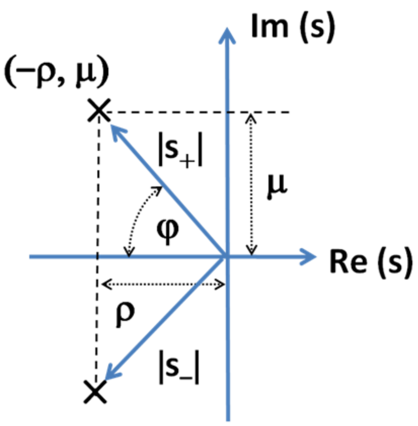
# La Transformada Z en sistemas LTI

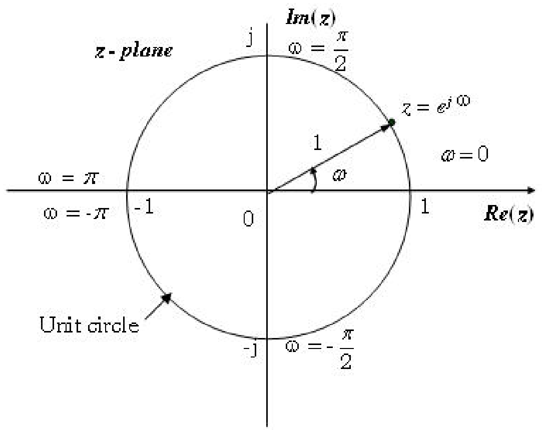


## ■ Introducción

- La **T.z** es al análisis de señales y sistemas **discretos** LTI como la **T.Laplace** es al análisis de señales y sistemas **contínuos** LTI.

- La **T.z** cubre una clase más **amplia** de señales que la **T.Fourier.**



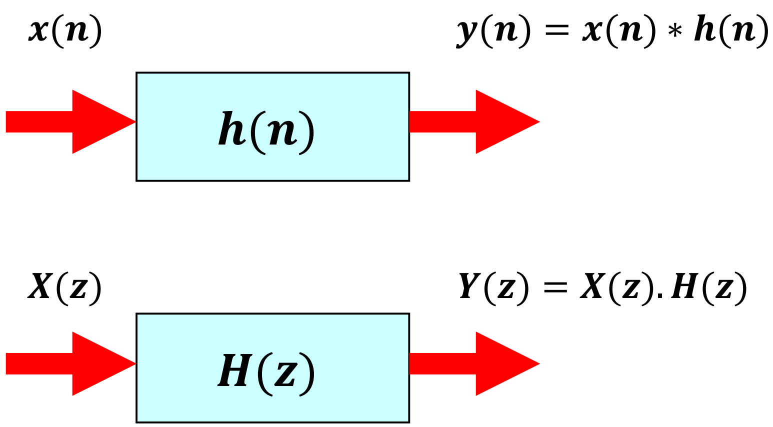



# La Transformada Z en sistemas LTI



## Introducción…

- La **convolución** de dos señales en el dominio del tiempo corresponde a una **multiplicación** de sus transformadas Z.
- **Simplifica** el **análisis** de los sistemas LTI y sus respuestas, mediante el uso de ecuaciones algebraicas.

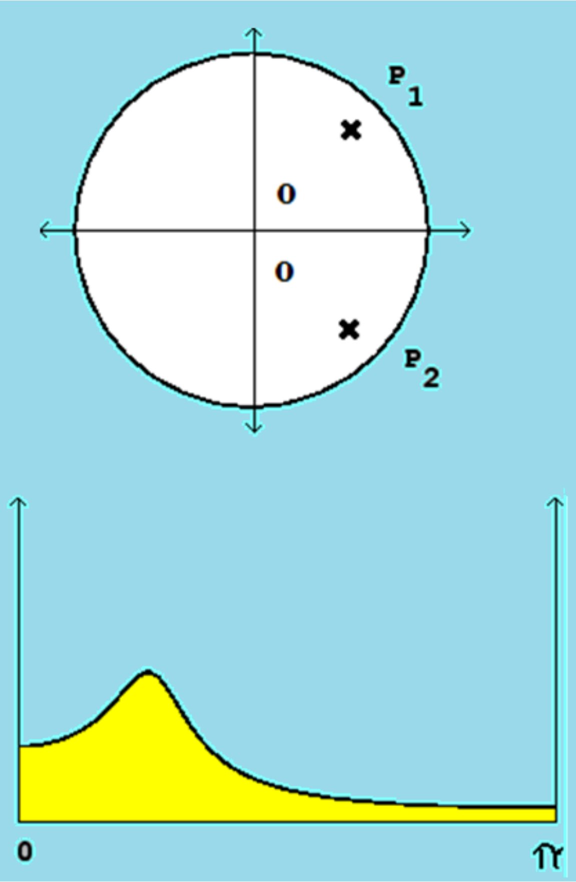




humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

## ■ Introducción…

- La T.z proporciona una manera alterna de **caracterizar** sistemas LTI y sus **respuestas** a las entradas.
- Emplea la localización de las raíces del polinomio numerador y denominador (polos y ceros) para determinar los atributos del sistema.



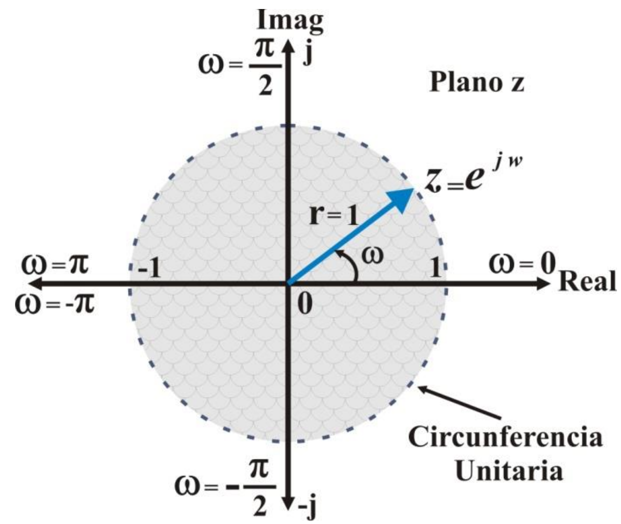
# Transformada z bilateral



- **Definición**
  - La T.z bilateral de una señal discreta $x(n)$ se define como la serie de potencias:

$$X(z) \equiv \mathcal{Z}\{x(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

    - z variable compleja de forma $z = re^{jw}$




  - La relación entre $x(n)$ y $X(z)$ se denota:

$$x(n) \overset{z}{\longleftrightarrow} X(z)$$

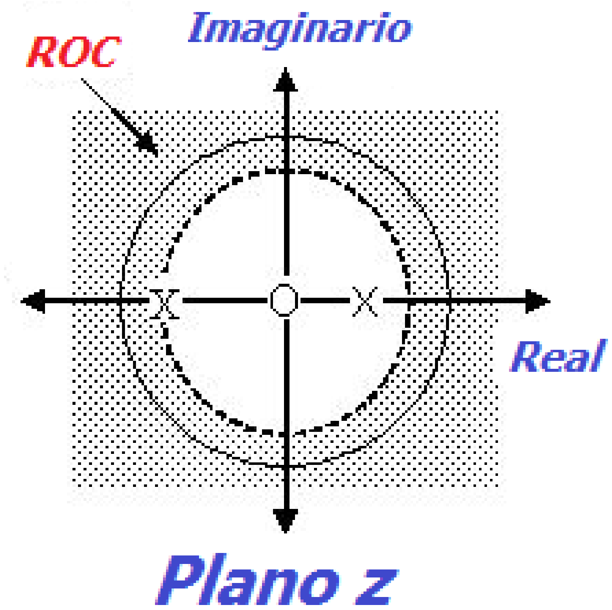
  - Es necesario definir la ROC de la T.z.


humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

# Región de Convergencia (ROC)

PSI Percepción y Sistemas Inteligentes

- **Definición**
  - La ROC de $X(z)$ es el conjunto de todos los valores de z para los que $X(z)$ es finita.
  - La T.z es una serie infinita de potencias.
    - Existe sólo para aquellos valores de $z$ para los que la serie converge.
  - Siempre que se determine una T.z bilateral debe indicarse su ROC.





humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

# Región de Convergencia



- **Ejemplo:** Encontrar la T.z bilateral de las señales de duración finita:
  - $x_1(n) = \{\underline{4}\,,\ \ 2,\ 5,\ -7,\ 0,\ 3\}$
  - $x_2(n) = \{4,\ \ 2,\ \ \underline{5},\ -7,\ 0,\ 3\}$
  - $x_3(n) = \delta(n)$
- **Solución**
  - $X_1(z) = 4 + 2z^{-1} + 5z^{-2} - 7z^{-3} + 3z^{-5}$
    - ROC: $plano\ z,\ excepto\ z = 0$
  - $X_2(z) = 4z^2 + 2z^1 + 5 - 7z^{-1} + 3z^{-3}$
    - ROC: $plano\ z,\ excepto\ z = 0\ y\ z = \infty$
  - $X_3(z) = 1$
    - ROC: $plano\ z$

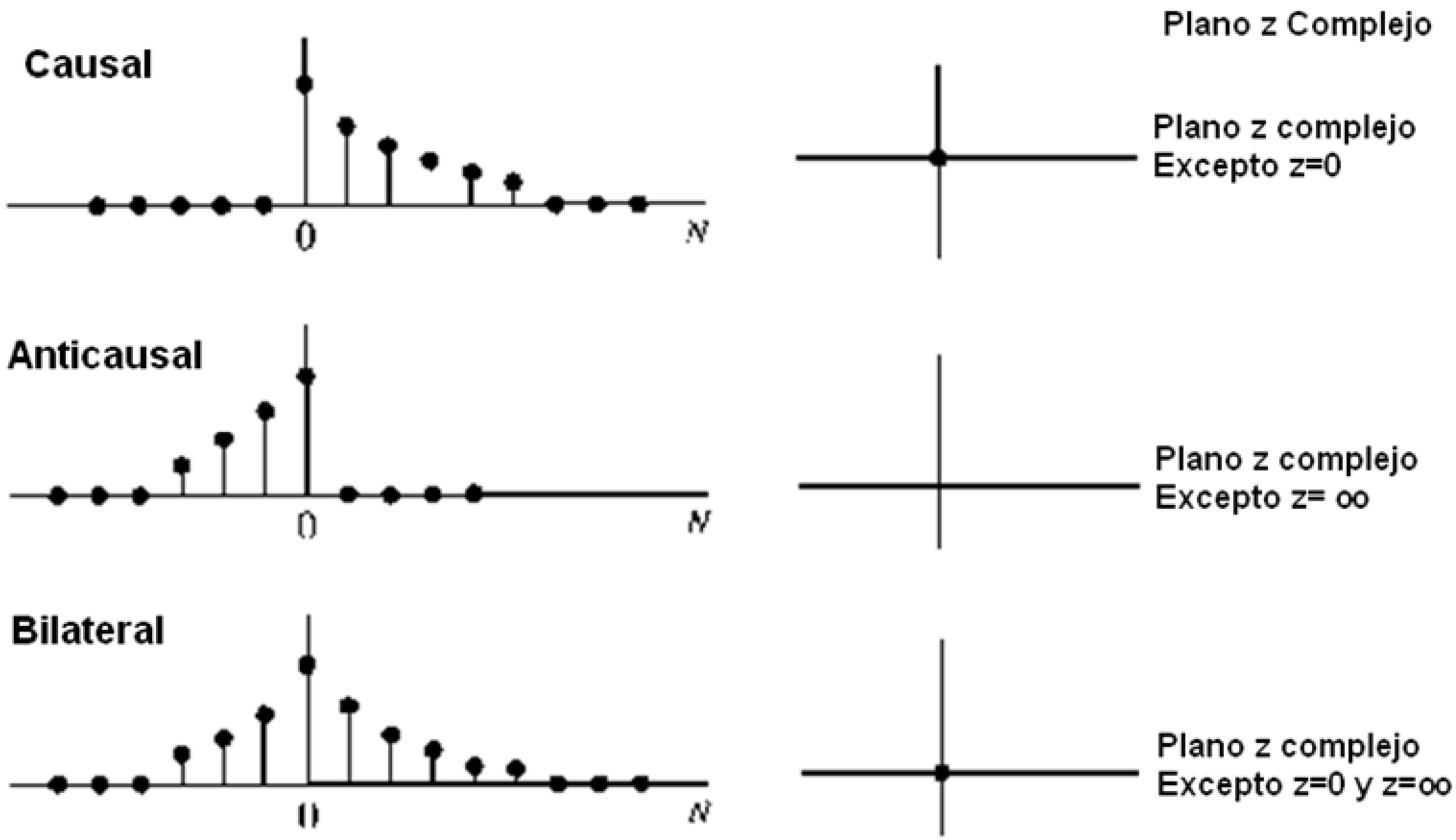


humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

# Señales Típicas y sus ROC

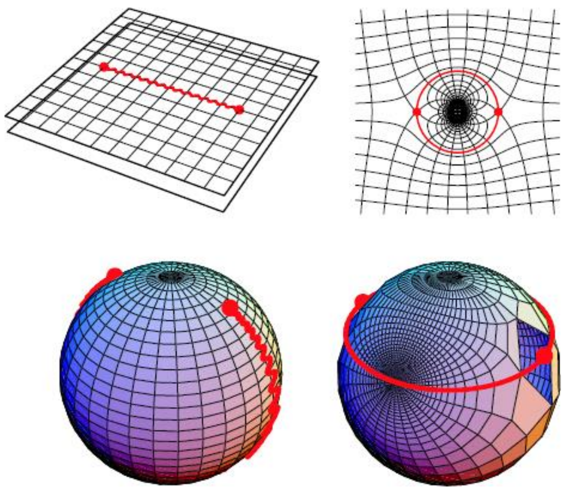
Percepción y Sistemas Inteligentes

## Señales de Duración Finita



# Región de Convergencia

- **Observación**
  - La ROC de señales de **duración finita** es todo el plano z, excepto quizás $z = 0$ y/o $z = \infty$.
  - Desde el punto de vista matemático, la T.z es una forma alternativa de **representar** una señal discreta.




humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

# ROC: Parte causal y no-causal



- **Introducción**
  - Encontrar la ROC de X(z) es equivalente a determinar **el rango de valores de $\boldsymbol{r}$** para los que la secuencia $\boldsymbol{x(n)r^{-n}}$ es **absolutamente sumable**.

$$z = re^{j\theta} \Rightarrow \quad X(z)\Big|_{z=re^{j\theta}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) r^{-n} e^{-j\theta n}$$

  - La magnitud de X(z) está dada por**,**

$$|X(z)| = \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) r^{-n} e^{-j\theta n} \right| \le \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| x(n) r^{-n} \right|$$

# ROC: Parte causal y no-causal



- **Introducción …**
  - Reorganizando la sumatoria,

$$|X(z)| \le \sum_{n=1}^{\infty} \left|x(-n)r^n\right| + \sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{x(n)}{r^n}\right|$$

    - Se observan dos componentes: **anticausal** y **causal**
  - Para que exista $X(z)$, ambos componentes deben **converger**:
    - Parte **anticausal:**

$$\sum_{n=1}^{\infty} x(-n)r^n < \infty \text{ , converge para } r < r_1 < \infty$$

    - Parte **causal:**

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x(n)}{r^n} < \infty \text{ , converge para } r > r_2 < \infty$$

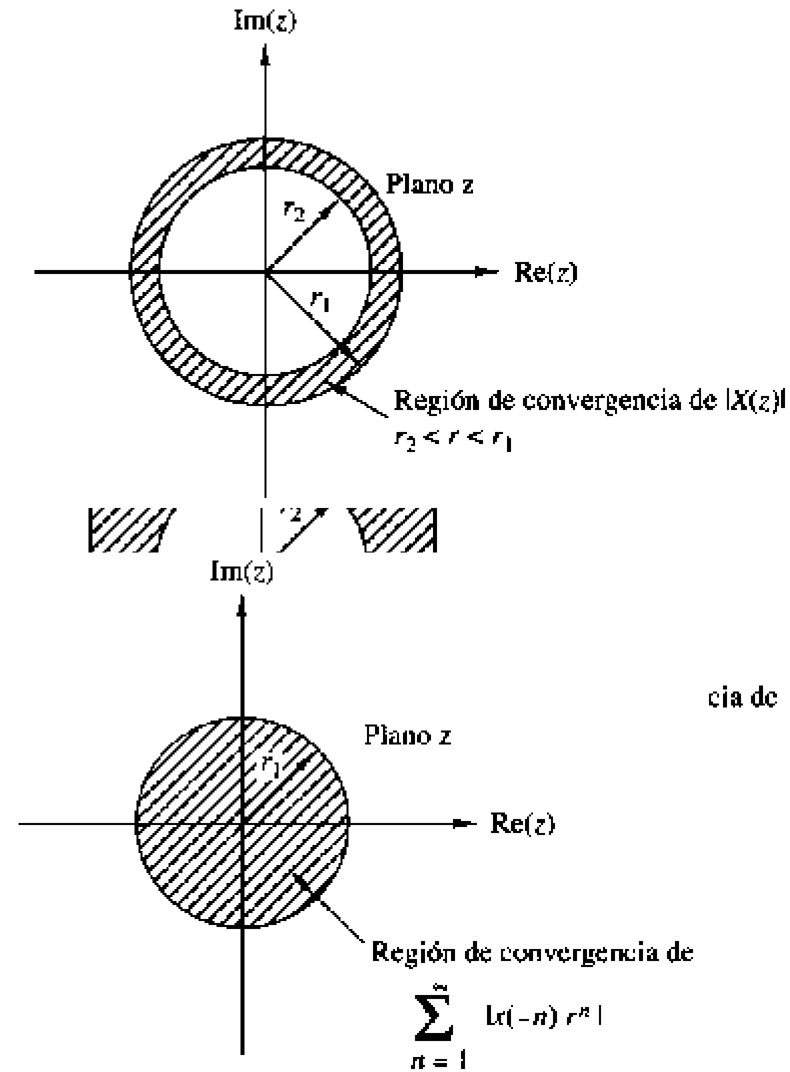

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

# ROC: Parte causal y no-causal

- **ROC Anular**: corresponde a una $X(z)$ con parte causal y anticausal, tal que tal que $\mathbf{r_2} < \mathbf{r} < \mathbf{r_1}$
  - Si $r_2 > r_1 \Rightarrow$ ROC no existe $\Rightarrow X(z)$ no existe

- **ROC Externa a un círculo $\mathbf{r_2}$**: corresponde a una $X(z)$ sólo con parte **causal**.

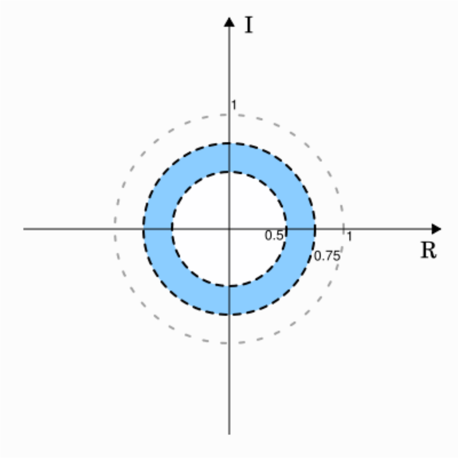
- **ROC Interna a un círculo $\mathbf{r_1}$**: corresponde a una $X(z)$ sólo con parte **anticausal**.

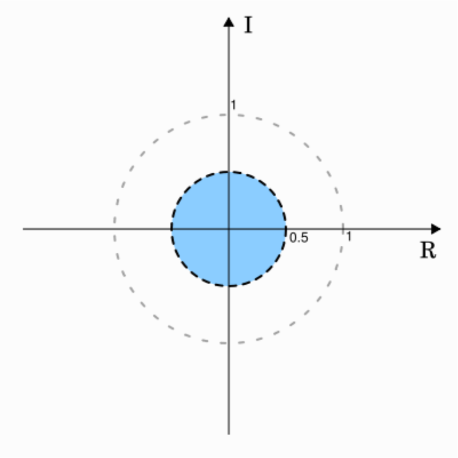


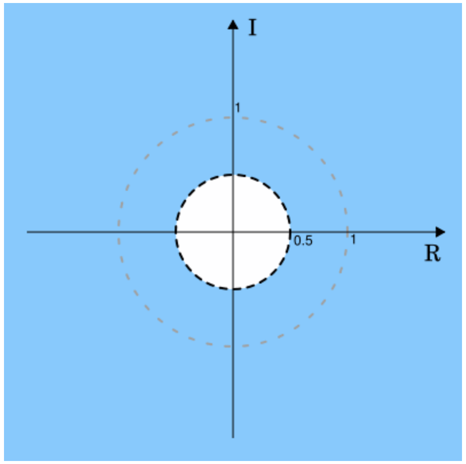
# Propiedades de la ROC



- **Propiedad 1**. Si $x(n)$ es duración *infinita*, La ROC en el plano z puede ser un anillo o un disco o el exterior de un disco, centrados en el origen.



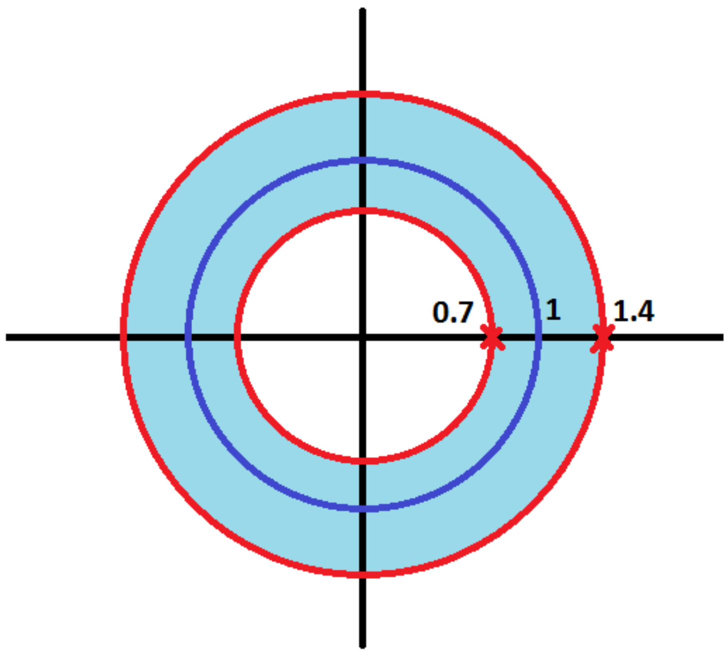


humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

# Propiedades de la ROC



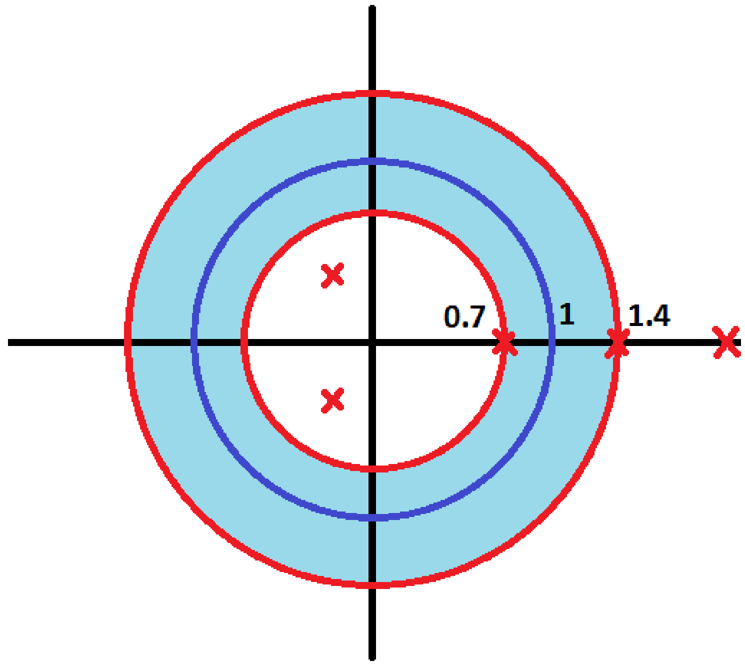
- **Propiedad 2.** La T. F. de $x(n)$ converge sii la ROC de la T.z. de $x(n)$ contiene la circunferencia unidad.



# Propiedades de la ROC



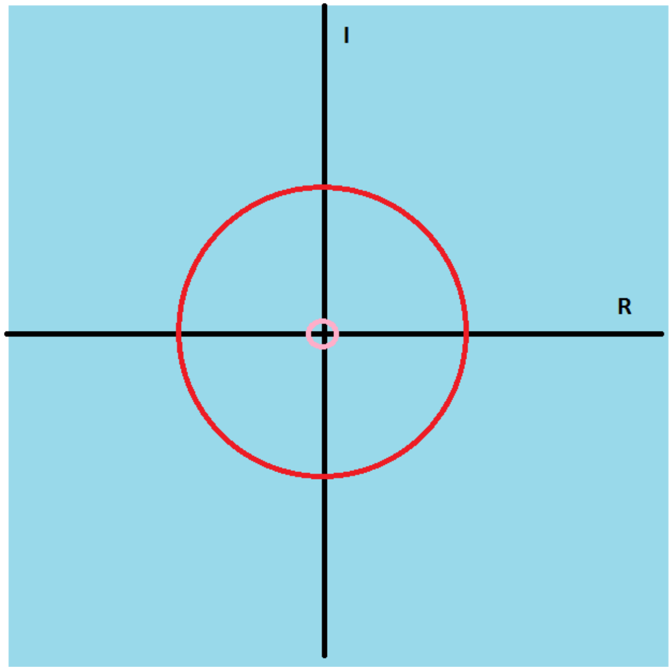
- **Propiedad 3**. La ROC no contiene ningún polo.



# Propiedades de la ROC

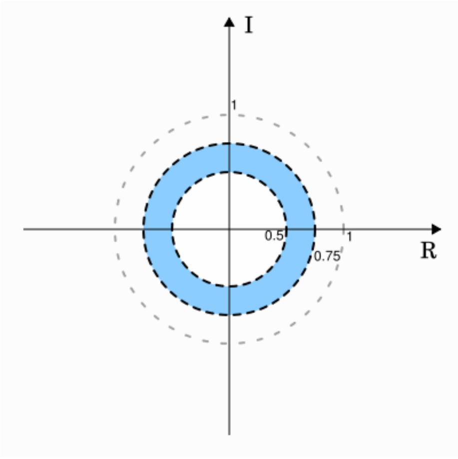
PSI Percepción y Sistemas Inteligentes

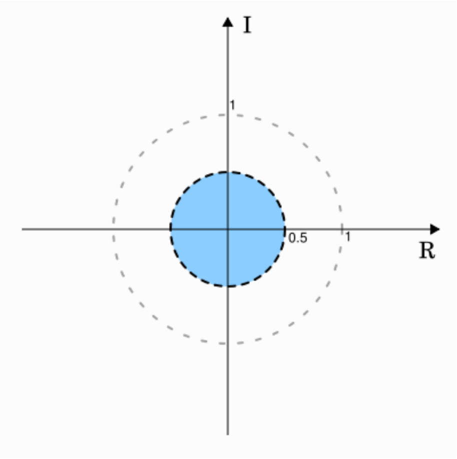
■**Propiedad 4.** Si $x(n)$ es de duración *finita*, la ROC es el plano z completo, pudiendo exceptuarse los valores $z = 0$ y/o $z = \infty$.

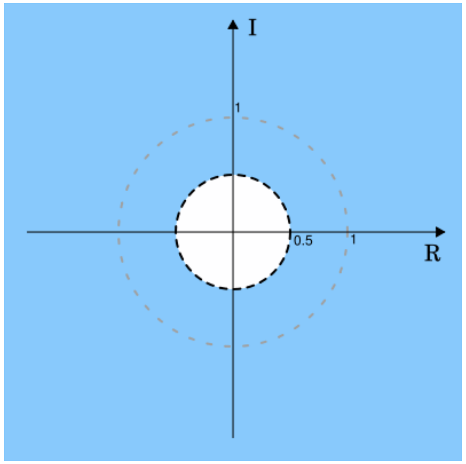



Universidad del Valle
Facultad de Ingeniería
Escuela de Ingeniería Eléctrica y Electrónica
humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

- **Propiedad 5.** Si $X(z)$ es racional, entonces su ROC está limitada por polos o se extiende al infinito.



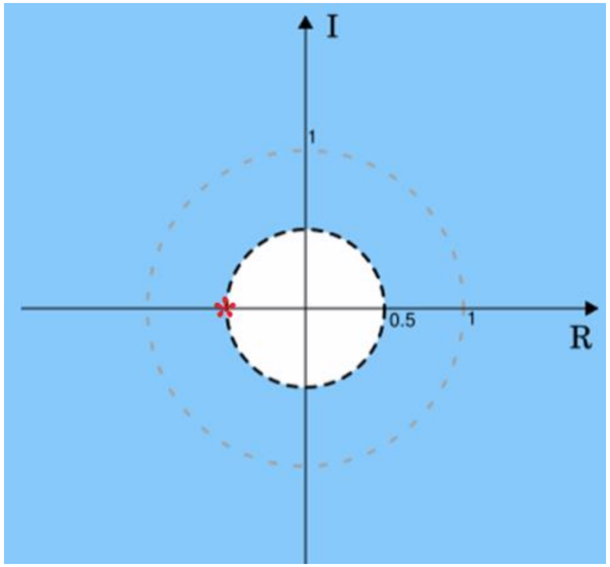



# Propiedades de la ROC



- **Propiedad 6.** Si $X(z)$ es racional y $x(n)$ es derecha (secuencia limitada por la izquierda, es decir $x(n) = 0$ para $n < N_1$) la ROC se extiende hacia afuera desde el *polo finito de mayor* magnitud de $X(z)$. Además, si $x(n)$ es causal $(N_1 \geq 0)$, entonces la ROC incluye a $z = \infty$.

- $N_1$ puede ser negativo o positivo

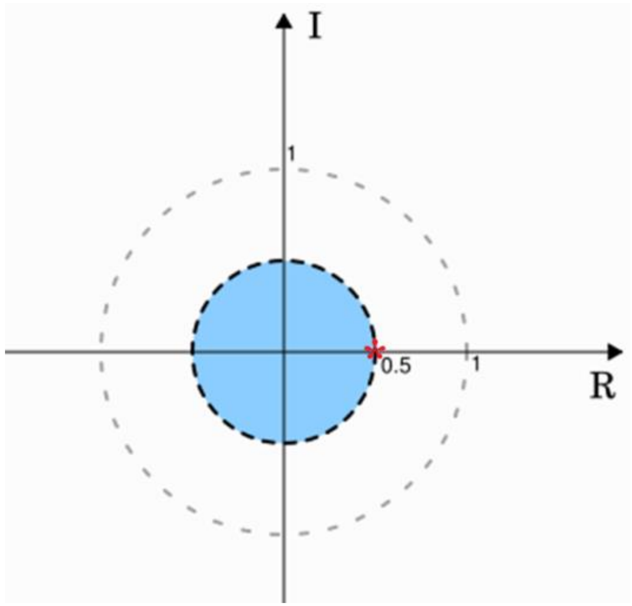


# Propiedades de la ROC



- **Propiedad 7**. Si $X(z)$ es racional y $x(n)$ es izquierda (secuencia limitada por la derecha , es decir $x(n) = 0$ para $n > N_2$), la ROC se extiende hacia adentro desde el *polo finito de menor* magnitud (diferente de $z = 0$) de $X(z)$. Además, si $x(n)$ es puramente anticausal ($N_2 < 0$), la ROC incluye $z = 0$.

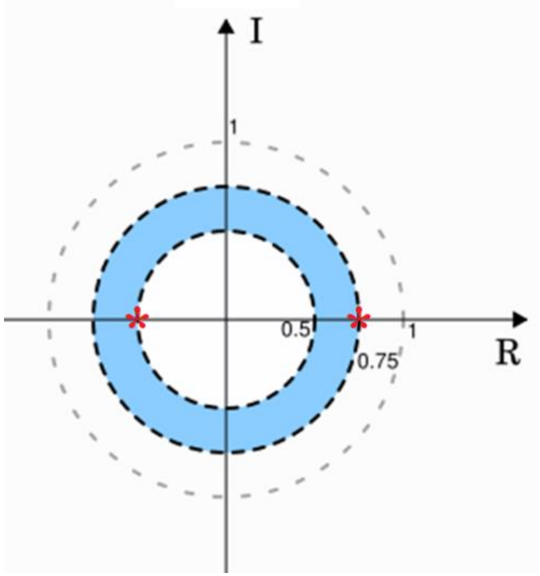
- $N_2$ puede ser negativo o positivo



# Propiedades de la ROC



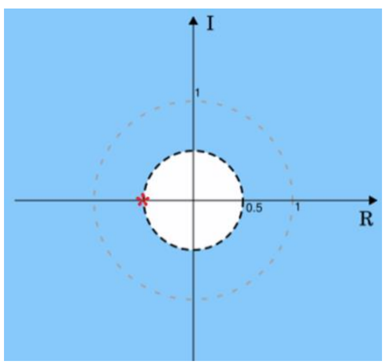
- **Propiedad 8.** Si $x(n)$ es una secuencia bilateral (extensión infinita tanto para $n > 0$ como para $n < 0$), la ROC será un anillo en el plano z *limitado en el interior y exterior por un polo* y no contendrá ningún polo.

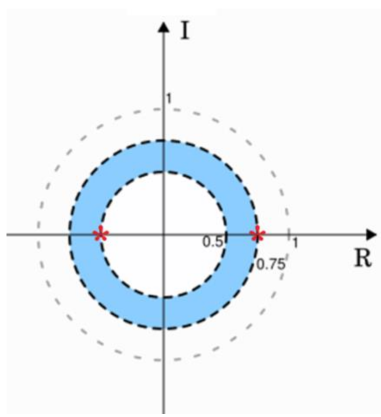


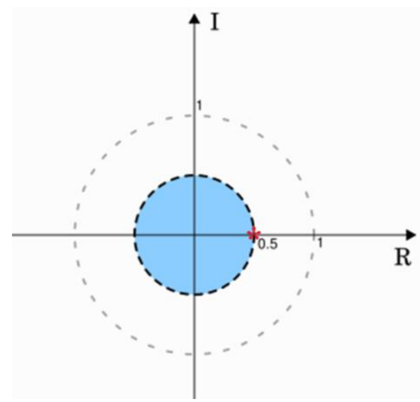
# Propiedades de la ROC

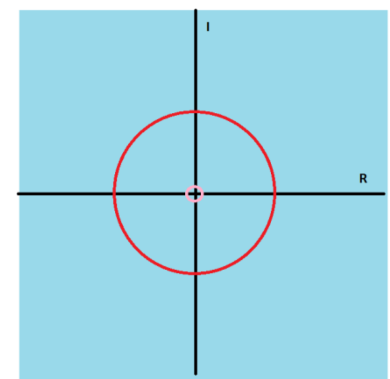


- **Propiedad 9.** La ROC debe ser una región conexa.



# Propiedades de la ROC



- **Ejemplo 1.** Determinar $X(z)$ para

$$x(n) = \alpha^n u(n) = \begin{cases} \alpha^n & n \geq 0 \\ 0 & n \leq -1 \end{cases}, \qquad |\alpha| < 1$$

- **Solución**
  - Por definición

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha^n u(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha z^{-1})^n$$

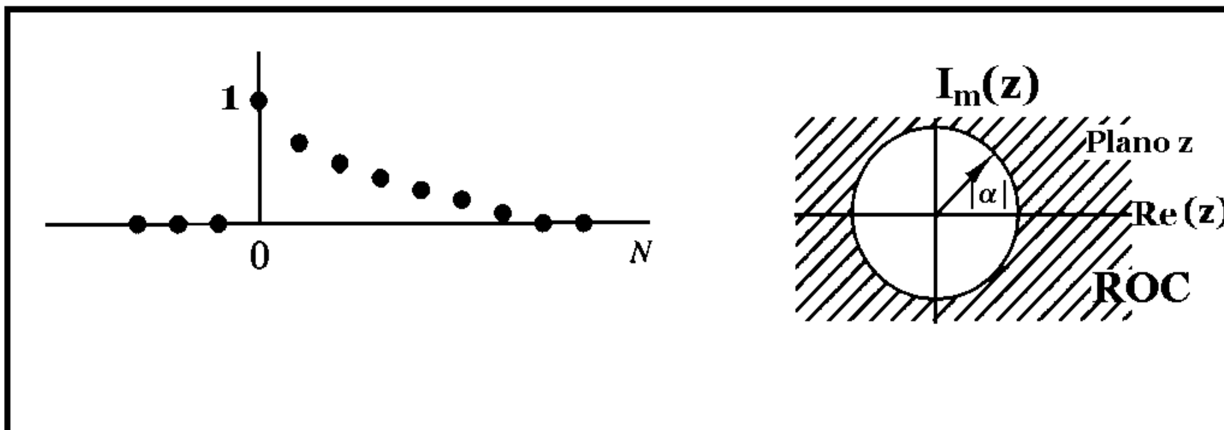
  - Utilizando la serie

$$1 + A + A^2 + A^3 + \ldots = \frac{1}{(1-A)} \quad \therefore \quad |A| < 1$$

- **Solución …**
  - Igualando $A = (\alpha\, z^{-1})$, se encuentra:

$$X(z) = \frac{1}{1-\alpha\ z^{-1}} = \quad \therefore \quad \left|\alpha\, z^{-1}\right| < 1 \text{ ó } |z| > |\alpha|$$

  - De donde: $ROC$: $|z| > |\alpha|$






humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

# Propiedades de la ROC



- **Ejemplo 2.** Determinar X($z$) para

$$x(n) = -\beta^n u(-n-1) = \begin{cases} 0 & n \geq 0 \\ -\beta^n & n \leq -1 \end{cases} \quad |\beta| < 1$$

- **Solución**
  - Por definición

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [-\beta^n u(-n-1)] z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} (-\beta^n) z^{-n}$$

$$X(z) = -\sum_{n=1}^{\infty} (\beta^{-1} z)^n$$

  - Utilizando la serie

$$A + A^2 + A^3 + \ldots = A(1 + A + A^2 + \ldots) = \frac{A}{(1-A)} \qquad \therefore\ |A| < 1$$

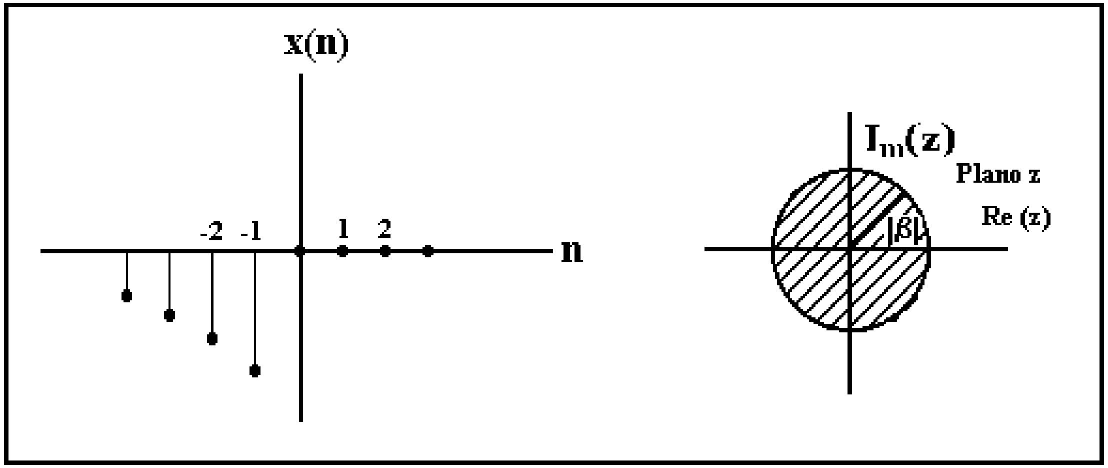
# Propiedades de la ROC



- **Solución …**
  - Con $A = (\beta^{-1}z)$, se encuentra:

$$X(z) = -\frac{\beta^{-1}z}{1-\beta^{-1}z} = \frac{1}{1-\beta z^{-1}} \quad \therefore \quad \left|\beta^{-1}\, z\right| < 1 \text{ ó } |z| < |\beta|$$

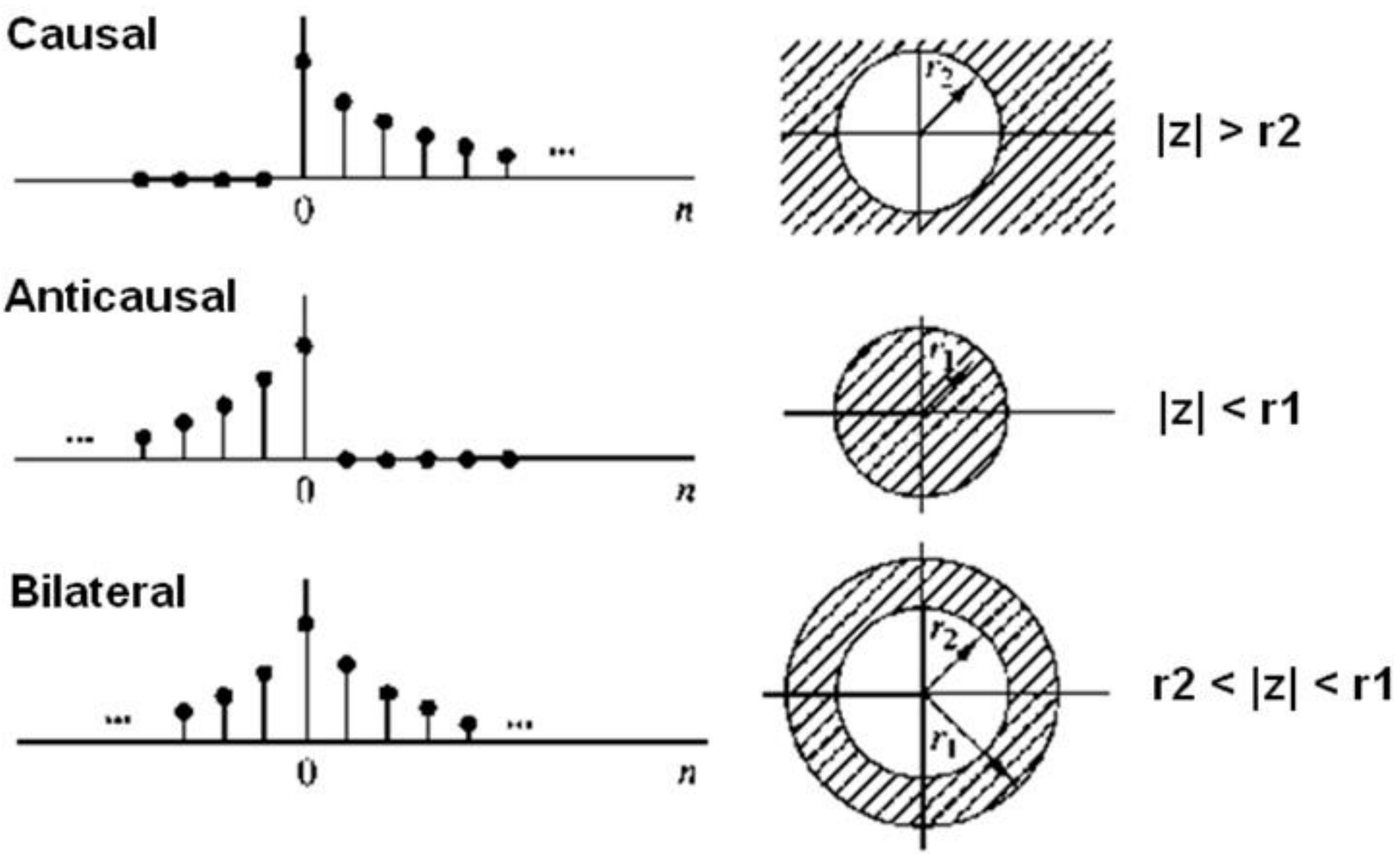
  - De donde: $ROC$: $|z| < |\beta|$



# Señales Típicas y sus ROC



## Señales de Duración Infinita



# Pares Comunes de Transformadas z

Pares de Transformadas z

| Señal $x(n)$ | Transformada z $X(z)$ | ROC |
|---|---|---|
| $\delta(n)$ | $1$ | $Todo\ z$ |
| $u(n)$ | $\frac{1}{1-z^{-1}}$ | $\lvert z\rvert > 1$ |
| $u(n-m)$ | $\frac{1}{1-z^{-1}}z^{-m}$ | $Si\ m \geq 0, todo\ z\ excepto$ $z=0$ $Si\ m < 0, todo\ z\ excepto$ $z=0\ y\ z=\infty$ |
| $-u(-n-1)$ | $\frac{1}{1-z^{-1}}$ | $\lvert z\rvert < 1$ |
| $\delta(n-m)$ | $z^{-m}$ | $Todo\ z\ excepto$ $0\ (si\ m>0)$ ó $\infty\ (si\ m<0)$ |
| $nu(n)$ | $\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$ | $\lvert z\rvert > 1$ |
| $-nu(-n-1)$ | $\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$ | $\lvert z\rvert < 1$ |
| $n^2u(n)$ | $\frac{z^{-1}(1+z^{-1})}{(1-z^{-1})^3}$ | $\lvert z\rvert > 1$ |
| $-n^2u(-n-1)$ | $\frac{z^{-1}(1+z^{-1})}{(1-z^{-1})^3}$ | $\lvert z\rvert < 1$ |
| $n^3u(n)$ | $\frac{z^{-1}(1+4z^{-1}+z^{-2})}{(1-z^{-1})^4}$ | $\lvert z\rvert > 1$ |
| $-n^3u(-n-1)$ | $\frac{z^{-1}(1+4z^{-1}+z^{-2})}{(1-z^{-1})^4}$ | $\lvert z\rvert < 1$ |


humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

# Pares Comunes de Transformadas z

Pares de Transformadas z …

| Señal $x(n)$ | Transformada z $X(z)$ | ROC |
|---|---|---|
| $\propto^n u(n)$ | $\frac{1}{1-\propto z^{-1}}$ | $\lvert z\rvert > \lvert\propto\rvert$ |
| $-\propto^n u(-n-1)$ | $\frac{1}{1-\propto z^{-1}}$ | $\lvert z\rvert < \lvert\propto\rvert$ |
| $n \propto^n u(n)$ | $\frac{\propto z^{-1}}{(1-\propto z^{-1})^2}$ | $\lvert z\rvert > \lvert\propto\rvert$ |
| $-n \propto^n u(-n-1)$ | $\frac{\propto z^{-1}}{(1-\propto z^{-1})^2}$ | $\lvert z\rvert < \lvert\propto\rvert$ |
| $n^2 \propto^n u(n)$ | $\frac{\propto z^{-1}(1+\propto z^{-1})}{(1-\propto z^{-1})^3}$ | $\lvert z\rvert > \lvert\propto\rvert$ |
| $-n^2 \propto^n u(-n-1)$ | $\frac{\propto z^{-1}(1+\propto z^{-1})}{(1-\propto z^{-1})^3}$ | $\lvert z\rvert < \lvert\propto\rvert$ |
| $[\cos w_0 n]u(n)$ | $\frac{1-[\cos w_0]z^{-1}}{1-[2\cos w_0]z^{-1}+z^{-2}}$ | $\lvert z\rvert > 1$ |
| $[sen\, w_0 n]u(n)$ | $\frac{[sen\, w_0]z^{-1}}{1-[2\cos w_0]z^{-1}+z^{-2}}$ | $\lvert z\rvert > 1$ |
| $r^n[\cos w_0 n]u(n)$ | $\frac{1-[r\cos w_0]z^{-1}}{1-[2r\cos w_0]z^{-1}+r^2 z^{-2}}$ | $\lvert z\rvert > r$ |
| $r^n[sen\, w_0 n]u(n)$ | $\frac{[r\,sen\, w_0]z^{-1}}{1-[2r\cos w_0]z^{-1}+r^2 z^{-2}}$ | $\lvert z\rvert > r$ |

PSI Percepción y Sistemas Inteligentes

# Transformada z



## Propiedades

| Propiedad | Dominio del Tiempo | Dominio z | ROC |
|---|---|---|---|
| Notación | $x(n)$<br>$x_1(n)$<br>$x_2(n)$ | $X(z)$<br>$X_1(z)$<br>$X_2(z)$ | $ROC: r_2 < \|z\| < r_1$<br>$ROC_1$<br>$ROC_2$ |
| Linealidad | $a_1 x_1(n) + a_2 x_2(n)$ | $a_1 X_1(z) + a_2 X_2(z)$ | *Como minimo la intersección de* $ROC_1$ *y* $ROC_2$ |
| Desplazamiento en el tiempo | $x(n-k)$ | $z^{-k}X(z)$ | *La de* $X(z)$, *excepto* $z = 0$ *si* $k > 0$ *y* $z = \infty$ *si* $k < 0$ |
| Escalado en el dominio z | $a^n x(n)$ | $X(a^{-1}z)$ | $\|a\| r_2 < \|z\| < \|a\| r_1$ |
| Escalado en el tiempo | $x\left(\frac{n}{k}\right)$ | $X(z^k)$ | $\frac{1}{r_1^k} < \|z\| < \frac{1}{r_2^k}$ |

## Propiedades …

| Propiedad | Dominio del Tiempo | Dominio z | ROC |
|---|---|---|---|
| Inversión temporal | $x(-n)$ | $X(z^{-1})$ | $\frac{1}{r_1} < \lvert z \rvert < \frac{1}{r_2}$ |
| Conjugación | $x^*(n)$ | $X^*(z^*)$ | $ROC$ |
| Parte Real | $Re\{x(n)\}$ | $\frac{1}{2}[X(z) + X^*(z^*)]$ | $Incluye\ a\ la\ ROC$ |
| Parte Imaginaria | $Im\{x(n)\}$ | $\frac{1}{2J}[X(z) - X^*(z^*)]$ | $Incluye\ a\ la\ ROC$ |
| Diferenciación en el dominio z | $nx(n)$ | $-z\frac{dX(z)}{dz}$ | $r_2 < \lvert z \rvert < r_1$ |

## Propiedades …

| Propiedad | Dominio del Tiempo | Dominio z | ROC |
|---|---|---|---|
| Convolución | $x_1(n) * x_2(n)$ | $X_1(z)X_2(z)$ | *Como minimo la interseccion de* $ROC_1$ *y* $ROC_2$ |
| Correlación | $r_{x_1x_2}(l) = x_1(l) * x_2(-l)$ | $R_{x_1x_2}(z) = X_1(z) * X_2(z^{-1})$ | *Como minimo la intersección de ROC de* $X_1(z)X_2(z^{-1})$ |
| Teorema del Valor Inicial | *Si* $x(n)$ *es causal* | $x(0) = \lim_{x\to\infty} X(z)$ | |
| Teorema del Valor Final | $\lim_{n\to\infty} x(n)$ | $\lim_{z\to 1}((z-1)X(z))$ | *Valido solo si los polos de* $(z-1)X(z)$ *se encuentran dentro del circulo unitaro.* |
| Multiplicación | $x_1(n)x_2(n)$ | $\frac{1}{2\pi j}\oint_C X_1(v)X_2\left(\frac{z}{v}\right)v^{-1}dv$ | $r_{1l}r_{2l} < \lvert z\rvert r_{1u}r_{2u}$ |
| Relación de Parseval | $\sum^{\infty} x_1(n)x_2^*(n)$ | $\frac{1}{2\pi j}\oint_C X_1(v)X_2^*\left(\frac{1}{v^*}\right)v^{-1}dv$ | |

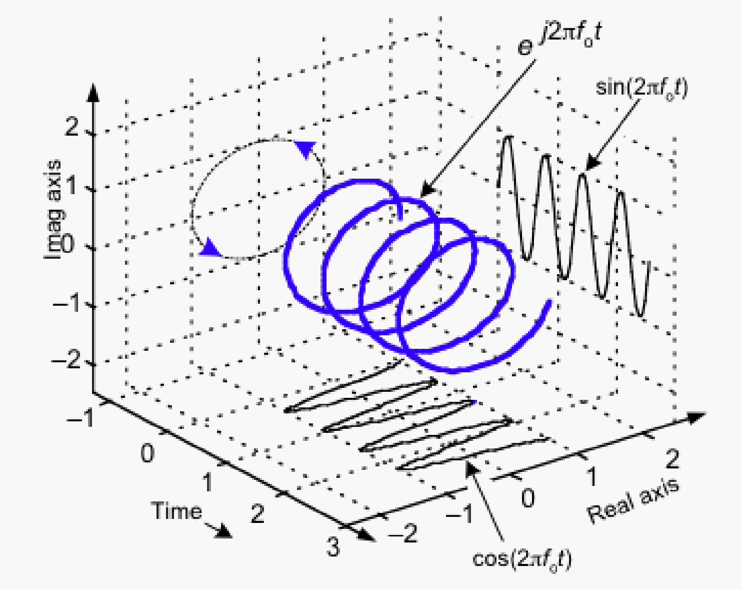


humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

# Propiedades de la Transformada z



- **Ejemplo 1:**
  - Para la señal compleja $x(n)$ con T.z dada por $X(z)$ y con una región de convergencia $ROC_x$,
    - Obtener la T.z y la ROC de la ***parte real*** de $x(n)$ en términos de $X(z)$ y $ROC_x$ respectivamente.




$e^{j2\pi f_o t} = \cos(2\pi f_o t) + j\sin(2\pi f_o t)$

http://www.eetimes.com/document.asp?doc_id=1275580

- **Solución:**
  - La parte real de una señal compleja se obtiene como:

$$Re\{x(n)\} = \frac{1}{2}\,[x(n) + x^*(n)]$$

  - De la propiedad de conjugación de la Transformada z:

| Propiedad | Dominio del Tiempo | Dominio z | ROC |
|---|---|---|---|
| Conjugación | $x^*(n)$ | $X^*(z^*)$ | $ROC$ |

  - Luego

$$\mathcal{Z}\{Re\{x(n)\}\} = \frac{1}{2}[X(z) + X^*(z^*)], \qquad ROC = ROC_x$$

- **Ejemplo 2:**
  - **Sin calcular** la Transformada z inversa, determine si el sistema

$$H(z) = \frac{\frac{3}{\sqrt{2}}}{z^{-2} - 6\cos(\pi/4)\, z^{-1} + 9}$$

fue generado por una respuesta impulsional $h(n)$ real.

- **Solución:**
  - Utilizar la Propiedad de Conjugación !!

| Propiedad | Dominio del Tiempo | Dominio z | ROC |
|---|---|---|---|
| Conjugación | $x^*(n)$ | $X^*(z^*)$ | $ROC$ |

- **Solución …**

  - Implicaciones de la Propiedad de Conjugación

| Propiedad | Dominio del Tiempo | Dominio z | ROC |
|---|---|---|---|
| Conjugación | $x^*(n)$ | $X^*(z^*)$ | $ROC$ |

  - Si $x(n)$ es real, se puede concluir que $X(z) = X^*(z^*)$
  - Esto es:
    - Si $X(z)$ tiene un polo (cero) en $z = z_0$, también debe tener un polo (cero) en el punto complejo conjugado $z = {z_0}^*$ .


humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

- **Solución …**
  - Calculando las raíces del numerador y denominador de $H(z)$ se encuentra que :
    - Ceros $z_{c1,c2} = 0$
    - Polos $z_{p1,p2} = (1/3)e^{\pm j\pi/4}$
  - Dado que $H(z)$ tiene ceros reales y un par de polos complejos conjugados, el sistema $h(n)$ es real !!

# Transformadas z Racionales



## Introducción

- $X(z)$ es una función racional si se puede expresar como el cociente de dos polinomios en $z^{-1}$ (ó z).

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}$$

- Si $a_0 \neq 0$ y $b_0 \neq 0$ se tiene,

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{b_0 z^{-M}}{a_0 z^{-N}} \quad \frac{z^M + (b_1/b_0) z^{M-1} + \ldots + (b_M/b_0)}{z^N + (a_1/a_0) z^{N-1} + \ldots + (a_N/a_0)}$$

# Transformadas z racionales



## Introducción …

- Dado que N(z) y D(Z) son polinomios, X(z) puede expresarse como un producto de factores:

$$X(z) = \frac{b_0}{a_0} z^{N-M} \frac{\prod_{k=1}^{M}(z-c_k)}{\prod_{k=1}^{N}(z-p_k)}$$

  - $\mathbf{c_k}$ ≅ **Ceros** de X(z): valores de z para los cuales X(z) = 0
  - $\mathbf{p_k}$ ≅ **Polos** de X(z): valores de z para los cuales X(z) = ∞
  - Por definición, la ROC de X(z) **no puede contener ningún polo**.

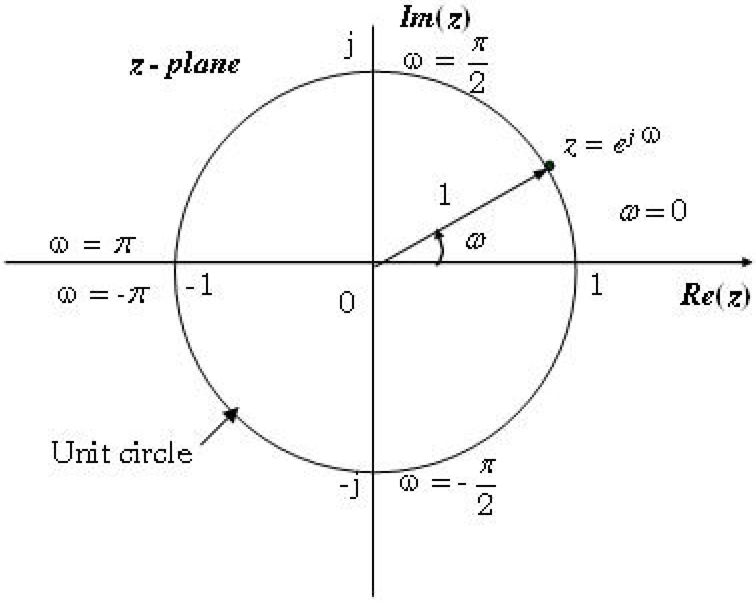

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

# Polos vs. Comportamiento Temporal



## Introducción

- Existe relación directa entre la localización de los polos y la forma de la señal discreta correspondiente en el dominio del tiempo.
- El comportamiento de las señales causales está influenciado por la ubicación de los polos respecto al círculo unitario en el plano z.



## Señal con un solo polo

- Una transformada con un solo polo corresponde a una señal exponencial con base real.

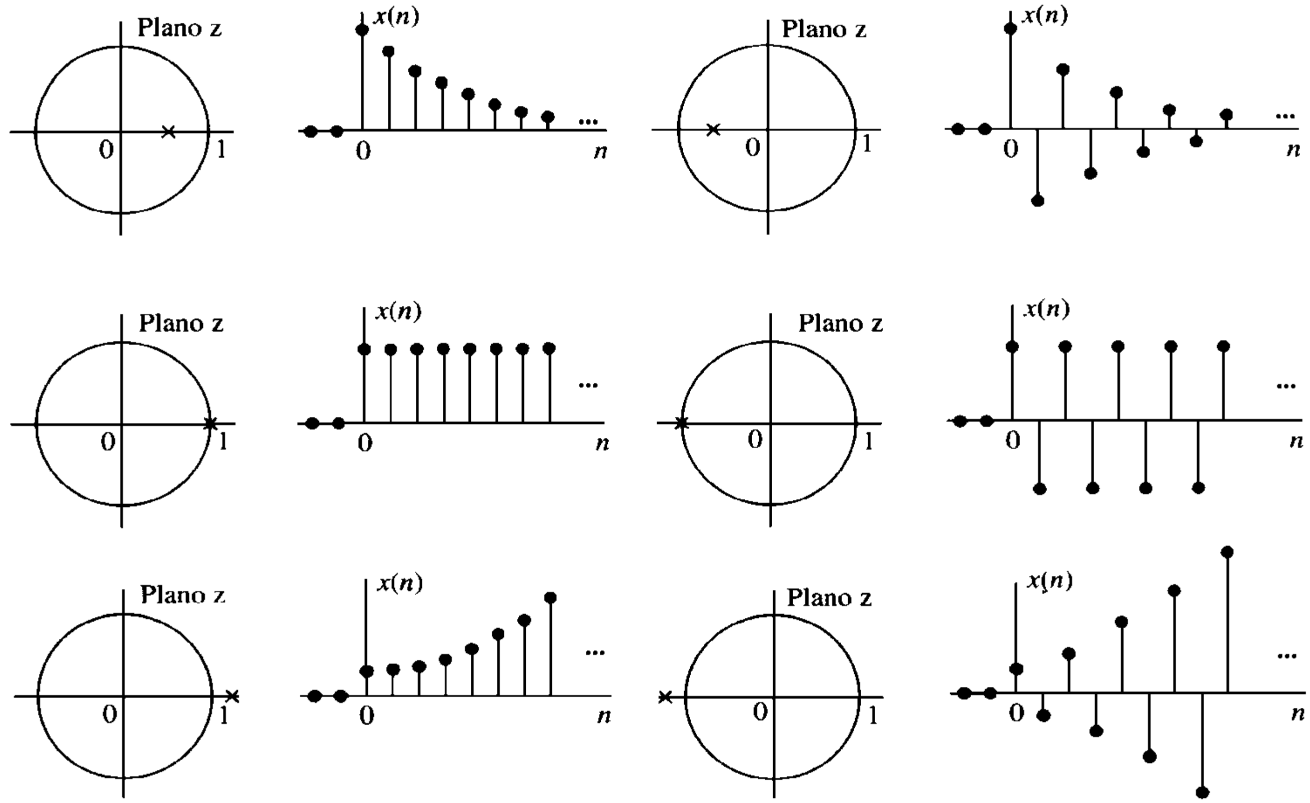
$$x(n) = a^n u(n)$$

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}$$

$$Cero \;\; z_1 = 0$$

$$Polo \;\; p_1 = a$$

$$ROC : |z| > |a|$$



# Polos vs. Comportamiento Temporal



## Señal con un polo real doble

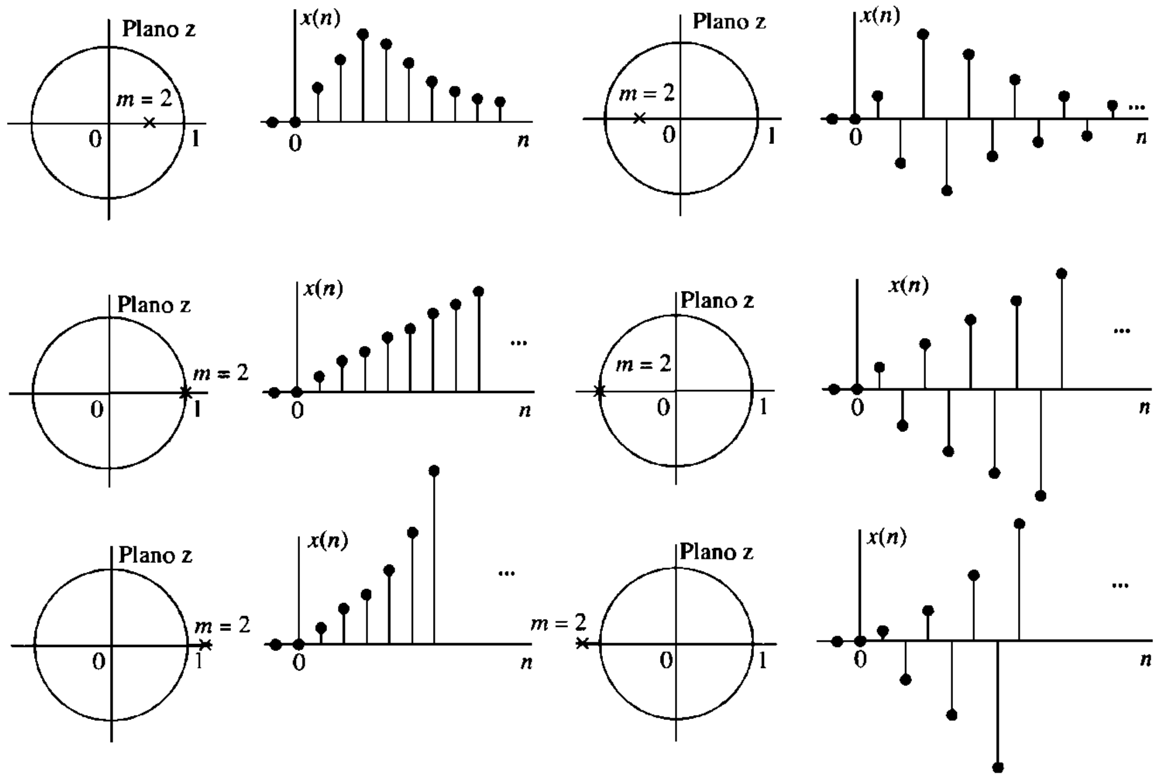
- Una transformada con un polo real doble corresponde a una señal exponencial con base real multiplicada por n.

$$x(n) = n\,a^{n}u(n)$$

$$X(z) = \frac{az^{-1}}{\left(1-az^{-1}\right)^{2}}$$

$$p_{1,2} = a$$

$$ROC: |z| > |a|$$



# Polos vs. Comportamiento Temporal

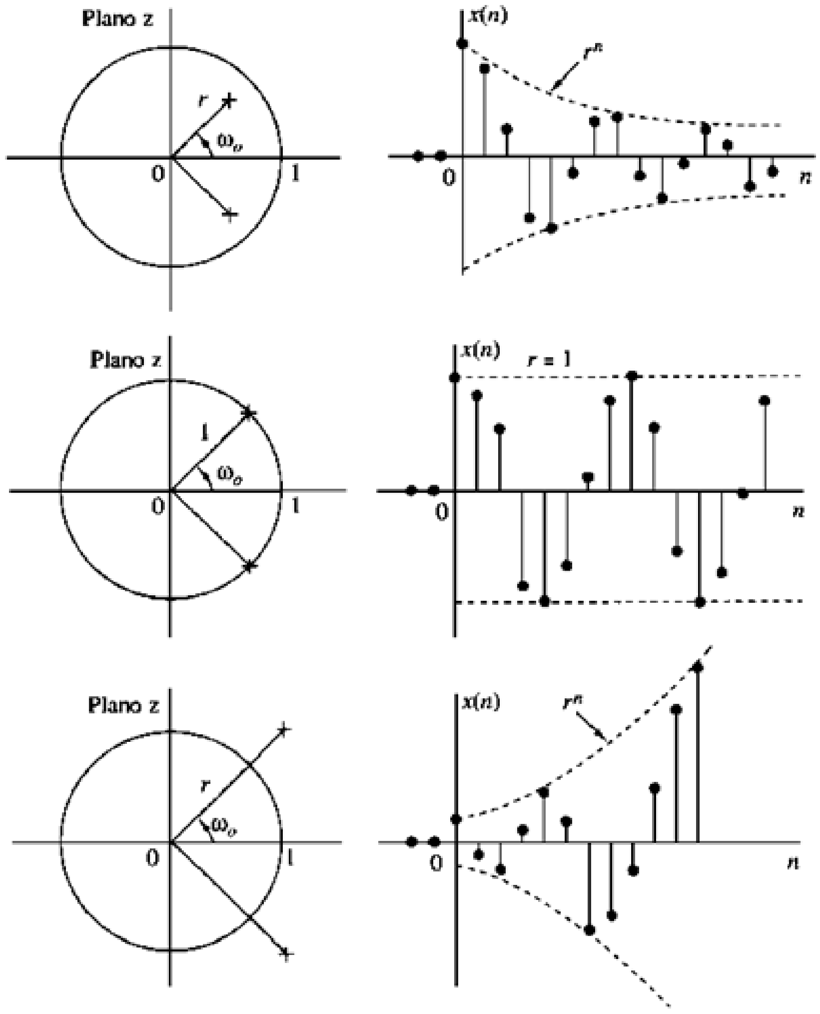


- **Señal con un par de polos complejos conjugados**
  - Una transformada con un polo real doble corresponde a una señal sinusoidal ponderada exponencial con base real.

$$x(n) = a^n \cos(w_o n)\, u(n)$$

$$X(z) = \frac{1 - a\,z^{-1}\cos w_o}{1 - 2az^{-1}\cos w_o + a^2 z^{-2}}$$

$$ROC : |z| > |a|$$





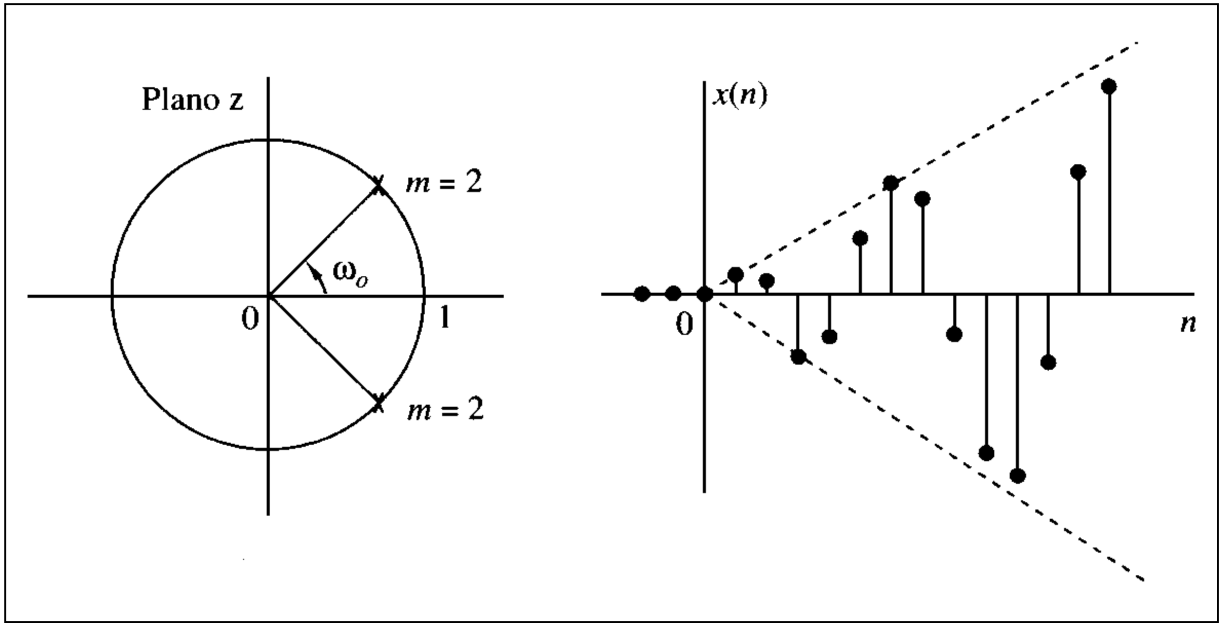
humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

# Polos vs. Comportamiento Temporal



## Señal con una pareja de polos dobles complejos conjugados

- Señal causal correspondiente a un par de polos conjugado doble sobre la circunferencia unidad.



## Observaciones

| | |
|---|---|
| Comportamiento | • Los polos determinan el comportamiento de la señal en el tiempo<br>• Los ceros tienen menor incidencia en las características de la señal<br>• Los efectos de los polos se aplica tanto a señales como a sistemas |
| Señal decreciente | • Polos dentro del círculo unitario<br>• La tasa de decaimiento es inversamente proporcional a la distancia de los polos |
| Señal creciente | • Polos por fuera del círculo unitario<br>• Polos múltiples sobre la circunferencia unidad |
| Señal constante | • Polos sobre la circunferencia unidad |

## Definición:

- Para un sistema LTI, se cumple que:

$$y(n) = h(n) * x(n) \overset{z}{\longleftrightarrow} Y(z) = H(z)X(z)$$

- Luego, la transformada z de $h(n)$ puede determinarse como,

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

- $H(z)$ recibe el nombre de **Función de Transferencia** del sistema, y describe el sistema en el dominio z.

# Función de Transferencia-Sistemas LTI



- Para un sistema descrito por e.d.c.c.

$$y(n) = -\sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k) \xleftrightarrow{z} Y(z) = -\sum_{k=1}^{N} a_k Y(z) z^{-k} + \sum_{k=0}^{M} b_k X(z) z^{-k}$$

- Se obtiene:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{K=0}^{M} b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}} \quad \left\{ \begin{array}{l} Sistema \;\; de \;\; todo \;\; ceros \rightarrow FIR \\ \qquad Si \; a_k = 0 \;\; para \;\; 1 \leq \; k \leq M \Rightarrow H(z) = \sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k} = \frac{1}{z^M} \sum_{k=0}^{M} b_k z^{M-K} \\ Sistema \;\; de \;\; todo \;\; polos \rightarrow IIR \\ \qquad Si \; b_k = 0, para \, 1 \leq k \leq M \Rightarrow H(z) = \dfrac{b_0 z^N}{\sum_{k=0}^{M} a_k z^{N-k}} \qquad , \quad a_0 \equiv 1 \end{array} \right.$$


humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

# Transformada z inversa



## Definición

- Procedimiento para pasar del dominio z al dominio temporal.
- Dada por la integral de contorno que encierra el origen y se encuentra en la ROC de $X(z)$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi\, j} \oint_C X(z) z^{n-1} dz$$

**Procedimientos de solución**

| Inspección de pares de transformadas | Resolución directa de la integral | Expansión en series de potencias | Expansión en fracciones parciales |
|---|---|---|---|

# Transformada z Inversa



**Inpección de pares de transformadas**

- Técnica que consiste en identificar en una tabla de transformadas las parejas correspondientes.
- La transformada puede expresarse como una suma de términos y encontrar las transformadas inversas de cada uno de ellos a partir de la tabla.
- Para ampliar el alcance de las tablas de transformadas se recurre a las propiedades.

# Transformada z Inversa

PSI Percepción y Sistemas Inteligentes

- **Ejemplo:** Encontrar la Transf. Inversa de:

$$X(z) = \left( \frac{z^{-3}}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}} \right) \qquad ROC: \ |z| > \left| \frac{1}{2} \right|$$

- De la tabla de pares:

$$a^n \ u(n) \overset{z}{\Leftrightarrow} \frac{1}{1 - a z^{-1}} \qquad ROC: \ |z| > |a|$$

- De las propiedades:

$$x(n - n_o) \overset{z}{\Leftrightarrow} z^{-n_o} X(z)$$

ROC : Región x, adic./supr. de z = 0 ó z = ∞

- Solución:

$$x(n) = \left( \frac{1}{2} \right)^{n-3} u(n-3)$$


humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

# Transformada z Inversa



Resolución de la Integral

La integral de contorno se calcula usando el Teorema de Residuo de Cauchy.

Si la derivada de orden ($k$+1) de $f(z)$ existe dentro de y sobre el contorno $C$, y $f(z)$ no tiene polos en $z = z_0$, entonces:

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^k}dz = \begin{cases} \dfrac{1}{(k-1)!}\left.\dfrac{\partial^{k-1} f(z)}{\partial z^{k-1}}\right|_{z=z_0} & si\ z_0 \in C \\ 0 & si\ z_0 \notin C \end{cases}$$


humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

# Transformada z inversa



- **Ejemplo:** Por resolución de la integral encontrar la Transf. Inversa de:

$$X(z)=\frac{1}{1-a\ z^{-1}} \quad ROC: |z|>|a|$$

- **Solución:** De la definición se tiene:

$$x(n)=\frac{1}{2\pi\ j}\oint_C \frac{z^{n-1}}{1-a\ z^{-1}}dz \quad =\frac{1}{2\pi\ j}\oint_C \frac{z^{n}}{z-a}dz$$

donde C es una circunferencia de radio mayor que $|a|$

- Por comparación, se aprecia que $f(z) = z^n$ , $z_0 = a$ y $k = 1$.
- Como $X(z)$ es causal se evalúa para $n \geq 0$ y se verifica que $z_0$ no es polo de $f(z)$.
- Luego:

$$x(n)= f(z_0)=a^n\ u(n)$$



humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

# Transformada z inversa



Expansión en series de potencias

La expresión de la T.z es una serie de Laurent en la que los valores de $x(n)$ son los coeficientes de $z^{-n}$.

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

Si la Transformada z se expresa como una serie de potencias

$$X(z) = \ldots + x(-2)\, z^{2} + x(-1)\, z^{1} + x(0) + x(1)\, z^{-1} + x(2)\, z^{-2} + \cdots$$

Cualquier valor de $x(n)$ se obtiene del coeficiente de la potencia apropiada de $z^{-n}$



humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

# Transformada z inversa

Percepción y Sistemas Inteligentes

**Expansión en series de potencias**

- Cuando $X(z)$ es racional, la expansión se obtiene mediante la división entre los polinomios numerador y denominador.
- Es posible que se obtenga series de potencia finitas o infinitas

- **Ejemplo.** Encontrar por expansión **en serie de potencias** de la transformada inversa de:

$$X(z) = \log\left(1 + a\,z^{-1}\right) \quad ROC: |z| > |a|$$

- **Solución:**
  - Usar la serie de potencias para **log(1+x)**, con |x|<1 dada por,

$$X(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} a^n z^{-n}}{n}$$

  - La Transformada inversa se obtiene de los coeficientes:

$$x(n) = \begin{cases} (-1)^{n+1} \dfrac{a^n}{n}, & n \geq 1 \\ 0 & n \leq 0 \end{cases}$$

# Transformada z inversa



Expansión en fracciones parciales

Se expresa $X(z)$ como una combinación lineal de transformadas z simples, tal que sus transformadas inversas sean conocidas:

$$X(z) = a_1 X_1(z) + a_2 X_2(z) + \cdots a_k X_k(z)$$

Por la propiedad de linealidad, la transformada se obtiene como la suma de transformadas inversas individuales:

$$x(n) = a_1 x_1(n) + a_2 x_2(n) + \cdots a_k x_k(n)$$


humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

## Expansión en Fracciones Parciales …

- Método bastante útil cuando X(z) es una función **racional**.

$$X(z)=\frac{N(z)}{D(z)}=\frac{b_0+b_1 z^{-1}+\ldots+b_M z^{-M}}{1+a_1 z^{-1}+\ldots+a_N z^{-N}}$$

- F. Racional **Propia** si $a_N \neq 0$ y $M < N$
- F. Racional **Impropia** si $M \geq N$
  - Una F. Racional **Impropia** siempre **puede expresarse** como la suma de un **polinomio** y una función **racional propia.**



humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

## Expansión en Fracciones Parciales

- **Polos diferentes**: ningún polo se repite
  - Forma de la expansión:

$$X(z) = \sum_{k=0}^{M-N} c_k z^{-k} + \sum_{k=1}^{K_1} \frac{b_k}{1 + a_k z^{-1}} + \sum_{k=1}^{K_2} \frac{b_{0k} + b_{1k} z^{-1}}{1 + a_{1k} z^{-1} + a_{2k} z^{-2}}$$


humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

- **Ejemplo**
  - Obtener la expansión en Fracciones Parciales de la función de transferencia

$$H(z) = \frac{1 - 0.3z^{-1}}{1 + 0.1\, z^{-1} - 0.2z^{-2}}$$

- **Solución**
  - Función racional Propia $N > M: N = 2,\ M = 1$
  - $H(z) = \frac{1-0.3z^{-1}}{(1+0.5\, z^{-1})(1-0.4z^{-1})}$ ; Polos Diferentes !!
  - $H(z) = \frac{A_1}{(1+0.5\, z^{-1})} + \frac{A_2}{(1-0.4z^{-1})}$
  - $A_1 =$ $A_2 =$


humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

## Expansión en Fracciones Parciales

- **Polos repetidos**: polos con multiplicidad $l$
  - Forma de la expansión:

$$X(z) = \frac{A_{1k}}{z - p_k} + \frac{A_{2k}}{(z - p_k)^2} + \ldots + \frac{A_{lk}}{(z - p_k)^l}$$

- **Ejemplo**
  - Obtener la expansión en Fracciones Parciales de la función de transferencia

$$H(z) = \frac{1 - 0.3z^{-1}}{1 - 0.3\,z^{-1} - 0.24z^{-2} + 0.08\,z^{-3}}$$

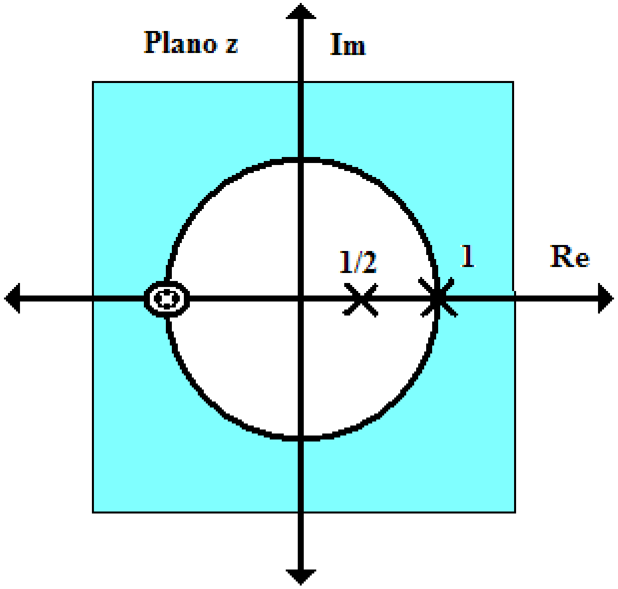
- **Solución**
  - Función racional Propia $N > M: N = 3,\ M = 1$
  - $H(z) = \frac{1-0.3z^{-1}}{(1+0.5\,z^{-1})(1-0.4z^{-1})(1-0.4z^{-1})}$ ; Polos Repetidos !!
  - $H(z) = \frac{A_1}{(1+0.5\,z^{-1})} + \frac{A_2}{(1-0.4z^{-1})} + \frac{A_3}{(1-0.4z^{-1})^2}$
  - $A_1 =$ $A_2 =$ $A_3 =$

- **Ejemplo.** Encontrar por expansión en *fracciones parciales* la transformada inversa de:

$$X(z)=\frac{1+2z^{-1}+z^{-2}}{1-\frac{3}{2}z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}} \qquad ROC:|z|>1$$

  - Factorizando:

$$X(z)=\frac{\left(1+z^{-1}\right)^2}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-z^{-1}\right)}$$




  - Por expansión en fracciones:

$$X(z)=2-\frac{9}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)}+\frac{8}{\left(1-z^{-1}\right)}$$

  - Antitransformando:

$$x(n)=2\,\delta(n)-9\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)+8\,u(n)$$

# Transformada z Unilateral



## Introducción

- La T.z. **bilateral** exige que las **señales** correspondientes estén **especificadas** para $-\infty < n < \infty$.

- En **sistemas prácticos** la **entrada** se **aplica** en un instante $\mathbf{n_0}$,
  - La **entrada** como la **salida** quedan **especificados** para $\mathbf{n \geq n_0}$, lo que no significa que sean cero para $n < n_0$.
  - **No** puede **utilizarse** la T.z. **bilateral**.

- La T.z. **unilateral** se **aplica** en el análisis de **sistemas causales** especificados por e.d.c.c. y con condiciones iniciales.


humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

# Transformada z Unilateral



## Definición

- La transformada z unilateral $X^{+}(z)$ de una señal $x(n)$ se define como,

$$X^{+}(z) = Z^{+}\{x(n)\} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n} \qquad x(n) \xleftrightarrow{z^{+}} X^{+}(z)$$

## Características

Por ser siempre **cero el límite inferior** de la transformada unilateral, presenta las siguientes características:

- **No** contiene **información** sobre la señal x(n) para valores negativos del tiempo (n<0).

# Transformada z Unilateral



## ■ Características …

- Es **única** sólo para señales causales, ya que $x(n) = 0$ para $n < 0$.
- La T.Z. **unilateral** $X^{+}(z)$ de **x(n)** es **idéntica** a la T.Z. **bilateral** X(z) de la señal **x(n) u(n).**
- Puesto que $x(n)\,u(n)$ es causal, **la ROC de X(z)** y **$X^{+}$ (z)** es siempre **exterior a un círculo .**
- No es necesario **especificar** la ROC cuando se trabaja con transformadas z unilaterales.


humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

# Transformada z Unilateral



## Propiedades

- Todas las **propiedades** de la transformada z **bilateral** se **extienden** a la transformada z **unilateral** con la **excepción** de algunas, entre las cuales está la propiedad de **desplazamiento temporal.**

- La propiedad de **desplazamiento temporal** facilita la **solución** de e.d.c.c. y condiciones iniciales distintas de cero para sistemas recursivos LTI.

# Transformada z Unilateral

PSI Percepción y Sistemas Inteligentes

## ■ Retardo Temporal

$$si \quad x(n) \xleftrightarrow{z^+} X^+(z) \qquad entonces:$$

$$x(n-k) \xleftrightarrow{z^+} z^{-k}\left[X^+(z) + \sum_{n=1}^{k} x(-n) z^{n}\right] \quad k > 0$$

$$Para \quad señales \quad x(n) \quad causales \quad se \ tiene:$$

$$x(n-k) \xleftrightarrow{z^+} z^{-k} X^+(z)$$


humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

# Transformada z Unilateral

PSI Percepción y Sistemas Inteligentes

- **Ejemplo.** Encuentre la transformada unilateral de:

$$a)\ x_1(n) = a^n\ u(n) \quad , \quad |a| < 1$$

$$b)\ x_2(n) = x(n-2)\ donde\ x(n) = a^n \qquad |a| < 1$$

- **Solución:**

$$a) \quad X_1^+(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} \quad = \frac{1}{1 - a\,z^{-1}}$$

$$b) \quad X_2^+(z) = z^{-2}\left[\frac{1}{1 - a\,z^{-1}} + x(-1)z + x(-2)z^2\right]$$

$$con \quad x(-1) = a^{-1}\ \ y\ \ x(-2) = a^{-2}$$

$$X_2^+(z) = \frac{z^{-2}}{1 - a\,z^{-1}} + a^{-1}\ z^{-1} + a^{-2}$$

# Transformada z Unilateral



## Avance Temporal

$$si \quad x(n) \xleftrightarrow{z^+} X^+(z)$$

$$entonces:$$

$$x(n+k) \xleftrightarrow{z^+} z^k \left[ X^+(z) - \sum_{n=0}^{k-1} x(n) z^{-n} \right] \quad k > 0$$


humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

# Transformada z Unilateral



- **Ejemplo.** Encuentre la transformada unilateral de:

$$x_3(n) = x(n+3) \;\; donde \;\; x(n) = a^n \qquad |a| < 1$$

- **Solución:**

$$X_3^+(z) = z^3 \left[X^+(z) - x(0) - x(1)z^{-1} - x(2)z^{-2}\right]$$

$$= z^3 \;\; X^+(z) - x(0)z^3 - x(1)z^2 - x(2)z$$

$$con \quad X^+(z) = \frac{1}{1 - a\,z^{-1}}, \quad x(0) = 1, \;\; x(1) = a \;\; y \;\; x(2) = a^2$$

$$X_3^+(z) = \frac{z^3}{1 - a\,z^{-1}} - z^3 - a\,z^2 - a^2 z$$


humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

# Solución de la e.d.c.c. mediante T.z.



- **Introducción**
  - La T.Z. unilateral es un método indirecto efectivo para la solución de ecuaciones de diferencia con y sin condiciones iniciales.

RESOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE DIFERENCIA

Aplicar la T.z a la ecuación de diferencia y a la señal de entrada.

Obtener una ecuación algebraica en z y despejar $Y(z)$.

Obtener $y(n)$ mediante la Transformada z inversa.


humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

# Solución de e.d.c.c mediante T.Z.



- **Ejemplo 1:** Determine la repuesta del sistema ante la entrada dada.
  - Sistema: $y(n) = \alpha\, y(n-1) + x(n), \quad |\alpha| < 1$
  - Condición inicial: $y(-1) = 1$
  - Señal de entrada: $x(n) = u(n)$

- **Solución:**
  - Encontrar la Transformada z de la señal de entrada:

$$Z^{+}\{u(n)\} = X^{+}(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}$$

  - Calcular la T.z unilateral a ambos lados de la ecuación,

$$Y^{+}(z) = \alpha\left[z^{-1}Y^{+}(z) + y(-1)\right] + X^{+}(z)$$

- **Solución…**
  - Reemplazado $X(z)$ y la condición inicial $y(-1)$ se llega a:

$$Y^{+}(z)=\frac{\alpha}{1-\alpha z^{-1}}+\frac{1}{(1-\alpha z^{-1})(1-z^{-1})}$$

  - Antitransformando se obtiene:

$$y(n)=\frac{1}{1-\alpha}(1-\alpha^{n+2})\;\; u(n)$$



humberto.loaiza@correounivalle.edu.co