

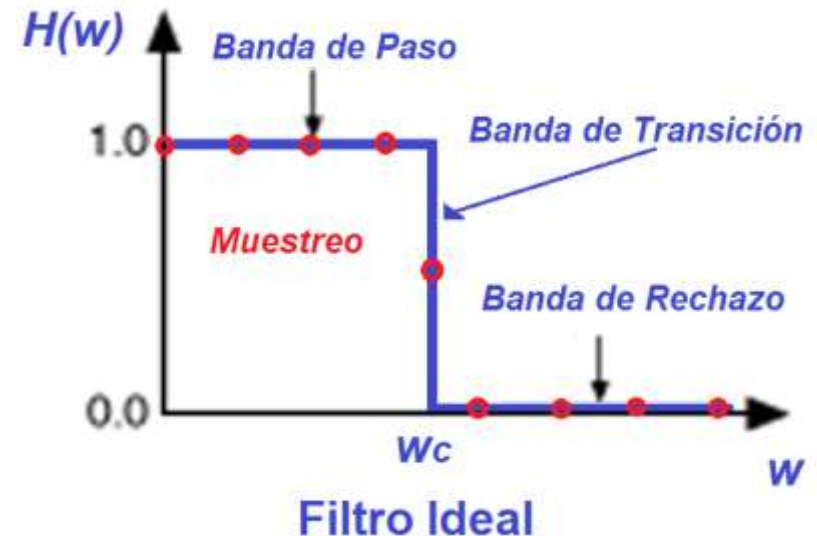
■ Procedimiento

- $h(n)$ se obtiene a partir de los valores de $H_d(w)$, **que** toman en un conjunto de frecuencias **equiespaciadas** w_k ,

$$w_k = \frac{2\pi}{M}(k + \alpha) \quad [ec.1]$$

donde,

$$\begin{cases} k = 0, 1, \dots, \frac{M-1}{2} & M \text{ par} \\ k = 0, 1, \dots, \frac{M}{2} - 1 & M \text{ impar} \\ \alpha = 0 \text{ ó } 1/2 \end{cases}$$



■ Procedimiento...

- **Supuesto:** la respuesta en frecuencia especificada se caracteriza únicamente por las M muestras de frecuencia y en consecuencia, $h(n)$ puede recuperarse de estas muestras.
- Los **lóbulos laterales** de $H(w)$ del filtro resultante, pueden **reducirse optimizando** la **especificación** de frecuencia en la **banda de transición** del filtro.
- Mediante técnicas de programación lineal (por ejemplo, el trabajo de Rabiner et al. 1970).
- Los **cálculos** durante el diseño pueden **simplificarse** si se explotan las propiedades básicas de **simetría** de $H_d(w)$.

■ Procedimiento...

- La respuesta frecuencial deseada para el filtro es,

$$H_d(w) = \sum_{n=0}^{M-1} h(n) e^{-jwn}$$

- Si se especifica la respuesta del filtro para M frecuencias equiespaciadas [ec. 1], se tiene,

$$H(w_k) \equiv H_d\left(\frac{2\pi}{M}(w + \alpha)\right) = \sum_{n=0}^{M-1} h(n) e^{-j2\pi(k+\alpha)\frac{n}{M}} \quad k = 0, 1, \dots, M-1 \quad [ec.2]$$

- Para obtener $h(n)$ se procede a multiplicar [ec. 2] por

$$e^{j2\pi k m/M}, \quad m = 0, 1, \dots, M-1,$$

y sumar sobre $k = 0, 1, \dots, M-1$.

■ Método de Muestreo en Frecuencia...

- Con lo anterior, el lado derecho de la ecuación [ec. 2] se reduce a

$$M h(m) e^{-j2\pi\alpha m/M}.$$

- Finalmente se obtiene,

$$h(n) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} H(w_k) e^{j2\pi(k+\alpha)\frac{n}{M}} \quad n = 0, 1, \dots, M-1 \quad [ec.3]$$

- La ecuación [ec.3] da los valores de $h(n)$ a partir de las especificaciones de las M muestras en frecuencia $H(w_k)$, $k = 0, 1, \dots, M-1$.

■ Método de Muestreo en Frecuencia...

■ Observaciones

- Cuando $\alpha = 0$,
 - la ecuación [ec.2] se reduce a la **transformada discreta de Fourier** de la secuencia $h(n)$
 - la ecuación [ec.3] se reduce a la **transformada inversa de Fourier** de $H(k)$

■ Reducción de la complejidad de diseño del filtro por simetría.

- Como $h(n)$ es **real**, las muestras $H(w_k)$ satisfacen la condiciones de **simetría**.

$$H(2\pi(k + \alpha)/M) = H^*(2\pi(M - k - \alpha)/M) \quad k = 0, 1, \dots, M - 1$$

- La simetría reduce las especificaciones en frecuencia de M puntos a $(M + 1)/2$ puntos para M impar y $M/2$ puntos para M par.

■ Reducción de la complejidad de diseño del filtro por simetría.

- Del análisis previo de la simetría de $h(n)$ para los filtros FIR, se tiene,

$$H(w_k) = H_r(w_k) e^{j[\beta \frac{\pi}{2} - w_k(M-1)/2]} \quad \begin{cases} \beta = 0 & \rightarrow \text{Simetría par} \\ \beta = 1 & \rightarrow \text{Simetría impar} \end{cases}$$

Al evaluar en las frecuencias $w_k = \frac{2\pi}{M}(k + \alpha)$ se llega a,

$$H(w_k) = H_r\left(\frac{2\pi}{M}(k + \alpha)\right) e^{j[\beta \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{M}(k + \alpha)(M-1)]}$$

■ Reducción de la complejidad de diseño del filtro por simetría.

- Si sólo se define un conjunto de *muestras reales* $\{G(k + \alpha)\}$ para la respuesta en frecuencia del filtro, puede lograrse una mayor simplificación, puesto que,

$$G(k + \alpha) = (-1)^k H_r\left(\frac{2\pi}{M}(k + \alpha)\right) \quad k = 0, 1, \dots, M - 1$$

Reemplazando en la ecuación anterior, se elimina $H_r(w_k)$ y se obtiene:

$$H(k + \alpha) = G(k + \alpha) e^{j\pi k} e^{j[\beta\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{M}(k + \alpha)(M - 1)]}$$

■ Expresiones de Diseño ...

- Dependiendo de la simetría β y el valor de α se tienen los siguientes algoritmos de diseño:
 - **Filtros Simétricos**
 - $\beta = 0$ y $\alpha = 0$
 - $\beta = 0$ y $\alpha = 1/2$
 - **Filtros Antisimétricos**
 - $\beta = 1$ y $\alpha = 0$
 - $\beta = 1$ y $\alpha = 1/2$
- Los algoritmos calculan directamente la primera mitad de los valores de $h(n)$ y la segunda mitad por condiciones de simetría.

■ Filtros FIR Simétricos

$\beta = 0$ Simétrica		
$\alpha = 0$	$H(k) = G(k)e^{j\pi k / (M+1)}$ $k = 0, 1, \dots, M$ $G(k) = (-1)^k H_r\left(\frac{2\pi k}{M+1}\right)$ $G(k) = -G(M+1-k)$ $h(n) = \frac{1}{M+1} \left\{ G(0) + 2 \sum_{k=1}^U G(k) \cos \frac{2\pi k}{M+1} \left(n + \frac{1}{2}\right) \right\}$	$U = \begin{cases} \frac{M}{2} & M \text{ par} \\ \frac{(M-1)}{2} & M \text{ impar} \end{cases}$
$\alpha = \frac{1}{2}$	$H\left(k + \frac{1}{2}\right) = G\left(k + \frac{1}{2}\right) e^{-j\pi / 2} e^{j\pi (2k+1)/2(M+1)}$ $G\left(k + \frac{1}{2}\right) = (-1)^k H_r\left[\frac{2\pi}{M+1}\left(k + \frac{1}{2}\right)\right]$ $G\left(k + \frac{1}{2}\right) = G\left(M - k + \frac{1}{2}\right)$ $h(n) = \frac{2}{M+1} \sum_{k=0}^U G\left(k + \frac{1}{2}\right) \sin \frac{2\pi}{M+1} \left(k + \frac{1}{2}\right) \left(n + \frac{1}{2}\right)$	

■ Filtros FIR Antisimétricos

$\beta = 1$ Antisimétrica		
$\alpha = 0$	$H(k) = G(k) e^{j\pi/2} e^{j\pi k/(M+1)}$ $k = 0, 1, \dots, M$ $G(k) = (-1)^k H_r\left(\frac{2\pi k}{M+1}\right)$ $G(k) = G(M+1-k)$ $h(n) = -\frac{2}{M+1} \sum_{k=1}^U G(k) \sin \frac{2\pi k}{M+1} \left(n + \frac{1}{2}\right) \quad M \text{ par}$ $h(n) = \frac{1}{M+1} \left\{ (-1)^{n+1} G\left(\frac{M+1}{2}\right) - 2 \sum_{k=1}^U G(k) \sin \frac{2\pi k}{M+1} \left(n + \frac{1}{2}\right) \right\} \quad M \text{ impar}$	$U = \begin{cases} \frac{M}{2} & M \text{ par} \\ \frac{(M-1)}{2} & M \text{ impar} \end{cases}$
$\alpha = \frac{1}{2}$	$H\left(k + \frac{1}{2}\right) = G\left(k + \frac{1}{2}\right) e^{j\pi(2k+1)/(2(M+1))}$ $G\left(k + \frac{1}{2}\right) = (-1)^k H_r\left[\frac{2\pi}{M+1} \left(k + \frac{1}{2}\right)\right]$ $G\left(k + \frac{1}{2}\right) = -G\left(M - k + \frac{1}{2}\right); G\left(\frac{M}{2}\right) = 0 \text{ para } M \text{ impar}$ $h(n) = \frac{2}{M+1} \sum_{k=0}^V G\left(k + \frac{1}{2}\right) \cos \frac{2\pi}{M+1} \left(k + \frac{1}{2}\right) \left(n + \frac{1}{2}\right)$	$V = \begin{cases} \frac{M}{2} - 1 & M \text{ par} \\ \frac{(M-1)}{2} & M \text{ impar} \end{cases}$

■ Ejemplo 1

- Determine los coeficientes de un filtro FIR de fase lineal de longitud $M=15$ con $h(n)$ simétrica y respuesta frecuencial que satisface las condiciones,

$$H_r\left(\frac{2\pi k}{15}\right) = \begin{cases} 1 & k = 0, 1, 2, 3 \\ 0.4 & k = 4 \\ 0 & k = 5, 6, 7 \end{cases}$$

■ Solución

- Se aprecia en H_r que $\alpha = 0$, y puesto que $h(n)$ es simétrico ($\beta=0$), de las tablas anteriores,

$$G(k) = (-1)^k H_r\left(\frac{2\pi k}{15}\right) \quad k = 0, 1, \dots, 7$$

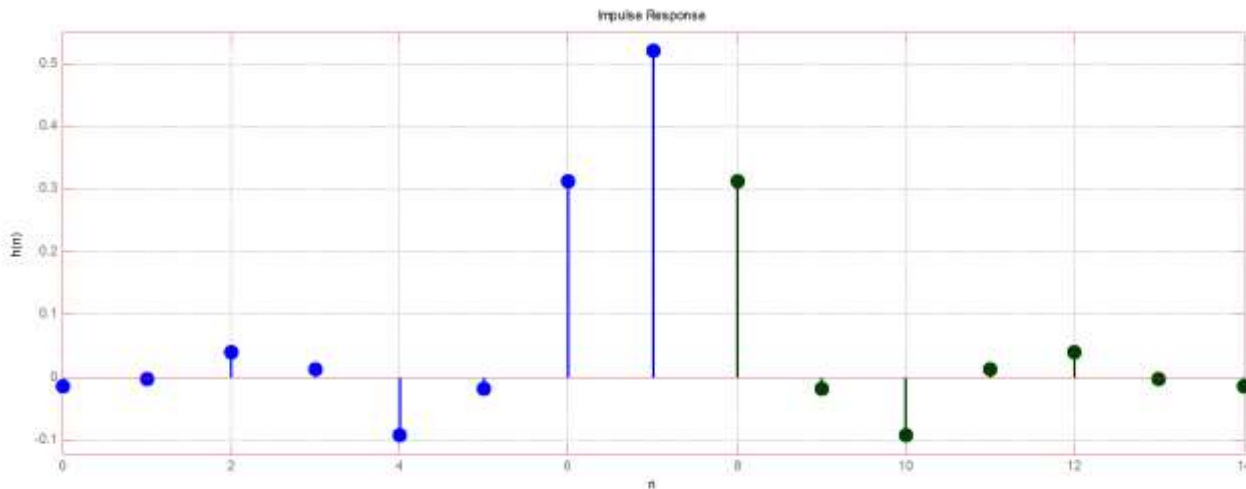
$$h(n) = \frac{1}{M} \left\{ G(0) + 2 \sum_{k=1}^U G(k) \cos \frac{2\pi k}{M} \left(n + \frac{1}{2} \right) \right\}$$

$$\text{donde, } U = \begin{cases} \frac{M-1}{2} & M \text{ impar} \\ \frac{M}{2} - 1 & M \text{ par} \end{cases}$$

■ Solución ...

■ Respuesta impulsional $h(n)$ resultante

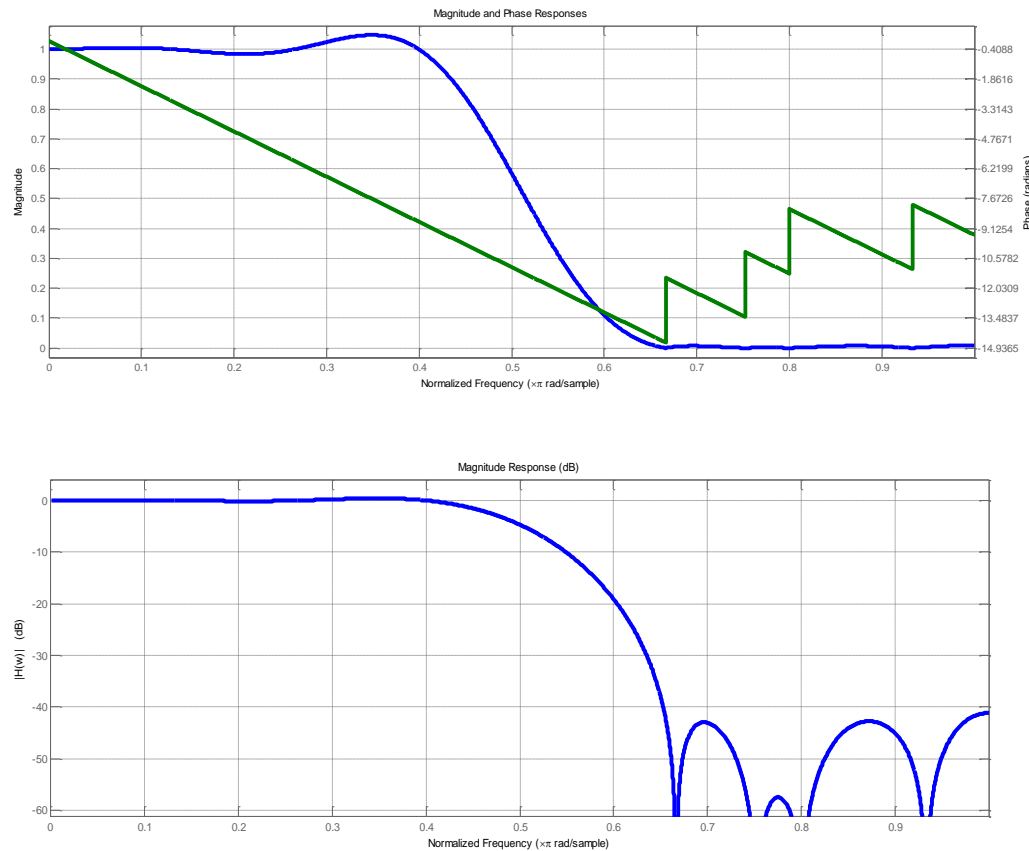
$$\begin{aligned} h(0) &= h(14) = -0.014113 & h(4) &= h(10) = -0.091388 \\ h(1) &= h(13) = -0.001945 & h(5) &= h(9) = -0.0180899 \\ h(2) &= h(12) = 0.040000 & h(6) &= h(8) = 0.3133176 \\ h(3) &= h(11) = 0.012234 & h(7) &= 0.52 \end{aligned}$$



Método de Muestreo en Frecuencia

■ Solución ...

■ Respuesta en frecuencia $H(w)$ del filtro resultante



■ Ejemplo 2

- Determine los coeficientes de un filtro FIR de fase lineal de longitud $M=32$ con $h(n)$ simétrica y respuesta frecuencial que satisface las condiciones,

$$H_r\left(\frac{2\pi(k+\alpha)}{32}\right) = \begin{cases} 1 & k = 0, 1, 2, 3, 4, 5 \\ T_1 & k = 6 \\ 0 & k = 7, 8, \dots, 15 \end{cases}$$

■ Solución

- Para disminuir los lóbulos, T_1 puede seleccionarse de tablas de valores óptimos.
 - $T_1 = 0.3789795$ para $\alpha = 0$
 - $T_1 = 0.3570496$ para $\alpha = 1/2$, (el filtro resultante alcanza un mayor ancho de banda)

$\alpha = 0$

Coeficientes de transición

 $\alpha = 1/2$

M Impar			M Par		
BW	Minimax	T_1	BW	Minimax	T_1
$M = 15$			$M = 16$		
1	-42.30932283	0.43378296	1	-39.75363827	0.42631836
2	-41.26299286	0.41793823	2	-37.61346340	0.40397949
3	-41.25333786	0.41047636	3	-36.57721567	0.39454346
4	-41.94907713	0.40405884	4	-35.87249756	0.38916626
5	-44.37124538	0.39268189	5	-35.31695461	0.38840332
6	-56.01416588	0.35766525	6	-35.51951933	0.40155639
$M = 33$			$M = 32$		
1	-43.03163004	0.42994995	1	-42.24728918	0.42856445
2	-42.42527962	0.41042481	2	-41.29370594	0.40773926
3	-42.40898275	0.40141601	3	-41.03810358	0.39662476
4	-42.45948601	0.39641724	4	-40.93496323	0.38925171
6	-42.52403450	0.39161377	5	-40.85183477	0.37897949
8	-42.44085121	0.39039917	8	-40.75032616	0.36990356
10	-42.11079407	0.39192505	10	-40.54562140	0.35928955
12	-41.92705250	0.39420166	12	-39.93450451	0.34487915
14	-44.69430351	0.38552246	14	-38.91993237	0.34407349
15	-56.18293285	0.35360718			
$M = 65$			$M = 64$		
1	-43.16935968	0.42919312	1	-42.96059322	0.42882080
2	-42.61945581	0.40903320	2	-42.30815172	0.40830689
3	-42.70906305	0.39920654	3	-42.32423735	0.39807129
4	-42.86997318	0.39335937	4	-42.43565893	0.39177246
5	-43.01999664	0.38950806	5	-42.55461407	0.38742065
6	-43.14578819	0.38679809	6	-42.66526604	0.38416748
10	-43.44808340	0.38129272	10	-43.01104736	0.37609863
14	-43.54684496	0.37946167	14	-43.28309965	0.37089233
18	-43.48173618	0.37955322	18	-43.56508827	0.36605225
22	-43.19538212	0.38162842	22	-43.96245098	0.35977783
26	-42.44725609	0.38746948	26	-44.60516977	0.34813232
30	-44.76228619	0.38417358	30	-43.81448936	0.29973144
31	-59.21673775	0.35282745			
$M = 125$			$M = 128$		
1	-43.20501566	0.42899170	1	-43.15302420	0.42889404
2	-42.66971111	0.40867310	2	-42.59092569	0.40847778
3	-42.77438974	0.39868774	3	-42.67634487	0.39838257
4	-42.95051050	0.39268189	4	-42.84038544	0.39226685
6	-43.25854683	0.38579101	5	-42.99805641	0.38812256
8	-43.47917461	0.38195801	7	-43.25537014	0.38281250
10	-43.63750410	0.37954102	10	-43.52547789	0.3782638
18	-43.95589399	0.37518311	18	-43.93180990	0.37251587
26	-44.05913115	0.37384033	26	-44.18097305	0.36941528

BW	Minimax	T_1
$M = 16$		
1	-51.60668707	0.26674805
2	-47.48000240	0.32149048
3	-45.19746828	0.34810181
4	-44.32862616	0.36308594
5	-45.68347692	0.36661987
6	-56.63700199	0.34327393
$M = 32$		
1	-52.64991188	0.26073609
2	-49.39390278	0.30878296
3	-47.72596645	0.32984619
4	-46.68811989	0.34217529
6	-45.33436489	0.35704956
8	-44.30730963	0.36750488
10	-43.11168003	0.37810669
12	-42.97900438	0.38465576
14	-56.32780266	0.35030518
$M = 64$		
1	-52.90375662	0.25923462
2	-49.74046421	0.30603638
3	-48.38088989	0.32510986
4	-47.47863007	0.33595581
5	-46.88655186	0.34287720
6	-46.46230555	0.34774170
10	-45.46141434	0.35859375
14	-44.85988188	0.36470337
18	-44.34302616	0.36983643
22	-43.69835377	0.37586059
26	-42.45641375	0.38624268
30	-56.25024033	0.35200195
$M = 128$		
1	-52.96778202	0.25885620
2	-49.82771969	0.30534668
3	-48.51341629	0.32404785
4	-47.67455149	0.33443604
5	-47.11462021	0.34100952
7	-46.43420267	0.34880371
10	-45.88529110	0.35493774
18	-45.21660566	0.36182251
26	-44.87959814	0.36521607
34	-44.61497784	0.36784058
42	-44.32706451	0.37066040
50	-43.87646437	0.37500000

eligentes

ingeniería
trónica

Escuela d

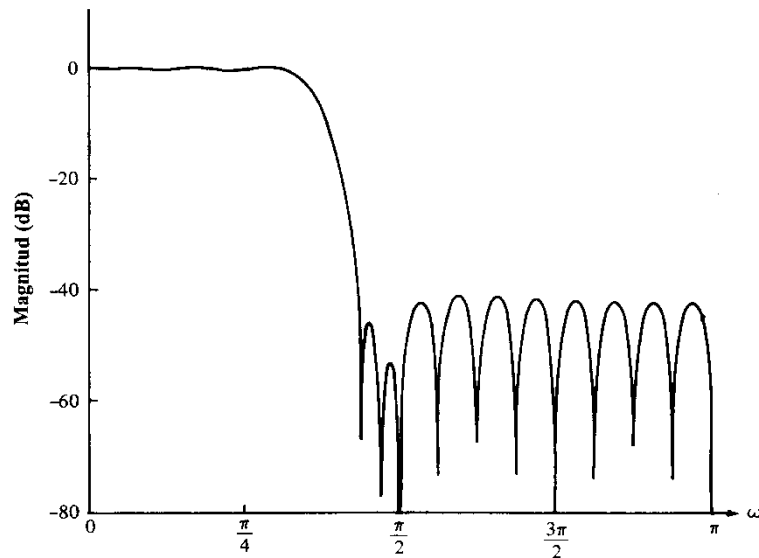
univalle.edu.co

Diseño de Filtros FIR de Fase Lineal con el Método de Muestreo en Frecuencia

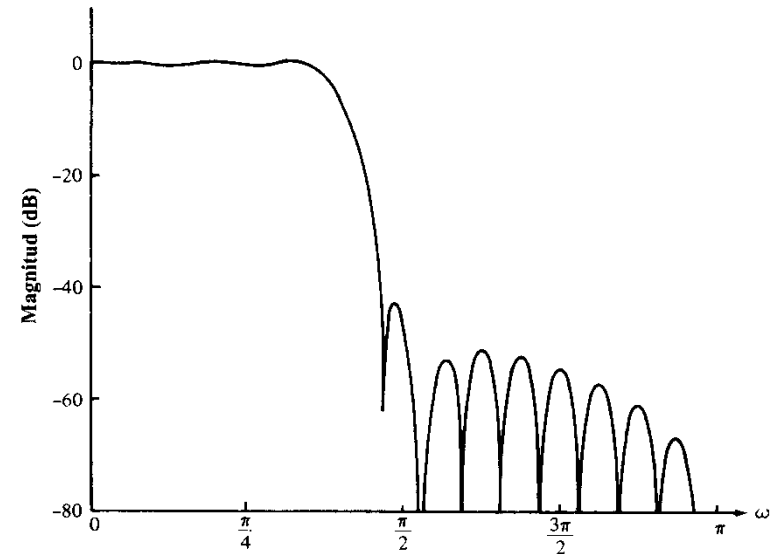


■ Ejemplo 2...

- Siguiendo el procedimiento del ejemplo 1, se llega a:



*Respuesta en frecuencia del filtro
FIR de fase lineal.. $M=32$, $\alpha = 0$*



*Respuesta en frecuencia del filtro
FIR de fase lineal.. $M=32$, $\alpha = 1/2$*





PSI Percepción y Sistemas Inteligentes



Universidad del Valle

Facultad de Ingeniería
Escuela de Ingeniería Eléctrica y Electrónica

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

■ Ejemplo 3.

- Elaborar un programa en MatLab para diseñar filtros por el método de muestreo en frecuencia y generar las graficas de $h(n)$ y $H(w)$.

■ Solución : Ver función [s_muestreofrec\(\)](#)

```
[h]= s_muestreofrec(ALPHA, BETA, ORDEN, Hr )
n=[0:ORDEN];
subplot(2,1,1); %
graf_stemm(n,h,'Respuesta Impulsional','n','h(n)',4)

%Respuesta en Frecuencia
NP=1; % número de periodos a graficar
N=512*2; % número de puntos por periodo
dw=pi/(N-1);
w= 0:dw:(NP-dw)*pi; %Calcular valores de w
%Respuesta en frecuencia
num=h;den=[1]; H=freqz(num,den,w);
%Graficación |H(w)|
subplot(2,1,2); graf_plotm(w/pi, abs(H) ,...
'Espectro Magnitud','\omega/\pi','|H(w)|-dB',4, '.', '.');
```

■ Solución ...

■ Filtro Simétrico

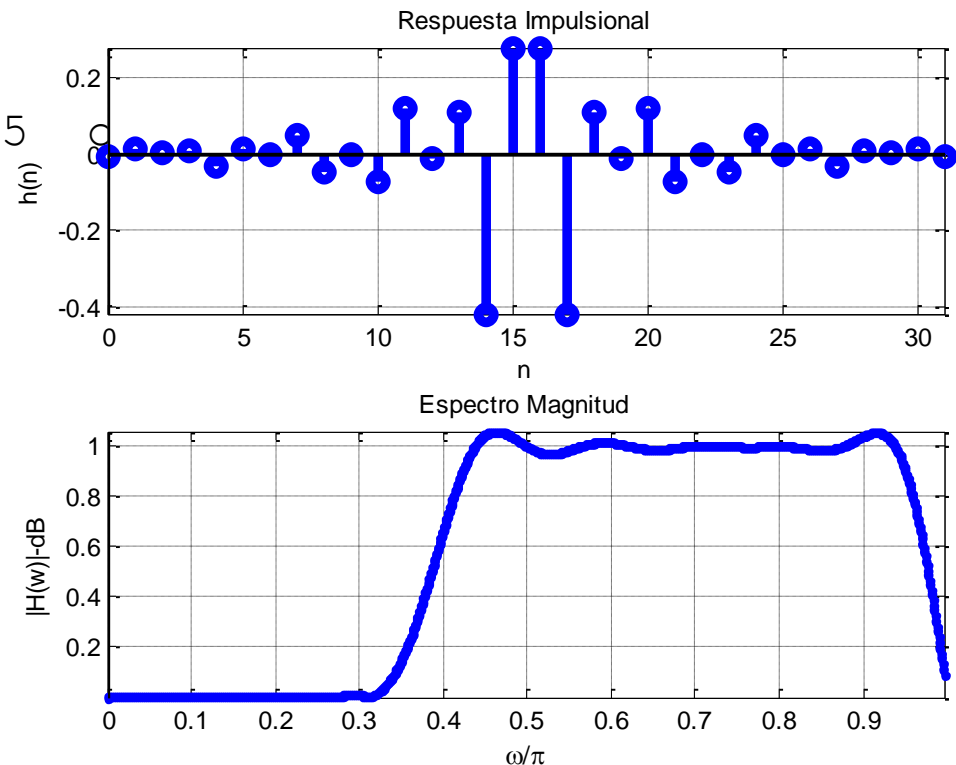
%Ejemplo Filtros Simetricos - Paso-alto

BETA=0;

ORDEN=31;

Hr=[zeros(1,6) 0.3789795

ALPHA=0;



■ Solución ...

■ Filtro Antisimétrico

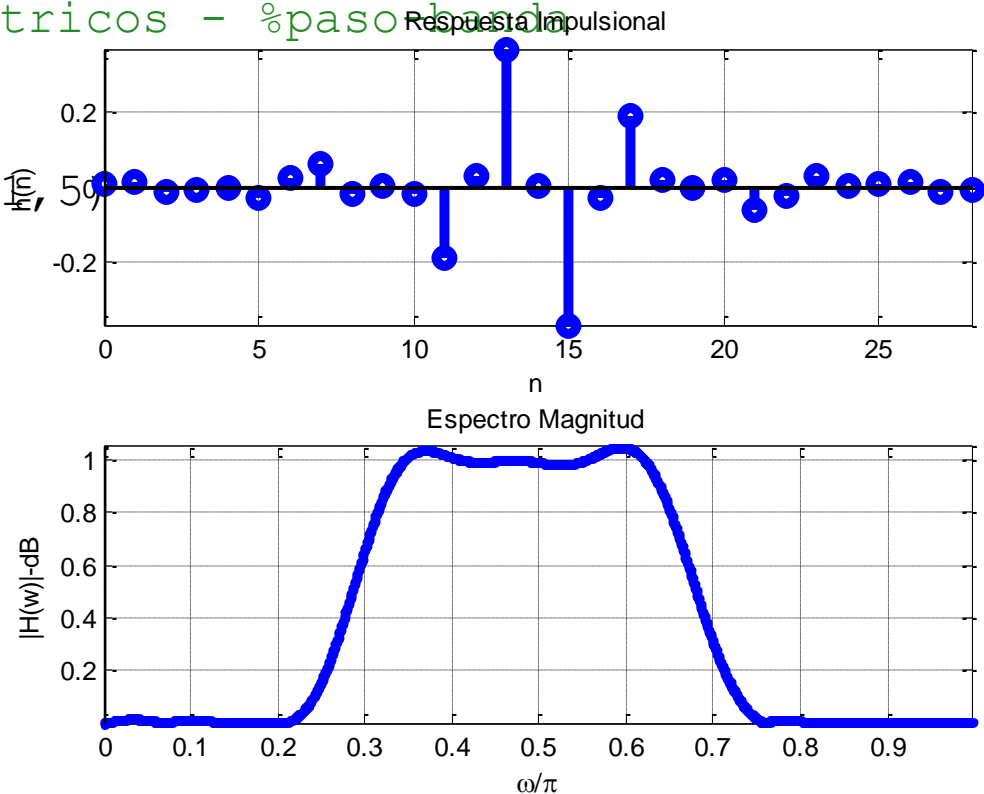
%Ejemplos Filtro Antisimetricos - %paso banda

```
BETA=1;
```

```
ORDEN =28;
```

```
Hr=[ zeros(1,4) 0.4 ones(1,50)
```

```
ALPHA=0;
```



■ Introducción

- ▶ El método de diseño se formula como un problema de **Aproximación de Chevyshev**.
- ▶ El **criterio de optimalidad** es en el sentido de que el **error** de aproximación **ponderado** entre la respuesta en frecuencia **deseada** y **obtenida** se distribuye **equitativamente** a lo largo de la bandas de paso y de atenuación del filtro que minimiza el error máximo.

■ Introducción...

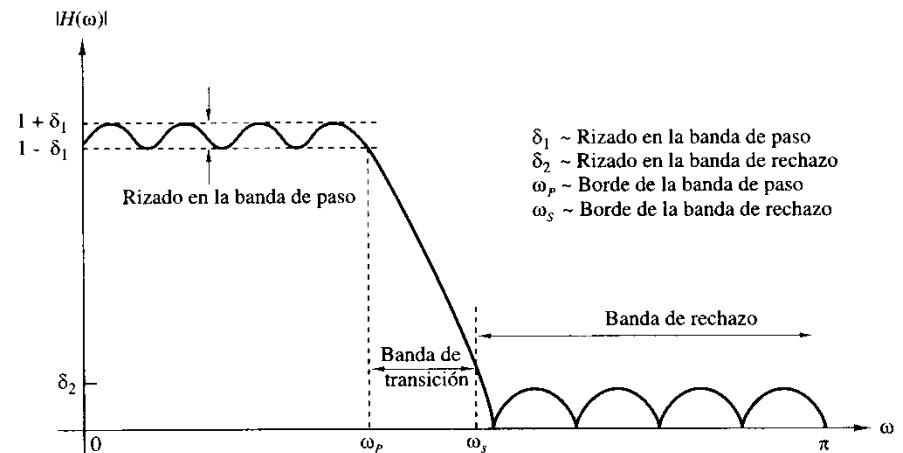
- Los filtros obtenidos presentan rizados en todas las bandas.

* banda de paso:

$$1 - \delta_1 \leq H_r(w) \leq 1 + \delta_1 \quad |w| \leq w_p$$

* banda de rechazo:

$$-\delta_2 \leq H_r(w) \leq \delta_2 \quad |w| > w_s$$



- Para el diseño, es conveniente obtener una *estructura común* de $H_r(w)$ para los diferentes casos de filtros FIR.

Filtros FIR de Fase Lineal: CASO 1



■ Respuesta impulsional **simétrica**

$h(n)=h(M-1-n)$ y **M impar**

$$H_r(w) = h\left(\frac{M-1}{2}\right) + 2 \sum_{n=0}^{(M-3)/2} h(n) \cos w\left(\frac{M-1}{2} - n\right)$$

Haciendo $\mathbf{k} = (\mathbf{M}-1) / 2 - \mathbf{n}$ y definiendo un nuevo conjunto de parámetros del filtro $\{a(k)\}$ como,

$$a(k) = \begin{cases} h\left(\frac{M-1}{2}\right), & k = 0 \\ 2h\left(\frac{M-1}{2} - k\right), & k = 1, 2, \dots, \frac{M-1}{2} \end{cases}$$

entonces $H_r(w)$ se reduce a:

$$\Rightarrow H_r(w) = \sum_{k=0}^{(M-1)/2} a(k) \cos wk$$



Filtros FIR de Fase Lineal: CASO 2



■ Respuesta impulsional **simétrica**

$h(n)=h(M-1-n)$ y **M par**

$$H_r(w) = 2 \sum_{n=0}^{(M/2)-1} h(n) \cos w \left(\frac{M-1}{2} - n \right)$$

Haciendo $k = M / 2 - n$ y definiendo un nuevo conjunto de parámetros del filtro $\{b(k)\}$ como,

$$b(k) = 2h\left(\frac{M}{2} - k\right), \quad k = 1, 2, \dots, M/2$$

entonces $H_r(w)$ se convierte en:

$$H_r(w) = \sum_{k=1}^{M/2} b(k) \cos w \left(k - \frac{1}{2} \right)$$



Filtros FIR de Fase Lineal: CASO 2



■ Respuesta impulsional **simétrica**

$h(n)=h(M-1-n)$ y **M par...**

Para lograr la optimización, es conveniente expresar $H_r(w)$ como,

$$\Rightarrow H_r(w) = \cos \frac{w}{2} \sum_{k=0}^{(M/2)-1} \tilde{b}(k) \cos wk$$

donde los nuevos coeficientes están dados por,

$$\tilde{b}(0) = \frac{1}{2}b(1), \quad \tilde{b}(k) = 2b(k) - \tilde{b}(k-1) \quad k = 1, 2, \dots, \frac{M}{2} - 2, \quad \tilde{b}\left(\frac{M}{2} - 1\right) = 2b\left(\frac{M}{2}\right)$$



Filtros FIR de Fase Lineal: CASO 3



■ Respuesta impulsional **antisimétrica**

$h(n) = -h(M-1-n)$ y **M impar**

$$H_r(w) = 2 \sum_{n=0}^{(M-1)/2} h(n) \operatorname{sen} w \left(\frac{M-1}{2} - n \right)$$

Haciendo $k = (M-1) / 2 - n$ y definiendo un nuevo conjunto de parámetros del filtro $\{c(k)\}$ como,

$$c(k) = 2h\left(\frac{M-1}{2} - k\right), \quad k = 1, 2, \dots, (M-1)/2$$

entonces $H_r(w)$ se convierte en:

$$H_r(w) = \sum_{k=1}^{(M-1)/2} c(k) \operatorname{sen} w k$$



Filtros FIR de Fase Lineal: CASO 3



■ Respuesta impulsional **antisimétrica**

$h(n) = -h(M-1-n)$ y **M impar...**

Para lograr la optimización, es conveniente expresar $H_r(w)$ como,

$$\Rightarrow H_r(w) = \sin w \sum_{k=0}^{(M-3)/2} \tilde{c}(k) \cos wk$$

donde los nuevos coeficientes están dados por,

$$\tilde{c}\left(\frac{M-3}{2}\right) = c\left(\frac{M-1}{2}\right), \quad \tilde{c}\left(\frac{M-5}{2}\right) = 2c\left(\frac{M-3}{2}\right), \dots,$$
$$\tilde{c}(k-1) - \tilde{c}(k+1) = 2c(k) \quad 2 \leq k \leq \frac{M-5}{2}, \quad \tilde{c}(0) + \frac{1}{2}\tilde{c}(2) = c(1)$$



■ Respuesta impulsional **antisimétrica**

$h(n) = -h(M-1-n)$ y M par

$$H_r(w) = 2 \sum_{n=0}^{(M/2)-1} h(n) \operatorname{sen} w \left(\frac{M-1}{2} - n \right)$$

Haciendo $k = M/2 - n$ y definiendo un nuevo conjunto de parámetros del filtro $\{d(k)\}$ como,

$$d(k) = 2h\left(\frac{M}{2} - k\right), \quad k = 1, 2, \dots, M/2$$

entonces $H_r(w)$ se convierte en:

$$H_r(w) = \sum_{k=1}^{M/2} d(k) \operatorname{sen} w \left(k - \frac{1}{2} \right)$$

■ Respuesta impulsional **antisimétrica**

$h(n) = -h(M-1-n)$ y M **par...**

Para lograr la optimización, es conveniente expresar $H_r(w)$ como,

$$\Rightarrow H_r(w) = \sin \frac{w}{2} \sum_{k=0}^{(M/2)-1} \tilde{d}(k) \cos wk$$

donde los nuevos coeficientes están dados por,

$$\tilde{d}\left(\frac{M}{2}-1\right) = 2d\left(\frac{M}{2}\right), \quad \tilde{d}(k-1) - \tilde{d}(k) = 2d(k) \quad 2 \leq k \leq \frac{M}{2}-1, \quad \tilde{d}(0) - \frac{1}{2}\tilde{d}(1) = d(1)$$

Filtros FIR de Fase Lineal

- $H_r(w)$ presenta la misma forma en los *cuatro casos*,

$$H_r(w) = Q(w) P(w)$$

donde,

$$Q(w) = \begin{cases} 1 & \text{caso 1} \\ \cos \frac{w}{2} & \text{caso 2} \\ \sin w & \text{caso 3} \\ \sin \frac{w}{2} & \text{caso 4} \end{cases}$$

$$P(w) = \sum_{k=0}^L \alpha(k) \cos wk$$

↑
parámetros del filtro

$$\text{donde } L = \begin{cases} (M-1)/2 & \text{caso 1} \\ M/2-1 & \text{caso 2} \\ (M-3)/2 & \text{caso 3} \\ M/2-1 & \text{caso 4} \end{cases}$$

- **Respuesta en frecuencia real deseada $H_{dr}(w)$ y función de ponderación $W(w)$**
 - $H_{dr}(w)$ se define como igual a uno en la banda de paso y cero en la banda de rechazo.
 - $W(w)$ función que permite elegir el tamaño relativo de los errores en las diferentes bandas de frecuencia (**normalizada en la banda de paso**).

■ Respuesta en frecuencia real deseada $H_{dr}(w)$ y función de ponderación $W(w)$...

- Dadas las especificaciones de $H_{dr}(w)$ y $W(w)$, puede definirse el **Error de Aproximación Ponderado $E(w)$** como,

$$E(w) = W(w)[H_{dr}(w) - H_r(w)] = W(w)[H_{dr}(w) - Q(w)P(w)]$$

$$E(w) = W(w)Q(w)\left[\frac{H_{dr}(w)}{Q(w)} - P(w)\right]$$

por conveniencia matemática, se definen las *funciones modificadas* como:

$$\hat{W}(w) = W(w)Q(w) \qquad \hat{H}_{dr} = \frac{H_{dr}(w)}{Q(w)}$$

■ Respuesta en frecuencia real deseada $H_{dr}(w)$ y función de ponderación $W(w)$...

Por lo que el error de aproximación ponderado se puede expresar, para los cuatro filtros FIR de fase lineal, como:

$$E(w) = \hat{W}(w) [\hat{H}_{dr}(w) - P(w)]$$

- **Respuesta en frecuencia real deseada $H_{dr}(w)$ y función de ponderación $W(w)$...**

- La **aproximación de Chebyshev** consiste en determinar los **parámetros $\{\alpha(k)\}$** que **minimizan** el valor máximo de $|E(w)|$ sobre las bandas de frecuencia en las que se realiza la aproximación:

$$\min_{\text{sobre } \{\alpha(k)\}} \left[\max_{w \in S} |E(w)| \right] = \min_{\text{sobre } \{\alpha(k)\}} \left[\max_{w \in S} \left| \hat{W}(w) \left[\hat{H}_{dr}(w) - \sum_{k=0}^L \alpha(k) \cos wk \right] \right| \right]$$

donde, S: conjunto de bandas de frecuencia para la optimización.

- La **solución a este problema** [Park y McClellan 1972] se efectúa utilizando el **teorema de alternancia**.

Teorema de Alternancia



■ Definición

- Sea S un subconjunto compacto del intervalo $[0, \pi)$.
- Una condición necesaria y suficiente para que,

$$P(w) = \sum_{k=0}^L \alpha(k) \cos wk$$

sea la **mejor y única aproximación ponderada de Chebyshev** $\hat{H}_{dr}(w)$ en S es que el error $E(w)$ presente **al menos** $L+2$ frecuencias **extremas** $\{w_i\}$ en S , tal que:

$$w_1 < w_2 < \dots < w_{L+2}$$

$$E(w_i) = -E(w_{i+1})$$

$$|E(w_i)| = \max_{w \in S} |E(w)| \quad i = 1, 2, \dots, L+2$$



Teorema de Alternancia



■ Definición ...

- La función de error $E(w)$ *alterna su signo* entre dos frecuencias extremas sucesivas; de ahí su nombre.
- Las frecuencias $\{w_i\}$ correspondientes a los picos de $E(w)$ también corresponden a los picos para los que $H_r(w)$ verifica la tolerancia del error.
- El teorema de alternancia garantiza una *solución única* para el problema de *optimización de Chebyshev*.



Teorema de Alternancia



■ Solución

- En las frecuencias extremas deseadas $\{w_n\}$, se tiene el conjunto de ecuaciones,

$$\widehat{W}(w_n) [\widehat{H}_{dr}(w_n) - P(w_n)] = (-1)^n \delta \quad n = 0, 1, \dots, L+1 \quad [1]$$

donde δ representa el valor máximo de la función de error $E(w)$.
Para la función de $W(w)$ escogida, se desprende que $\delta = \delta_2$.



■ Solución...

- El conjunto de ecuaciones de [1], se puede representar como,

$$P(w_n) + \frac{(-1)^n \delta}{\widehat{W}(w_n)} = \widehat{H}_{dr}(w_n) \quad n = 0, 1, \dots, L+1 \quad [2]$$

o de la forma,

$$\sum_{k=0}^L \alpha(k) \cos w_n k + \frac{(-1)^n \delta}{\widehat{W}(w_n)} = \widehat{H}_{dr}(w_n) \quad n = 0, 1, \dots, L+1 \quad [3]$$

Teorema de Alternancia

■ Solución...

- Si $\{\alpha(k)\}$ y δ son los parámetros que se deben determinar a partir de una estimación de $\{w_n\}$, la ecuación [3] puede expresarse matricialmente:

$$\begin{bmatrix} 1 & \cos w_0 & \cos 2w_0 & \dots & \cos Lw_0 & \frac{1}{\widehat{W}(w_0)} \\ 1 & \cos w_1 & \cos 2w_1 & \dots & \cos Lw_1 & \frac{-1}{\widehat{W}(w_1)} \\ \vdots & & & & & \\ 1 & \cos w_{L+1} & \cos 2w_{L+1} & \dots & \cos Lw_{L+1} & \frac{(-1)^{L+1}}{\widehat{W}(w_{L+1})} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha(0) \\ \alpha(1) \\ \vdots \\ \alpha(L) \\ \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widehat{H}_{dr}(w_0) \\ \widehat{H}_{dr}(w_1) \\ \vdots \\ \widehat{H}_{dr}(w_{L+1}) \end{bmatrix} \quad [4]$$

Cuales son los parámetros desconocidos??

■ Solución...

- ▶ Se desconocen:
 - ▶ Las frecuencias extremas $\{w_n\}$
 - ▶ El conjunto de parámetros $\{\alpha(k)\}$
 - ▶ δ , el valor máximo del error $E(w)$
- ▶ El sistema de ecuaciones [4] se resuelve utilizando el *Algoritmo de Intercambio de Remez* (Rabiner et al. 1975)

■ Introducción

- ▶ Algoritmo iterativo en el que se propone un conjunto inicial de frecuencias extremas $\{w_n\}$ para calcular $P(w)$ y δ , y posteriormente se determina la función de error $E(w)$.
- ▶ A partir de $E(w)$ se obtiene otro conjunto de $L+2$ frecuencias extremas.
- ▶ El proceso anterior se repite iterativamente hasta que converga al conjunto óptimo de frecuencias extremas.

■ Introducción...

- Puesto que la inversión de matrices es un procedimiento costoso en tiempo, se prefiere utilizar un procedimiento más eficiente para calcular δ analíticamente:

$$\delta = \frac{\gamma_0 \hat{H}_{dr}(w_0) + \gamma_1 \hat{H}_{dr}(w_1) + \dots + \gamma_{L+1} \hat{H}_{dr}(w_{L+1})}{\frac{\gamma_0}{\hat{W}(w_0)} - \frac{\gamma_1}{\hat{W}(w_1)} + \dots + \frac{(-1)^{L+1} \gamma_{L+1}}{\hat{W}(w_{L+1})}} \quad [1]$$

donde,

$$\gamma_k = \prod_{\substack{n=0 \\ n \neq k}}^{L+1} \frac{1}{\cos w_k - \cos w_n} \quad [2]$$

Así, δ se calcula al seleccionar las $L+2$ frecuencias extremas iniciales.

- Como $P(w)$ es un polinomio trigonométrico de la forma,

$$P(w) = \sum_{k=0}^L \alpha(k) x^k \quad x = \cos w \quad [3]$$

y se sabe que en los puntos $x_n \equiv \cos w_n$, $n=0, 1, \dots, L+1$, el polinomio tiene los valores,

$$P(w_n) = \hat{H}_{dr}(w_n) - \frac{(-1)^n \delta}{\hat{W}(w_n)} \quad n = 0, 1, \dots, L+1 \quad [4]$$

se puede usar la formula de interpolación de Lagrange para $P(w)$.

Algoritmo de Intercambio de Remez



Así, $P(w)$ se puede expresar como [Hamming, 1962]:

$$P(w) = \frac{\sum_{k=0}^L P(w_k) [\beta_k / (x - x_k)]}{\sum_{k=0}^L [\beta_k / (x - x_k)]} \quad \text{donde} \quad x_k = \cos w_k \quad \text{y} \quad \beta_k = \prod_{\substack{n=0 \\ n \neq k}}^{L+1} \frac{1}{x_k - x_n} \quad [5]$$

Luego de obtener la solución para $P(w)$, se calcula la función de error $E(w)$ a partir de,

$$E(w) = \hat{W}(w) [\hat{H}_{dr}(w) - P(w)]$$

en un conjunto denso de puntos de frecuencia (normalmente 16 M, donde M es la longitud del filtro).



- ▶ Si $|E(w)| \geq \delta$ para alguna frecuencia en el conjunto denso, entonces se **selecciona** un nuevo conjunto de frecuencias correspondientes a los $L+2$ picos más grandes de $E(w)$ y se **repite** el proceso empezando con la ecuación [1].
- ▶ Como el nuevo conjunto de $L+2$ frecuencias se selecciona para coincidir con los picos de la función de error $|E(w)|$, el algoritmo obliga a que δ se **incremente** en cada iteración hasta que **converge** al límite superior $|E(w)| < \delta$.

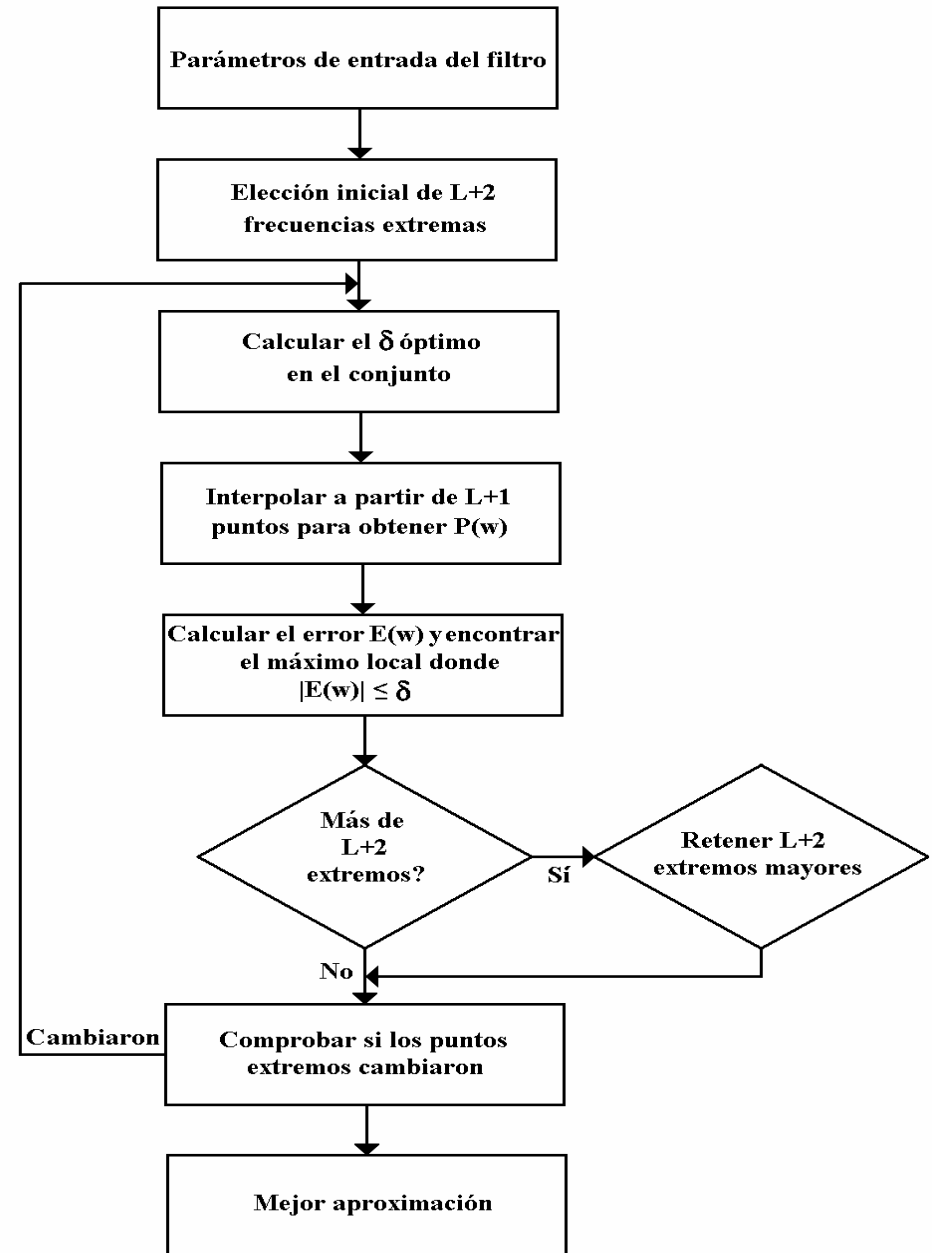
Algoritmo de Intercambio de Remez



- ▶ Al obtener la solución óptima de Chebyshev para $P(w)$, se conocen los parámetros $\alpha(k)$.
- ▶ Los valores de $h(n)$ se obtienen de las relaciones entre $\alpha(k)$ y $h(k)$.
- ▶ Si se requiere, $Q(w)$ se determina según el tipo de filtro:
 $H_r(w) = Q(w) P(w)$



Diagrama de Flujo del Algoritmo de Remez



■ Ejemplo

- Obtenga un filtro FIR paso-banda de longitud $M = 20$, mediante la técnica de rizado constante (Parks-McClellan algorithm) si se conoce que el filtro deseado tiene las siguientes especificaciones:

$$f = [0 \quad 0.3 \quad 0.4 \quad 0.6 \quad 0.7 \quad 1]$$

$$a = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0]$$

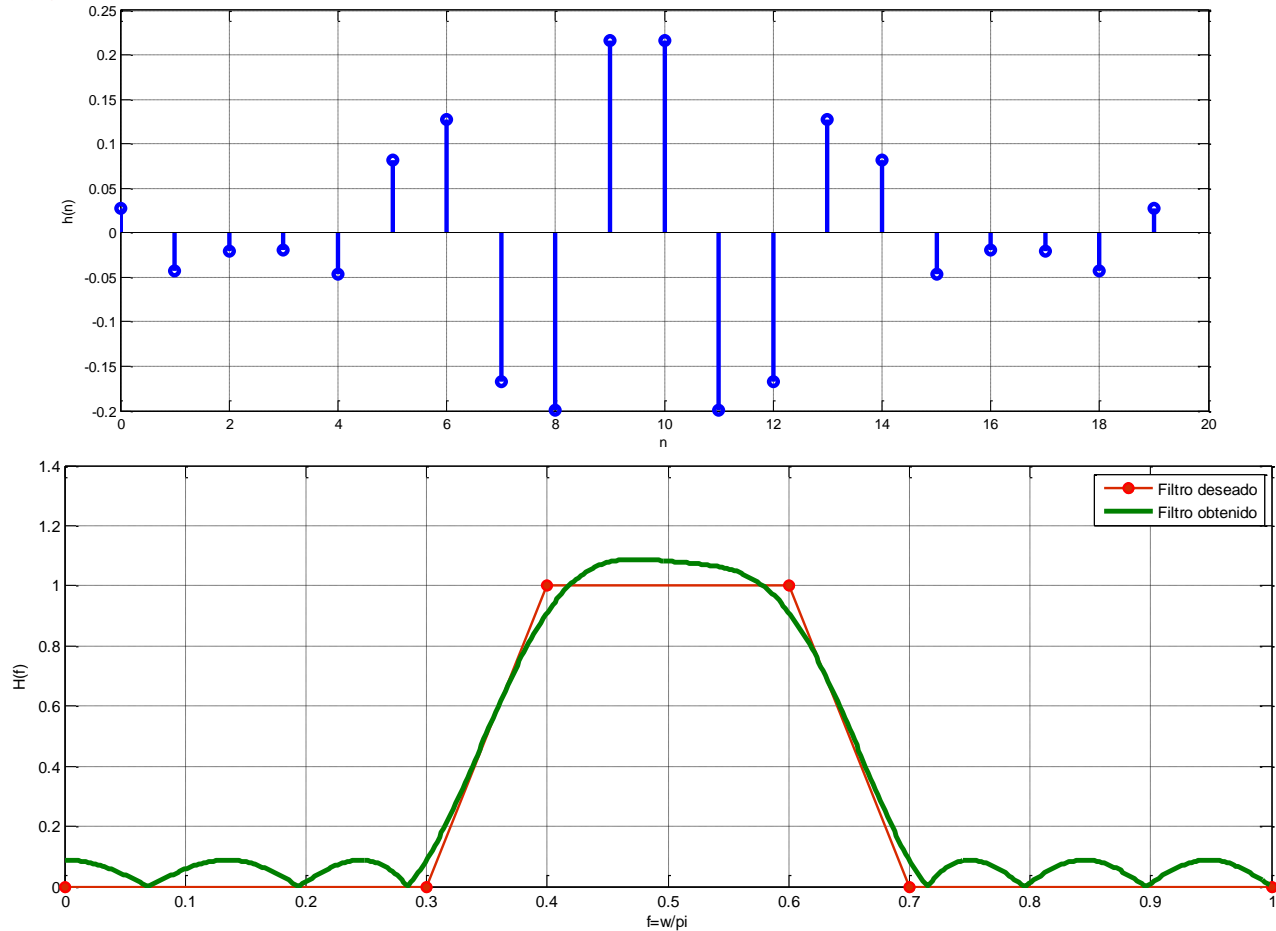
- f corresponde a la frecuencia normalizada entre 0 y 1; siendo 1 la frecuencia de Nyquist.
- a es la amplitud de la respuesta deseada normalizada entre 0 y 1

■ Solución

■ Utilización de la función `firpm(n,f,a)` de Matlab.

```
clc;clear all; close all;  
f = [0 0.3 0.4 0.6 0.7 1]; a = [0 0 1 1 0 0]; M=20;  
  
% Calculo del filtro  
b = firpm(M-1,f,a);  
  
% Graficación coeficientes del filtro  
stem([0:M-1],b); xlabel('n'); ylabel('h(n)'); grid on;  
  
% Respuesta en Frecuencia  
figure; [h,w] = freqz(b,1,512);  
% Graficación respuesta en frecuencia  
plot(f,a,w/pi,abs(h)); xlabel('f=w/pi'); ylabel('H(f)');  
grid on; legend('Filtro deseado','Filtro obtenido');
```

■ Solución ...



■ Estimación de la Longitud del Filtro

- En el proceso de diseño del filtro digital es necesario estimar el orden para cumplir con las especificaciones deseadas.
- El orden debe ser el entero más pequeño posible para reducir la complejidad computacional.
- Se recurre a propuestas heurísticas de varios autores que parten de los valores de w_p y w_s , δ_1 y δ_2 esperados del filtro.

Propuesta de Kaiser

$$\tilde{M} = \frac{-20\log_{10}(\sqrt{\delta_1 \delta_2}) - 13}{14.6\Delta f} + 1$$

Propuesta de Herrmann

$$\tilde{M} = \frac{D_{\infty}(\delta_1, \delta_2) - f(\delta_1, \delta_2)(\Delta f)^2}{\Delta f} + 1$$

Propuesta de Bellanger

$$\tilde{M} = \frac{-20\log_{10}(10\delta_1\delta_2)}{3\Delta f - 1} + 1$$

Donde, $\Delta f = (\omega_s - \omega_p) / 2\pi$

$$D_{\infty}(\delta_1, \delta_2) = (\log_{10} \delta_2) \left[0.005 (\log_{10} \delta_1)^2 + 0.071 (\log_{10} \delta_1) - 0.476 \right] - \left[0.003 (\log_{10} \delta_1)^2 + 0.594 (\log_{10} \delta_1) + 0.428 \right]$$

$$f(\delta_1, \delta_2) = 11.012 + 0.5124 (\log_{10} \delta_1 - \log_{10} \delta_2)$$

■ Bandas de transición

- Si $(w_s - w_p)$ es angosta se generan mayores valores de M .
- M se calcula inversamente proporcional a $(w_s - w_p)$

■ Errores en las bandas

- Para valores **pequeños** de δ_1 y δ_2 :
 - Todas las fórmulas proporcionan resultados cercanos y precisos.
- Para valores **grandes** de δ_1 y δ_2
 - F. Hermann produce una mejor aproximación.

■ Comparación Cálculo de M

- Comparación de tres Filtros FIR paso-bajo con sus características conocidas.
- Estimaciones de la longitud del filtro:

Filtro FIR	ω_p	ω_s	δ_1	δ_2
1	0.10625π	0.14375π	0.0224	$0.112 \cdot 10^{-3}$
2	0.20750π	0.28750π	0.0170	$34.0 \cdot 10^{-3}$
3	0.3450π	0.57500π	0.0411	$13.7 \cdot 10^{-3}$

Filtro FIR	Orden Real	F. Kaiser	F. Bellanger	F. Hermann
1	159	159	164	152
2	38	35	38	38
3	14	13	14	13

Comparación de Métodos de Diseño de Filtros FIR

Método Directo

Método por Enventanado

Método Muestreo en Frecuencia

Método Rizado Constante



Método Directo

Método simple que consiste en obtener y resolver un sistema de ecuaciones lineales.

El resultado sólo garantiza el cumplimiento de las especificaciones de diseño utilizadas en la formulación de las ecuaciones.

Método de Enventanado

Primer método propuesto para el diseño de filtros FIR de fase lineal.

Carece de control preciso de las frecuencias críticas, tales como w_p y w_s en el diseño del filtro.

Los valores de w_p , w_s y δ dependen del tipo de ventana y de la longitud M del filtro.

Método Muestreo en frecuencia

Proporciona más control sobre las frecuencias críticas que el método de ventanas,

Debido a que $H_r(w)$ se especifica en las frecuencias $w_k = 2\pi k / M$ o $w_k = \pi(2k + 1) / M$ y la banda de transición es un múltiplo de $2\pi / M$.

Puede implementarse con estructuras eficientes (menos operaciones) cuando la mayoría de las muestras en frecuencias son cero.

La ubicación de polos y ceros es sensible a los efectos de cuantificación.

Método Rizado Constante

Proporciona control total de las especificaciones del filtro y se prefiere habitualmente sobre los otros métodos.

Especificaciones de diseño en función de w_p , w_s , δ_1 , δ_2 y M .

Distribuye el error de aproximación en las bandas de paso y de rechazo y se obtiene un filtro óptimo que minimiza el nivel de los lóbulos laterales (optimizar δ_2).

Algoritmo iterativo computacional que converge a una solución óptima.

