- Evaluando [ec.2] **para n=0**, se obtiene: $$y_t(0)=C+\frac{1}{1+a_1}$$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

$Y_{zs}(n)$ a partir de $y_t(n)$

Ejemplo 1…

- Igualando los dos resultados anteriores:

$$C = \frac{a_1}{1+a_1}$$

- Reemplazando C en la solución total [ec. 2] se obtiene $y_{zs}(n)$:

$$y_{zs}(n) = y_t(n)\Big|_{Cond.Inic.=0}^{C_i} = \frac{a_1}{1-a_1}(-a_1)^n + \frac{1}{1+a_1}u(n) \qquad n \geq 0$$

$$y_{zs}(n) = \frac{1-(-a_1)^{n+1}}{1+a_1} \qquad n \geq 0$$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

$Y_{zs}(n)$ a partir de $y_t(n)$

- **Ejemplo 2:**

  Calcule $y_t(n)$ e identifique $y_{zi}(n)$ y $y_{zs}(n)$, para el sistema

$$y(n)+a_1 y(n-1)=x(n) \quad [ec.1]$$

con $y(-1)\neq 0$ y $x(n)=u(n)$

- **Solución**
  - Para este sistema, la solución total es:

$$y_t(n)=C(-a_1)^n+\frac{1}{1+a_1} \quad n\geq 0 \quad [\text{ec. } 2]$$

  - Evaluando $n=0$ en la [ec.1] y en la [ec.2]

$$n=0\Rightarrow \quad y(0)+a_1 y(-1)=1$$

$$y(0)=-a_1 y(-1)+1$$

$$n=0\Rightarrow \quad y_t(0)=C+\frac{1}{1+a_1}$$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

$Y_{zs}(n)$ a partir de $y_t(n)$

- **Solución…**
  - Igualando los resultados anteriores $y(0) = y_t(0)$ se obtiene:

$$C = -a_1 y(-1) + \frac{a_1}{1+a_1}$$

  - La **solución total** queda especificada por:

$$y_t(n) = (-a_1)^{n+1} y(-1) + \frac{1-(-a_1)^{n+1}}{1+a_1} \qquad n \geq 0$$

  - La respuesta a la condición inicial, $\mathbf{y_{zi}}$ **(n)**, es: $y_{zi}(n) = (-a_1)^{n+1} y(-1)$

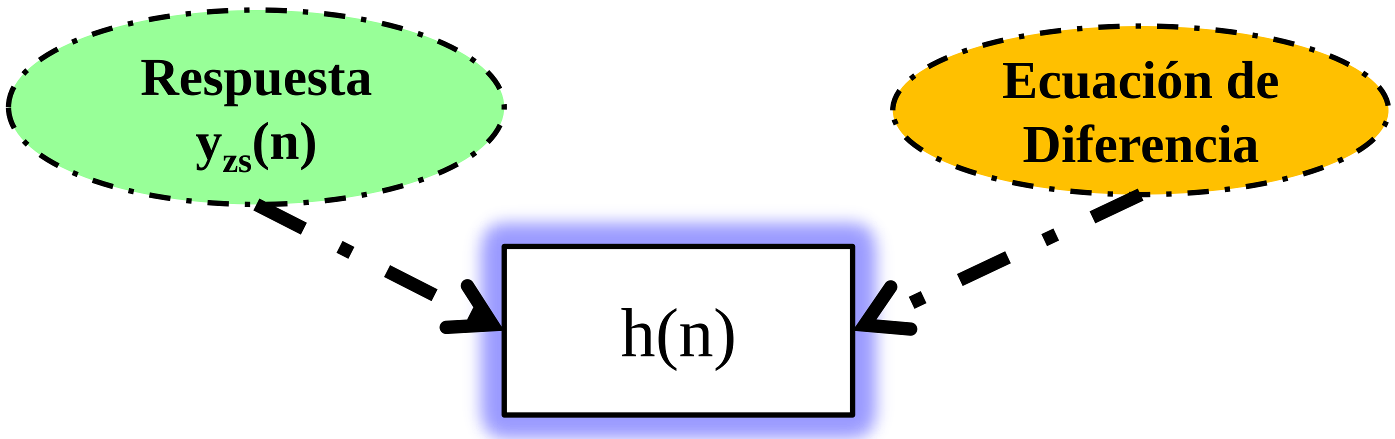
  - Y la respuesta debida a la entrada, $\mathbf{y_{zs}}$**(n)**, es: $y_{zs}(n) = \dfrac{1-(-a_1)^{n+1}}{1+a_1}$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Respuesta Impulsional

Introducción

La respuesta impulsional ***h*(n)** de un sistema puede **obtenerse** a partir de la respuesta de estado cero $\mathbf{y_{zs}(n)}$ y de su **ecuación de diferencias**.



Universidad del Valle
Facultad de Ingeniería
Escuela de Ingeniería Eléctrica y Electrónica
humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Respuesta Impulsional

h(n) a partir de $y_{zs}(n)$

- La respuesta al impulso *h(n)*, de un sistema LTI recursivo es igual a la **respuesta de estado cero** (sistema inicialmente en reposo) cuando la entrada $\boldsymbol{x(n)=\delta(n)}$
- La respuesta de estado cero, $y_{zs}(n)$ en términos de convolución se expresa como:

$$y_{zs}(n)=\sum_{k=0}^{n}h(k)x(n-k) \qquad n\geq 0$$

- Por lo tanto, cuando la entrada $x(n)=\delta(n)$ y las condiciones iniciales son cero, se obtiene:

$$y_{zs}(n)=h(n)$$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

h(n) a partir de y_{zs}(n)

- **Ejemplo.** Encuentre $h(n)$ a partir de $y_{zs}(n)$ para el sistema:

$$y(n)+y(n-1)-6y(n-2)=x(n) \quad [ec.1]$$

- **Solución**
  - Encontrar solución homogénea: $y_h(n) = C_1(-3)^n + C_2(2)^n \; [ec.2]$
  - Encontrar solución particular para $x(n) = \delta(n)$
    - Se considera $y_{p(n)} = K\,\delta(n) \;\; en \; [ec.1]$

$$K\delta(n) + K\delta(n-1) - 6K\delta(n-2) = \delta(n)$$

    - Evaluado para $n\geq 2$, se encuentra $K = 0 \;\Rightarrow y_p(n) = 0 \quad [ec.3]$

h(n) a partir de y_{zs}(n)

- **Solución …**
  - La solución total se obtiene sumando [ec.2] y [ec.3]:

$$y_t(n) = y_h(n) + y_p(n)$$

  - Por lo tanto:

$$y_{zs}(n) = y_t(n)\Big|_{Con.i=0} = C_1(-3)^n + C_2(2)^n \quad [ec.4]$$

  - *h*(n) se obtiene de:

$$h(n) = y_{zs}(n)\Big|_{\substack{x(n)=\delta(n)\\ Cond.inic=0}}$$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

h(n) a partir de y_{zs}(n)

- **Solución …**
  - Reemplazando $y(-1) = y(-2) = 0$, $x(n) = \delta(n)$ en [ec.1] y [ec.4]:
    - De [ec. 1]:
      - Para n=0, $y(0) = 1$
      - Para n=1, $y(1) = -1$
    - De [ec. 4]
      - Para n=0, $y_{zs}(0) = C_1 + C_2$
      - Para n=1, $y_{zs}(1) = -3C_1 + 2C_2$

$$\begin{cases} C_1 = \dfrac{3}{5} = 0{,}6 \\ C_2 = \dfrac{2}{5} = 0{,}4 \end{cases}$$

  - Por lo tanto,
      - $h(n) = y_{zs}(n)| = 0{,}6(-3)^n + 0{,}4(2)^n\,,\quad n \geq 0$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Respuesta Impulsional

h(n) a partir de la ecuación de diferencias

- La respuesta del sistema está dada por

$$y_t(n) = y_h(n) + y_p(n)$$

- Puesto que $x(n) = \delta(n)$, entonces $y_p(n) = 0$ para n>0

- Entonces, ***h*(n)** queda determinada por la **solución de la ecuación homogénea** con los parámetros $\{C_k\}$ calculados a partir de las condiciones iniciales **impuestas por el impulso**.

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

h(n) a partir de la edcc

- **Ejemplo:** Determinar *h*(n) para el sistema descrito por :

$$y(n)-3y(n-1)-4y(n-2)=x(n)+2x(n-1) \quad [ec.1]$$

- **Solución:** El sistema tiene la siguiente respuesta homogénea:

$$y_h(n)=C_1(-1)^n+C_2(4)^n \quad n\geq 0 \quad [ec.2]$$

  - Puesto que $x(n)=\delta(n)$, entonces $y_p(n)=0$ para $n>0$, y *con condiciones iniciales cero*, la respuesta $h(n)$ queda dada por:

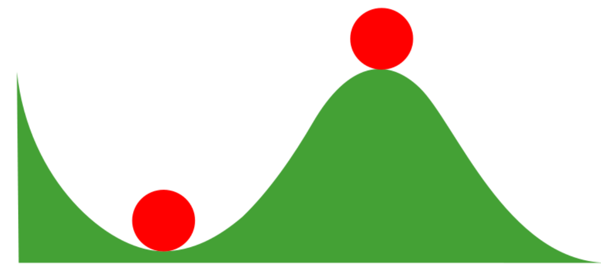
$$h(n)=y_h(n)\Big|_{c_k} \quad \text{con} \quad cond.iniciales=0 \quad \text{y} \quad x(n)=\delta(n)$$

h(n) a partir de la edcc

- **Ejemplo …**
  - Con n=0 y n=1, de [ec.1] se obtiene: $$\begin{cases} y(0)=1 \\ y(1)=3y(0)+2=5 \end{cases}$$
  - Con n=0 y n=1, de [ec.2] se obtiene: $$\begin{cases} y_h(0)=C_1+C_2 \\ y_h(1)=-C_1+4C_2 \end{cases}$$
  - Resolviendo para C_1 y C_2, se llega a: $$C_1=-\frac{1}{5}, \qquad C_2=\frac{6}{5}$$
  - Por lo tanto, la respuesta impulsional es: $$h(n)=\left[-\frac{1}{5}(-1)^n+\frac{6}{5}(4)^n\right]u(n)$$

Estabilidad a partir de la edcc

- **Introducción**
  - Es posible determinar la estabilidad de un sistema mediante el análisis de su ecuación de diferencia.
    - Las raíces del polinomio característico son indicadores directos de la estabilidad.



humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Estabilidad a partir de la E.D.

- **Fundamentación**
  - La solución de la ecuación homogénea para un sistema causal LTI de orden N cuando las raíces λ_k del polinomio característico son distintas es:

$$y_h(n) = \sum_{k=1}^{N} C_k {\lambda_k}^n$$

  - Por lo tanto, $h(n)$ debe presentar la misma forma, es decir:

$$h(n) = \sum_{k=1}^{N} C_k {\lambda_k}^n$$

  donde los C_k se determinan considerando las *condiciones iniciales iguales* a cero (estado en reposo)

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Estabilidad a partir de la edcc

- **Fundamentación …**
  - Dado que la estabilidad BIBO de un sistema causal exige que h(n) sea absolutamente sumable, se tiene,

$$\sum_{n=0}^{\infty}|h(n)| = \sum_{n=0}^{\infty}\left|\sum_{k=1}^{N} C_k \lambda_k^n\right| \leq \sum_{k=1}^{N}|C_k|\sum_{n=0}^{\infty}|\lambda_k^n|$$

  - De donde se deriva que para que el sistema sea sumable debe cumplirse que $|\lambda_k|<1$.
    - Un **sistema causal** descrito por una edlcc es **estable** si todas las **raíces** del polinomio característico son **menores que 1** en valor absoluto.
    - Condición igualmente válida para sistemas de raíces múltiples.

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Estabilidad a partir de la edcc

- **Ejemplo 1.** Determinar la estabilidad del siguiente sistema:

$$y_1(n) = -0{,}2y_1(n-1) + 0{,}37\, y_1(n-2) - 0{,}01y_1(n-3) - 0{,}0168y_1(n-4) \\ + x(n) - 0{,}9x(n-1) + 0{,}08x(n-2) + 0{,}06x(n-3)$$

- **Solución**
  - Polinomio característico:

$$\lambda^4 + 0{,}2\lambda^3 - 0{,}37\lambda^2 + 0{,}01\,\lambda + 0{,}0168 = 0$$

  - Raíces características:

$$\lambda_1 = -0{,}2,\ \lambda_2 = 0{,}3,\ \lambda_3 = 0{,}4,\ \lambda_4 = -0{,}7$$

  - Sistema Estable

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Estabilidad a partir de la edcc

- **Ejemplo 2.** Determinar la estabilidad del siguiente sistema:

$$y_2(n) = 0{,}37 y_2(n-2) - 0{,}084 y_2(n-3) + x(n) - 1{,}1x(n-1) + 0{,}3x(n-2)$$

- **Solución**
  - Polinomio característico:

$$\lambda^3 - 0{,}37\,\lambda + 0{,}084 = 0$$

  - Raíces características:

$$\lambda_1 = 0{,}3,\ \lambda_2 = 0{,}4,\ \lambda_3 = -0{,}7$$

  - Sistema Estable

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

- **Introducción**
  - El diseño de un sistema puede estar determinado por el *método de implementación* y sus restricciones en costo, tamaño, hardware y potencia.
  - Se presentan dos configuraciones **básicas** para la *realizació*n de sistemas LTI recursivos descritos mediante ecdcc.
    - Forma directa I
    - Forma directa II
  - Las configuraciones se derivan de la ecuación general de un sistema recursivo LTI:

$$y(n) = -\sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k) + \sum_{K=0}^{M} b_k x(n-k)$$

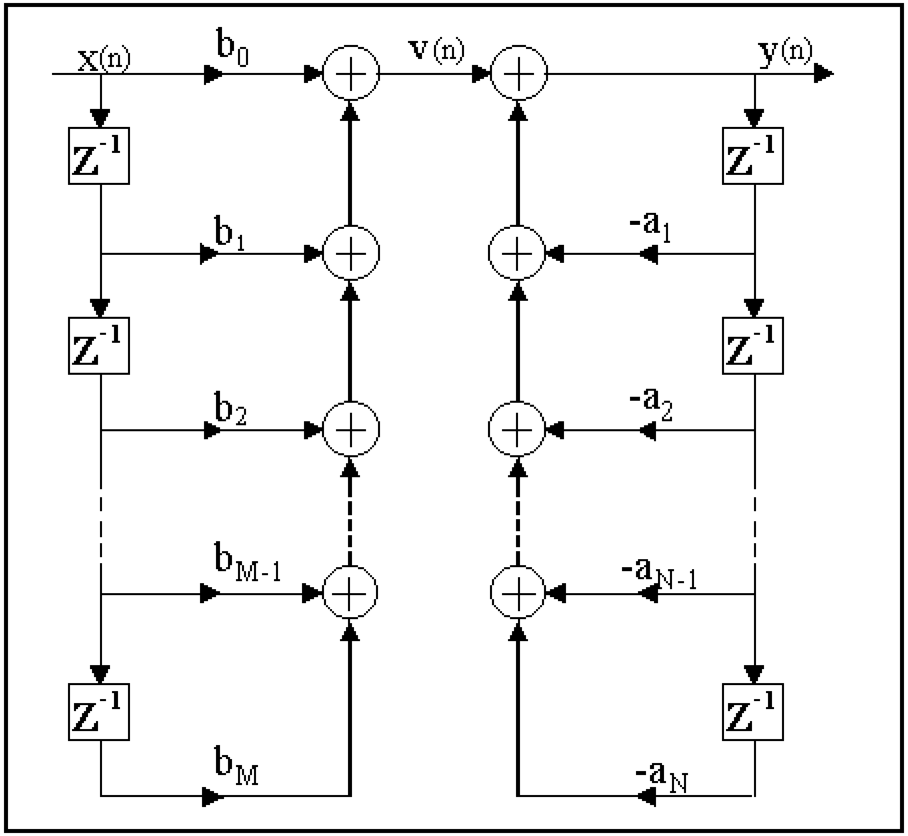
humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Forma Directa I

- La edcc se descompone en dos sub-sistemas en serie: ***no recursivo*** y ***recursivo***:

$$v(n) = \sum_{K=0}^{M} b_k x(n-k)$$

$$y(n) = -\sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k) + v(n)$$



- *Requerimientos:*
  - M+N retardadores
  - N+M+1 multiplicaciones.
  - M+N sumadores

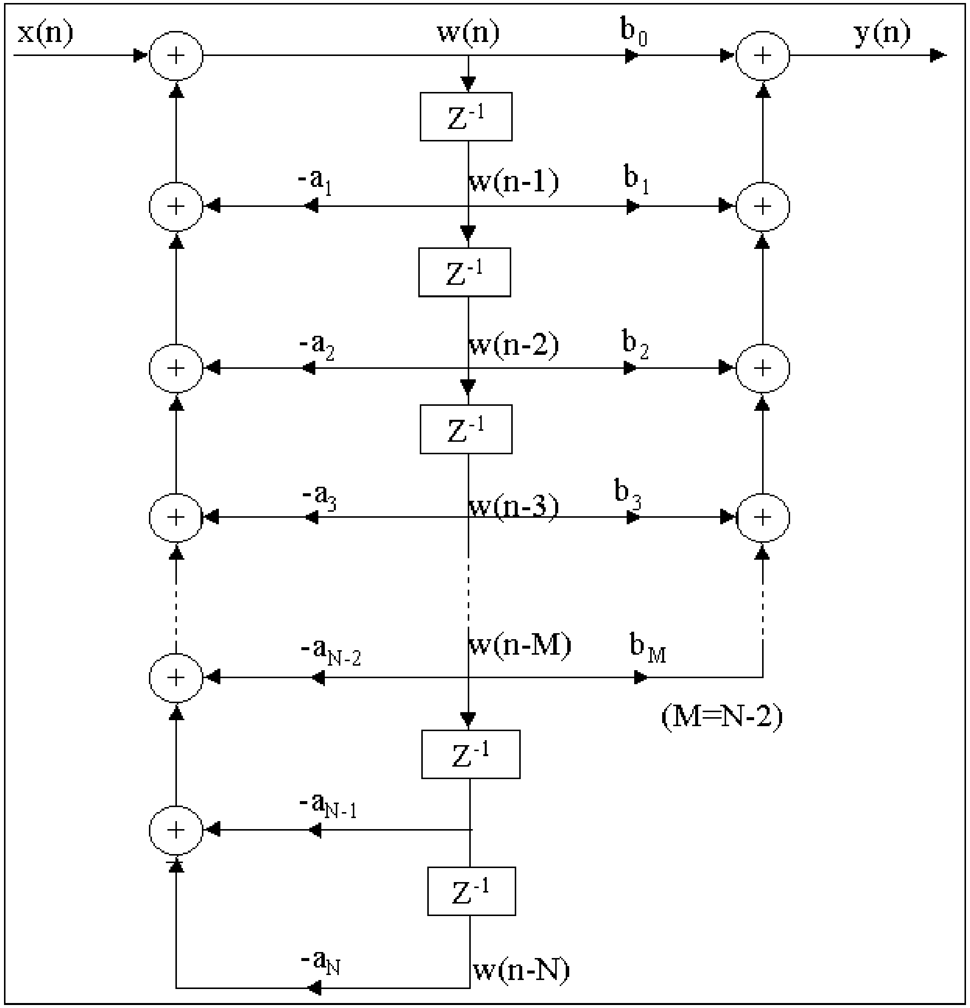
Forma Directa II

- Invierte el orden de los dos sub-sistemas de la forma I.

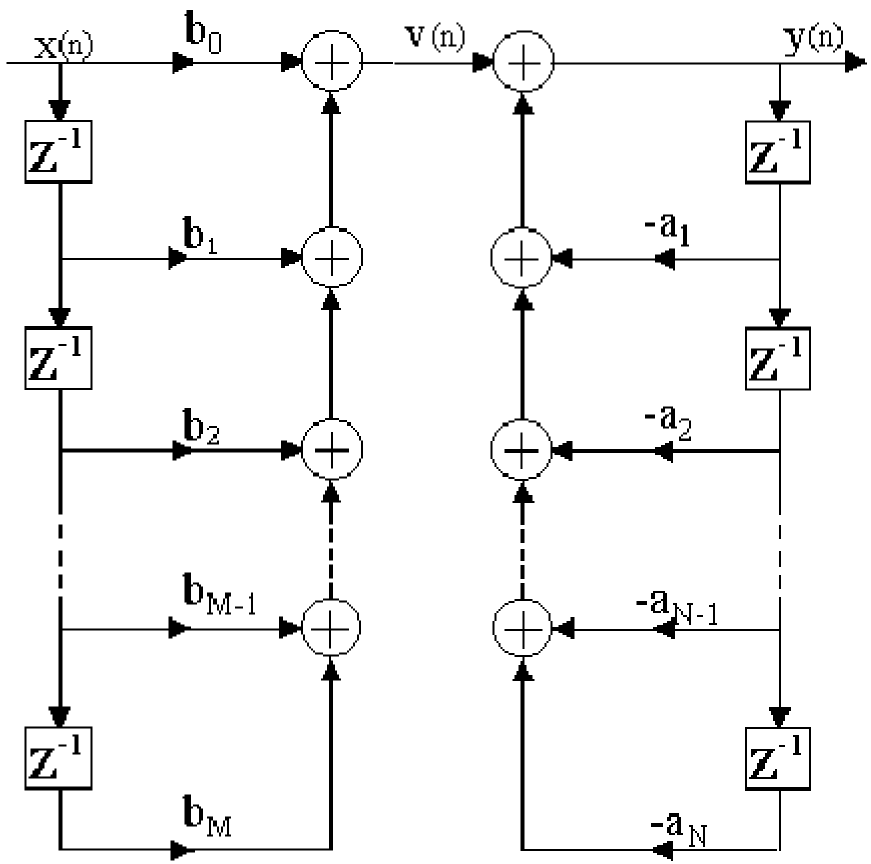
$$w(n) = -\sum_{k=1}^{N} a_k w(n-k) + x(n)$$

$$y(n) = \sum_{K=0}^{M} b_k w(n-k)$$

- *Requerimientos:*
  - max{N,M} retardadores
  - N+M+1 multiplicaciones.
  - N+M sumadores

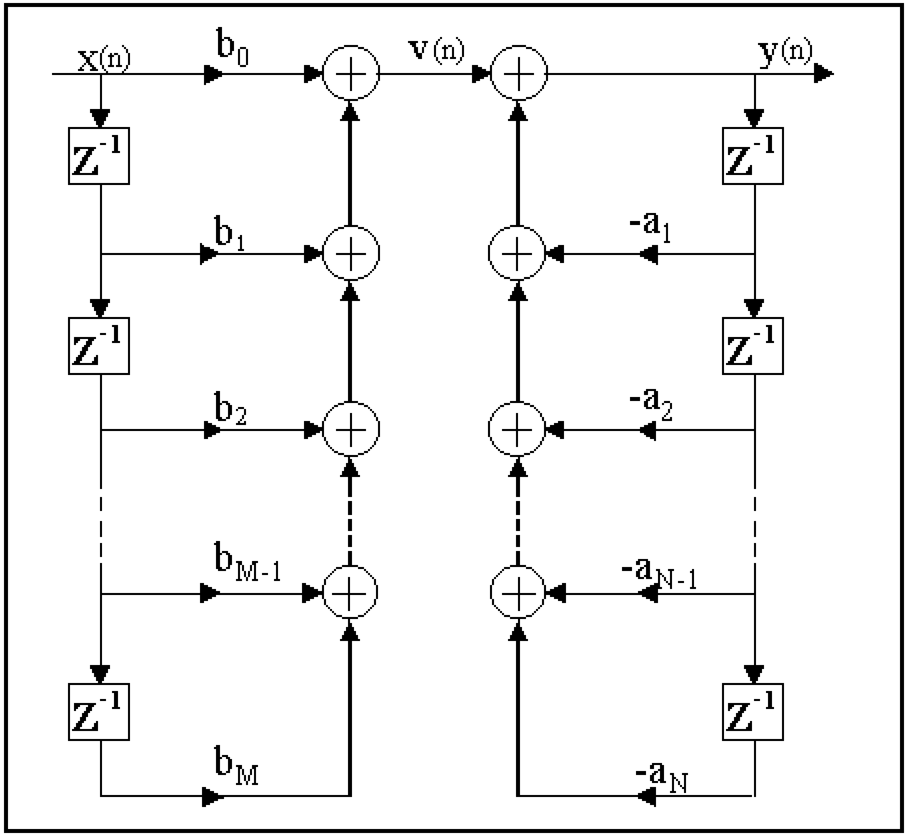


Implementación de Sistemas Discretos

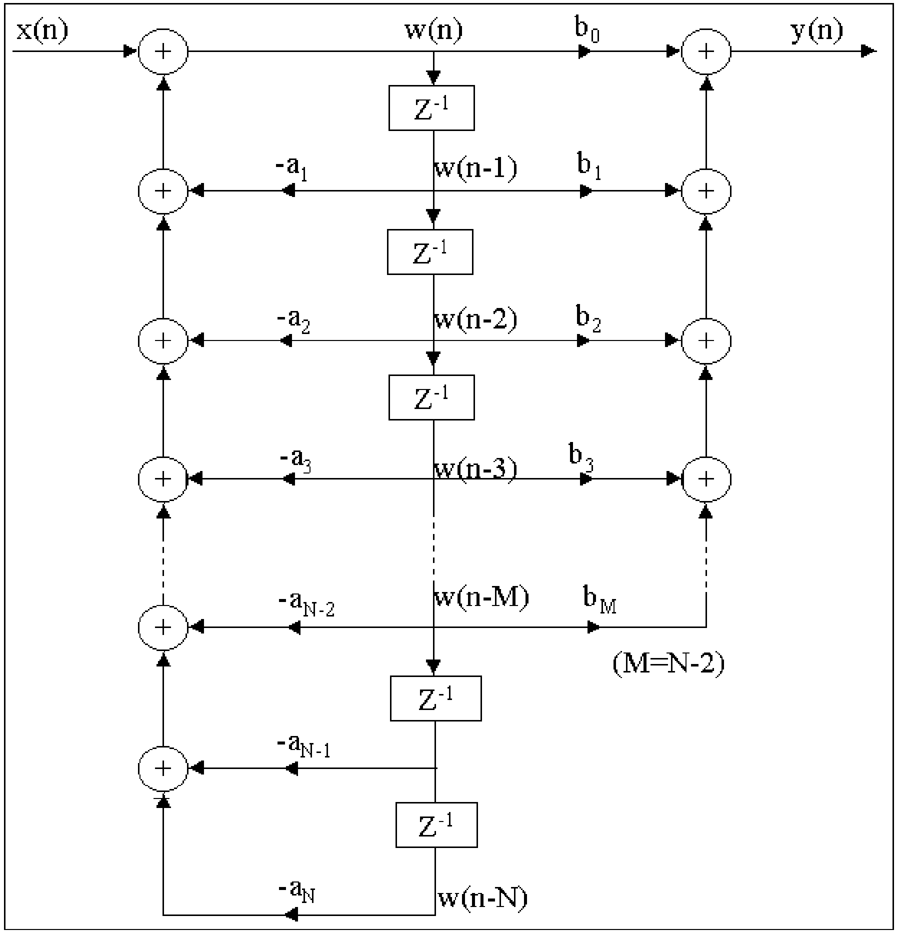


Implementación de Sistemas Discretos

Forma Directa I



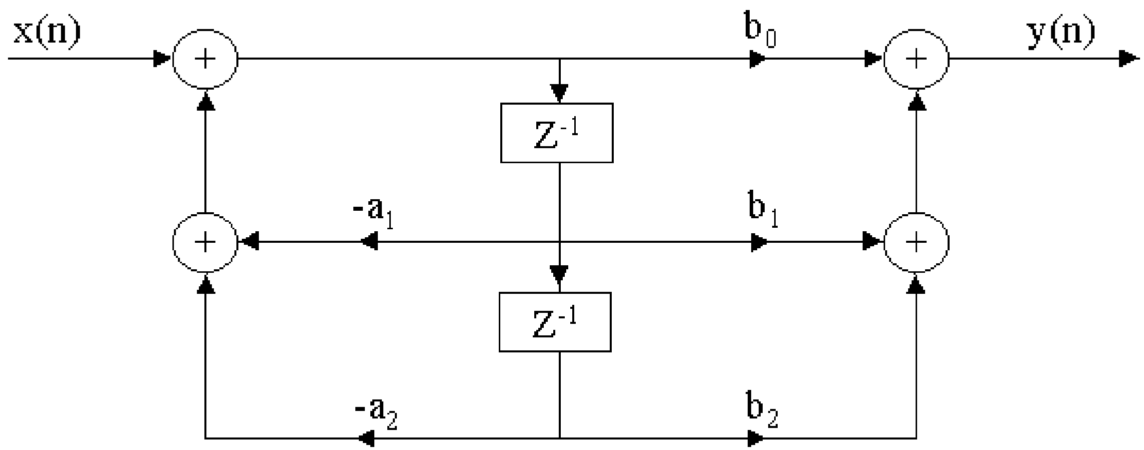
Forma Directa II



Caso Especial: Sistema de segundo orden

- Constituyen bloques elementales para realizaciones de mayor orden.
- Reducen los efectos negativos de la cuantificación en la precisión de los polos.
- **Sistema General de 2 orden**:

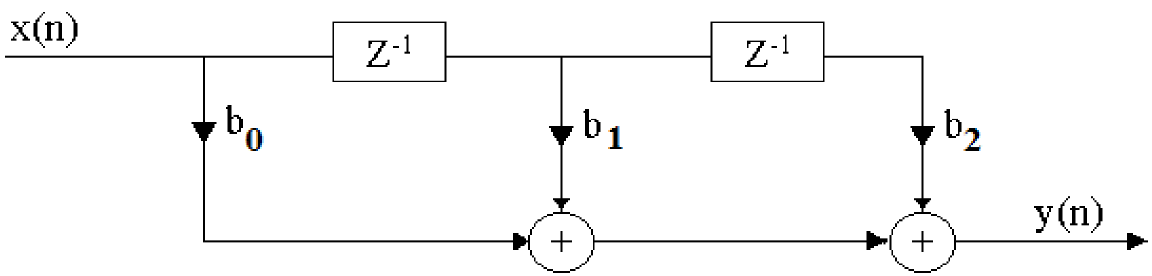
$$y(n) = -a_1\, y(n-1) - a_2\, y(n-2) + b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + b_2 x(n-2)$$



Implementación de Sistemas Discretos

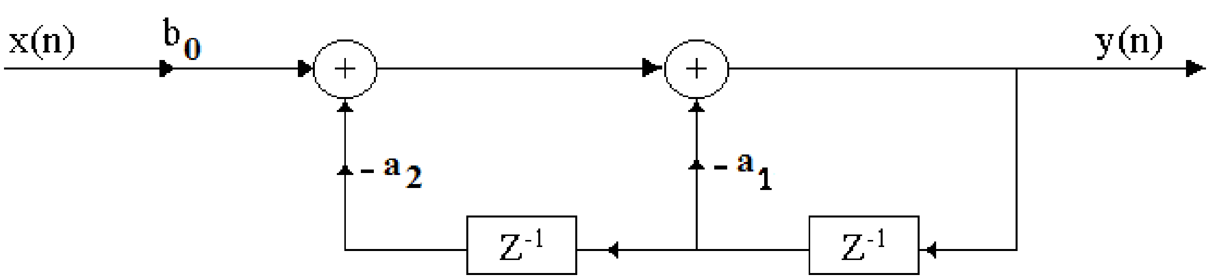
- **Sistema Especial 1:** $a_1=a_2=0$ $\Rightarrow$ **sistema FIR**

$$y(n)=b_0x(n)+b_1x(n-1)+b_2x(n-2)$$



- **Sistema Especial 2:** $b_1=b_2=0$ $\Rightarrow$ **sistema "puramente recursivo"**

$$y(n)=-a_1\,y(n-1)-a_2\,y(n-2)+b_0x(n)$$



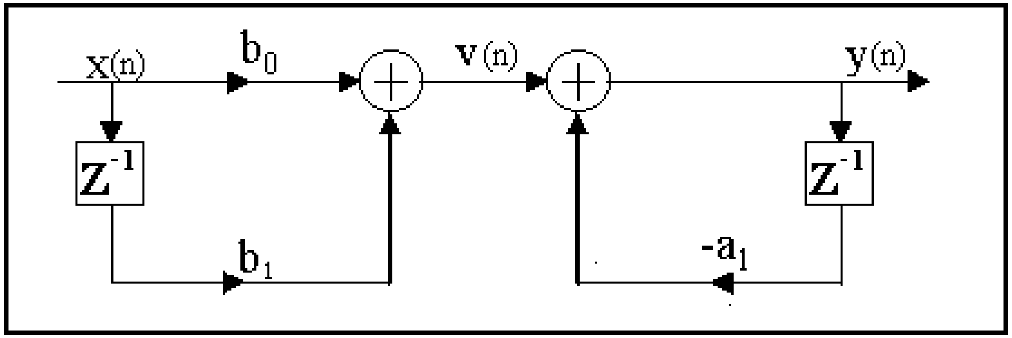
- **Ejemplo**
  - Obtenga la realización en forma directa I y II del sistema:

$$y(n) = -a_1 y(n-1) + b_0 x(n) + b_1 x(n-1)$$

- **Solución:**
  - **Forma directa I**

$$v(n) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) \quad \textit{Sist. no recursivo}$$

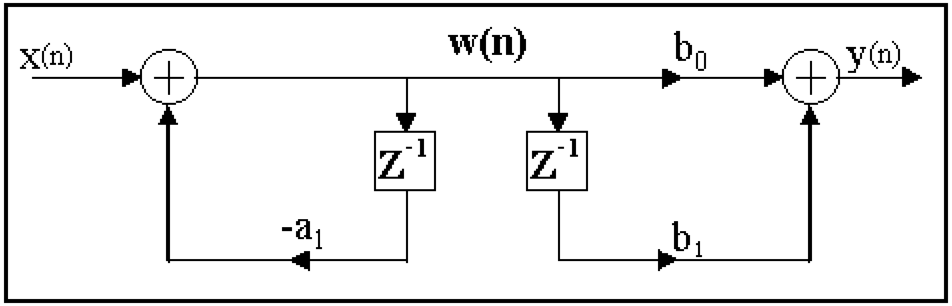
$$y(n) = -a_1 y(n-1) + v(n) \quad \textit{Sist. recursivo}$$

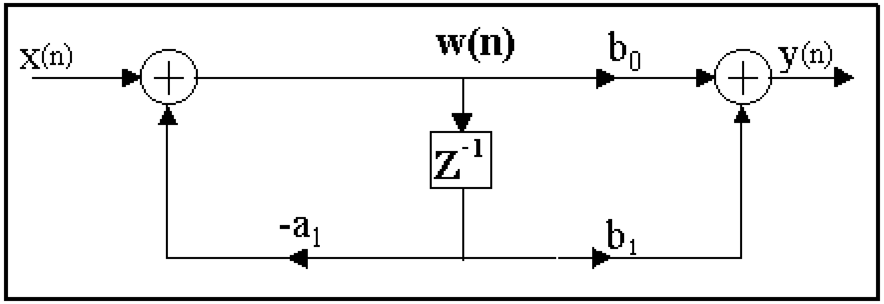


Forma directa II

Se intercambia el orden de los sistemas recursivos y no recursivos:

$$\begin{Bmatrix} w(n) = -a_1 w(n-1) + x(n) \\ \\ y(n) = b_0 w(n) + b_1 w(n-1) \end{Bmatrix}$$





humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Implementación de Sistemas FIR

- **Introducción**
  - Los sistemas FIR siempre pueden implementarse como sistemas **no recursivos**.
  - Manipulando la ecuación de diferencia de un sistema FIR siempre es posible llegar a una implementación **recursiva**.

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Implementación de Sistemas FIR

- **Ejemplo**
  - Obtener $h(n)$ y las implementación *no-recursiva* y *recursiva* del siguiente sistema FIR,

$$y(n) = \frac{1}{M+1}\sum_{k=0}^{M} x(n-k)$$

- **Solución**
  - Por comparación con la ecuación de convolución:

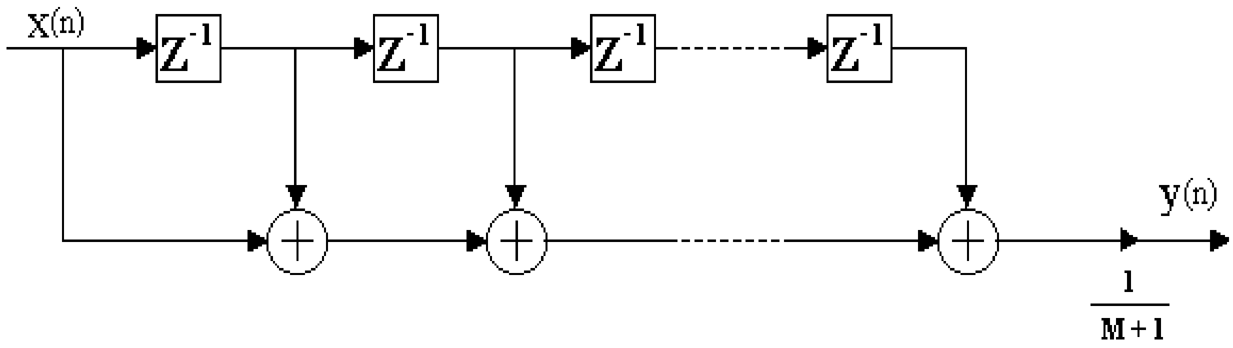
$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)\, x(n-k)$$

se desprende que *h(n)* queda determinado por:

$$h(n) = \frac{1}{M+1} \qquad 0 \le n \le M$$

- **Ejemplo …**
  - **Implementación NO-Recursiva**

$$y(n) = \frac{1}{M+1}\sum_{k=0}^{M} x(n-k)$$



- **Ejemplo…**
  - **Implementación Recursiva**

$$y(n) = \frac{1}{M+1}\sum_{k=0}^{M} x(n-k)$$

$$= \frac{1}{M+1}\{x(n) + x(n-1) + x(n-2) + x(n-3) + x(n-4) + \ldots + x(n-(M-1)) + x(n-M)\}$$

$$y(n-1) = \frac{1}{M+1}\sum_{k=0}^{M} x(n-1-k)$$

$$= \frac{1}{M+1}\{x(n-1) + x(n-2) + x(n-3) + x(n-4) + \ldots + x(n-1-(M-1)) + x(n-1-M)\}$$

$$y(n) = y(n-1) + \frac{1}{M+1}\left[x(n) - x(n-1-M)\right]$$

Implementación de Sistemas FIR

- **Ejemplo …**
  - **Implementación Recursiva …**

$$y(n) = y(n-1) + \frac{1}{M+1}\left[x(n) - x(n-1-M)\right]$$