Procesamiento Digital de Señales

Profesor
HUMBERTO LOAIZA CORREA Ing., M.Sc., Ph.D.
humberto.loaiza@correunivalle.edu.co

Frecuencia Análoga y Digital

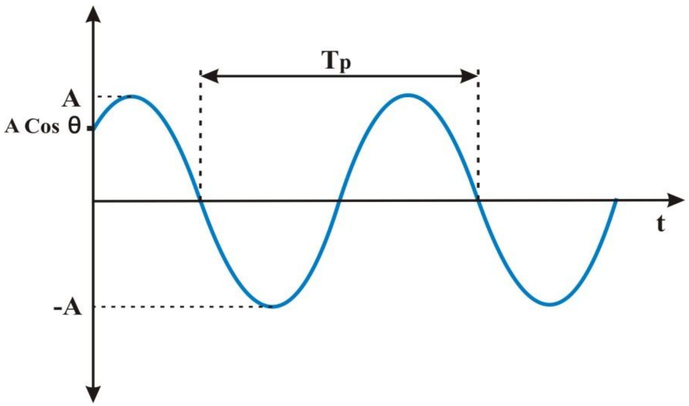
- **Frecuencia**
  - Número de veces que un fenómeno periódico específico ocurre dentro de un intervalo de tiempo especificado.
  - Oscilación armónica de partículas en movimiento periódico.
  - Número de ciclos por unidad de tiempo de una señal periódica.
  - La frecuencia hace referencia a una cantidad física positiva
    - Por conveniencia matemática es conveniente introducir frecuencias negativas.

Frecuencia Análoga y Digital

- **Frecuencia …**
  - Existe una relación directa entre tiempo y frecuencia.
    - Afectación en tiempo ↔ Afectación en frecuencia
  - Es necesario evaluar cuanto se afecta la frecuencia e información de una señal con el muestreo.
  - El muestreo de señales analógicas requiere de algunas condiciones para evitar pérdidas de información.
  - Suposición: *muestreo uniforme de señales*.

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Señal Sinusoidal Analógica



- Definición:

$$x_a(t) = A \cos(\Omega t + \theta), \qquad -\infty < t < \infty$$

- Donde,
  - Amplitud: A
  - Frecuencia Angular: $\Omega = 2\pi F$ [rad/s]; $F = 1/Tp$ [Hz]
  - Fase: θ [rad]

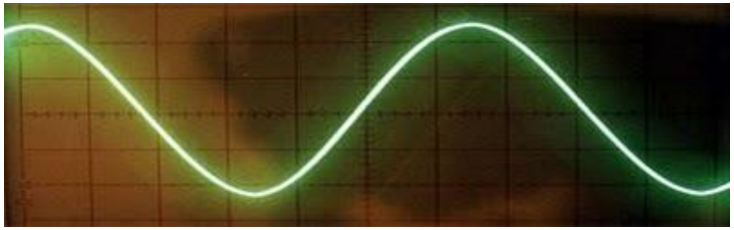
humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

- **Propiedades Básicas – Señal Sinusoidal Analógica**
  - **Periodicidad:** Para todo valor de F, la señal es periódica

$$x_a(t+NT)=x_a(t) \qquad T=1/F, \text{ periodo fundamental}$$

$$N, \text{ cualquier número entero}$$

  - **Unicidad:** las señales con frecuencias diferentes son siempre distintas.



    - Rango de unicidad: $-\infty<\Omega<\infty \quad o \quad -\infty<F<\infty$

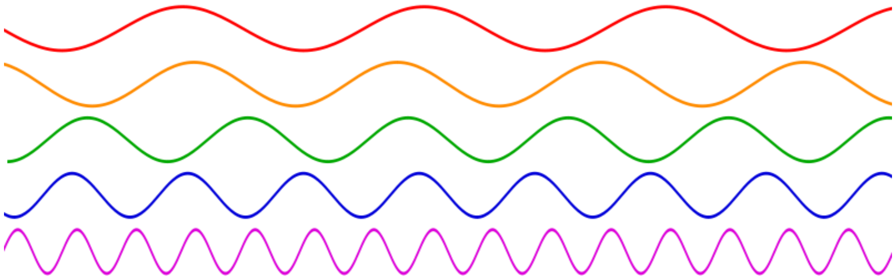
humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Frecuencia Continua y Discreta

- **Propiedades Básicas – Señal Sinusoidal Analógica …**

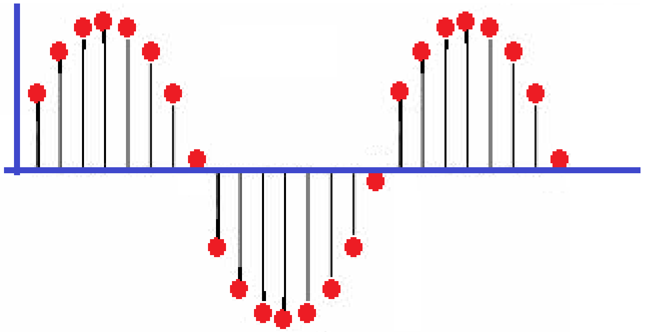
  - **Tasa de oscilación**

    Un **aumento en** F implica siempre un **aumento** de la tasa de **oscilación** y en el número de **periodos** en una ventana temporal dada.



humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

■ Señal Sinusoidal Discreta



- **Definición:**

$$x(t = nT) \equiv x(n) = A \cos(w\,n + \theta), \qquad -\infty < n < \infty$$

- **Donde,**
  - Número de muestra: *n* [entero]
  - Amplitud: A
  - Periodo de muestreo: $T = 1/F_m$
  - Frecuencia Angular: $w = 2\pi f$ [rad/muestra]; f≡[ciclos/muestra]
  - Fase: θ [rad]

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Propiedades Básicas – Señal Sinusoidal Discreta

- **Periodicidad:** $x(n+N) = x(n) \ \ para\ todo\ n$
  - Donde, $N \in \mathbb{Z}^{+}$ y el valor más pequeño de N es el periodo fundamental.
- La condición de la frecuencia f_0 para que una señal cosenoidal sea periódica, es decir,

$$\mathrm{A}\cos\ [2\pi \mathrm{f}_0\ (n+N)+\theta] = \mathrm{A}\cos(2\pi \mathrm{f}_0\ n+\theta)$$

- Es que exista una constante k entera tal que,

$$f_0 = \frac{k}{N}$$

- Cuando k y N son primos *relativos* N es el periodo fundamental de la señal.
  - Solo tienen divisor común 1 ó -1, o cumplen que el máximo común divisor es 1.

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Frecuencia Continua y Discreta

- **Propiedades Básicas – Señal Sinusoidal Discreta**

  - **Unicidad:** las sinusoides cuyas frecuencias están separadas por múltiplos de 2π **son idénticas:**

$$\cos[(w_0 + 2\pi)n + \theta] = \cos(w_0 n + \theta) \qquad -\pi \le w_0 \le \pi$$

    - Existen **señales** discretas **iguales** con **frecuencias distintas** para:

$$|w| \ge \pi \quad o \quad |f| \ge \frac{1}{2} \quad \text{tienen un alias en } -\pi < w < \pi \quad o \quad -\frac{1}{2} \le f \le \frac{1}{2}$$

  - Una pequeña variación en frecuencia, ocasiona una enorme variación en el periodo.

Frecuencia Continua y Discreta

- **Propiedades Básicas – Señal Sinusoidal Discreta …**
  - **Rango de Unicidad:**
    - $$-\pi < w < \pi \quad o \quad -\frac{1}{2} \leq f \leq \frac{1}{2}$$
  - **Oscilación Máxima :**
    - Se alcanza para $w=\pm\pi$ o $f=\pm 1/2$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Frecuencia Continua y Discreta

- **Relación entre las frecuencias F y f – Señal Sinusoidal**
  - La señal análoga muestreada es:

$$x_a(t = nT) \equiv x(n) = A\cos(2\pi F\,nT + \theta) = A\cos\left(\frac{2\pi nF}{F_m} + \theta\right)$$

  - La señal discreta es: $x(n) = A\cos(2\pi f\,n + \theta)$

Comparando: $f = \dfrac{F}{F_m}$ $\quad o \quad w = \Omega T \qquad donde \quad Fm = \dfrac{1}{T}\ [Hz]$

  - Dados los límites de la frecuencia discreta -1/2<f<1/2 y - π <w<π, las **frecuencias análogas máximas** son:

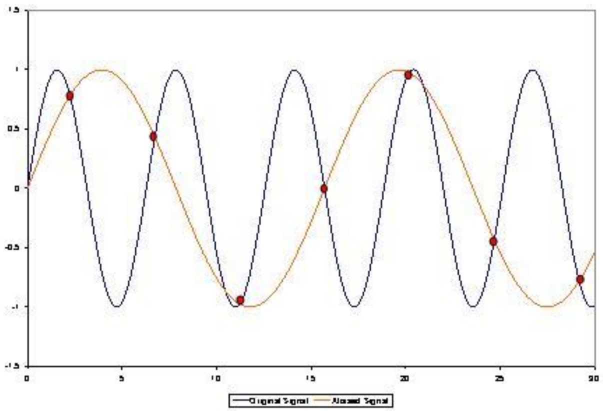
$$F_{\max} = \frac{F_m}{2} \quad y \quad \Omega_{\max} = \pi F_m$$

Teorema del Muestreo

Introducción

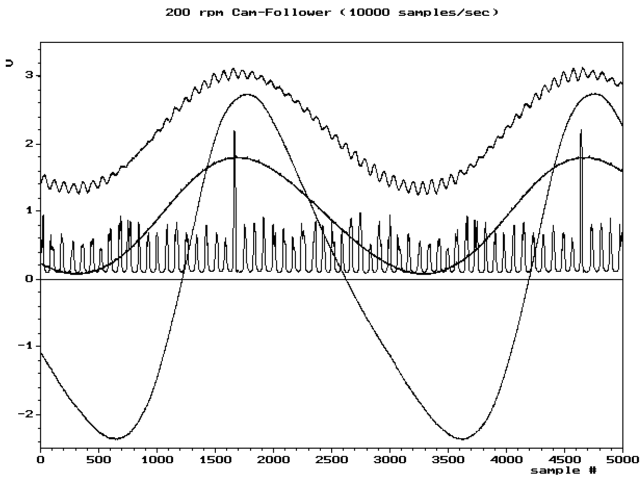
- El muestreo uniforme puede introducir **ambigüedad** en la señal digital obtenida e impone una **restricción** esencial:
  - La máxima frecuencia análoga que puede recuperarse tras muestrear la señal a F_m es:

$$F_{max} = \frac{F_m}{2}$$



Teorema del Muestreo

- **Introducción…**
  - Una señal muestreada correctamente podrá **recuperarse** sin pérdida de información mediante un **interpolador** (Conversor D/A),
    - La fórmula está dada por el **Teorema del Muestreo de Nyquist-Shannon**.



Teorema del Muestreo

- **Definición**
  - Si la frecuencia más alta contenida en una señal analógica $x_a(t)$ es $F_{max}=B$ y se muestrea a $F_m>2F_{max}=2B$, entonces $x_a(t)$ se puede recuperar totalmente a partir de $x_a(nT)$, mediante la siguiente función de interpolación:

$$g(t)=\frac{sen(2\pi Bt)}{2\pi Bt}$$

  - $x_a(t)$ se recupera según la expresión:

$$x_a(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a\left(\frac{n}{F_m}\right) g\left(t-\frac{n}{F_m}\right)$$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Teorema del Muestreo

- **Definición…**
  - Caso particular: frecuencia de muestreo mínima F_m=2B:

$$x_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a\left(\frac{n}{2B}\right) \frac{sen\left[2\pi B\left(t-\frac{n}{2B}\right)\right]}{2\pi B\left(t-\frac{n}{2B}\right)}$$

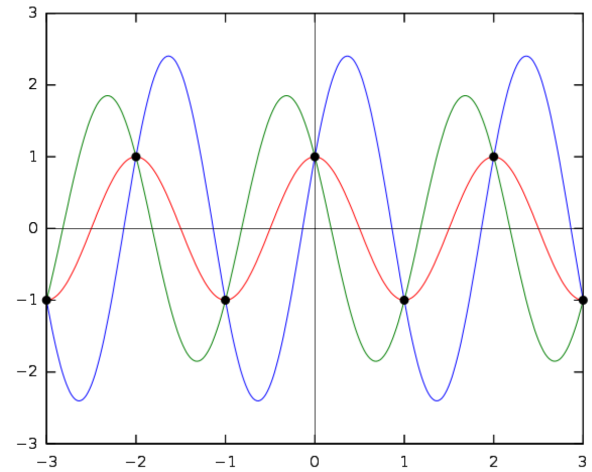
humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

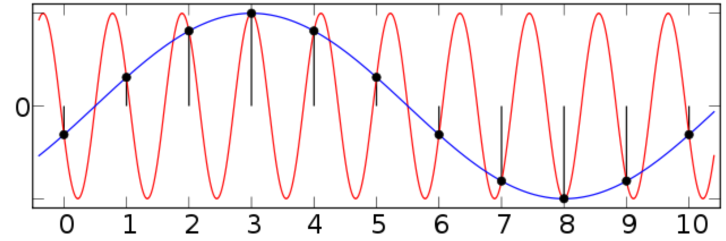
Teorema del Muestreo

- **Observaciones**
  - La máxima frecuencia permitida en una señal para una frecuencia de muestreo dada se denomina Frecuencia de Nyquist, $F_N=2\,B=2F_{max}$.
  - F_m no necesariamente debe ser el doble de la máxima frecuencia contenida en la señal, sino el doble del ancho de banda de la señal de interés.
    - *Teorema de Nyquist Pasabanda:* Considera el desplazamiento de las frecuencias en el espectro de la señal.
    - *Teorema Generalizado de Nyquist*: Considera directamente a B como el ancho de banda de la señal.

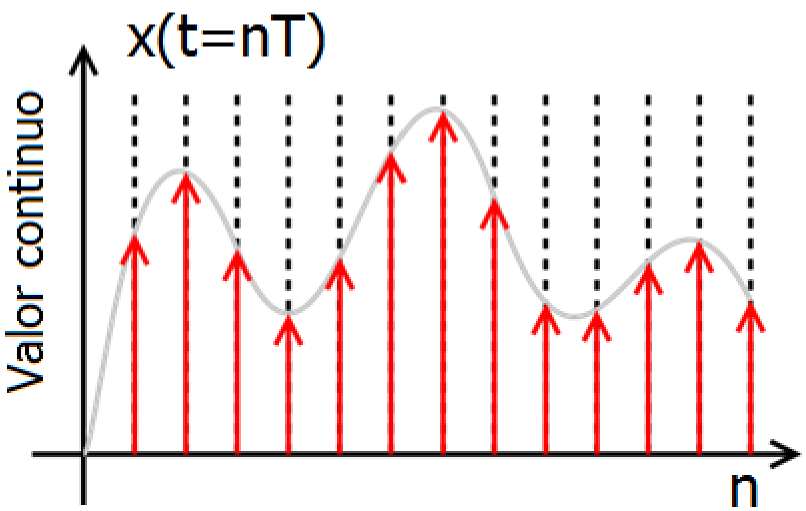
humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

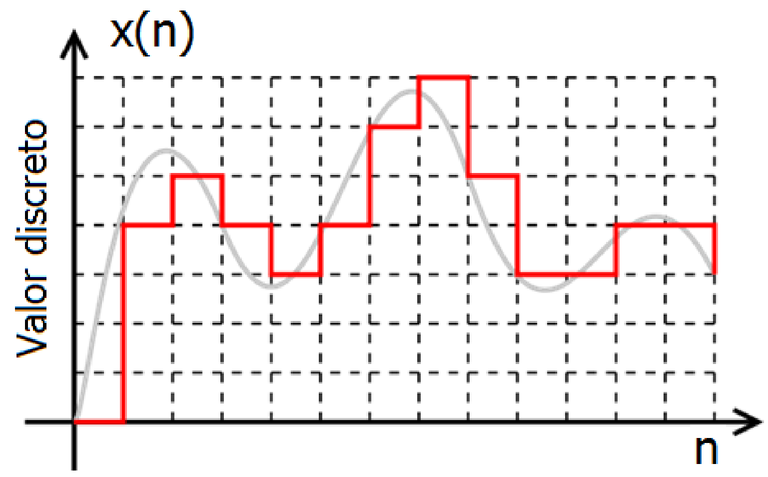
- **Observaciones**
  - **Filtrado Previo antes del CA/D**
    - Necesario aplicar un filtrado **paso-bajo** a la señal análoga.
    - Eliminar ruido solapado con componentes frecuenciales superiores a la de Nyquist (evitar **aliasing)**





- **Introducción**
  - La conversión A/D está formada por tres etapas: **muestreo**, **cuantificación** y **codificación**.
- **Cuantificación**
  - Es la conversión de una señal en **tiempo discreto con valores continuos** en una **señal digital**.





Cuantificación

- **Observaciones**
  - El valor de cada muestra se representa mediante un **valor seleccionado** de un **conjunto finito** de valores (niveles de cuantificación).
  - La cuantificación es un proceso **irreversible**, **no invertible** ya que siempre produce **pérdida** de información.
  - Cada dato digital se representa con un número de bits finito (codificación), lo que hace que la señal muestreada y la originan difieran.

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Cuantificación

- **Definiciones**
  - **Error de cuantificación**: ocasionado por la representación de la señal de valor continuo con un conjunto finito de valores discretos.

$$e_q(n) = x_q(n) - x(n) \quad \text{donde } x_q(n) \text{ es la señal cuantificada}$$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Cuantificación

Definiciones…

- **Resolución de cuantificación**: distancia entre los niveles de cuantificación.

$$\Delta = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{2^B - 1} = \frac{RD}{2^B - 1}$$

  - Donde,
    - x_{max}, x_{min}, valores máximo y mínimo permitidos de la señal de entrada
    - B, longitud de palabra en bits.
    - RD= x_{max}- x_{min}, Rango dinámico

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Cuantificación

- **Definiciones…**
  - **Relación Señal Ruido de Cuantificación** es una medida de la calidad de la salida del conversor A/D
    - Define la relación entre la potencia de la señal y la del ruido.

$$SQNR = \frac{P_x}{P_q}$$

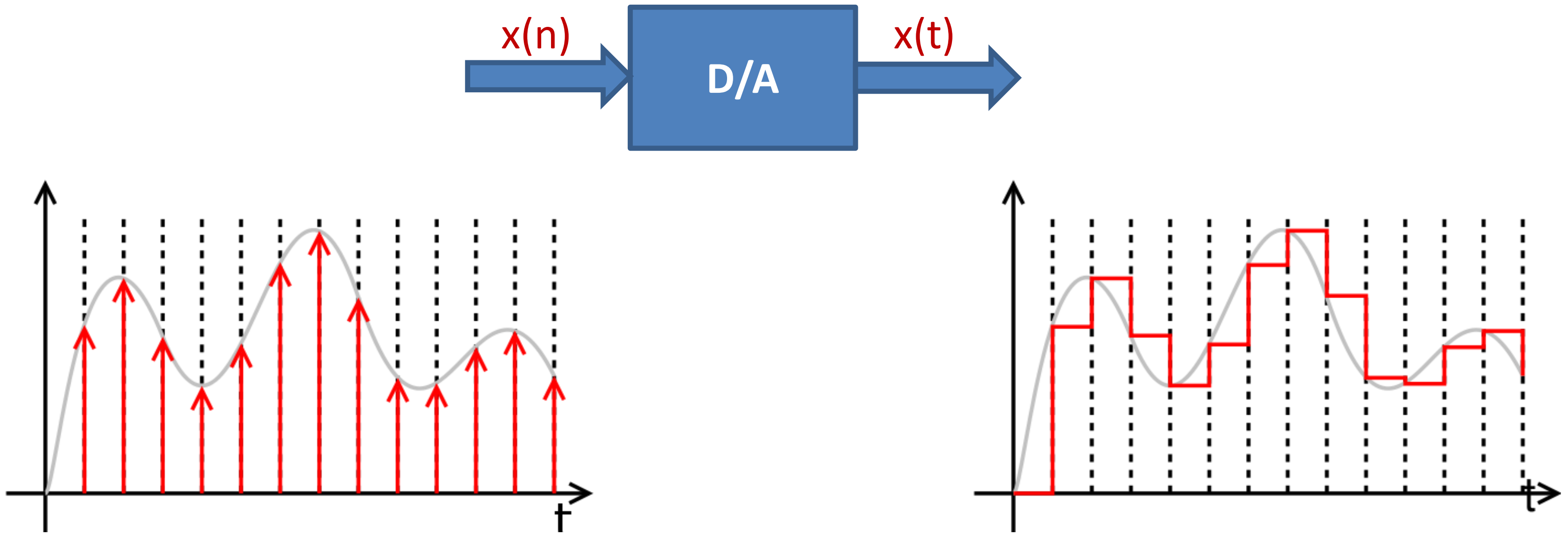
    - Para **sinusoidales**:

$$SQNR = \frac{3}{2} 2^{2b}, \quad P_x = \frac{A^2}{2}, \quad P_q = \frac{A^2/3}{2^{2b}}$$

      - Donde ,
        - **b**, número de bits de precisión del conversor
        - **A**, rango del conversor
        - En decibeles: $SQNR(dB) = 10 \log_{10} SQNR \approx 1.76 + 6.02b$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

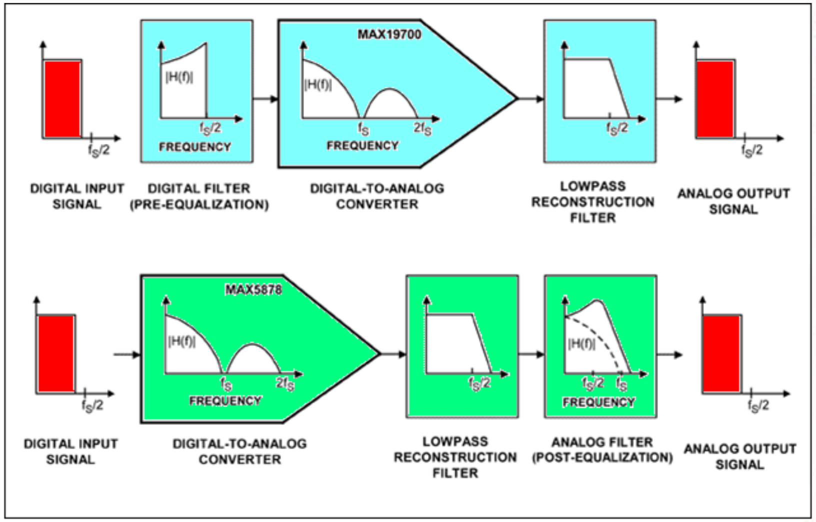
- **Introducción**
  - Un convertidor digital analógico (D/A) genera una señal continua x(t) a partir de una secuencia de datos x(n) mediante una función de interpolación.



humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Reconstrucción (D/A)

- **Introducción …**
  - El CD/A requiere en la práctica de componentes adicionales:
    - **circuito de muestreo y mantenimiento** (sample-hold)
    - **filtro paso-bajo**
  - El reconstructor ideal es no causal y con respuesta impulsional infinita.



Reconstrucción (D/A)

- **Tipos de Retenedores**
  - **Retenedor de orden cero:**

$$\hat{x}(t) = x(nT), \qquad nT \le t \le (n+1)T$$

  - **Retenedor de orden uno:**

$$\hat{x}(t) = x(nT) + \frac{x(nT) - x((n-1)T)}{T}(t - nT), \quad nT \le t \le (n+1)T$$

  - **Retenedor con retardo:**

$$\hat{x}(t) = x((n-1)T) + \frac{x(nT) - x((n-1)T)}{T}(t - nT), \quad nT \le t \le (n+1)T$$

$$\begin{aligned} &\text{En } t = nT && \rightarrow \hat{x}(nT) = x((n-1)T) \\ &\text{En } t = (n+1)T && \rightarrow \hat{x}((n+1)T) = x(nT) \end{aligned}$$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co