

Procesamiento Digital de Señales

Profesor

HUMBERTO LOAIZA CORREA Ing., M.Sc., Ph.D.

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co



■ Frecuencia

- Número de veces que un fenómeno periódico específico ocurre dentro de un intervalo de tiempo especificado.
- Oscilación armónica de partículas en movimiento periódico.
- Número de ciclos por unidad de tiempo de una señal periódica.
- La frecuencia hace referencia a una cantidad física positiva
 - Por conveniencia matemática es conveniente introducir frecuencias negativas.

■ Frecuencia ...

- Existe una relación directa entre tiempo y frecuencia.
 - Afectación en tiempo \leftrightarrow Afectación en frecuencia
- Es necesario evaluar cuanto se afecta la frecuencia e información de una señal con el muestreo.
- El muestreo de señales analógicas requiere de algunas condiciones para evitar pérdidas de información.
- Suposición: *muestreo uniforme de señales*.

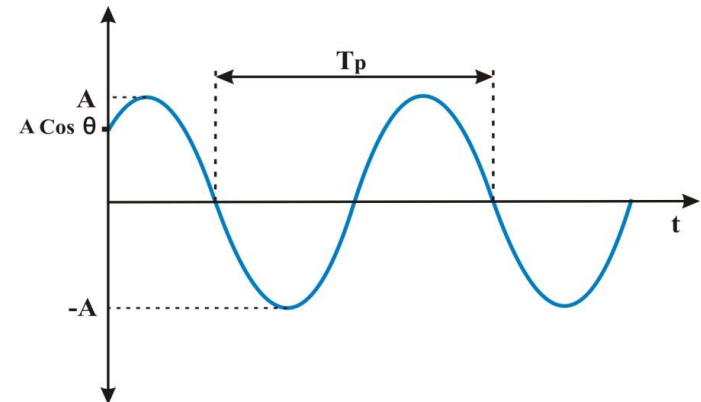
■ Señal Sinusoidal Analógica

■ Definición:

$$x_a(t) = A \cos(\Omega t + \theta), \quad -\infty < t < \infty$$

■ Donde,

- Amplitud: A
- Frecuencia Angular: $\Omega = 2\pi F$ [rad/s]; $F = 1/T_p$ [Hz]
- Fase: θ [rad]



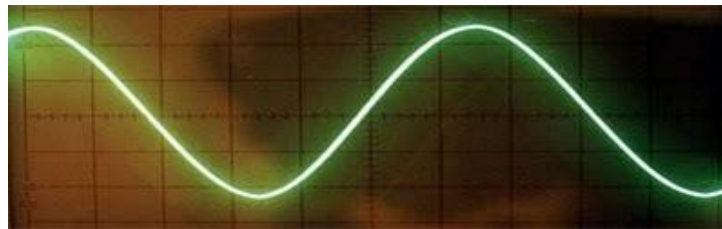
■ Propiedades Básicas – Señal Sinusoidal Analógica

- **Periodicidad:** Para todo valor de F , la señal es periódica

$$x_a(t + NT) = x_a(t) \quad T = 1/F, \text{ periodo fundamental}$$

N , cualquier número entero

- **Unicidad:** las señales con frecuencias diferentes son siempre distintas.

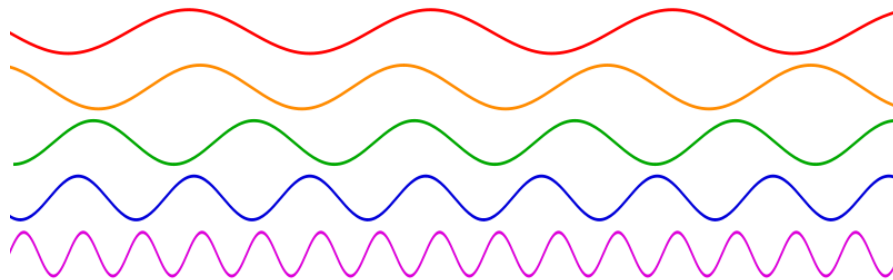


- Rango de unicidad: $-\infty < \Omega < \infty$ o $-\infty < F < \infty$

■ Propiedades Básicas – Señal Sinusoidal Analógica ...

■ Tasa de oscilación

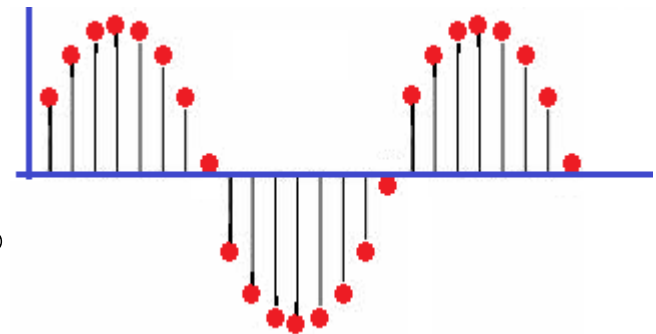
Un **aumento en F** implica siempre un **aumento** de la tasa de **oscilación** y en el número de **periodos** en una ventana temporal dada.



■ Señal Sinusoidal Discreta

■ Definición:

$$x(t = nT) \equiv x(n) = A \cos(\omega n + \theta), \quad -\infty < n < \infty$$



■ Donde,

- Número de muestra: n [entero]
- Amplitud: A
- Periodo de muestreo: $T = 1/F_m$
- Frecuencia Angular: $\omega = 2\pi f$ [rad/muestra];
 $f \equiv$ [ciclos/muestra]
- Fase: θ [rad]

■ Propiedades Básicas – Señal Sinusoidal Discreta

- **Periodicidad:** $x(n + N) = x(n)$ para todo n
 - Donde, $N \in \mathbb{Z}^+$ y el valor más pequeño de N es el periodo fundamental.
- La condición de la frecuencia f_0 para que una señal cosenoidal sea periódica, es decir,
$$A \cos [2\pi f_0 (n + N) + \theta] = A \cos(2\pi f_0 n + \theta)$$
- Es que exista una constante k entera tal que,
$$f_0 = \frac{k}{N}$$
- Cuando k y N son primos *relativos* N es el periodo fundamental de la señal.
 - Solo tienen divisor común 1 ó -1, o cumplen que el máximo común divisor es 1.

■ Propiedades Básicas – Señal Sinusoidal Discreta

- **Unicidad:** las sinusoides cuyas frecuencias están separadas por múltiplos de 2π son idénticas:

$$\cos[(w_0 + 2\pi)n + \theta] = \cos(w_0 n + \theta) \quad -\pi \leq w_0 \leq \pi$$

- Existen **señales** discretas **iguales** con **frecuencias distintas** para:

$$|w| \geq \pi \quad o \quad |f| \geq \frac{1}{2} \quad \text{tienen un alias en } -\pi < w < \pi \quad o \quad -\frac{1}{2} \leq f \leq \frac{1}{2}$$

- Una pequeña variación en frecuencia, ocasiona una enorme variación en el periodo.

■ Propiedades Básicas – Señal Sinusoidal Discreta ...

■ Rango de Unicidad:

- $$-\pi < w < \pi \quad o \quad -\frac{1}{2} \leq f \leq \frac{1}{2}$$

■ Oscilación Máxima :

- Se alcanza para $w=\pm\pi$ o $f=\pm 1/2$

■ Relación entre las frecuencias F y f – Señal Sinusoidal

- La señal análoga muestreada es:

$$x_a(t = nT) \equiv x(n) = A \cos(2\pi F nT + \theta) = A \cos\left(\frac{2\pi n F}{F_m} + \theta\right)$$

- La señal discreta es: $x(n) = A \cos(2\pi f n + \theta)$

Comparando: $f = \frac{F}{F_m}$ o $\omega = \Omega T$ donde $F_m = \frac{1}{T}$ [Hz]

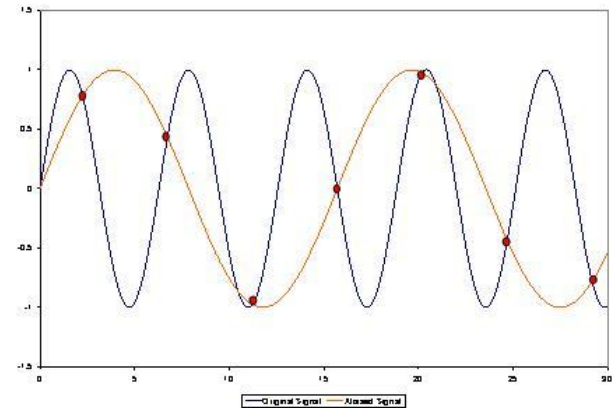
- Dados los límites de la frecuencia discreta $-1/2 < f < 1/2$ y $-\pi < \omega < \pi$, las **frecuencias análogas máximas** son:

$$F_{\max} = \frac{F_m}{2} \quad y \quad \Omega_{\max} = \pi F_m$$

■ Introducción

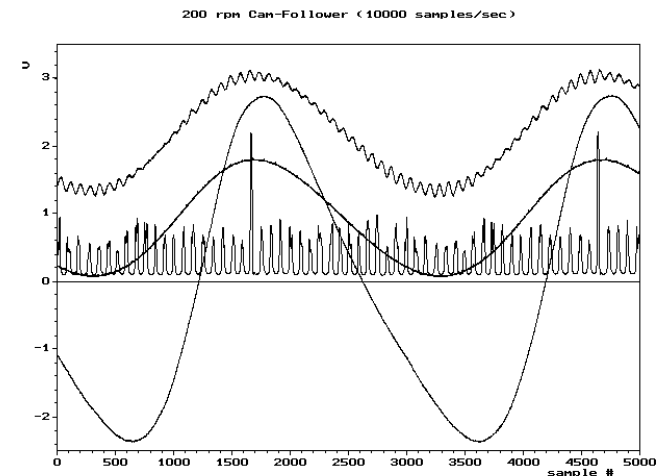
- El muestreo uniforme puede introducir **ambigüedad** en la señal digital obtenida e impone una **restricción** esencial:
 - La máxima frecuencia análoga que puede recuperarse tras muestrear la señal a F_m es:

$$F_{max} = \frac{F_m}{2}$$



■ Introducción...

- Una señal muestreada correctamente podrá **recuperarse** sin pérdida de información mediante un **interpolador** (Conversor D/A),
 - La fórmula está dada por el **Teorema del Muestreo de Nyquist-Shannon**.



■ Definición

- Si la frecuencia más alta contenida en una señal analógica $x_a(t)$ es $F_{\max}=B$ y se muestrea a $F_m > 2F_{\max}=2B$, entonces $x_a(t)$ se puede recuperar totalmente a partir de $x_a(nT)$, mediante la siguiente función de interpolación:

$$g(t) = \frac{\text{sen}(2\pi B t)}{2\pi B t}$$

- $x_a(t)$ se recupera según la expresión:

$$x_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a\left(\frac{n}{F_m}\right) g\left(t - \frac{n}{F_m}\right)$$

■ Definición...

- Caso particular: frecuencia de muestreo mínima $F_m=2B$:

$$x_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a\left(\frac{n}{2B}\right) \frac{\text{sen}\left[2\pi B\left(t - \frac{n}{2B}\right)\right]}{2\pi B\left(t - \frac{n}{2B}\right)}$$

■ Observaciones

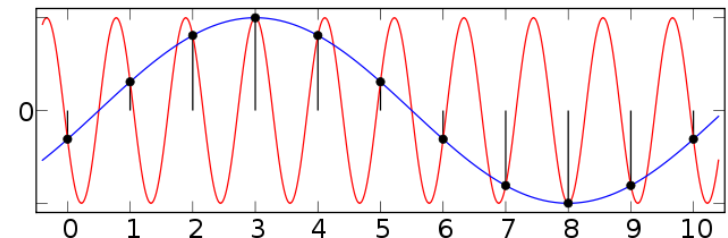
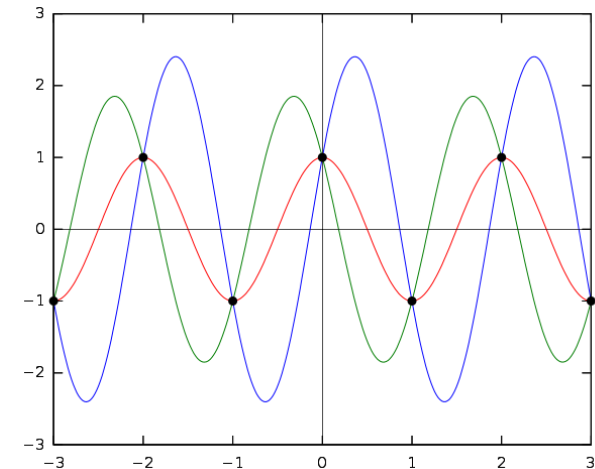
- La máxima frecuencia permitida en una señal para una frecuencia de muestreo dada se denomina Frecuencia de Nyquist, $F_N = 2 B = 2F_{\max}$.
- F_m no necesariamente debe ser el doble de la máxima frecuencia contenida en la señal, sino el doble del ancho de banda de la señal de interés.
 - *Teorema de Nyquist Pasabanda:* Considera el desplazamiento de las frecuencias en el espectro de la señal.
 - *Teorema Generalizado de Nyquist:* Considera directamente a B como el ancho de banda de la señal.



■ Observaciones

■ Filtrado Previo antes del CA/D

- Es necesario aplicar filtrado **paso-bajo** a la señal análoga para eliminar el ruido solapado con componentes frecuenciales superiores a la de Nyquist que produciría **aliasing**.

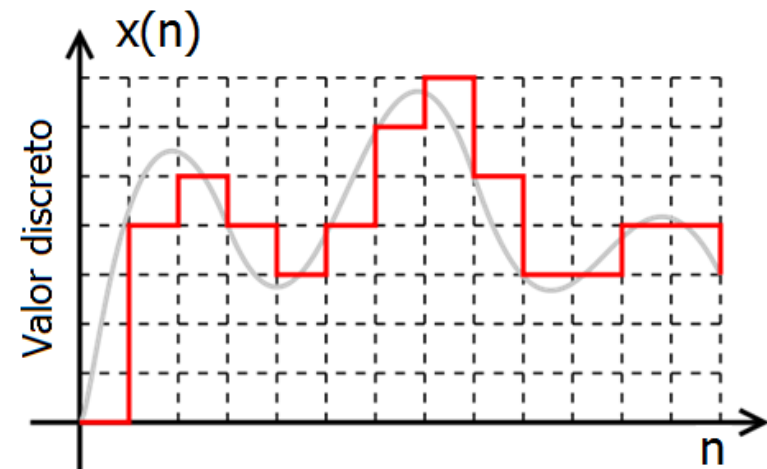
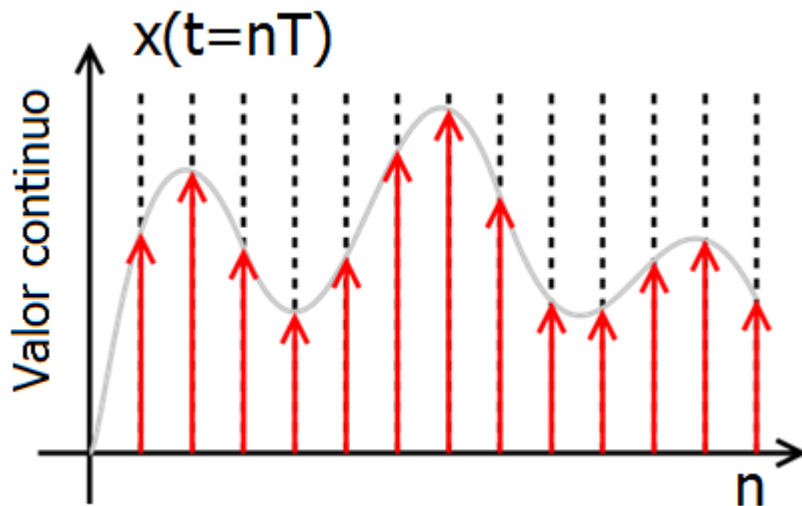


■ Introducción

- La conversión A/D está formada por tres etapas: **muestreo**, **cuantificación** y **codificación**.

■ Cuantificación

- Es la conversión de una señal en **tiempo discreto** con **valores continuos** en una **señal digital**.



■ Observaciones

- El valor de cada muestra se representa mediante un **valor seleccionado** de un **conjunto finito** de valores (niveles de cuantificación).
- La cuantificación es un proceso **irreversible, no invertible** ya que siempre produce **pérdida** de información.
- Cada dato digital se representa con un número de bits finito (codificación), lo que hace que la señal muestreada y la originan difieran.

■ Definiciones

- **Error de cuantificación:** ocasionado por la representación de la señal de valor continuo con un conjunto finito de valores discretos.

$$e_q(n) = x_q(n) - x(n) \quad \text{donde } x_q(n) \text{ es la señal cuantificada}$$

■ Definiciones...

- **Resolución de cuantificación:** distancia entre los niveles de cuantificación.

$$\Delta = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{2^B - 1} = \frac{RD}{2^B - 1}$$

- Donde,

- x_{\max} , x_{\min} , valores máximo y mínimo permitidos de la señal de entrada
- B, longitud de palabra en bits.
- $RD = x_{\max} - x_{\min}$, Rango dinámico

■ Definiciones...

- **Relación Señal Ruido de Cuantificación** es una medida de la calidad de la salida del conversor A/D

- Define la relación entre la potencia de la señal y la del ruido.

$$SQNR = \frac{P_x}{P_q}$$

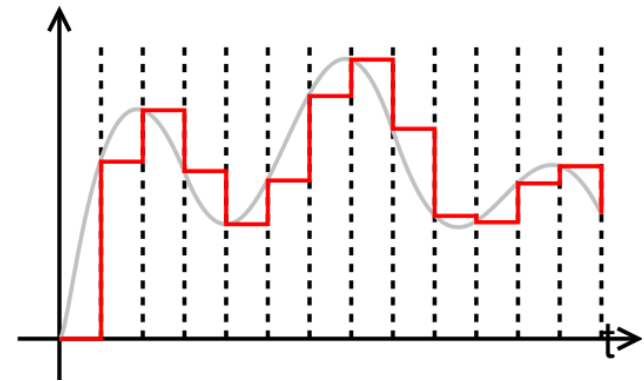
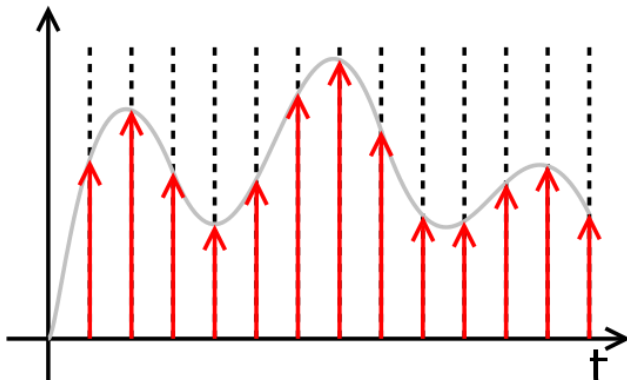
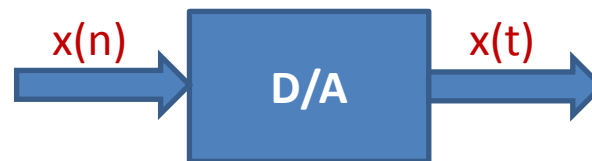
- Para **sinusoidales**:

$$SQNR = \frac{3}{2} 2^{2b}, \quad P_x = \frac{A^2}{2}, \quad P_q = \frac{A^2/3}{2^{2b}}$$

- Donde ,
 - **b**, número de bits de precisión del conversor
 - **A**, rango del conversor
 - En decibels: $SQNR(dB) = 10 \log_{10} SQNR \approx 1.76 + 6.02b$

■ Introducción

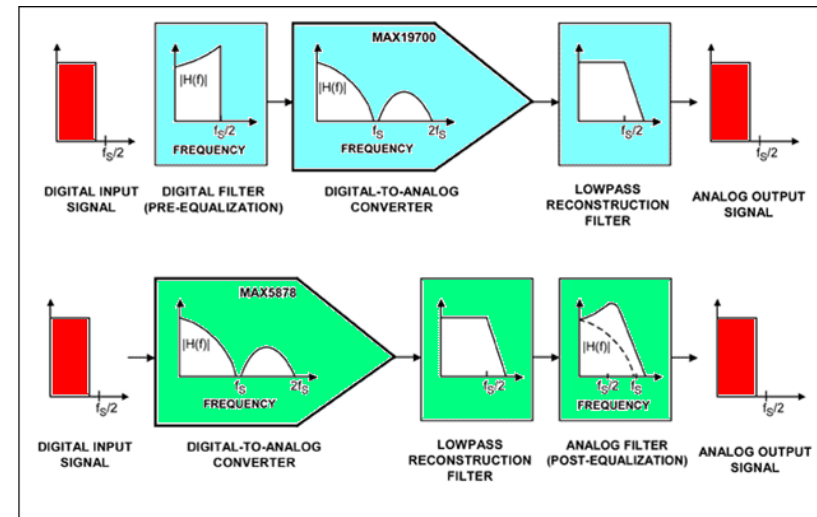
- Un convertidor digital analógico (D/A) genera una señal continua $x(t)$ a partir de una secuencia de datos $x(n)$ mediante una función de interpolación.



Reconstrucción (D/A)

■ Introducción ...

- El CD/A requiere en la práctica de componentes adicionales:
 - **circuito de muestreo y mantenimiento** (sample-hold)
 - **filtro paso-bajo**
- El reconstructor ideal es no causal y con respuesta impulsional infinita.



■ Tipos de Retenedores

■ Retenedor de orden cero:

$$\hat{x}(t) = x(nT), \quad nT \leq t \leq (n+1)T$$

■ Retenedor de orden uno:

$$\hat{x}(t) = x(nT) + \frac{x(nT) - x((n-1)T)}{T} (t - nT), \quad nT \leq t \leq (n+1)T$$

■ Retenedor con retardo:

$$\hat{x}(t) = x((n-1)T) + \frac{x(nT) - x((n-1)T)}{T} (t - nT), \quad nT \leq t \leq (n+1)T$$

$$\text{En } t = nT \quad \rightarrow \quad \hat{x}(nT) = x((n-1)T)$$

$$\text{En } t = (n+1)T \quad \rightarrow \quad \hat{x}((n+1)T) = x(nT)$$