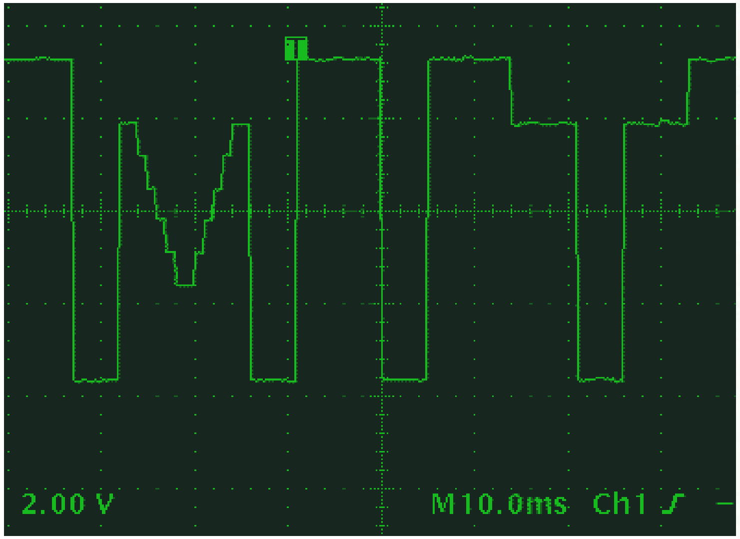
Introducción

- Definición de Filtrado

  Proceso o algoritmo computacional que convierte una secuencia de números (señal de entrada) en otra secuencia de números (señal de salida), y en el cual la conversión cambia el carácter de la señal en una forma predeterminada.



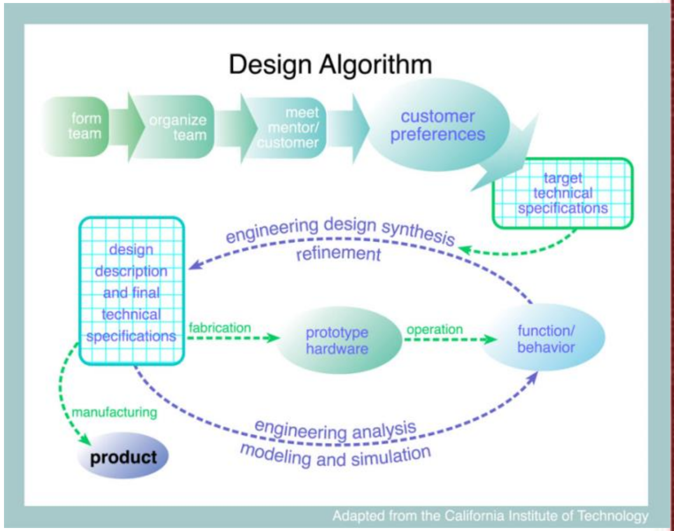
PSI Percepción y Sistemas Inteligentes

Introducción…

- **Definición de Diseño**

- Proceso para determinar los coeficientes del algoritmo de entrada/salida, mediante un procedimiento de aproximación.

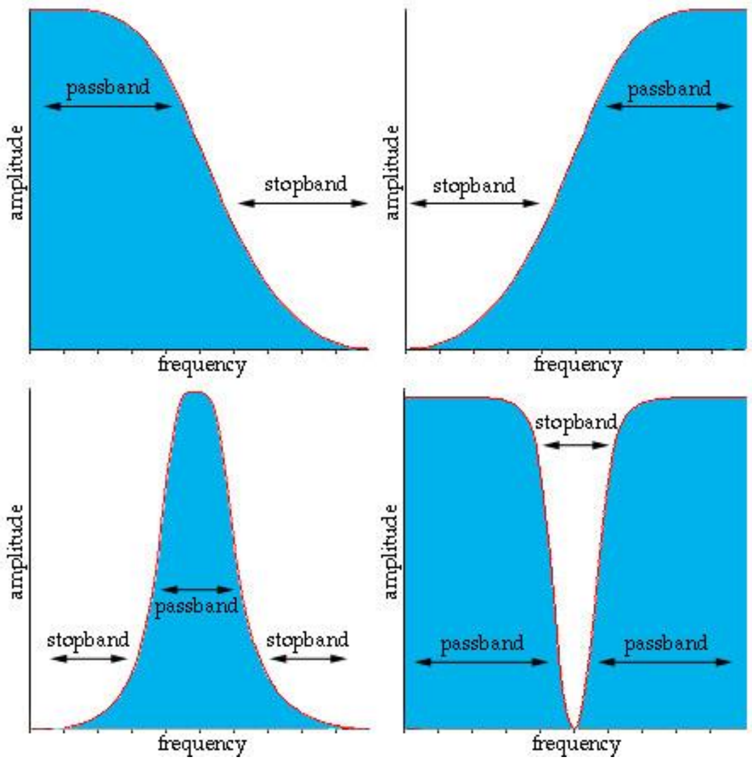
- Proceso para determinar $H(w)$, $H(z)$, $h(n)$ o la ecuación de diferencia que pueda cumplir los requerimientos de filtrado de señal.



- **Introducción…**
  - **Clasificación**

    De acuerdo con las *características de su respuesta en frecuencia.*

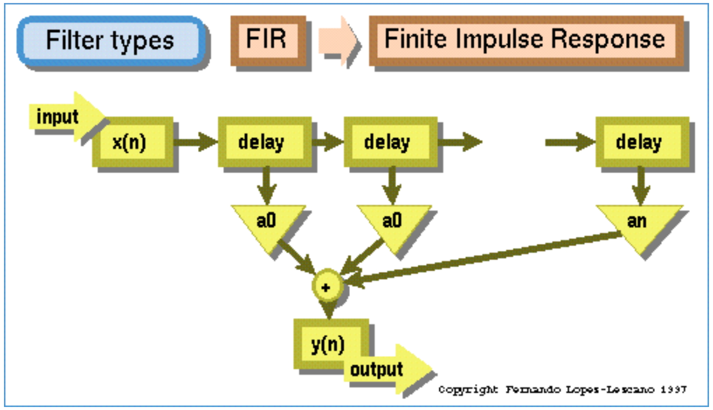
    - Filtros Paso-Bajo
    - Filtros Paso-Alto
    - Filtros Banda de Rechazo
    - Filtros Banda de Paso

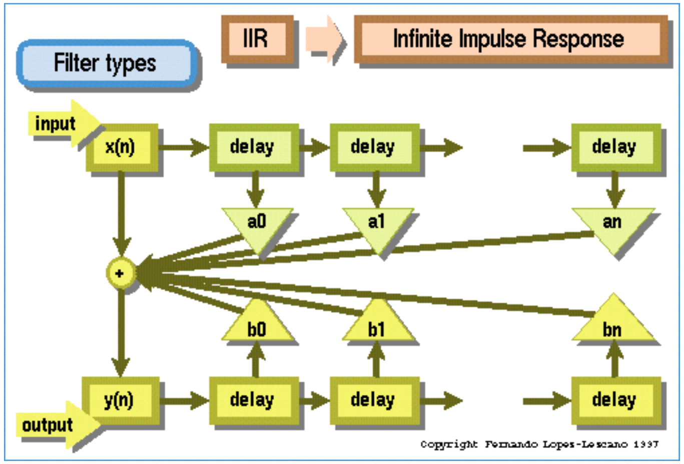


- **Introducción…**
  - **Clasificación …**

    Dependiendo de la *duración de la respuesta al impulso*

    - De Respuesta Impulsional Finita (FIR)
    - De Respuesta Impulsional Infinita (IIR)





- **Introducción…**
  - **Realizaciones (Puesta en operación)**
    - **Dominio del Tiempo**
      - Realización Recursiva (preferido para Filtros IIR)
      - Realización No-Recursiva (preferido para Filtros FIR)
    - **Dominio Frecuencial**
      - Realización vía Transformada de Fourier

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

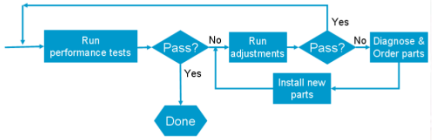
Diseño de Filtros Digitales LTI

Procedimiento de Diseño

1. Determinar una respuesta o un conjunto de respuestas deseadas (p.e. la respuesta de magnitud y/o fase deseada).

2. Seleccionar una clase de filtros para aproximar la respuesta deseada (p.e. Filtros FIR o IIR)

3. Establecer un criterio de "aceptabilidad" para la respuesta obtenida comparada con la deseada.



Diseño de Filtros Digitales LTI

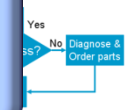
Procedimiento de Diseño…

4. Desarrollar un método para encontrar el mejor miembro de la clase de filtros seleccionada.

5. Sintetizar el mejor filtro usando una estructura y una forma de implementación apropiadas (p.e. un programa de computador, un dsp, o un chip VLSI).

6. Analizar el desempeño (performance) del filtro.

El procedimiento anterior es frecuentemente iterativo hasta que se satisfagan los requerimientos de la aplicación particular.



- **Consideraciones de Causalidad**
  - **Teorema de Paley-Wiener**.
    - Establece las condiciones suficientes y necesarias que debe satisfacer una característica de respuesta en frecuencia H(w) para que el filtro resultante sea causal.
    - Si h(n) tiene energía finita y h(n) = 0 para n < 0, entonces debe cumplirse que:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left| \ln \left| H(w) \right| \right| dw < \infty$$

- **Teorema de Paley-Wiener**…
  - Recíprocamente y si además se cumple que |H(*w*)| es *cuadráticamente integrable*, es decir:

$$\ldots |H(w)|^2 \, dw \ldots$$

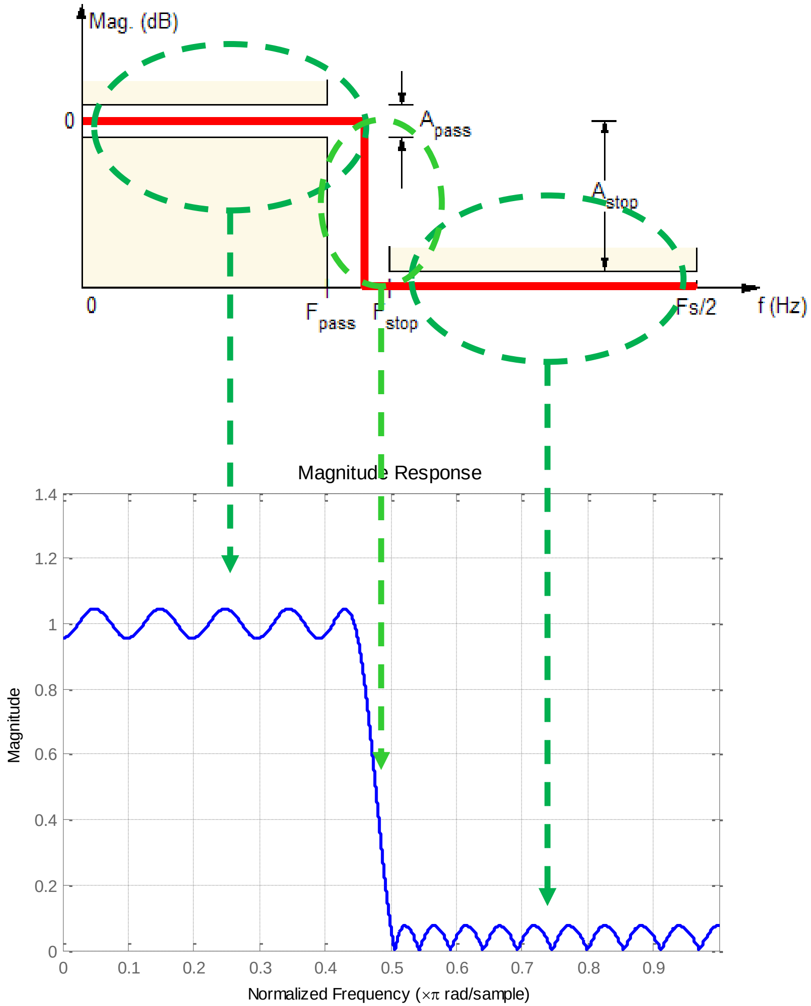
e… rse a |H(*w*)…),
d… o resultante… a,

$$H(w)=|H(w)|e^{j\Theta(w)} \quad \text{sea causal !!!}$$

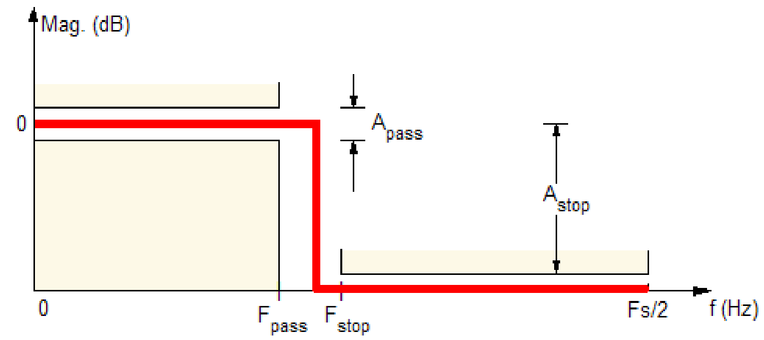
■ Consideraciones de Causalidad...

Implicaciones Tma de Paley-Wiener

- |H(w)| **no** puede ser **constante** sobre ninguna **banda finita** de frecuencias.
- H(w) **puede ser cero** en algunas frecuencias, **pero no** puede serlo sobre cualquier **banda finita** de frecuencias.
- La **banda de transición** no puede ser **infinitamente abrupta**.

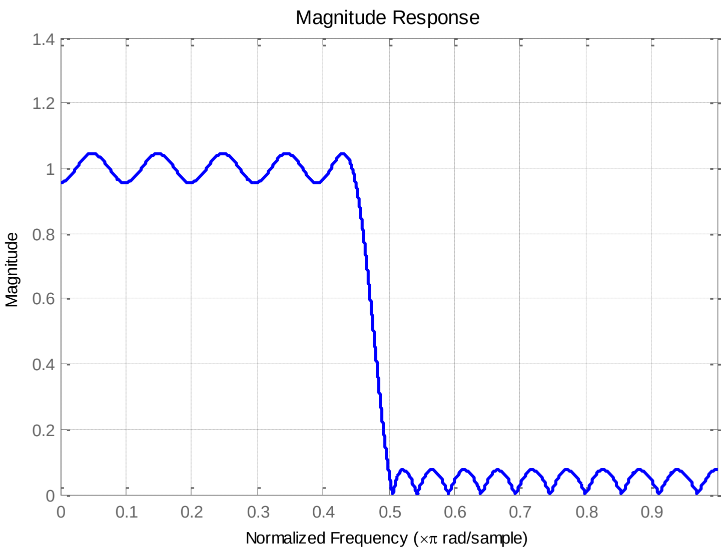


Consideraciones de Causalidad...



Implicaciones Tma de Paley-Wiener

- Lo anterior significa que:
  - Cualquier **filtro ideal** es **no causal**
  - Los filtros ideales **no son** físicamente **realizables**



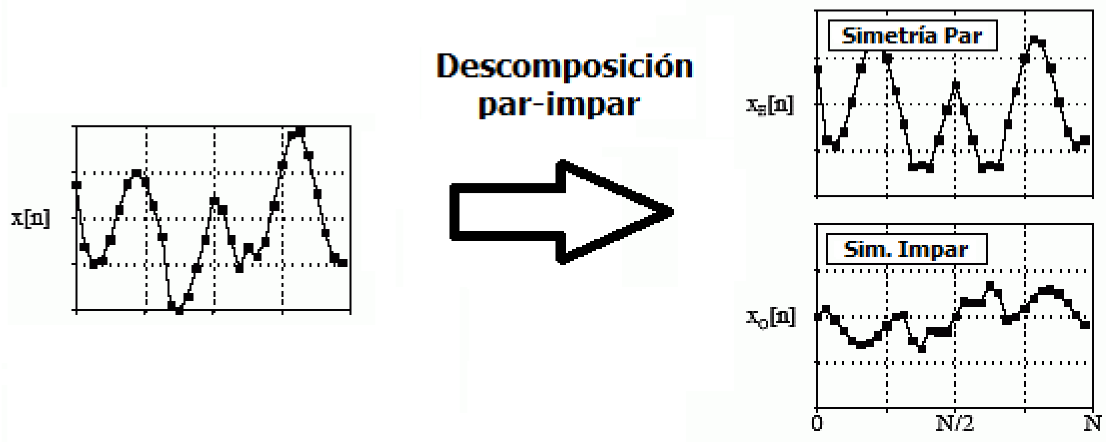
- **Consideraciones de Causalidad: Dependencia entre $H_R(w)$ y $H_I(w)$.**

  - Para ilustrar la dependencia se descompone h(*n*) en una secuencia par y otra impar,

$$h(n) = h_e(n) + h_o(n)$$

$$h_e(n) = \frac{1}{2}\left[h(n) + h(-n)\right]$$

$$h_o(n) = \frac{1}{2}\left[h(n) - h(-n)\right]$$



- **Consideraciones de Causalidad:**

Dependencia entre H_R (*w*) y H_I (*w*).

- Si h(*n*) es causal, es posible recuperarla sólo a partir de su parte par o impar [con h(0)].

  - Par: $h(n) = 2h_e(n)\,u(n) - h_e(0)\delta(n) \quad 0 \le n \le \infty$

  - Impar: $h(n) = 2h_o(n)\,u(n) + h(0)\delta(n) \quad 1 \le n \le \infty$

- De lo anterior se desprende que $h_o(n) = h_e(n)$ para $n \ge 1$, lo que implica una fuerte relación entre $h_o(n)$ y $h_e(n)$.

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

- **Consideraciones de Causalidad:**

Dependencia entre $H_R(w)$ y $H_I(w)$…

- Si h(n) es absolutamente sumable (estable BIBO), existe la respuesta H(w) dada por,

$$H(w) = H_R(w) + j\ H_I(w)$$

- Si h(n) es real y causal, las propiedades de simetría de la T.F implican que,

$$h_e(n) \overset{F}{\longleftrightarrow} H_R(w) \qquad\qquad h_o(n) \overset{F}{\longleftrightarrow} H_I(w)$$

- Dado que h(n) se especifica completamente a partir de h_e(n), entonces H (w) se específica completamente a partir de H_R(w).

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

- **Consideraciones de Causalidad:**

Dependencia entre $H_R(w)$ y $H_I(w)$…

- Para un sistema causal, $H_R(w)$ y $H_I(w)$ son interdependientes y no se pueden especificar independientemente.
  - Igual para $|H(w)|$ y $\Phi(w)$

- La relación entre $H_R(w)$ y $H_I(w)$ está dada por la T. Discreta de Hilbert

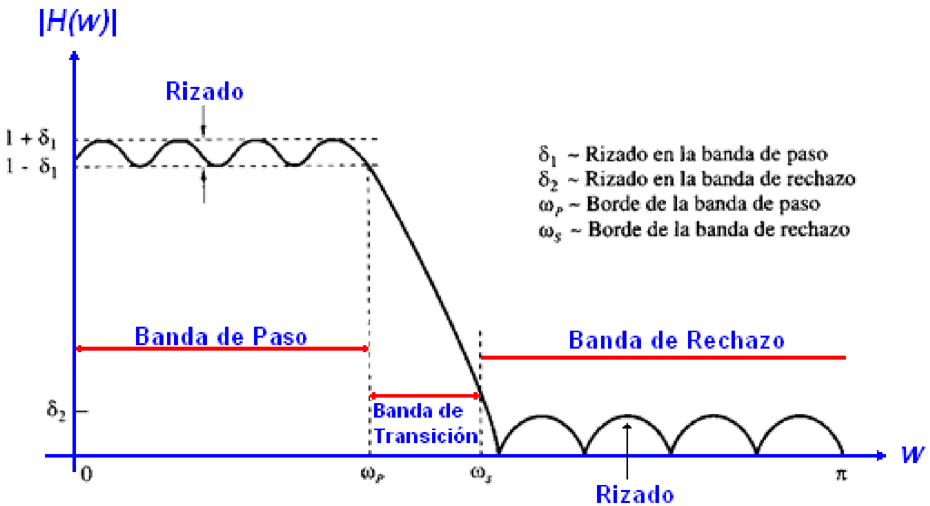
$$H_I(w) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_R(\lambda)\ \cot\left(\frac{w-\lambda}{2}\right) d\lambda$$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Características de Filtros Prácticos

Especificaciones de diseño

- Máximo rizado en la banda de paso [δ_1]
- Máximo rizado en la banda de rechazo [δ_2]
- Frecuencia de corte en la banda de paso [w_p]
- Frecuencia de corte en la banda de rechazo [w_s]
- Banda de transición: 10%-90%



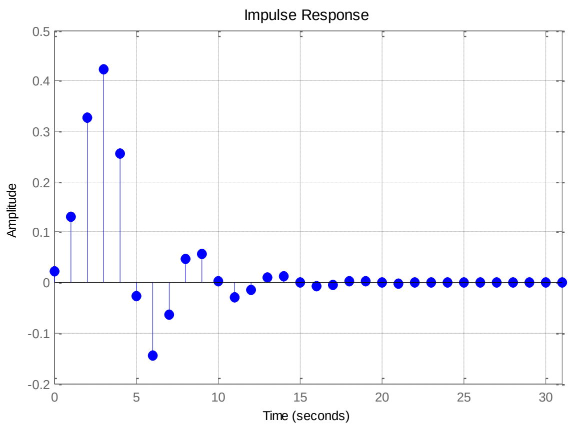
Exactitud del Diseño

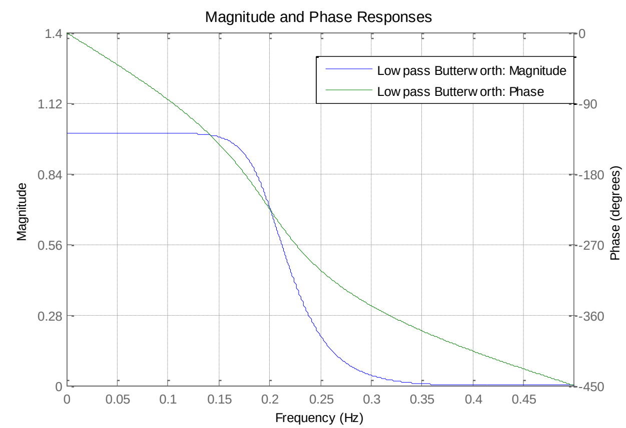
- **Criterio** de **optimización** para determinar los coeficientes del filtro.
- El **orden** del numerador y denominador de la función de transferencia.

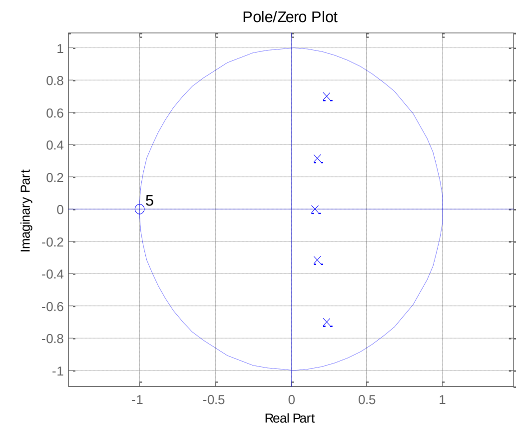
humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Filtros: Dominios de Representación

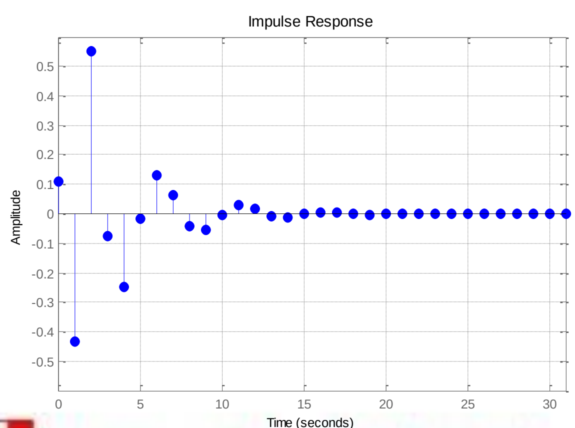
Filtro Paso Bajo (IIR)

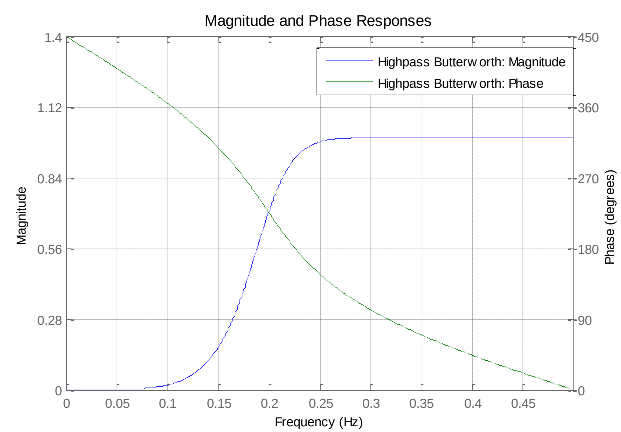


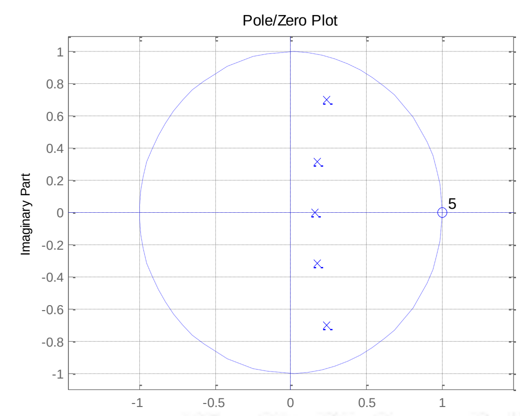




Filtro Paso Alto (IIR)

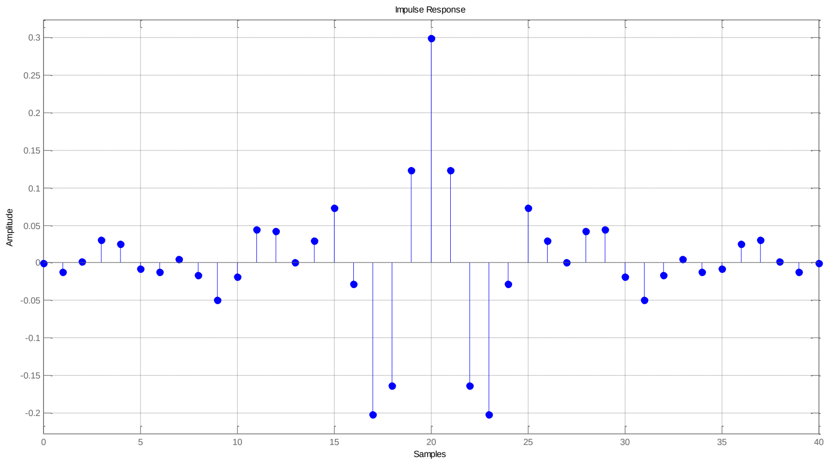


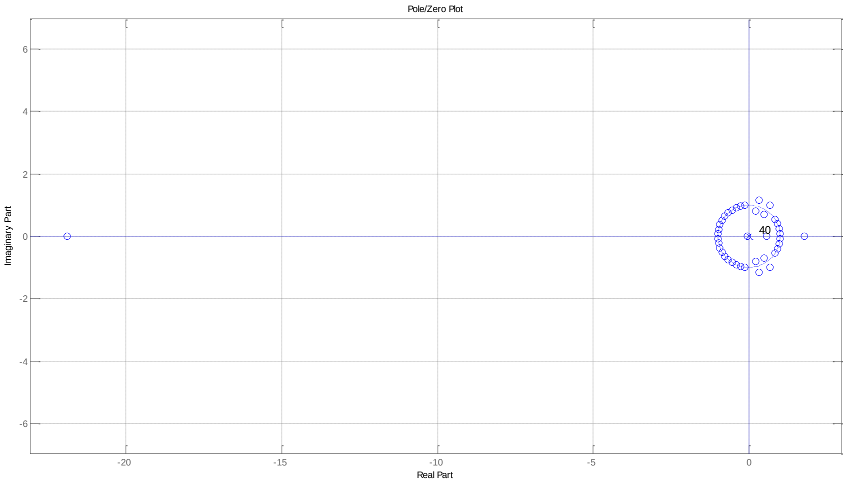


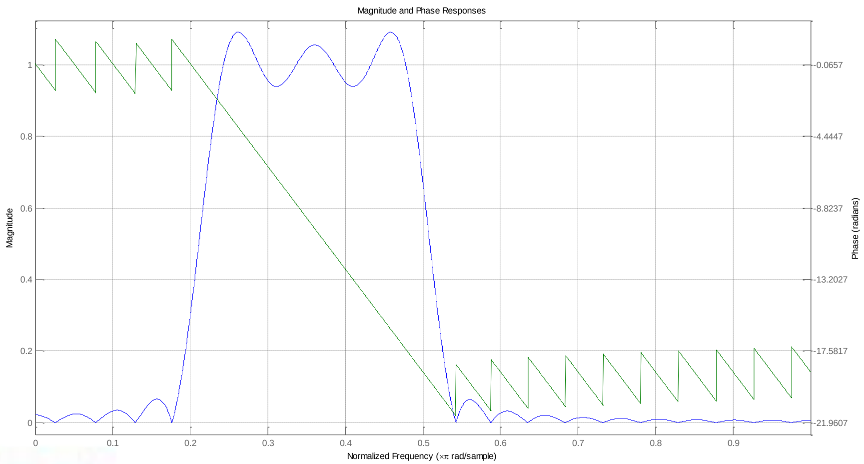


Filtros: Dominios de Representación

■ Filtro Banda de Paso – FIR

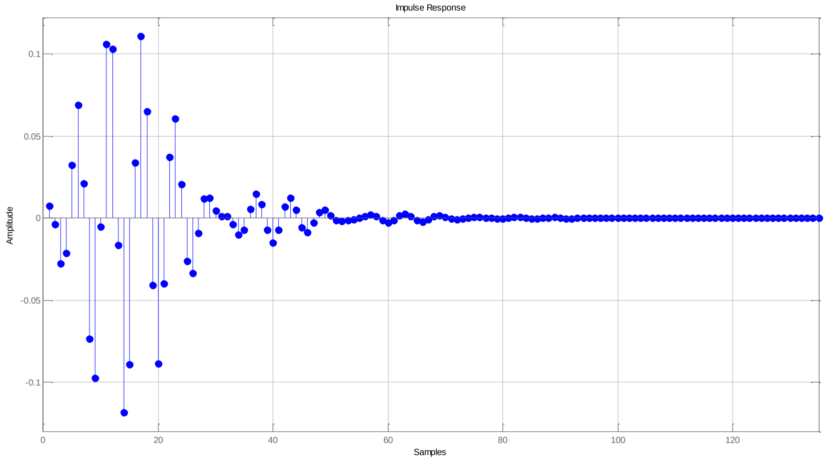


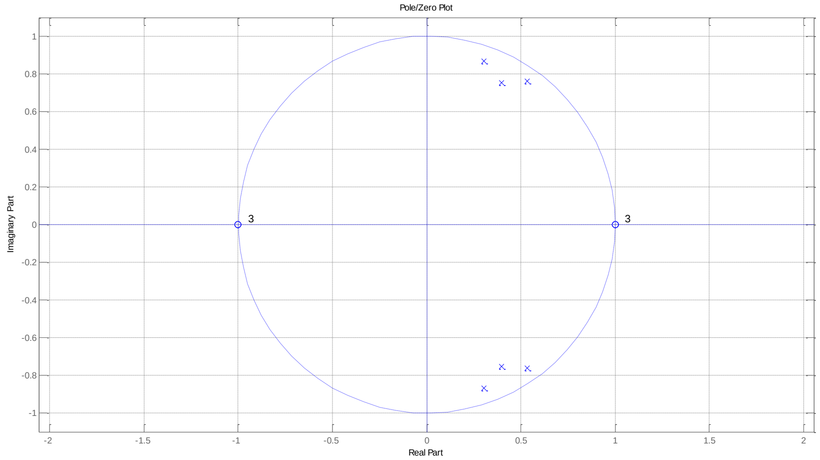


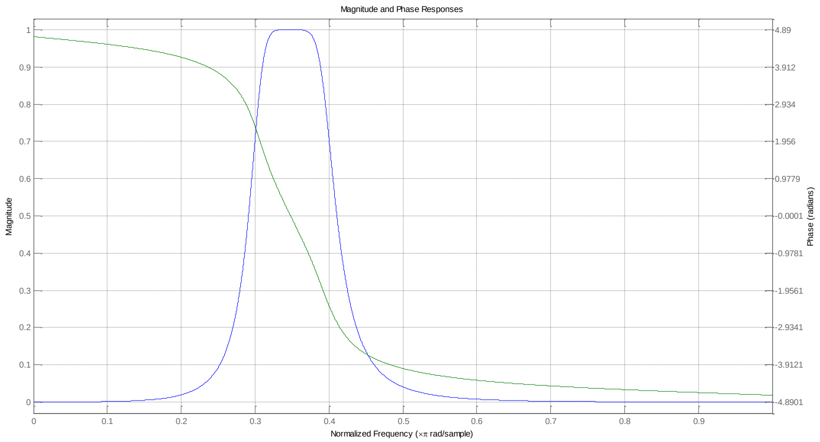


Filtros: Dominios de Representación

Filtro Banda de Paso - IIR



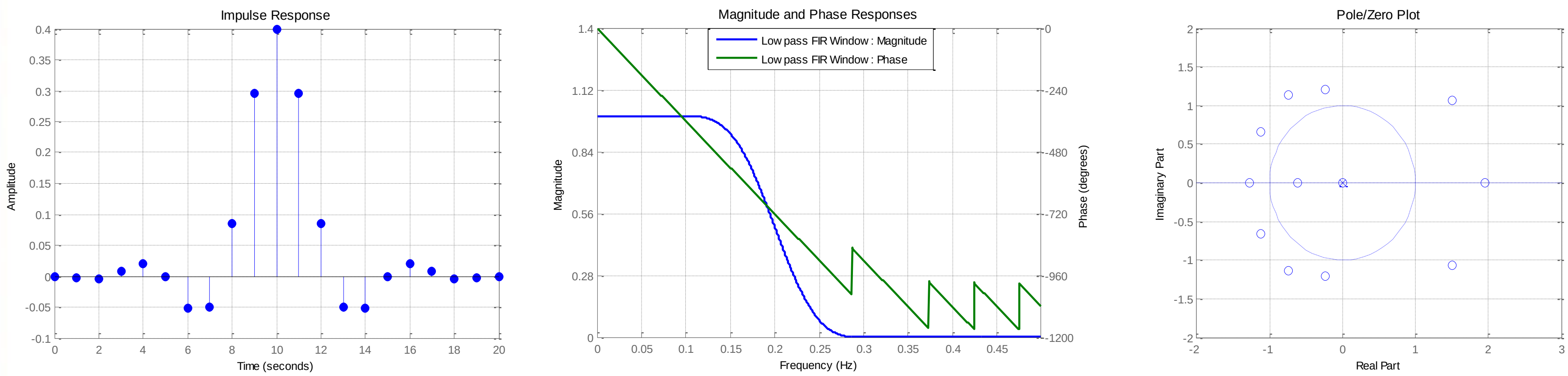




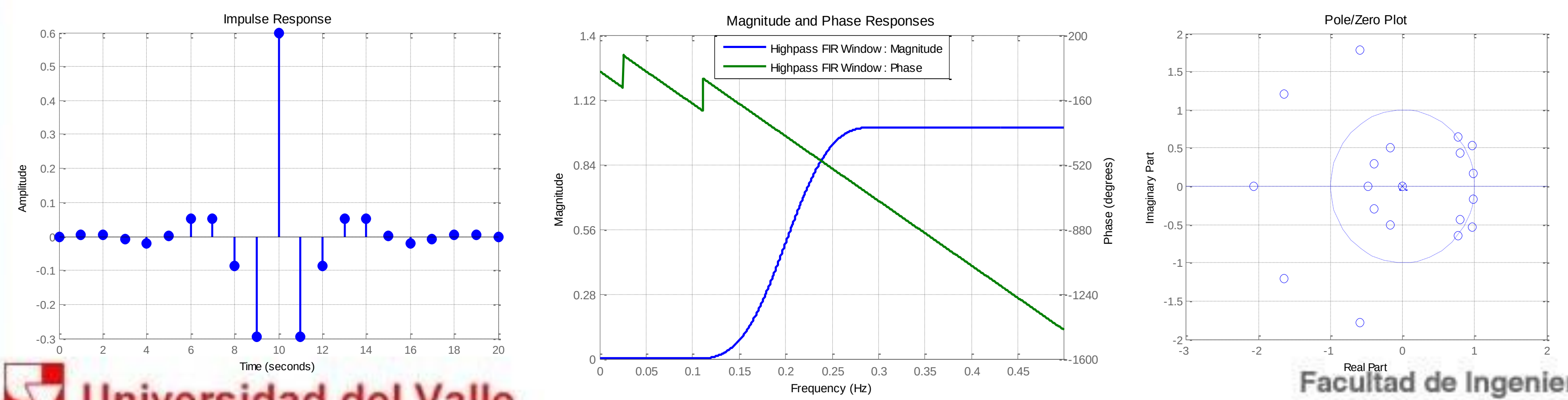
humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Filtros: Dominios de Representación

Filtro Paso Bajo (FIR)



Filtro Paso Alto (FIR)

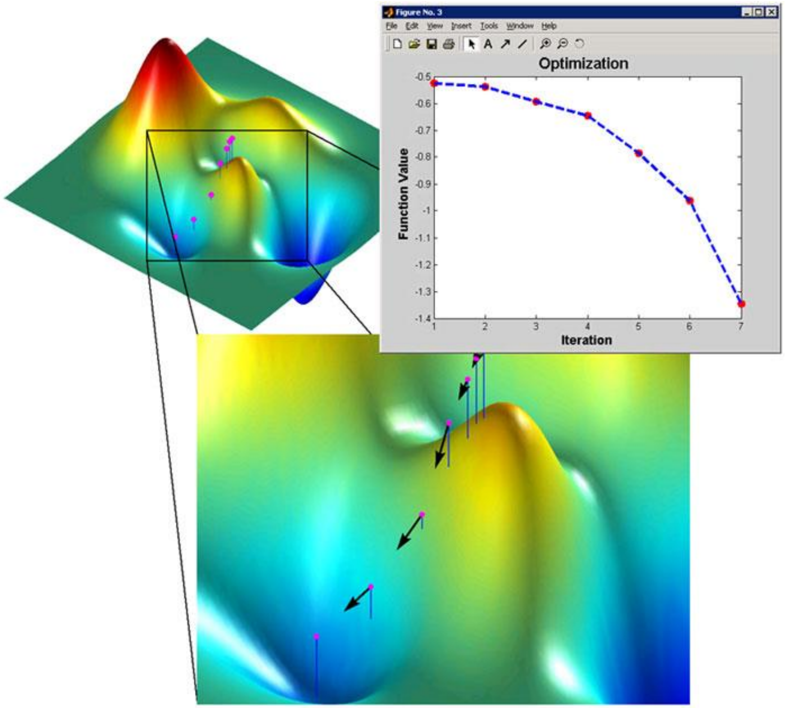


Criterios de Aproximación de Filtros Digitales

■ Introducción

- En el diseño es necesario optimizar el comportamiento en el dominio frecuencial de un filtro sujeto a unas condiciones.

- Condiciones del dominio del tiempo:
  - Valores determinados en la respuesta impulsional.
  - Limitación del sobresalto en la respuesta al impulso o al escalón.
  - Instantes de duración de h(n)



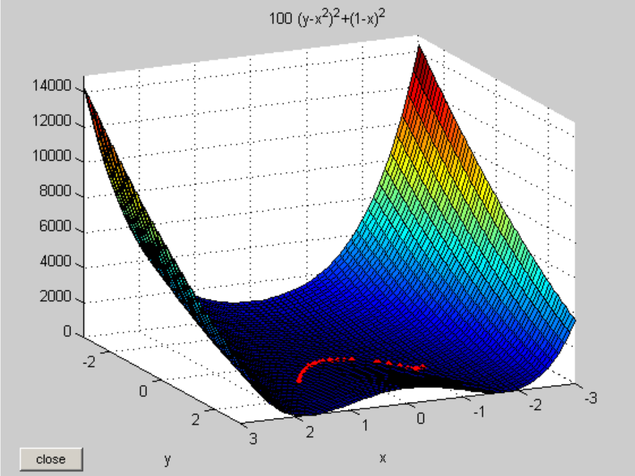
Introducción…

- Normalmente se utilizan en el diseño de filtros tres medidas de error como criterio a optimizar :
  - Error MinMax (minimax error)
  - Error de mínimos cuadrados (least-squared error)
  - Máxima planidad (maximally flat)
- Existen técnicas de diseño que no usan directamente criterios de optimización.
  - Ej. Diseño de filtro por enventanado, Método directo.

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Criterio: Error MinMax (minmax error)

- **Objetivo**
  - Optimizar los coeficientes de la respuesta en frecuencia para minimizar el error máximo entre la respuesta obtenida y la deseada.
    - La solución que minimiza la función de error se denomina aproximación minmax o de Chebyshev.



- Se busca minimizar su valor absoluto pico de la función de error ponderado

$$E(w) = W(w)\left[H_d(w) - H(w)\right]$$

sobre todo el dominio de definición S de w, *es decir:*

$$\varepsilon = \max_{w \in S} \left| E(w) \right|$$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Criterio: Error MinMax (minmax error)

- Procedimiento: Para un valor máximo permitido de ε,
  - Primero se encuentra el orden mínimo del filtro para satisfacer el criterio.
  - Luego se optimizan los coeficientes de H(w) del filtro de orden mínimo para minimizar ε.
- Casos:
  - Diseño de filtros IIR elípticos (Cauer)
  - Diseño de filtros FIR de fase lineal con rizado constante

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Criterio: Error de Mínimos Cuadrados (least-squared error)

- **Objetivo**

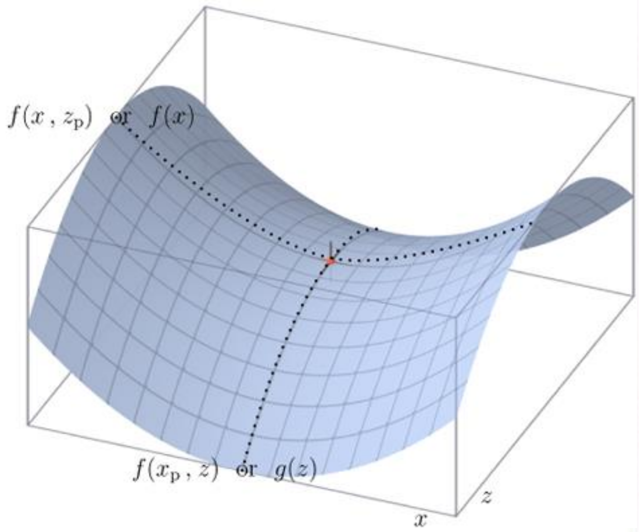
  - Optimizar los coeficientes de la respuesta en frecuencia para minimizar la norma de error Lp (Least p).

- **Procedimiento:** para la función de error ponderado E(*w*)

$$E(w)=W(w)[H_d(w)-H(w)]$$

Se busca minimizar la integral del error elevado a una potencia ***p*** positiva entera:

$$E_p=\int_S E(w)^p\ dw$$



Criterio: Error de Mínimos Cuadrados (least-squared error)

- **Casos:**
  - **Filtros IIR**: se explota el hecho de que cuando $p \to \infty$ la solución se aproxima a la solución minmax.
  - **Filtros FIR**: solo es de interés la norma L2 por su efectividad.

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

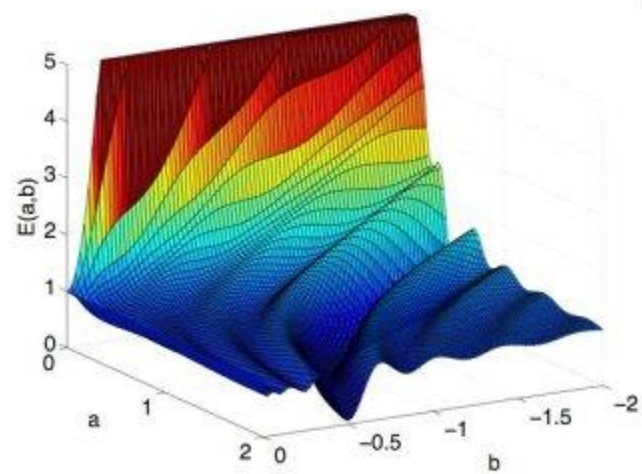
Criterio: Máxima Planidad (maximally flat)

- **Objetivo**

  - Obtener filtros con una respuesta máximamente plana alrededor de unas frecuencias establecidas.

  - Generalmente se seleccionan dos valores de H(w) en dos frecuencias: una en la banda de paso $w=0$ y otra en la banda de rechazo $w=\pi$.

  - Filtros simples de diseñar y se utilizan donde se desee conservar la señal casi sin error cerca de la frecuencia cero.



Criterio: Máxima Planidad (maximally flat)

- **Procedimiento**

  Las respuestas de los filtros se obtienen a partir de las series de Taylor para lograr coincidir la respuesta en las frecuencias especificadas.

- El filtro se expresa como:

$$H(w) = \sum_{n=0}^{\frac{M-1}{2}} \alpha(n) \cos^n w$$

y al satisfacer que:

H(w) tenga 2K ceros en $w=\pi$ y 2L ceros en $w=0$

se logra que :

H($w=0$)=1 y H($w=\pi$)=0

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Criterio: Máxima Planidad (maximally flat)

- **Procedimiento …**
  - Para M=2(K+L)-1 se obtiene:

$$H(w) = \cos^{2K}\left(\frac{w}{2}\right) \sum_{n=0}^{L-1} d[n] sen^{2n}\left(\frac{w}{2}\right) \quad \text{y} \quad H(w) = 1 - \sin^{2K}\left(\frac{w}{2}\right) \sum_{n=0}^{K-1} \bar{d}[n] \cos^{2n}\left(\frac{w}{2}\right)$$

$$donde \quad d[n] = \frac{(K-1+n)!}{(K-1)!\, n!} \quad , \quad \bar{d}[n] = \frac{(L-1+n)!}{(L-1)!\, n!}$$

donde L y K son los parámetros a determinar a partir de las especificaciones de diseño. (pg.195 Mitra y Kaiser 1993)

Retardo de Grupo

Retardo de Grupo

- El retardo de grupo τ_g se define como:

$$\tau_g = -\frac{d\Theta(w)}{dw}$$

  - Donde, $\Theta(w)$ es la fase de la respuesta en frecuencia del sistema
  - τ_g tiene unidades de tiempo.

- Se interpreta como el retardo temporal que sufre una componente de señal de frecuencia w al pasar de la entrada a la salida del sistema.

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Retardo de Grupo

- **Retardo de Grupo…**
  - Generalmente la salida $y(n)$ de un filtro práctico presenta un retardo con respecto a la señal de entrada $x(n)$.
  - Muchas aplicaciones requieren que todos los componentes frecuenciales de la señal de entrada sufran un mismo retardo n_0.
    - Se logra si el filtro presenta en su banda de paso una fase $\Theta(w)$ lineal,

$$\Theta(w) = -w\, n_0$$

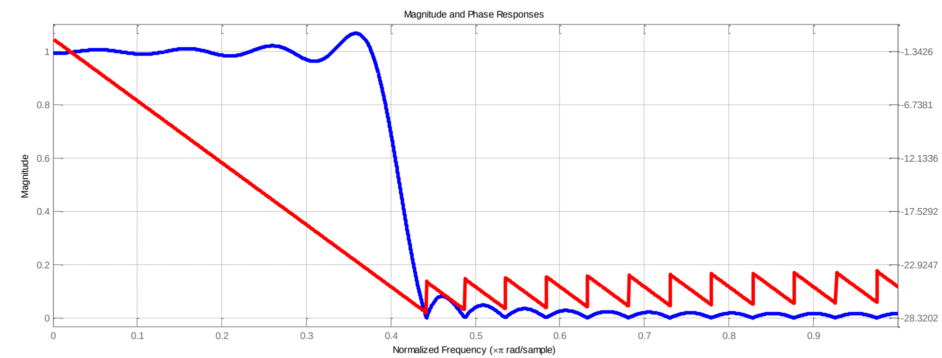
    - Puesto que,

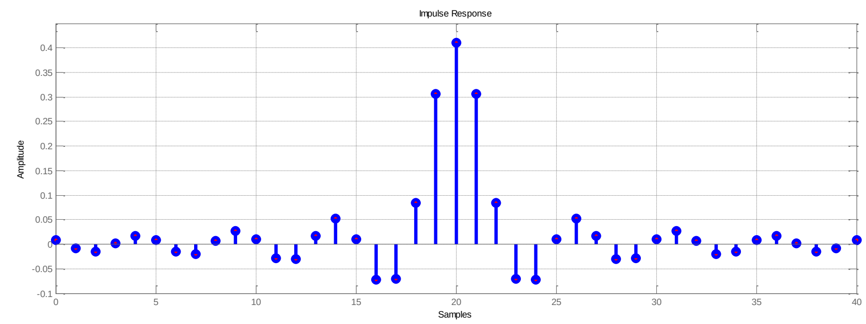
$$\tau_g = -\frac{d\Theta(w)}{dw} = n_0$$

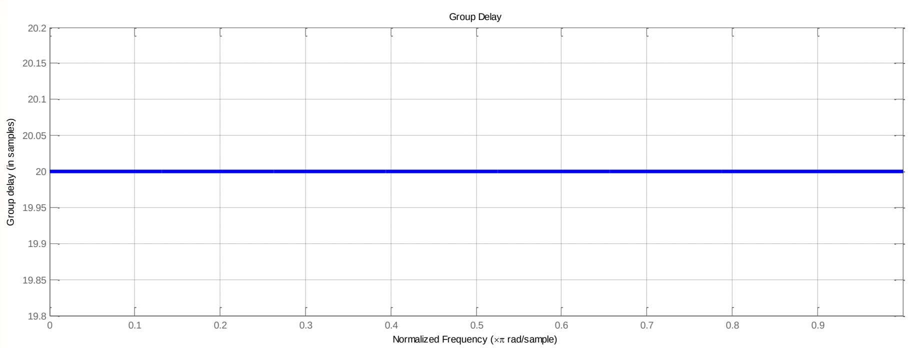
  - Un retardo puro es tolerable y no se considera distorsión de la señal.

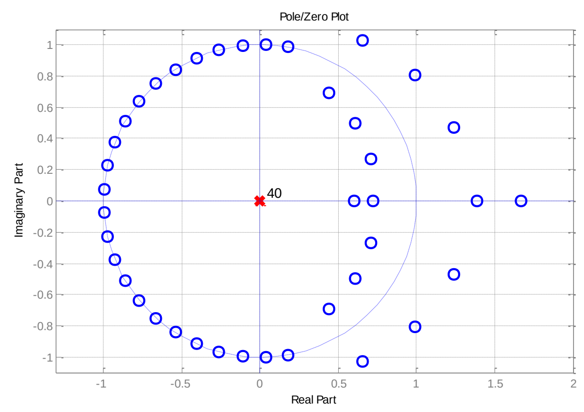
Retardo de Grupo

- **Ejemplo 1**
  - Filtro Paso-Bajo, FIR, Fase Lineal, M=40, Diseño por Mínimos Cuadrados. $\tau_g = 20\ muestras$





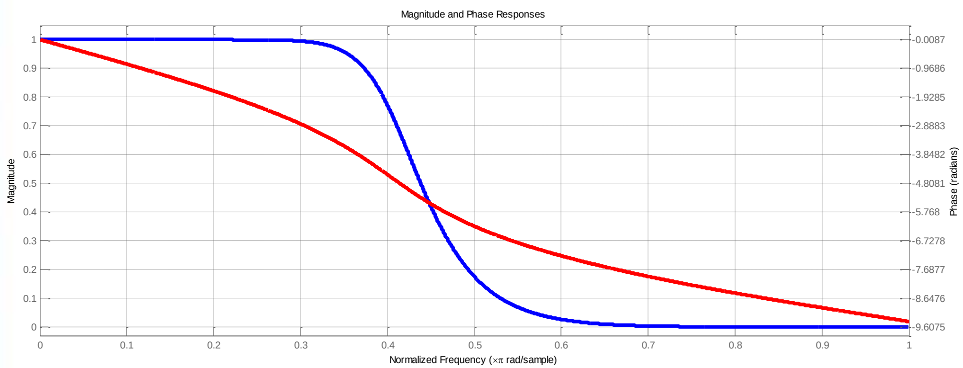


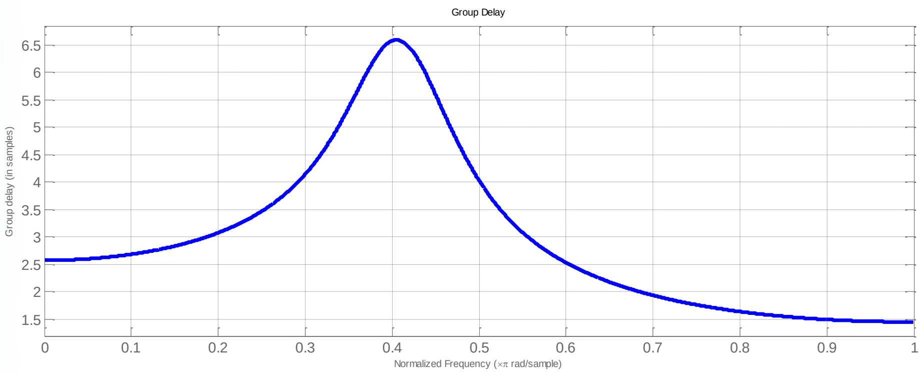


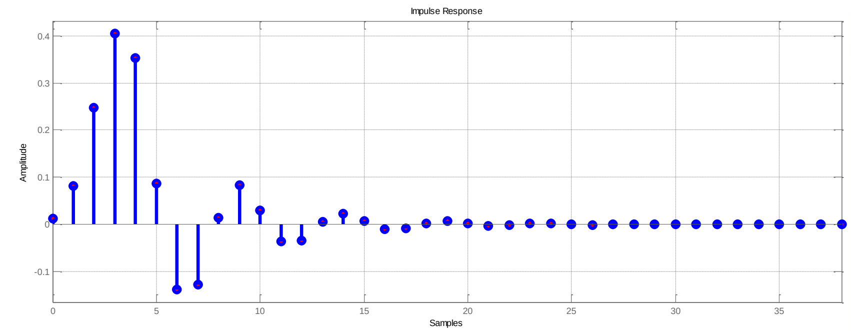
Retardo de Grupo

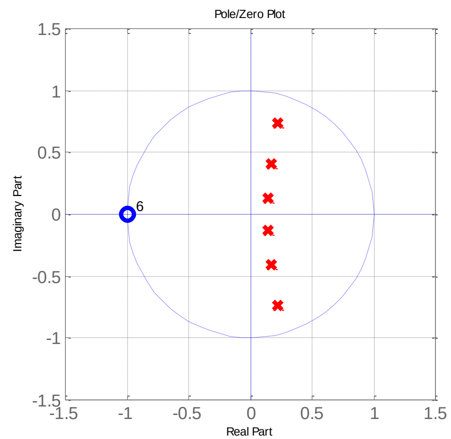
Percepción y Sistemas Inteligentes

- **Ejemplo 2**
  - Filtro Paso-Bajo, IIR, Fase No-Lineal, Butterworth, N=6. $\tau_g = No\ constante$





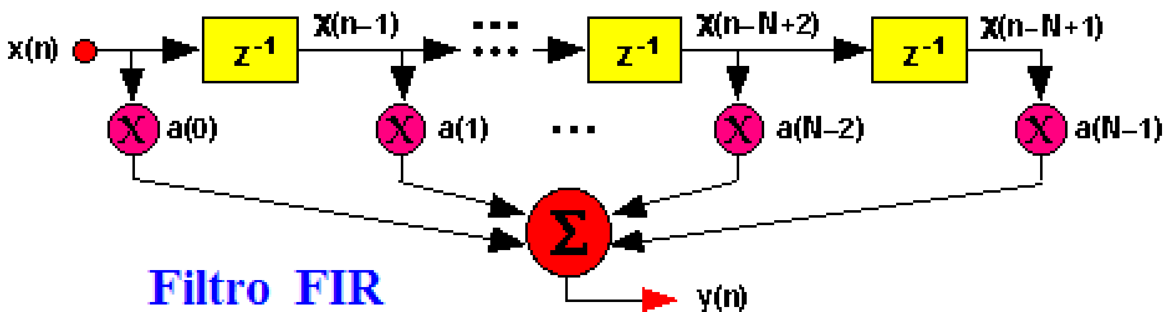




Diseño de Filtros FIR

Introducción

- **Determinar** los **coeficientes** de H(z), de H(w), de h(n) o de la ecuación de diferencia del Filtro.



$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} a(k)x(n-k)$$

- **Nota:** Una secuencia $x(n)$ de duración **finita** y **longitud N** está caracterizada por completo por **N muestras** de su T.F. en Tiempo Discreto $X(w)$.

Introducción

- Diseño **más restrictivo** por disponer de un **sólo** polinomio **numerador** en la función de transferencia del filtro FIR
- Representaciones:
  - Respuesta impulsional
    $h(n) = \{b_0 , \quad b_1, \dots , \quad b_{M-2}, \quad b_{M-1}\}$
  - Ecuación de diferencia

$$y(n) = b_0\, x(n) + b_1\, x(n-1) + \dots + b_{M-1}\, x(n-M+1) = \sum_{k=0}^{M-1} b_k\, x(n-k)$$

  - Función de Transferencia

$$H(z) = h(0) + h(1)\, z^{-1} + h(2)\, z^{-2} + \dots + h(M-2)\, z^{-(M-2)} + h(M-1)\, z^{-(M-1)}$$

Propiedades Generales de los Filtros FIR

- Implementación no-recursiva o realización por medio de la convolución directa.
- Realización por convolución de alta velocidad mediante la transformada rápida de Fourier o por técnicas recursivas.
- Errores producidos por cuantización, redondeo e imprecisiones en los coeficientes son menos críticos en realizaciones no-recursivas (no realimentaciones) de filtros FIR que en filtros IIR.
- La función de transferencia de un filtro FIR no-recursivo tiene todos los polos en el origen y siempre es estable.

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

■ Propiedades Generales de los Filtros FIR...

- Pueden diseñarse con características de **fase lineal**. (Poco posible para filtros IIR).
- El "**orden**" (longitud) es **más alto** que de uno IIR para obtener las mismas prestaciones.
- El **retardo de tiempo** incrementa con el número de términos y puede hacerse muy **grande** para filtros de ordenes relativamente altos.
- En general los métodos de **diseño** son más "**complejos**" que para filtros IIR por involucrar ecuaciones para el diseño.

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Descripción de Filtros FIR

- Un **filtro FIR** causal con longitud M, entrada $x(n)$ y salida $y(n)$ puede **describirse** mediante:

  - **Ecuación de Diferencia:**

$$y(n) = b_0\, x(n) + b_1\, x(n-1) + \ldots + b_{M-1}\, x(n-M+1) = \sum_{k=0}^{M-1} b_k\, x(n-k)$$

donde $\{b_k\}$ es el conjunto de coeficientes del filtro.

Filtros FIR Simétricos y Antisimétricos

- **Descripción de Filtros FIR …**
  - **Puede describirse mediante…**
    - **Convolución:** $$y(n) = \sum_{k=0}^{M-1} h(k)\, x(n-k)$$

      donde $h(k) = b_k, \quad k = 0, 1, \ldots, M-1$

    - **Función de Transferecia:** $$H(z) = \sum_{k=0}^{M-1} h(k) z^{-k}$$

      es un polinomio de grado $M-1$ en la variable z^{-1}.

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Condición de Fase lineal

- Un filtro FIR tiene **fase lineal** si $h(n)$ satisface la **condición de simetría** o **antisimetría:**

$$h(n) = \pm h(M-1-n) \qquad n = 0,1,\ldots,M-1$$

H(z) del Filtro FIR de Fase lineal

- **Incorporando** las condiciones de simetría y antisimetría en H(z) se tiene:

$$H(z) = h(0) + h(1)\, z^{-1} + h(2)\, z^{-2} + \ldots + h(M-2)\, z^{-(M-2)} + h(M-1)\, z^{-(M-1)}$$

- Considerando el valor de M:

$$H(z) = z^{-(M-1)/2} \left\{ h\left(\frac{M-1}{2}\right) + \sum_{n=0}^{(M-3)/2} h(n) \left[z^{(M-1-2k)/2} \pm z^{-(M-1-2k)/2} \right] \right\} \qquad M \;\; impar$$

$$H(z) = z^{-(M-1)/2} \sum_{n=0}^{(M/2)-1} h(n) \left[z^{(M-1-2k)/2} \pm z^{-(M-1-2k)/2} \right] \qquad M \;\; par$$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Simetría y Localización de las Raíces

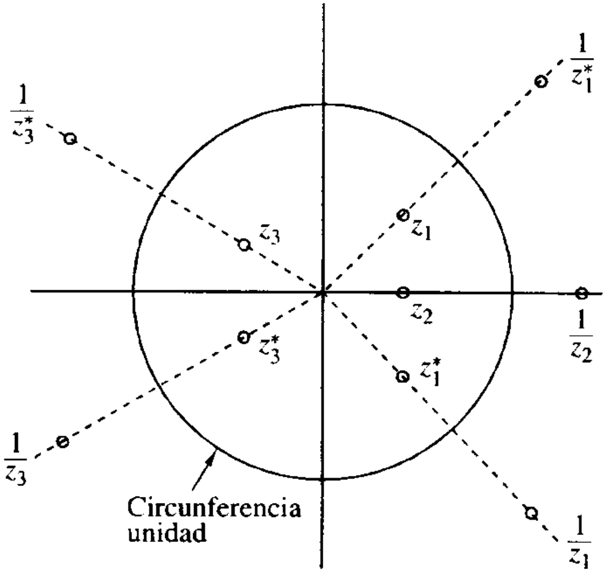
- Sustituyendo z^{-1} por z en

$$H(z)=\sum_{k=0}^{M-1} h(k) z^{-k}$$

- y multiplicando por $z^{-(M-1)}$ se obtiene:

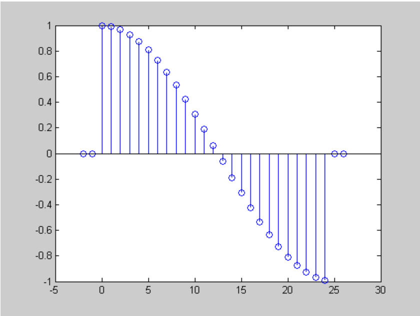
$$z^{-(M-1)} H\left(z^{-1}\right)=\pm H(z)$$

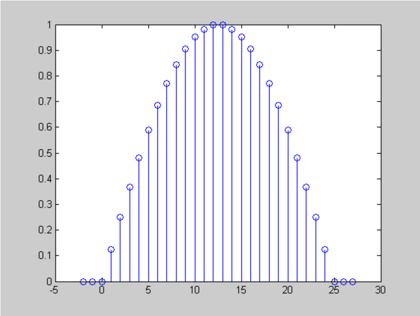
- Lo que **implica que**:
  - Las **raíces** de $H(z)$ son **idénticas** a las raíces de $H(z^{-1})$
  - Las **raíces** de $H(z)$ deben ocurrir en pares **recíprocos**.
  - Si z_1 es raíz, $1/z_1$ también es raíz.

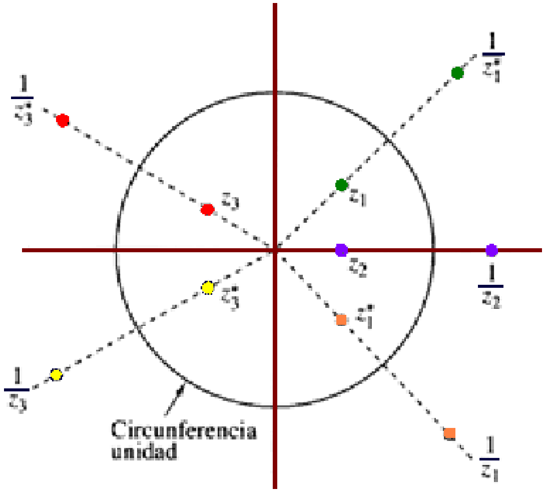


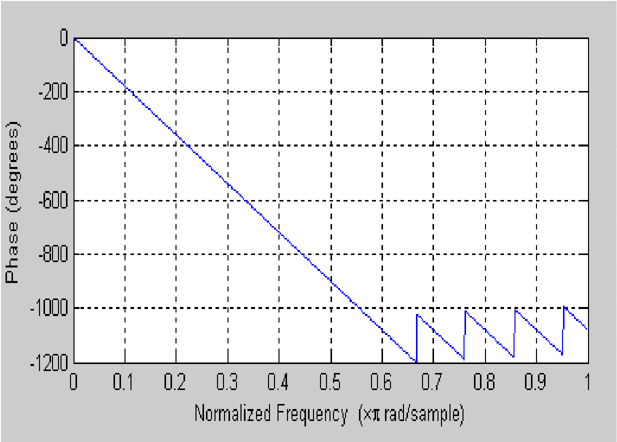
Implicaciones de la Simetría de h(n)

Dominio Temporal	Dominio T.z	Dominio T. F









H(w) del Filtro FIR de Fase Lineal

- La Respuesta en Frecuencia H(w) se obtiene al evaluar H(z) en la circunferencia unitaria, $z=e^{jw}$.

$$H(w) = H(z)\big|_{z=e^{jw}}$$

$$H(z) = h(0) + h(1)\, z^{-1} + h(2)\, z^{-2} + \ldots + h(M-2)\, z^{-(M-2)} + h(M-1)\, z^{-(M-1)}$$

$$H(w) = h(0) + h(1)\, e^{-jw} + h(2)\, e^{-2jw} + \ldots + h(M-2)\, e^{-(M-2)jw} + h(M-1)\, e^{-(M-1)jw}$$

- H(w) puede **reescribirse** para cada condición de **simetría** de *h*(n) y valor de **M** (par o impar).

Filtros FIR Simétricos

H(w) del Filtro FIR de Fase Lineal …

- **Simétrico: h(n) = h(M-1-n)**, H(w) puede expresarse como,

$$H(w) = H_r(w)\, e^{-jw(M-1)/2}$$

donde $H_r(w)$ es una función real de w y está dada por:

$$H_r(w) = h\left(\frac{M-1}{2}\right) + 2\sum_{n=0}^{(M-3)/2} h(n)\cos\left[w\left(\frac{M-1}{2} - n\right)\right] \qquad M \ \ impar$$

$$H_r(w) = 2\sum_{n=0}^{(M/2)-1} h(n)\cos\left[w\left(\frac{M-1}{2} - n\right)\right] \qquad M \ \ par$$

Filtros FIR Simétricos

- Cuando **h(n) = h(M-1-n) …**

  La característica de **fase** del filtro para **M par e impar** es,

$$\Theta(w) = \begin{cases} -w\left(\dfrac{M-1}{2}\right) & si \;\; H_r(w) > 0 \\ \\ -w\left(\dfrac{M-1}{2}\right) + \pi & si \;\; H_r(w) < 0 \end{cases}$$

- Número de coeficientes: M impar = (M+1)/2 ; M par = M/2

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Filtros FIR Antisimétricos

H(w) del Filtro FIR de Fase Lineal …

- **Antisimétrico: h(n) = - h(M-1-n)**, H(w) puede expresarse como,

$$H(w) = H_r(w)\, e^{j\left[-w(M-1)/2 + \pi/2\right]}$$

donde $H_r(w)$ es una función real de *w* y está dada por,

$$H_r(w) = 2\sum_{n=0}^{(M-3)/2} h(n)\, sen\, w\left(\frac{M-1}{2} - n\right) \qquad M \;\; impar$$

$$H_r(w) = 2\sum_{n=0}^{(M/2)-1} h(n)\, sen\, w\left(\frac{M-1}{2} - n\right) \qquad M \;\; par$$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Filtros FIR Antisimétricos

- Cuando **h(n) = - h(M-1-n) …**

  La característica de fase del filtro para M par e impar es,

$$\Theta(w)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}-w\left(\dfrac{M-1}{2}\right) & si\;\; H_r(w)>0\\[2ex] \dfrac{3\pi}{2}-w\left(\dfrac{M-1}{2}\right) & si\;\; H_r(w)<0\end{cases}$$

- Punto central de la antisimetría de h(n) es n=(M-1)/2, donde h(n)=0.
- Número de coeficientes: M impar = (M-1)/2 ; M par = M/2

Diseño de Filtros FIR

Selección: Simétrico o Antisimétrico??

Simetría del Filtro?

Simetría Par

Depende de la aplicación!

Simetría Impar

Condicionado a que las especificaciones de diseño en el dominio frecuencial sean compatibles con las del filtro $H_r(w)$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Selección: Simétrico o Antisimétrico??

- Depende de la aplicación. Cada función de transferencia, $H_r(w)$, simétrica o antisimétrica, tiene características particulares en el dominio frecuencial.

- **Ejemplo**. No puede emplearse un $h(n)$ antisimétrico para el diseño de un filtro FIR paso bajo de fase lineal $\rightarrow H_r(0) = 0$.

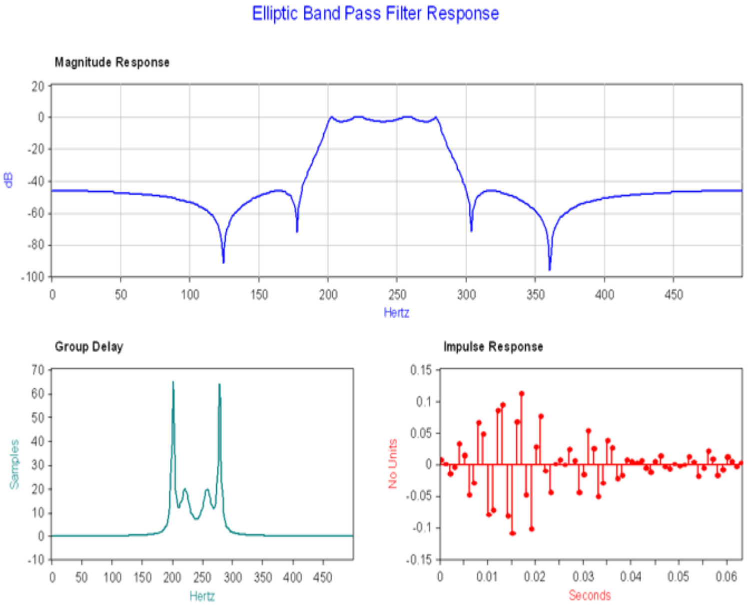
$$H_r(w) = 2\sum_{n=0}^{(M-3)/2} h(n)\, sen w\left(\frac{M-1}{2} - n\right) \qquad M \;\; impar$$

$$H_r(w) = 2\sum_{n=0}^{(M/2)-1} h(n)\, sen w\left(\frac{M-1}{2} - n\right) \qquad M \;\; par$$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Método Directo

- Utiliza condiciones de diseño para determinar los coeficientes del filtro mediante la solución de un sistema de ecuaciones.
- Generalmente se logra soluciones para las condiciones de diseño
- No se garantiza el comportamiento en rangos de frecuencia diferentes a las especificaciones puntuales.



- **Ejemplo 1**
  - Obtenga la respuesta impulsional $h(n)$ de un filtro FIR paso bajo de fase lineal de longitud $M = 4$ cuyas muestras de la respuesta en frecuencia $H_r(w)$ deseada se especifica como:

$$H_r(0) = 1 \;\; y \;\; H_r(\pi/2) = 1/2$$

- **Solución**
  - Por ser un filtro paso-bajo no puede ser anti-simétrico.
  - Se utilizará la ecuación general para un filtro FIR de Fase Lineal, simétrico y con M par:

$$H_r(w) = 2\sum_{n=0}^{(M/2)-1} h(n)\cos\left[w\left(\frac{M-1}{2} - n\right)\right] \qquad M \;\; par$$

- **Solución …**
  - Reemplazando el valor de $M = 4$,

$$H_r(w) = 2\sum_{n=0}^{1} h(n)cos\left[w\left(\frac{3}{2} - n\right)\right]$$

  - Evaluando en las condiciones de respuesta en frecuencia:
    - $H_r(0) = 1$
      - $2\sum_{n=0}^{1} h(n) = 1$
      - $2h(0) + 2h(1) = 1$
    - $H_r(\pi/2) = 1/2$
      - $2\sum_{n=0}^{1} h(n)cos\left[\frac{\pi}{2}\left(\frac{3}{2} - n\right)\right] = 1/2$
      - $\sqrt{2}\,[-h(0) + h(1)] = \frac{1}{2}$

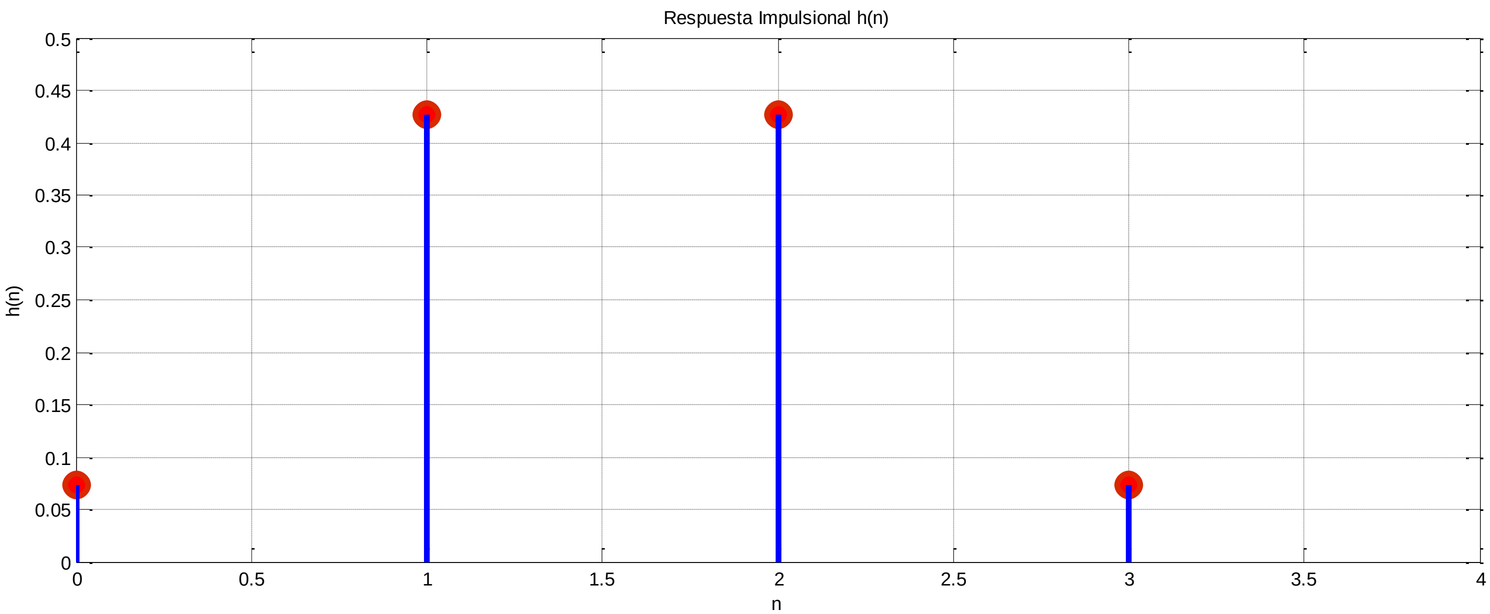
Diseño de Filtros FIR

- **Solución …**
  - Resolviendo el sistema
    - $$\begin{cases} h(0)+h(1)=\frac{1}{2} \\ -h(0)+h(1)=\frac{1}{2\sqrt{2}} \end{cases}$$
    - Se tiene $\begin{cases} h(0)=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ h(1)=\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \end{cases}$
  - Por simetría par: $h(0)=h(3)\ \ y\ \ h(1)=h(2)$

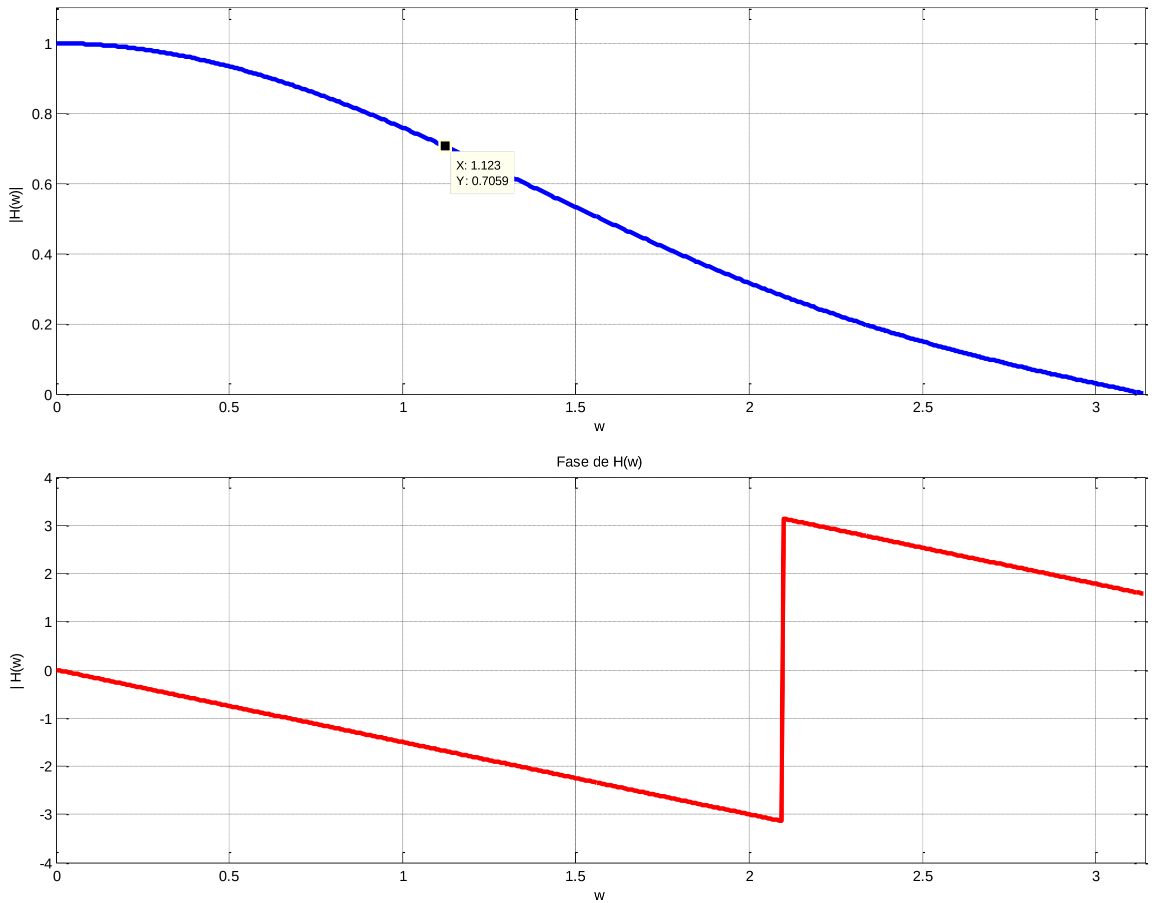
PSI Percepción y Sistemas Inteligentes

- **Solución …**
  - Por lo tanto, la respuesta impulsional es:

$$h(n) = \frac{1}{4}\left\{\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$$



- **Solución …**
  - La magnitud y fase del filtro:



- **Ejemplo 2:** Determinar los coeficientes de un filtro FIR de fase lineal representado por la ecuación de diferencia

$$y(n) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + b_2 x(n-2)$$

De forma tal que:

- Elimine completamente las señales con frecuencia $w_0 = 2\pi/3$
- La respuesta en frecuencia $H(w)$ esté normalizada tal que $H(0) = 1$

Diseño de Filtros FIR

- **Solución**
  - Puesto que las especificaciones están expresadas en el dominio frecuencial, se obtiene la respuesta en frecuencia del filtro

$$H(w) = \frac{Y(w)}{X(w)} = b_0 + b_1 e^{-jw} + b_2 e^{-j2w}$$

  - Al evaluar las condiciones de diseño se llega a:
    - $H\left(w = \frac{2\pi}{3}\right) = 0 = b_0 + b_1 e^{-j\frac{2\pi}{3}} + b_2 e^{-j\frac{4\pi}{3}}$
    - $H(w = 0) = 1 = b_0 + b_1 + b_2$
  - Debido a que existen tres parámetros desconocidos y dos ecuaciones, es necesario generar una tercera ecuación!!

Diseño de Filtros FIR

- **Solución …**
  - La tercera ecuación se obtiene de la condición de diseño:
    - Fase Lineal: simetría de los coeficientes de $h(n) = \left\{\underline{b_0},\ b_1,\ b_2\right\}$
    - Por lo tanto: $b_0 = \pm b_2$ (simetría par o impar)
  - Para simetría par se tiene:
    - $b_0 = b_2$
    - $H\left(w = \frac{2\pi}{3}\right) = 0 = b_0 + b_1 e^{-j\frac{2\pi}{3}} + b_2 e^{-j\frac{4\pi}{3}}$
    - $H(w = 0) = 1 = b_0 + b_1 + b_2$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

- **Solución …**
  - Resolviendo se encuentra que:
    - $b_0 = \frac{1}{3},\ b_1 = \frac{1}{3},\ b_2 = \frac{1}{3}$
  - Por lo tanto:
    - $y(n) = \frac{1}{3}x(n) + \frac{1}{3}x(n-1) + \frac{1}{3}x(n-2)$
    - $h(n) = \left\{\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{3}\right\}$
    - $H(w) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}e^{-jw} + \frac{1}{3}e^{-j2w}$

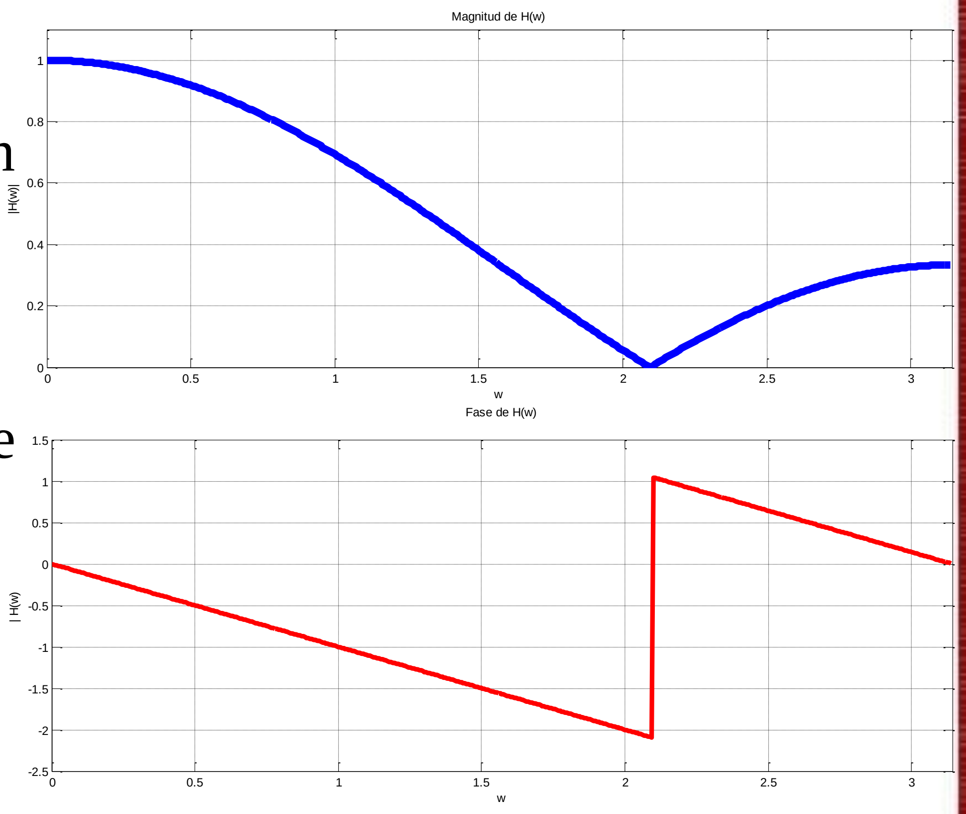
Diseño de Filtros FIR

- **Solución …**

  - Reescribiendo la Respuesta en Frecuencia:

$$H(w) = \frac{1}{3}e^{-jw}\,[1 + 2cos(w)]$$

  - Se verifica las condiciones de diseño:
    - $H(w = 0) = 1$
    - $H\left(w = \frac{2\pi}{3}\right) = 0$
    - Fase lineal



Diseño de Filtros FIR

- **Ejemplo 3:** Para el filtro encontrado en el ejemplo anterior, calcular:
  - a) La magnitud $|H(w)|$ y fase $\angle H(w)$
  - b) La frecuencia w_c donde la ganancia del filtro cae en $3dB$.
  - c) La respuesta $y(n)$ del filtro a la entrada

$$x(n) = 5 + 2sen\left(\frac{2\pi}{3}n\right),\ -\infty < n < \infty$$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

- **Solución**
  - a) Del ejemplo anterior, se tiene:

$$H(w) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}e^{-jw} + \frac{1}{3}e^{-j2w}$$

  - Que es equivalente a:

$$H(w) = \frac{1}{3}e^{-jw}\left(e^{jw} + 1 + +e^{-jw}\right) = \frac{1}{3}e^{-jw}\,[1 + 2cos(w)]$$

  - La magnitud $|H(w)|$ se determina como:

$$|H(w)| = \frac{1}{3}\,|1 + 2cos(w)|$$

  - y la fase $\angle H(w)$ como:

$$\angle H(w) = \begin{cases} -w & para[1 + 2cos(w)] \geq 0; |w| \leq 2\pi/3 \\ -w + \pi & para[1 + 2cos(w)] < 0;\ \pi > |w| > 2\pi/3 \end{cases}$$

- **Solución …**

  - b) La frecuencia w_c donde la ganancia del filtro cae en $3dB$ se obtiene como:

$$|H(w_c)| = \frac{1}{3}|1 + 2cos(w_c)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

  - De donde:

$$w_c = \cos^{-1}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{3}{\sqrt{2}} - 1\right)\right]$$

$$w_c = 0.9756\, rad/muest = 55.8985º/muest$$

- **Solución …**
  - c) La respuesta $y(n)$ del filtro a la entrada

$$x(n) = 5 + 2sen\left(\frac{2\pi}{3}\,n\right),\ -\infty < n < \infty$$

  - Se calcula con base en la respuesta en frecuencia en $w = 0$ y $w = \frac{2\pi}{3}$
    - $|H(w=0)| = 1$, $\quad \angle H(w=0) = 0$
    - $\left|H\left(w = \frac{2\pi}{3}\right)\right| = 0$, $\quad \angle H\left(w = \frac{2\pi}{3}\right) = -2\pi/3$
  - De donde,

$$y(n) = 5\ ,\ -\infty < n < \infty$$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Metodología

- Especificar la respuesta en frecuencia deseada $H_d(w)$
- Determinar la correspondiente respuesta impulsional $h_d(n)$, mediante la transformada de Fourier.

$$H_d(w) = \sum_{n=0}^{\infty} h_d(n) e^{-jwn} \qquad \text{donde} \qquad h_d(n) = \int_{-\pi}^{\pi} H_d(w) e^{jwn} dw$$

- Introducir un desplazamiento a la respuesta $h_d(n)$
  - Es necesario conservar las características de simetría para garantizar la fase lineal del filtro resultante.

- **Metodología…**

  - Truncar la respuesta $h_d(n)$
    - Generalmente $h_d(n)$ es de *duración infinita* y debe ser *truncada* en algún punto, $n = M - 1$, para producir un filtro FIR de longitud M.
  - El truncamiento de $h_d(n)$ es equivalente a multiplicar $h_d(n)$ por una **ventana rectangular** de longitud M, definida como,

$$w(n) = \begin{cases} 1, & n = 0,1,\ldots,M-1 \\ 0, & en\ \ otro\ \ caso \end{cases}$$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

- **Metodología…**
  - Así, la respuesta impulsional del filtro FIR se convierte en,

$$h(n) = h_d(n)\, w(n) \;= \begin{cases} h_d(n), & n = 0, 1, \ldots, M-1 \\ 0, & en\ \ otro\ \ caso \end{cases}$$

y por la convolución en el dominio frecuencial se llega a,

$$H(w) = H_d(w) * W(w) \;= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(v)\, W(w-v)\ \partial v$$

- **Metodología…**
  - La transformada de Fourier de la *ventana rectangular* es

$$W(w)=\sum_{n=0}^{M-1} w(n)\, e^{-jwn}=\frac{1-e^{-jwM}}{1-e^{-jw}}=e^{-jw(M-1)/2}\,\frac{sen(wM/2)}{sen(w/2)}$$

  - Y su respuesta en *magnitud* y fase lineal a tramos es:

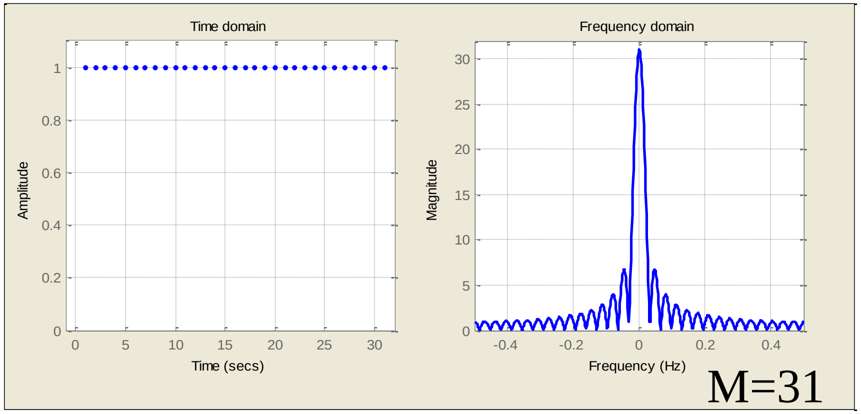
$$|W(w)|=\frac{|sen(wM/2)|}{|sen(w/2)|}\ , \quad -\pi \le w \le \pi$$

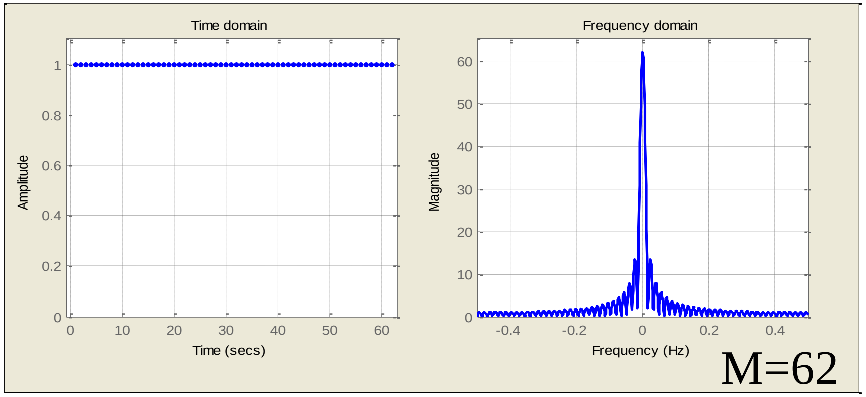
$$\Theta(w)=\begin{cases} -w\left(\dfrac{M-1}{2}\right), & \text{cuando} \quad sen(wM/2)\ge 0 \\ -w\left(\dfrac{M-1}{2}\right)+\pi, & \text{cuando} \quad sen(wM/2)< 0 \end{cases}$$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

- **Comportamiento de la respuesta en magnitud de W(w)**

  - El lóbulo principal se hace más estrecho a medida que M crece.
  - El área de cada lóbulo lateral se conserva con variaciones de M.





- **Observaciones**

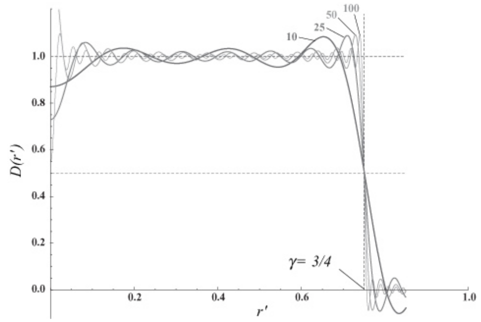
  - Las características de la ventana ayudan a determinar la respuesta en frecuencia $H(w)$ del filtro FIR al truncar $h_d(n)$ a la longitud M.
  - La convolución de $H_d(w)$ con $W(w)$ tiene el efecto de suavizar $H_d(w)$.
  - A medida que M crece, los lóbulos laterales de $W(w)$ se estrechan más y el suavizado producido por $W(w)$ se reduce.
  - Los lóbulos laterales grandes de $W(w)$ producen rizado y lóbulos grandes en $H(w)$.

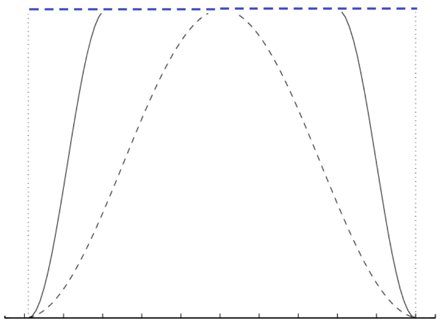
humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Diseño de Filtros FIR por Ventanas

- **Observaciones …**

  - El truncamiento de las series de Fourier introduce rizado en $H(w)$, particularmente en la vecindad de discontinuidades.
    - *Fenómeno de Gibbs.*
  - Ventanas sin discontinuidades abruptas en el dominio temporal, producen lóbulos laterales bajos en sus respuestas frecuenciales,
    - contribuyen a aliviar las oscilaciones indeseables.





- **Observaciones …**
  - Las ventanas "suavizadas" al compararse con la rectangular producen:
    - Lóbulos laterales más bajos.
    - Un lóbulo central más amplio para el mismo valor de M.
    - Mayor suavizado a través de la convolución en el dominio de la frecuencia.
    - Región de transición de la respuesta del filtro FIR más amplia.
      - Puede reducirse incrementando la longitud de la ventana

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Algunas funciones ventana para el diseño de filtros FIR

Nombre de la ventana	Secuencia en el dominio temporal, $h(n), 0 \le n \le M-1$
Barlett (triangular)	$1-\dfrac{2\left\lvert n-\dfrac{M-1}{2}\right\rvert}{M-1}$
Blackman	$0.42-0.5\cos\dfrac{2\pi n}{M-1}+0.08\cos\dfrac{4\pi n}{M-1}$
Hamming	$0.54-0.46\cos\dfrac{2\pi n}{M-1}$
Hanning	$\dfrac{1}{2}\left(1-\cos\dfrac{2\pi n}{M-1}\right)$
Kaiser	$\dfrac{I_0\left[\alpha\sqrt{\left(\dfrac{M-1}{2}\right)^2-\left(n-\dfrac{M-1}{2}\right)^2}\right]}{I_0\left[\alpha\left(\dfrac{M-1}{2}\right)\right]}$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Algunas funciones ventana para el diseño de filtros FIR…

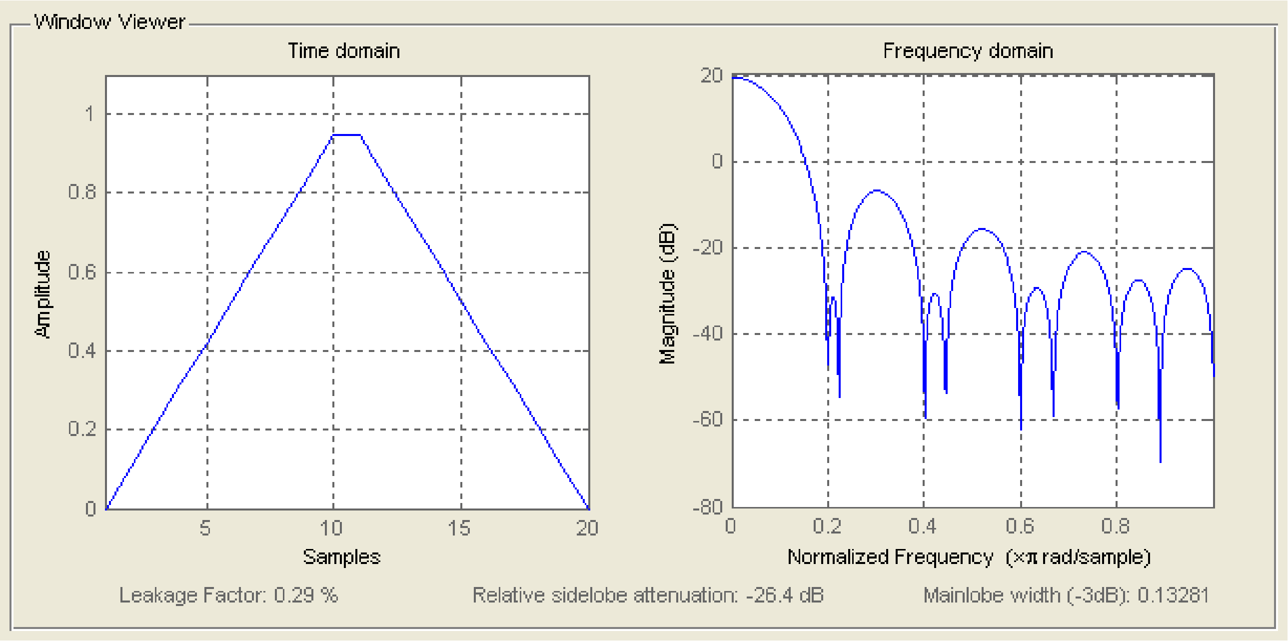
Nombre de la ventana	Secuencia en el dominio temporal, $h(n), \quad 0 \leq n \leq M-1$
Lanczos	$\left\{ \dfrac{sen\left[2\pi\left(n-\frac{M-1}{2}\right) \big/ (M-1)\right]}{2\pi\left(n-\frac{M-1}{2}\right) \Big/ \left(\frac{M-1}{2}\right)} \right\}^{L} \qquad L>0$
Tukey	$w(n)=\begin{cases} 1, & \text{para n que cumplan } \left\lvert n-\frac{M-1}{2}\right\rvert \leq \alpha\frac{M-1}{2} \qquad \text{con } 0<\alpha<1 \\ \frac{1}{2}\left[1+\cos\left(\frac{n-(1+a)(M-1)/2}{(1-\alpha)(M-1)/2}\pi\right)\right] & \text{para n que cumplan } \alpha(M-1)/2 \leq \left\lvert n-\frac{M-1}{2}\right\rvert \leq \frac{M-1}{2} \end{cases}$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Algunas funciones ventana para el diseño de filtros FIR

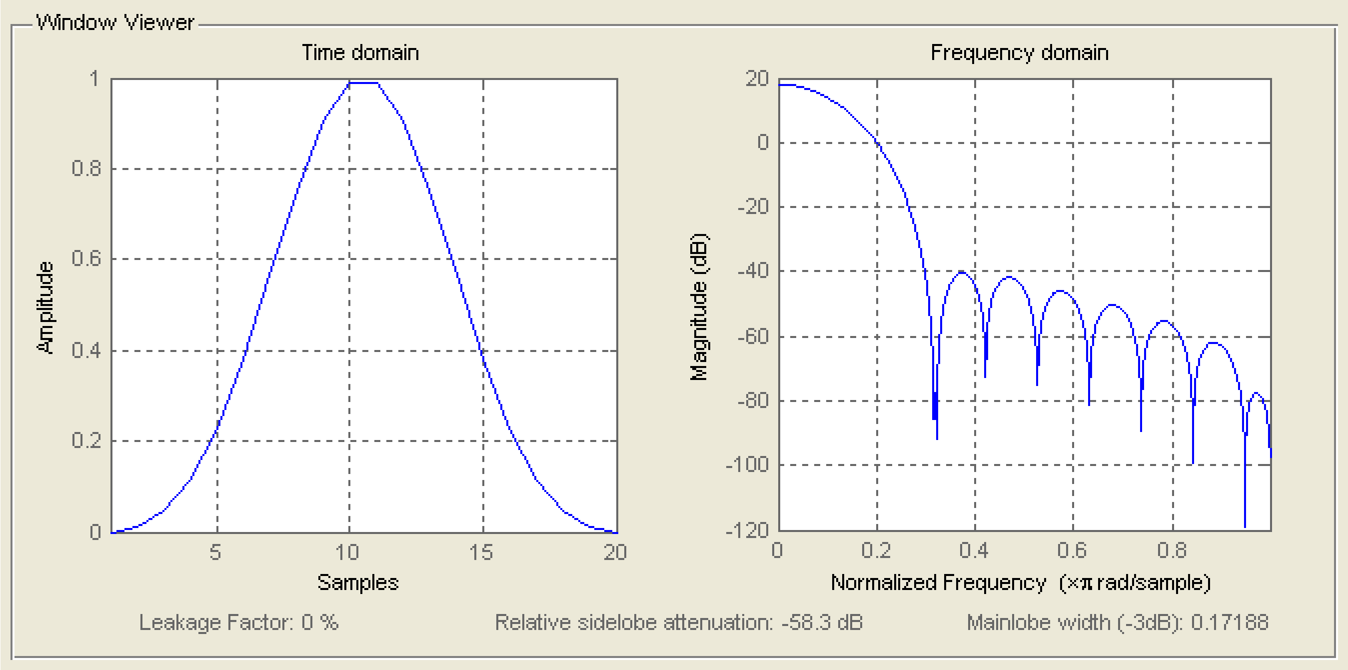
- **Ventana Barlett (triangular) para *h(n),0 ≤ n ≤ M-1***

$$w(n) = 1 - \frac{2\left|n - \frac{M-1}{2}\right|}{M-1}$$



- **Ventana Blackman para *h(n),0 ≤ n ≤ M-1***

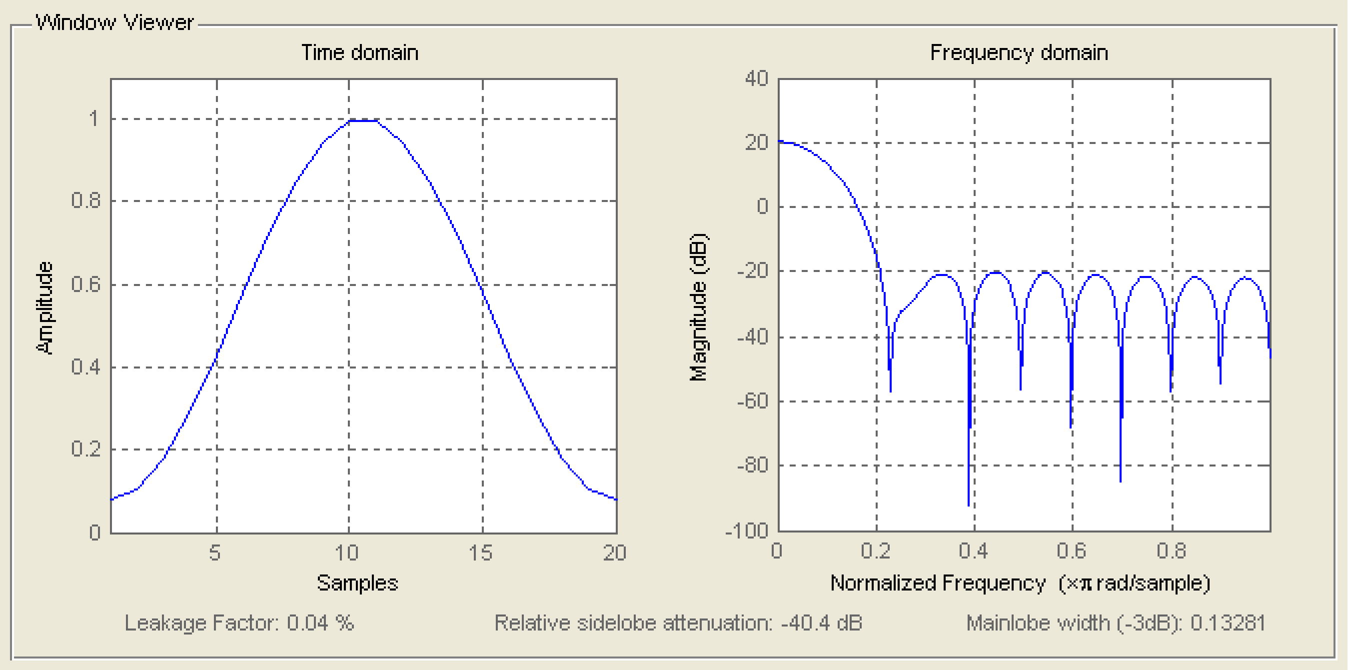
$$w(n) = 0.42 - 0.5\cos\frac{2\pi n}{M-1} + 0.08\cos\frac{4\pi n}{M-1}$$



Algunas funciones ventana para el diseño de filtros FIR

- **Ventana Hamming para *h(n),0 ≤ n ≤ M-1***

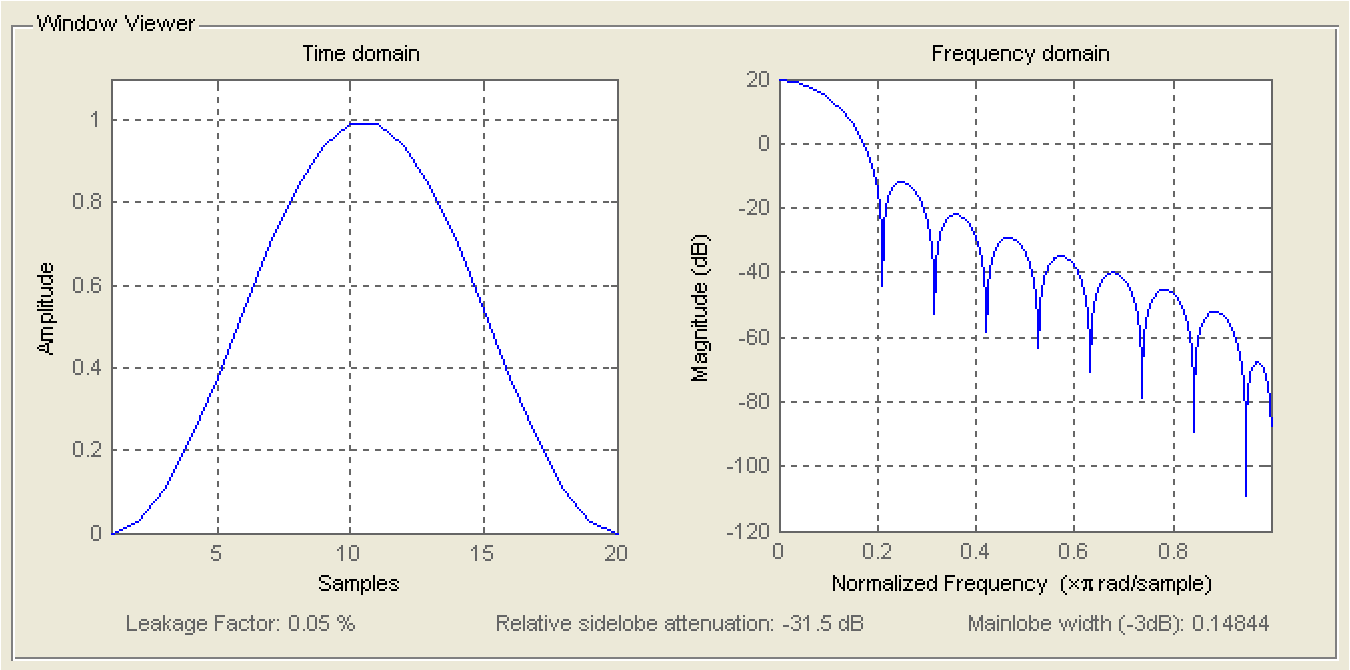
$$w(n) = 0.54 - 0.46\cos\frac{2\pi n}{M-1}$$



Algunas funciones ventana para el diseño de filtros FIR

- **Ventana Hanning para *h(n),0 ≤ n ≤ M-1***

$$w(n)=\frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{2\pi n}{M-1}\right)$$



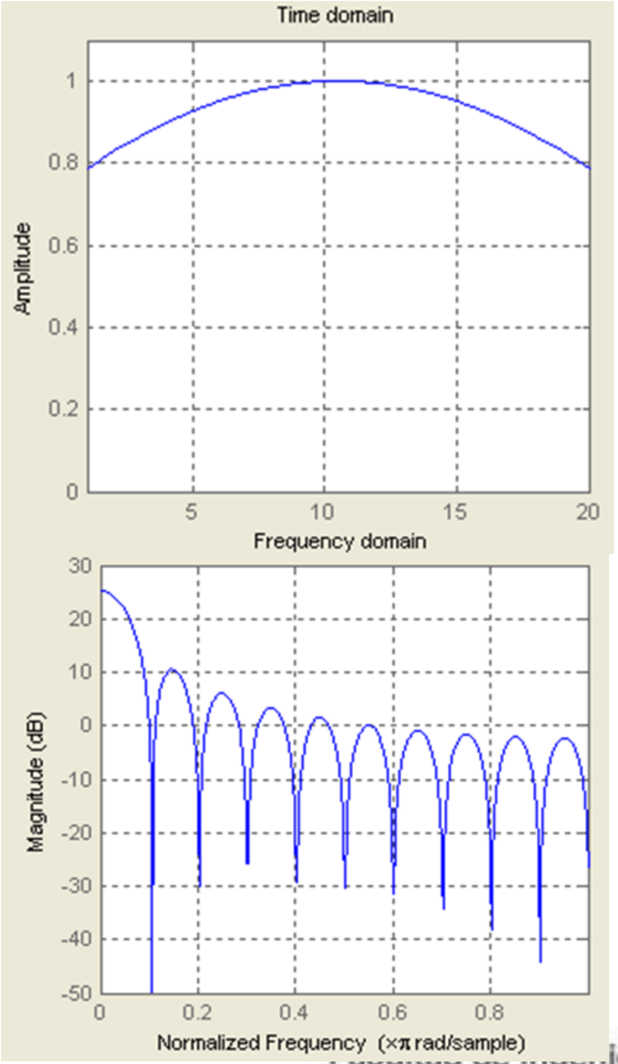
Diseño de filtros FIR

- **Ventana Kaiser para *h(n),0 ≤ n ≤ M-1***

$$w(n) = \frac{I_0\left[\alpha\sqrt{\left(\frac{M-1}{2}\right)^2 - \left(n - \frac{M-1}{2}\right)^2}\right]}{I_0\left[\alpha\left(\frac{M-1}{2}\right)\right]}$$

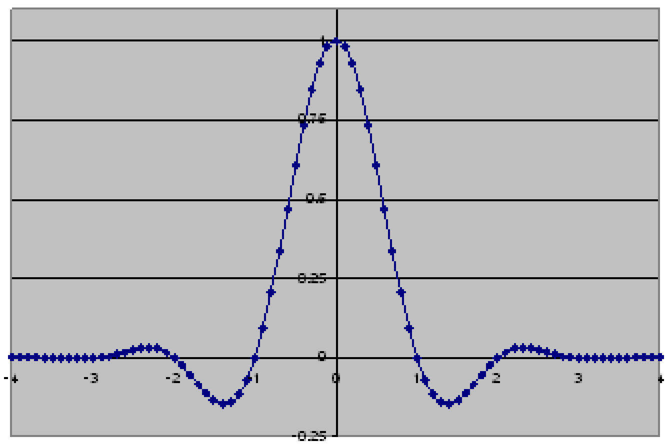
  - Donde,
    - α es un factor de forma ajustable.
    - $I_0(x)$ es la función Bessel de orden cero modificada dada por,

$$I_o(x) = 1 + \sum_{r=1}^{\infty}\left[\frac{(x/2)^r}{r!}\right]^2$$



- **Ventana Lanczos para *h(n),0 ≤ n ≤ M-1***

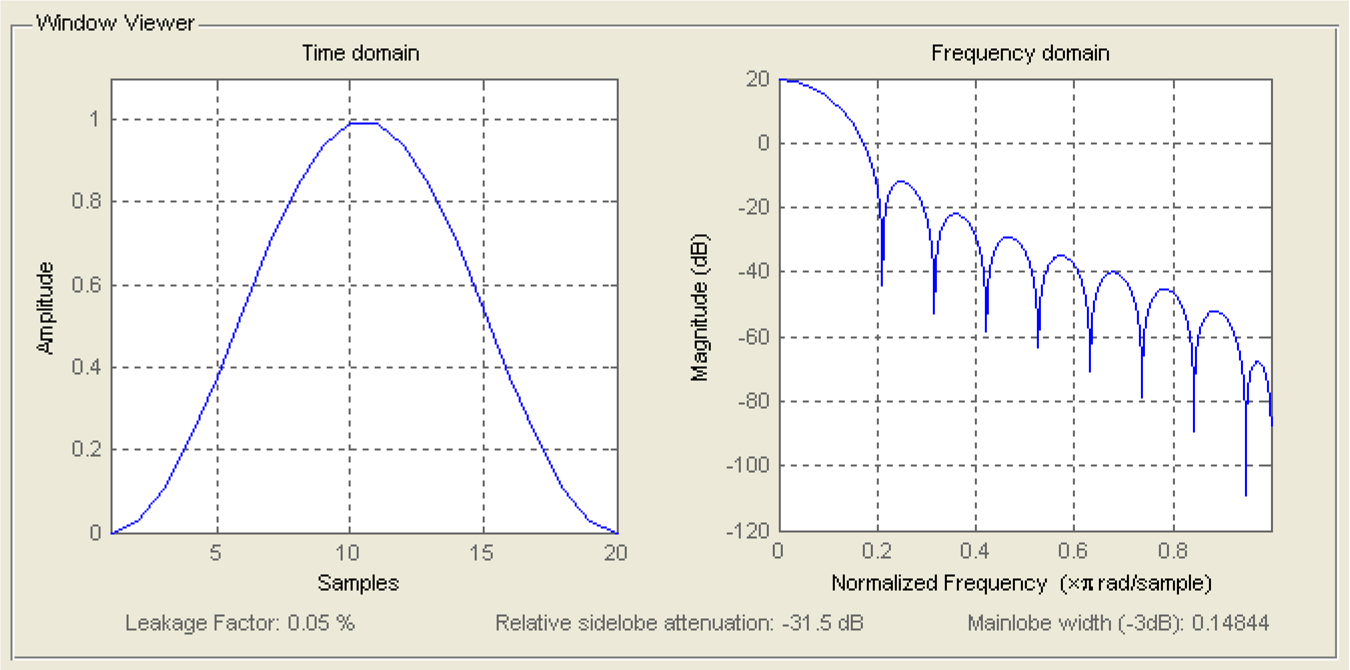
$$w(n) = \left\{ \frac{sen\left[2\pi\left(n-\frac{M-1}{2}\right) \Big/ (M-1) \right]}{2\pi\left(n-\frac{M-1}{2}\right) \Big/ \left(\frac{M-1}{2}\right)} \right\}^{L} \qquad L > 0$$



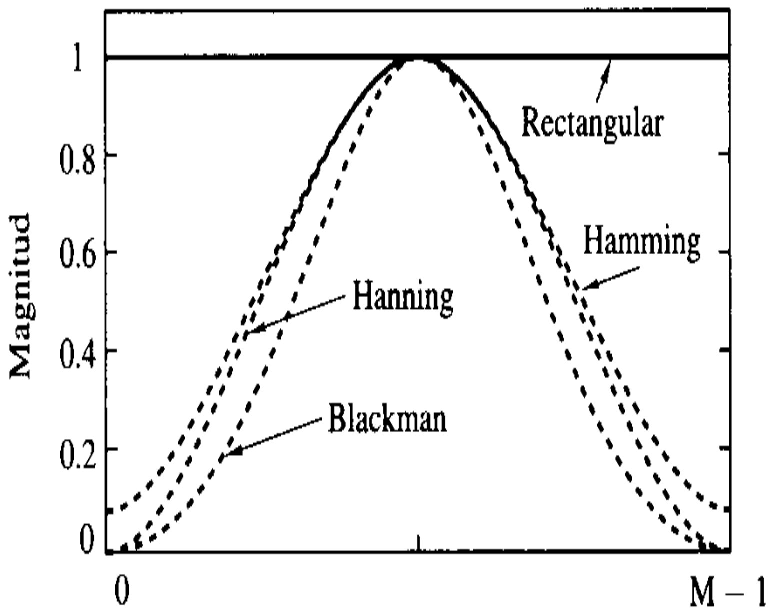
Algunas funciones ventana para el diseño de filtros FIR

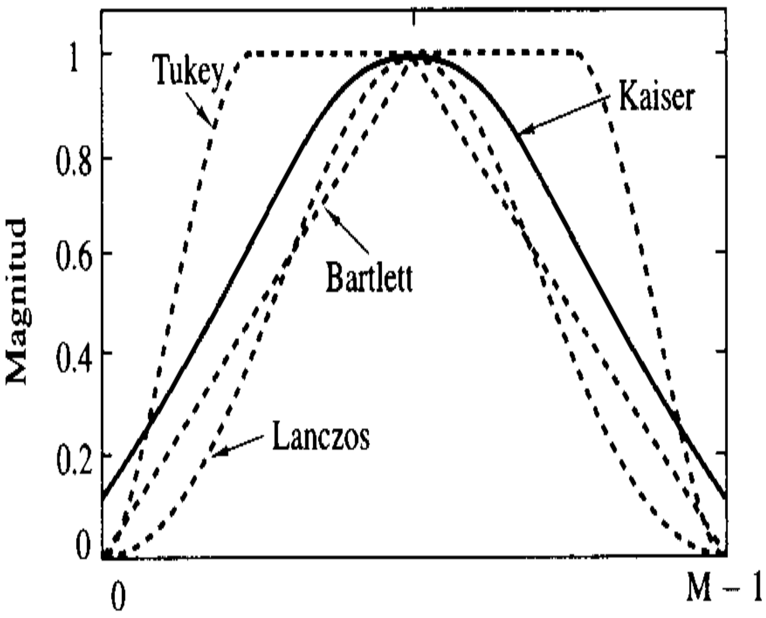
- **Ventana Tukey para *h(n),0 ≤ n ≤ M-1***

$$w(n)=\begin{cases} 1, & \text{para n que cumplan } \left|n-\dfrac{M-1}{2}\right|\le \alpha\dfrac{M-1}{2} \qquad \text{con } 0<\alpha<1 \\ \dfrac{1}{2}\left[1+\cos\left(\dfrac{n-(1+a)(M-1)/2}{(1-\alpha)(M-1)/2}\pi\right)\right] & \text{para n que cumplan } \alpha(M-1)/2\le\left|n-\dfrac{M-1}{2}\right|\le\dfrac{M-1}{2} \end{cases}$$



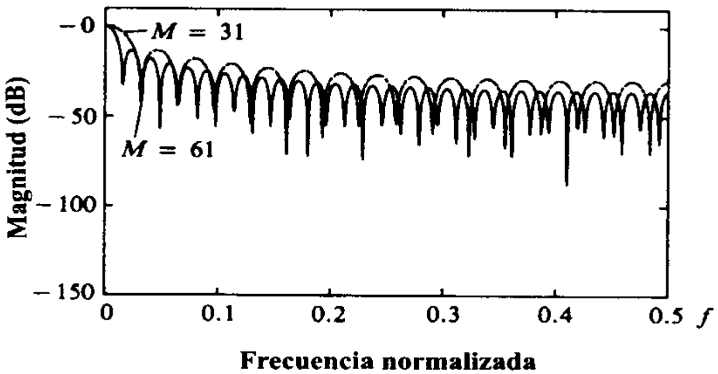
Comparación de funciones ventana



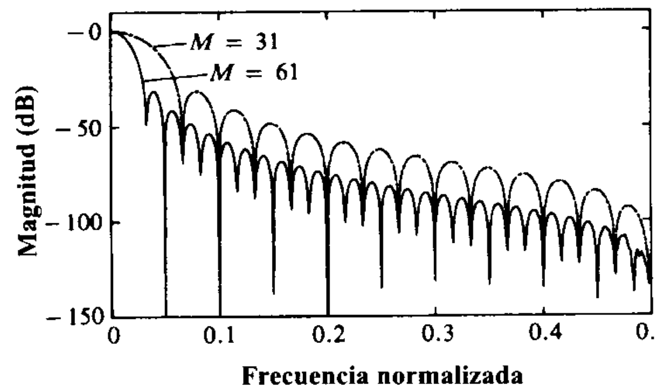


Comparación de funciones ventana …

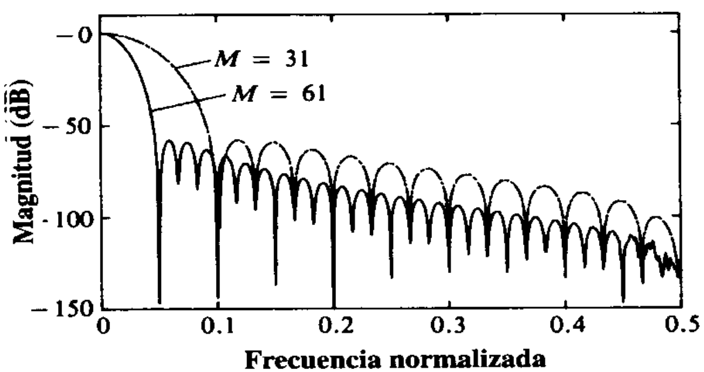
V. Rectangular



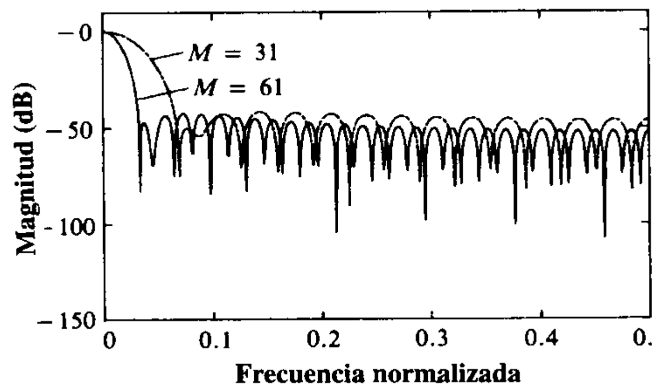
V. Hanning



V. Blackman



V. Hamming



Comparación entre Ventanas

Tipo de Ventana	*Ancho Lóbulo Principal*	*Nivel relativo del Lóbulo Lateral*	*Atenuación mínima Banda de Rechazo*	*Ancho Banda de Transición*
Rectangular	$4\pi/M$	-13.3 dB	20.9 dB	$1.84\ \pi/(M-1)$
Bartlett	$8\pi/(M+1)$	-26.5 dB	24.8 dB	$2.37\ \pi/(M-1)$
Hanning	$8\pi/M$	-31.5 dB	43.9 dB	$5.01\ \pi/(M-1)$
Hamming	$8\pi/M$	-42.7 dB	54.5 dB	$6.27\ \pi/(M-1)$
Blackman	$12\pi/M$	-58.1 dB	75.3 dB	$9,19\ \pi/(M-1)$
Valores para $wc=0.4\pi$ y $M= 257$				

- **Ejemplo 1:** Diseñar mediante ventana rectangular un filtro FIR paso bajo de fase lineal, con una respuesta en frecuencia deseada,

$$H_d(w)=\begin{cases} 1e^{-jw(M-1)/2} & 0\leq |w| \leq w_c \\ 0 & en \;\; otro \;\; caso \end{cases}$$

- **Solución:** Al aplicar la transformada inversa de Fourier,

$$h_d(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-w_c}^{w_c} e^{jw\left(n-\frac{M-1}{2}\right)}\partial w \quad = \frac{sen\left[w_c\left(n-\dfrac{M-1}{2}\right)\right]}{\pi\left(n-\dfrac{M-1}{2}\right)} \qquad n\neq\frac{M-1}{2}$$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Solución:…

- Claramente, $h_d(n)$ es **no causal** y de **duración infinita**.
- Multiplicando $h_d(n)$ por la **ventana rectangular** $\boldsymbol{w(n)}$, se obtiene el filtro FIR $h(n)$ de longitud M:

$$w(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq M-1 \\ 0, & para\ otro\ n \end{cases}$$

$$h(n) = \frac{sen\left[w_c\left(n - \frac{M-1}{2}\right)\right]}{\pi\left(n - \frac{M-1}{2}\right)} w(n) \qquad 0 \leq n \leq M-1, \quad n \neq \frac{M-1}{2}$$

$$h(n) = \frac{w_c}{\pi}, \qquad n = \frac{M-1}{2}$$

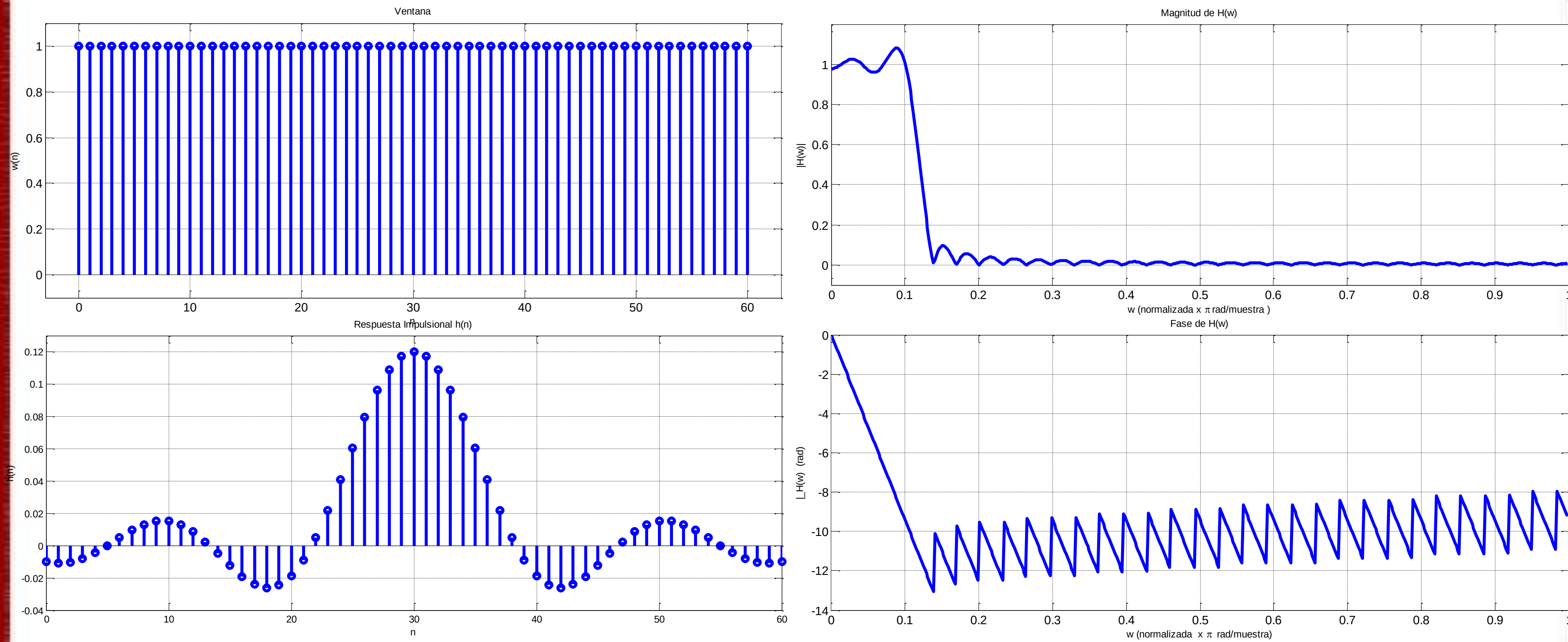
humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Diseño de Filtros FIR de Fase Lineal por Ventanas

PSI Percepción y Sistemas Inteligentes

Solución:…

- Para $M = 61,\ w_c = 0.12\pi$, Ventana Rectangular



humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

- **Ejemplo 2:** Diseñar mediante ventana Hanning un filtro FIR paso bajo de fase lineal, con una respuesta en frecuencia deseada,

$$H_d(w) = \begin{cases} 1e^{-jw(M-1)/2} & 0 \le |w| \le w_c \\ 0 & en \ \ otro \ \ caso \end{cases}$$

- **Solución:** Al aplicar la transformada inversa de Fourier,

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-w_c}^{w_c} e^{jw\left(n-\frac{M-1}{2}\right)} \partial w \quad = \frac{sen\left[w_c\left(n-\dfrac{M-1}{2}\right)\right]}{\pi\left(n-\dfrac{M-1}{2}\right)} \qquad n \ne \frac{M-1}{2}$$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

■ Solución:…

- Claramente, $h_d(n)$ es **no causal** y de **duración infinita**.
- Multiplicando $h_d(n)$ por la **ventana Hanning** $\boldsymbol{w(n)}$, se obtiene el filtro FIR $h(n)$ de longitud M:

$$w(n) = \frac{1}{2}\left[1 - cos\left(\frac{2\pi n}{M-1}\right)\right], \qquad 0 \leq n < M$$

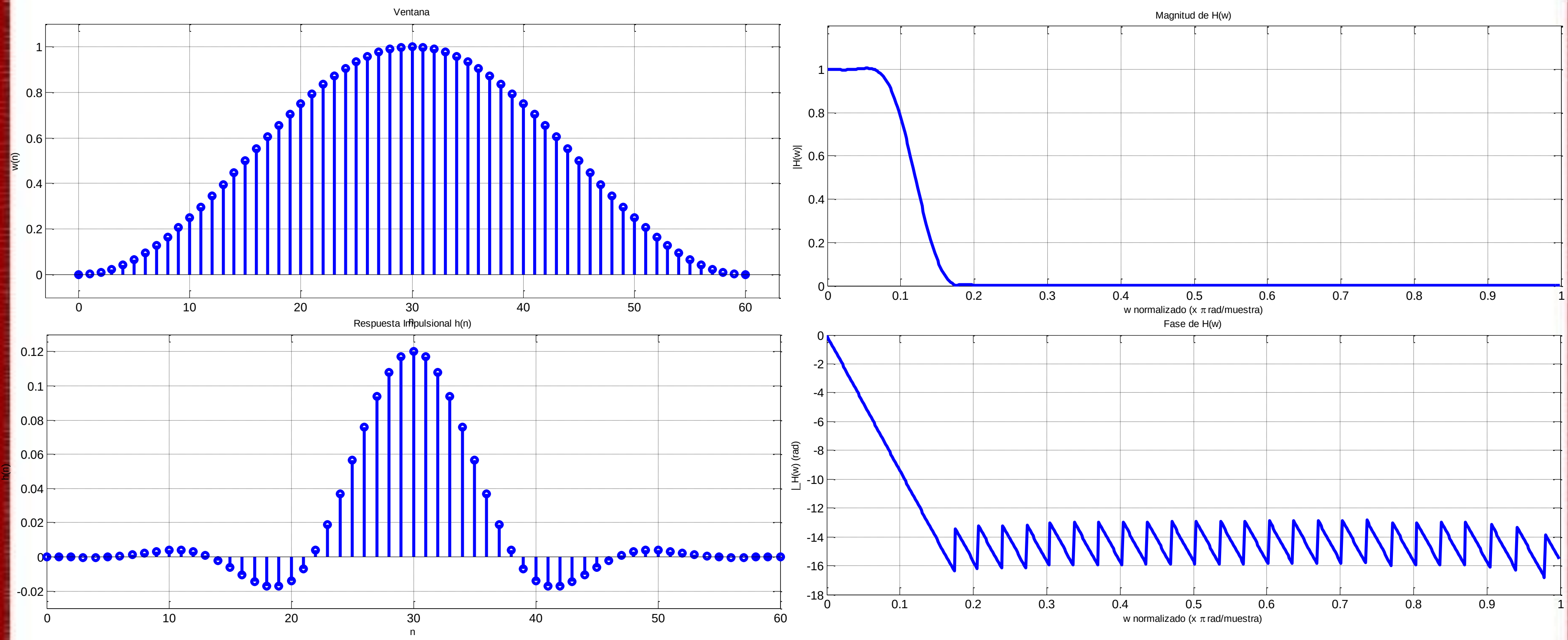
$$h(n) = \frac{sen\left[w_c\left(n - \frac{M-1}{2}\right)\right]}{\pi\left(n - \frac{M-1}{2}\right)} w(n) \qquad 0 \leq n \leq M-1, \quad n \neq \frac{M-1}{2}$$

$$h(n) = \frac{w_c}{\pi}, \qquad n = \frac{M-1}{2}$$

Diseño de Filtros FIR de Fase Lineal por Ventanas

■ Solución:…

- Para $M = 61,\ w_c = 0.12\pi$, Ventana Hanning



Solución: …

```
clc; clear all; close all;
%Parametros del Filtro FIR
wc=0.12*pi; M=61;
%Filtro Ideal Deseado (Recortado y desplazado)
n1=0:((M-1)/2)-1;
hd1= sin(wc.*(n1-(M-1)/2))./(pi.*(n1-(M-1)/2));

n2=(M-1)/2;
hd2=wc/pi;

n3=(((M-1)/2)+1): M-1;
hd3= sin(wc.*(n3-(M-1)/2))./(pi.*(n3-(M-1)/2));
n=[n1  n2  n3];
hd=[hd1 hd2  hd3];

%Enventanado Rectangular
% V=ones(1,M);
% h=hd.*V;

%Enventanado Hanning
V=(1-cos(2*pi*n/(M-1)))/2;
h=hd.*V;

% Respuesta en Frecuencia
[H, w]=freqz(h);

% Graficación
figure, stem(n,V); grid on; title('Ventana');
xlabel ('n'); ylabel('w(n)');
figure; plot(w/pi, abs(H)); grid on; title('Magnitud de H(w)');
xlabel ('w normalizado (x \pi rad/muestra)'); ylabel('|H(w)|');
figure; plot(w/pi, unwrap(angle(H))); grid on;title('Fase de H(w)');
xlabel ('w normalizado (x \pi rad/muestra)'); ylabel('|\_H(w) (rad)');
figure; stem(n, h), grid on;title('Respuesta Impulsional h(n)');
xlabel ('n'); ylabel('h(n)');
```


humberto.loaiza@correounivalle.edu.co