

PROCESAMIENTO DIGITAL DE SEÑALES

PROFESOR: HUMBERTO LOAIZA C., Ph.D.

LABORATORIO No. 4 (Software)

Correlación

Identificación del periodo de señales discretas con ruido Comparación de señales discretas – Aplicación radar-sonar

I. Objetivos

- Implementar la función de correlación entre señales discretas.
- Analizar la cros-correlación para la comparación de señales discretas.
- Evaluar la auto-correlación para la determinación de la frecuencia de señales afectadas por ruido.
- Estudiar y analizar los efectos de la normalización de señales.
- Analizar y estimar los retardos de una aplicación radar-sonar.
- Implementar métodos de comparación de señales discretas.

II. Introducción

1. Vectorizar

En el ambiente de Matlab se denominará *vectorizar* a la operación que busca explotar la eficiencia de Matlab en operaciones con vectores y matrices al reemplazar códigos repetitivos.

A primera vista puede pensarse que la vectorización conlleva a códigos ineficientes en tiempo de cálculo pues puede requerirse un número mayor de operaciones. La mejora se puede apreciar al tener en cuenta que generalmente es un solo tipo de operación la que debe aplicarse repetidamente al vector. Un buen ejemplo de esta ventaja, se aprecia al vectorizar las buclas *for* en donde además de las operaciones sobre los datos es necesario realizar saltos, comparaciones y modificación de los índices.

Repetición de filas o columnas

Frecuentemente se hace necesario formar matrices mediante la repetición de uno o más valores. Si la matriz debe tener todos los elementos con igual valor, se pueden usar funciones como *ones* o *zeros*. Por ejemplo para crear una matriz A de MxN con todos sus valores iguales a 5.3, se puede lograr con la instrucción,

$$A = 5.3 * \text{ones}(M,N)$$

Si se desea crear una matriz de M filas a partir de la repetición de un vector fila **x** puede utilizarse la operación de *producto externo* de matrices con la siguiente instrucción,

$$X = \text{ones}(M,1) * x$$

Vectores lógicos

Uno de los principales causantes de la lentitud en un programa lo constituye la utilización de *instrucciones condicionales*. En principio, la vectorización no debería aplicarse a los tests de verificación de condiciones, pero lo anterior no es totalmente cierto debido a que en Matlab las funciones de comparación - tales como *más grande que*, *igual que*, .. - pueden operar sobre vectores o matrices. Por ejemplo, el código

$$[2 \ 4 \ 6 \ 8 \ 10 \ 12] > 6$$

genera la respuesta `[0 0 0 1 1 1]`, donde 0 representa *FALSE* y 1 *TRUE*.

Ejemplo de vectorización. Crear una función que tome una señal de entrada **x** y genere a partir de ésta, una señal **y** cuyas amplitudes no excedan dos límites establecidos por el usuario.

Solución clásica (lenta)

```
function y = recortar (x, lim_bajo, lim_alto)

[M, N]= size (x);

for m=1:M
    for n=1:N
        if x(m,n) > lim_alto
            x(m,n)= lim_alto;
        elseif x(m,n) < lim_bajo
            x(m,n)=lim_bajo;
        end
    end
end
y=x;
```

Esta solución requiere de dos buclas *for* para recorrer todos los elementos de la matriz, lo cual retarda la ejecución del programa.

Para realizar un programa más rápido se recurre a la vectorización y al hecho de que TRUE y FALSE tienen valores numéricos que pueden usarse como máscaras para seleccionar partes de la matriz **x**.

Solución vectorizada (rápida)

```
function y = recortar (x, lim_bajo, lim_alto)

y=(x .* [x <= lim_alto] ) + lim_alto .* [ x >lim_alto];
y=(x .* [y >= lim_bajo] ) + lim_bajo .* [x <lim_bajo];
```

La segunda versión del programa requiere un número más alto de operaciones matemáticas que la primera, sin embargo, requiere mucho menos tiempo de ejecución (verificar con las funciones *etime*, *tic* y *toc*).

2. Operador *dos puntos* (:)

El operador (:) es de suma importancia en el manejo de matrices, vectores y arreglos. Este operador permite indexar en forma total o parcial un conjunto de columnas y/o filas, que se utilizan para extraer o llenar datos en uno de los tipos de datos indicados anteriormente.

Algunas de las formas de uso son:

- i. $vi:incr:vf$ Crea una lista de números espaciados *incr* que empiezan en *vi* hasta llegar a *vf*. El valor por defecto de *incr* es 1 y puede omitirse.
- ii. $A(vi:incr:vf, j)$ Indexa los elementos *vi* hasta *vf* de la columna *j* de la matriz *A*.
- iii. $A(i, :)$ Indexa todos los elementos de la fila *i* de la matriz *A*.
- iv. $b=A(:)$ Crea un vector columna, *b*, con las columnas de *A* concatenadas.

3. Operador *punto + operación aritmética*

El operador (.) seguido de una operación aritmética permite realizar operaciones elemento a elemento (correspondientes) en dos arreglos, los cuales deben ser del mismo arreglo a no ser que uno de ellos sea un escalar.

$C=A.*B$ Multiplicación elemento a elemento de los arreglos *A* y *B*. $C(i,j) = A(i,j)*B(i,j)$

$C=A.\backslash B$ División izquierda elemento a elemento de los arreglos *A* y *B*. $C(i,j) = B(i,j)/A(i,j)$

$C=A./B$ División derecha elemento a elemento de los arreglos *A* y *B*. $C(i,j) = A(i,j)/B(i,j)$

$C=A.^B$ Potenciación de cada elemento de *A* por su respectivo en *B*. $C(i,j) = A(i,j)^{B(i,j)}$.

III. Funciones prácticas de Matlab

- **save:** permite almacenar algunas o todas las variables del espacio de trabajo en un archivo binario.
- **load:** permite cargar variables desde un archivo binario al espacio de trabajo de Matlab.
- **more on/off :** habilita/deshabilita la visualización por páginas en la ventana de comandos. Útil cuando se consulta el help desde la línea de comandos.
- **inline:** permite crear en una línea de código de Matlab una función con uno o varios argumentos de entrada. La utilización de estas funciones es igual a las generadas con el

método normal. Existen tres comandos relacionados con `inline` que permiten examinar las funciones:

- **char:** convierte la función `inline` en un arreglo de caracteres. Trabaja de forma igual a la función *formula*.
- **argnames:** retorna los nombres de los argumentos de entrada de la función `inline` como un arreglo de celdas de cadenas.
- **formula:** visualiza la ecuación que implementa la función `inline`.
- **vectorize:** inserta un punto `.` antes de cualquier operando `^`, `*` o `/` en un cadena de caracteres y en una fórmula de una función `inline`. Esto último permite obtener una versión vectorizada de la función `inline`.
- **tic/toc:** activa/desactiva un temporizador que permite medir el tiempo –en segundos– transcurrido desde que se ejecuta *tic* hasta *toc*.
- **cputime:** entrega el tiempo total de CPU - en segundos – usados por Matlab desde que se abrió la sesión.
- **clock:** suministra un vector de 6 elementos el cual contienen información de fecha y hora en un formato determinado por Matlab.
- **etime:** calcula la diferencia de tiempo entre dos vectores generados por la función *clock*.
- **reshape:** permite cambiar las dimensiones de una matriz. Si la matriz inicial no posee la cantidad de elementos solicitados se genera un error.

IV. Procedimiento

1. Correlación

- 1.1. Elabore un programa en Matlab que implemente la operación de **correlación** entre dos secuencias discretas. El programa debe establecer automáticamente si se efectúa la auto-correlación o la cros-correlación en función del número de parámetros de entrada, de forma tal que pueda visualizar en una misma ventana la señal o señales de entrada y la señal de correlación. Recuerde que la correlación está definida como,

$$r_{xy}(l) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y(n-l) \quad l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

o, equivalentemente como,

$$r_{xy}(l) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n+l)y(n) \quad l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

La función para el cálculo de la correlación debe tener el siguiente encabezado:

function [r] = correlation (x, x0, y, y0, rang)

donde, **x** , **y** son los vectores que contienen las secuencias que se les aplicará la correlación; **x0**, **y0** son los instantes cero de cada secuencia; **rang** es el intervalo `[-rang , rang]` para el cual se calcula la correlación; **r** es la secuencia resultante de aplicar la correlación.

En caso de utilizar la función de convolución para calcular la correlación, puede utilizar la función **fliplr** de Matlab para reflejar señales.

Consigne el código y explique el algoritmo del programa implementado.

1.2. Pruebe la función **correlation**() para las señales dadas. Utilice un valor de *rang* por lo menos igual al tamaño de las señales de entrada.

- a. $x(n) = \{1, 1, 3.5, 1, 1, 1\}$ $y(n) = \{1, 3.5, 1, 1, 1, 1\}$
- b. $x(n) = \{0.1, 0.5, 0.75, 1.5, 1.5, 1.5, 0.75, 0, 0, 0.75\}$
 $y(n) = \{-0.1, -0.5, -0.75, -1.5, -1.5, -1.5, -0.75, 0, 0, -0.75\}$
- c. $x(n) = \{1, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2, 1\}$ $y(n) = \{1.2, 1.8, 3.1, 3.9, 5.1, 3.9, 3.2, 2.1, 0.9\}$
- d. $x(n) = \{1.2, 1.1, 3.6, 1.2, 0.9, 1.2\}$ $y(n) = \{1, 3.5, 1, 1, 1, 1\}$
- e. $x(n) = \{1, 2, 3, 4, 3, 2, 1, 0, 0\}$ $y(n) = \{0, 0, 1, 2, 3, 4, 3, 2, 1\}$
- f. $x(n) = \{0, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 0, 0\}$ $y(n) = \{0, 0, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0, 0\}$

Para cada caso consigne las gráficas, analice las secuencias de entrada e interprete los resultados obtenidos. Son los resultados los esperados? Justifique sus respuestas.

Determine en que instante n se produce el valor absoluto máximo de la señal $r(n)$. Tiene importancia el signo del valor máximo?. Que información suministra la simetría de $r(n)$?

1.3. Modifique la función *correlation* para que incluya un parámetro adicional en la entrada que permita indicar si se desea aplicar normalización a las secuencias de entrada o de salida.

- a. Normalización de secuencias de entrada: consiste en restar a cada valor de una secuencia, $x(n)$, su valor promedio, m , y dividirlo por su desviación estándar, σ , es decir,

$$\tilde{x}(n) = \frac{x(n) - m}{\sigma}$$

El proceso anterior genera una secuencia de salida con valor promedio cero y desviación estándar uno.

- b. Normalización de la correlación: consiste en dividir los valores de la secuencia de correlación por el valor de la autocorrelación evaluada en $l=0$, lo anterior produce una secuencia con valores que oscilan entre ± 1 . Las expresiones para la cross-correlación y autocorrelación son las siguientes:

$$\rho_{xy}(l) = \frac{r_{xy}(l)}{\sqrt{r_{xx}(0) r_{yy}(0)}} \quad \rho_{xx}(l) = \frac{r_{xx}(l)}{r_{xx}(0)}$$

Consigne el código y explique las modificaciones realizadas al algoritmo.

- c. **Consulta.** Explique en forma resumida la técnica de normalización *whitening* indicando sus ventajas. Cite referencias bibliográficas.

- 1.4. Pruebe la función **correlation**() con las dos opciones de normalización (§ 1.3.a y § 1.3.b) para las señales b, e y f dadas en § 1.2. Consigne y analice los resultados. Qué importancia tiene la normalización en el proceso de analizar dos señales?
- 1.5. Utilice la función **xcorr**() de Matlab con las señales de § 1.2 y compare los resultados obtenidos en § 1.2. y en § 1.5. Explique la razón de las diferencias entre las funciones de Matlab y las implementadas, considerando aspectos tales como complejidad del algoritmo, tiempo de ejecución e información suministrada en los resultados.

2. Determinación de la frecuencia de señales discretas con ruido

2.1. A partir de la tabla 1 dada en el anexo, genere las siguientes sub-secuencias:

- $x_1 = \{\text{datos desde 1770 hasta 1779}\}$
- $x_2 = \{\text{datos desde 1780 hasta 1799}\}$
- $x_3 = \{\text{datos desde 1800 hasta 1829}\}$
- $x_4 = \{\text{datos desde 1830 hasta 1869}\}$
- $x_5 = [\{x_1\} \{x_2\} \{x_3\} \{x_4\}]$

2.2. Utilice la función **correlation** con la opción de normalización desarrollada en §1.4 para calcular el periodo de cada una de las secuencias de §2.1, y para cada caso ajuste el valor del parámetro **rang** con los siguientes valores:

- $\text{rang} = 5$
- $\text{rang} = 20$
- $\text{rang} = 50$

Indique cuál método de normalización es más adecuado para calcular el periodo y por qué?

2.3. Consigne las gráficas y los valores del periodo obtenidos en una tabla como la indicada a continuación.

Rang	Periodo					Promedio	Desviación estándar
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
5							
20							
50							

- 2.4. Compare las respuestas obtenidas en §2.3 y determine si el periodo es el mismo para cada caso analizado. Se presentan variaciones? Es independiente del rango?.
- 2.5. Determine cual es la(s) secuencia(s) x_i que debe(n) dar mejor información sobre la frecuencia de la manchas solares y cual es el mejor rango. Justifique su respuesta.

3. Comparación de señales discretas

- 3.1. El siguiente script permite obtener una señal discreta senoidal pura, x_I , y una señal senoidal distorsionada por el ruido, y_I .

```
%Generar una función senoidal
delta1=pi/10;
a1=0:delta1:10*pi;
x1= 5 *sin (a1);

%señal de ruido en el intervalo [a b] => x = a + (b-a) * rand(m)
%Intervalo deseado [-1 1]

ruido= -1+2* rand (1,length (x1)) ;

% señal distorsionada con ruido
A=1; % Amplitud del ruido.
y1= x1 + A* ruido;
```

- 3.2. A partir del programa anterior genere una función para visualizar en una misma ventana las señales $x_I(n)$ =sin ruido, $y_I(n)$ =con ruido y $\rho_{xy}(n)$ =crosscorrelación normalizada. Verifique su programa aplicando la correlación a las señales $x_I(n)$ y $y_I(n)$ que se generan con el script de §3.1 para los siguientes valores de A:

- a. A= 0 c. A=10 e. A=50
b. A= 1 d. A=20

- 3.3. Mida los valores de frecuencia, valor pico e instante donde se presenta el valor pico en la salida de correlación. Analice los resultados y establezca el efecto en la correlación al aumentar la amplitud del ruido (valor A) en la señal $y_I(n)$. Consigne los resultados en un tabla.

Amplitud Ruido A	Valor Pico $\rho_{xy}(n)$	Instante valor pico $n\rho_{\max}$	Periodo calculado de $\rho_{xy}(n)$

- 3.4. Indique que porcentaje de la amplitud del ruido, respecto a la amplitud de la señal original, hace que no se pueda establecer similitudes entre las señales $x_I(n)$ y $y_I(n)$, a través de la correlación. Justifique su respuesta.

4. Estimación del retardo temporal en sistemas radar-sonar (Investigación)

- 4.1. Sea $x(n)$ la señal transmitida y $y(n)$ la señal recibida por un radar-sonar, dada por,

$$y(n) = \alpha x(n - D) + w(n)$$

donde α es un factor de atenuación y D es el retardo ocasionado por el trayecto de ida y vuelta de la señal $x(n)$; y $w(n)$ representa el ruido aditivo captado por la antena y cualquier otra componente de ruido ocasionado por el sistema receptor. Se considera que el retardo D es un múltiplo entero del intervalo de muestreo.

- 4.2. Investigue como puede obtenerse el retardo D a través de la cros-correlación. Consigne la justificación matemática de su respuesta.
- 4.3. Realice una función en Matlab que implemente el método desarrollado en §4.2 y pruébelo para valores diferentes de α y D (por lo menos tres valores diferentes). La función debe presentar como parámetros de entrada las secuencias $x(n)$ y $y(n)$.

Una segunda función debe recibir como parámetro a $x(n)$ y generar $y(n)$ utilizando valores aleatorios de α , D y de la señal de ruido $w(n)$.

Consigne el código de los programas y explique los algoritmos utilizados.

- 4.4. Consigne y analice los resultados obtenidos.

5. Consulta

- 5.1. Realice el resumen de un artículo que describa una aplicación de procesamiento digital de señales: Señales fisiológicas, señales sísmicas, señales sensoriales o aplicación en comunicaciones.
Consigne la referencia bibliográfica.

6. Informe

- 6.1. Presente un informe escrito claro en donde se consigne el procedimiento, los programas, las figuras, las respuestas, las justificaciones y los resultados obtenidos. Igualmente incluya conclusiones, observaciones, y la literatura consultada. El informe debe seguir la numeración de la guía.
- 6.2. Elabore ayudas para cada una de las funciones implementadas que puedan ser consultadas con el comando *help* de Matlab.

Nota:

- a) *Para facilitar la sustentación ante el profesor, realice scripts donde se definan los datos y se invoquen las funciones desarrolladas.*
- b) *La omisión de alguno de los ítems en el informe representa una disminución de la nota.*
- c) *Las funciones elaboradas deberán conservarse para su utilización en prácticas posteriores.*

Anexo: Número anual de manchas solares de Wölfer

Año	No.	Año	No.	Año	No.	Año	No.
1770	101	1795	21	1820	16	1845	40
1771	82	1796	16	1821	7	1846	62
1772	66	1797	6	1822	4	1847	98
1773	35	1798	4	1823	2	1848	124
1774	31	1799	7	1824	8	1849	96
1775	7	1800	14	1825	17	1850	66
1776	20	1801	34	1826	36	1851	64
1777	92	1802	45	1827	50	1852	54
1778	154	1803	43	1828	62	1853	39
1779	125	1804	48	1829	67	1854	21
1780	85	1805	42	1830	71	1855	7
1781	68	1806	28	1831	48	1856	4
1782	38	1807	10	1832	28	1857	23
1783	23	1808	8	1833	8	1858	55
1784	10	1809	2	1834	13	1859	94
1785	24	1810	0	1835	57	1860	96
1786	83	1811	1	1836	122	1861	77
1787	132	1812	5	1837	138	1862	59
1788	131	1813	12	1838	103	1863	44
1789	118	1814	14	1839	86	1864	47
1790	90	1815	35	1840	63	1865	30
1791	67	1816	46	1841	37	1866	16
1792	60	1817	41	1842	24	1867	7
1793	47	1818	30	1843	11	1868	37
1794	41	1819	24	1844	15	1869	74