Diseño de Filtros IIR

Introducción

- La **respuesta en frecuencia H(*w*)** de un filtro IIR es una *función racional*, es decir, la razón entre dos polinomios de grado finito en e^{jw} de la forma,

$$H(w)=\frac{B(w)}{A(w)}=e^{-jwN_0}\frac{\sum_{k=0}^{M} b_k\ e^{-jwk}}{\sum_{k=0}^{N} a_k\ e^{-jwk}}$$

- donde:

N_0 unidades de desplazamiento de $h(n)$

a_k y b_k coeficientes del filtro

N es el orden del filtro y generalmente $N \geq M$.

$h(n) \neq 0$ para $N_0 \leq n \leq \infty$.

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Introducción…

- La **función de transferencia H(z**) de un filtro IIR es racional y está dada por:

$$H(z) = H\left(e^{jw}\right)\Big|_{z=e^{jw}} = z^{-N_0}\,\frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{M} b_k\ z^{-k}}{\displaystyle\sum_{k=0}^{N} a_k\ z^{-k}}$$

- Se aprecia que los filtros IIR, a diferencia de los FIR, pueden ser inestables por la existencia de polos.

Introducción…

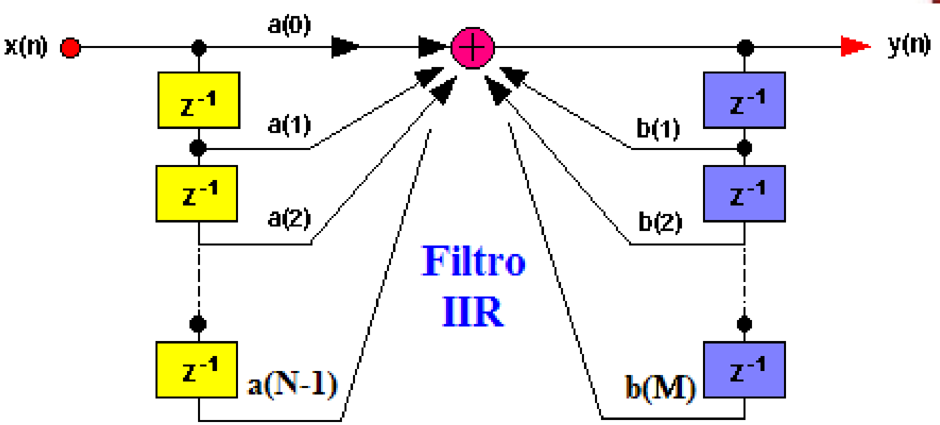
- El diseño de un filtro IIR busca determinar la función $h(n)$, $H(z)$, $H(w)$ o la ecuación de diferencia que mejor se aproxime a las especificaciones de diseño.
  - Se logra calculando los coeficientes $\{a_k\}$ y $\{b_k\}$ óptimos según un criterio establecido.
  - El orden del filtro N generalmente se fija desde un principio, pero también puede considerarse como un parámetro.

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Diseño de Filtros IIR

Características de Filtros IIR

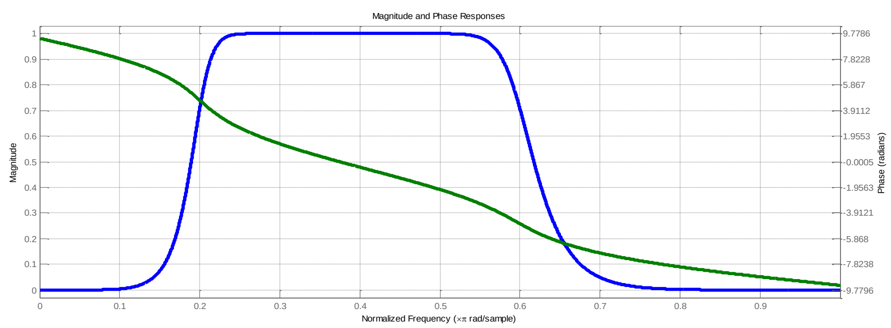
- No puede utilizarse la convolución para implementar filtros IIR
  - Se recurre a las ecuaciones de diferencia.
- Los filtros IIR emplean realimentación
  - Necesitan almacenar muestras de la salida para calcular un nuevo valor.

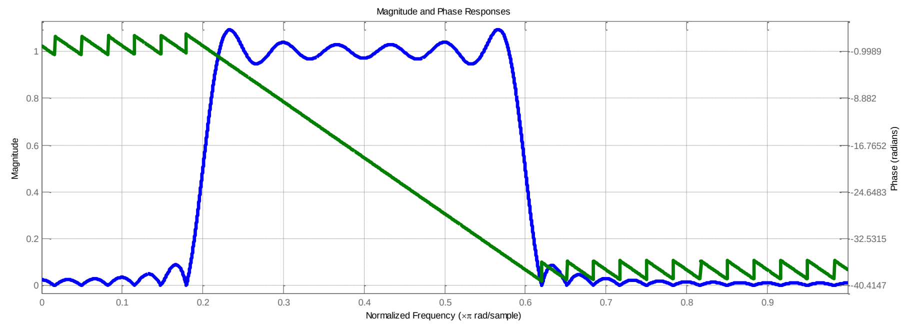


$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} a(k)x(n-k) + \sum_{k=1}^{M} b(k)y(n-k)$$

Diseño de Filtros IIR

- **Características de Filtros IIR …**
  - **No es posible** diseñar filtros IIR causales de **fase lineal**.
    - Para aproximar una fase lineal se puede utilizar la técnica de filtrado *forward-backward*, para compensar la fase.





Diseño de Filtros IIR

- **Características de Filtros IIR …**

  - El **ruido de la cuantización** en los coeficientes puede afectar severamente la respuesta y estabilidad del filtro.
    - Puede distorsionar la posición de los polos y desplazarlos cerca o sobre el círculo unitario del plano z.

- **Características de Filtros IIR…**

  - Comparados con los filtros FIR, los filtros IIR pueden alcanzar las especificaciones de diseño con ordenes relativamente bajos (4 a 6 polos).

  - Los filtros IIR se obtienen comúnmente a partir de fórmulas de diseño en forma cerrada correspondientes a filtros clásicos.

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Diseño de Filtros IIR

- **Características de Filtros IIR…**

  - Las características de ruido de un filtro IIR deben tenerse muy presentes durante la implementación, especialmente en aritmética de punto fijo.

    - La cuantización de los coeficientes degrada la respuesta del filtro (se aleja de la calculada con software de alta precisión).

    - La sensibilidad al ruido de redondeo puede ser amplificada por las mallas de realimentación en el filtro.

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

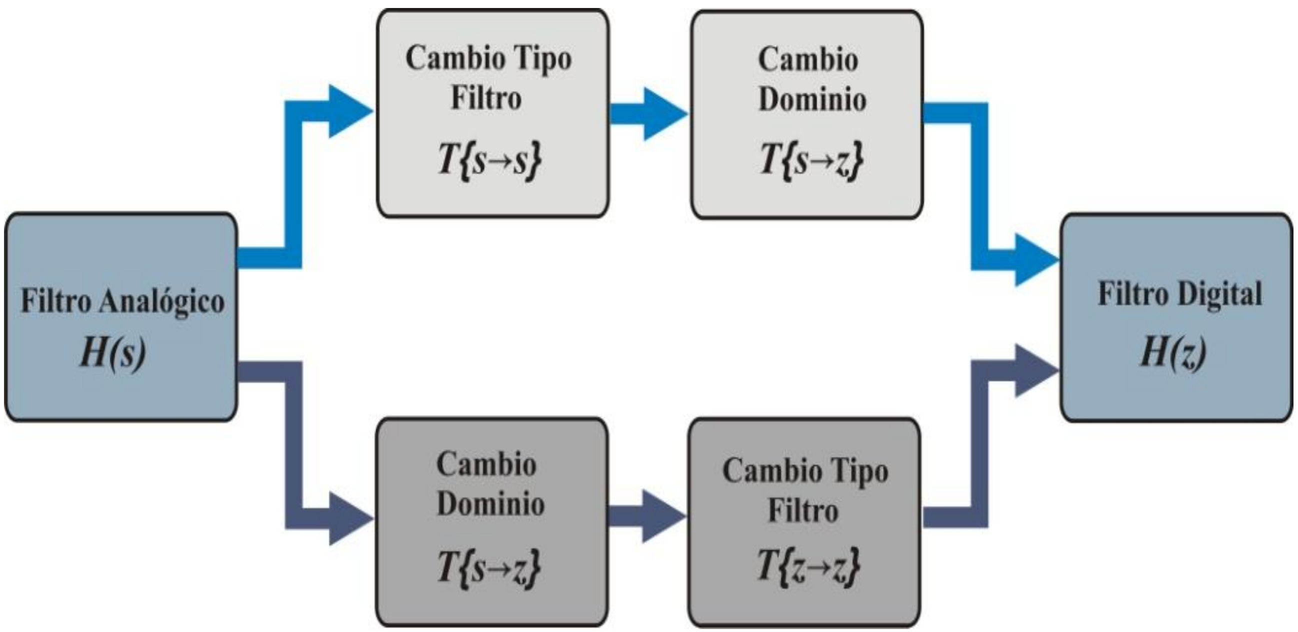
Introducción

- Técnica basada en convertir un filtro analógico H(s) en un filtro digital $H(z)$.
  - Ventajas:
    - Amplia literatura sobre diseño filtros analógicos con fórmulas cerradas.
    - Disponibilidad de tablas de transformaciones entre dominios analógicos y digital y tipos de filtros.

$$\mathrm{T}\{s \to z\}, \quad \mathrm{T}\{s \to s\}, \quad \mathrm{T}\{z \to z\}$$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

- **Introducción …**
  - Modalidades de diseño



- **Introducción …**
  - Técnica adecuada para obtener respuesta en frecuencia de amplitud casi constante en las bandas de paso y de rechazo.
  - Técnica no-adecuada para respuestas en frecuencia de formas arbitrarias.
    - Las técnicas de optimización numérica si son adecuadas.
  - Diseño con especificaciones de magnitud y fase arbitrarias es muy difícil.
    - No produce soluciones que cumplan todos los requerimientos de diseño.

Diseño de Filtros IIR a partir de Filtros Analógicos

Introducción …

- Cada una de las representaciones de un filtro analógico conduce a métodos para convertirlo al dominio digital.
  - Respuesta Impulsional $h(t)$
  - Ecuación diferencial $y(t)$
  - Función de Transferencia $H(s)$
  - Respuesta en Frecuencia $H(\ )$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

- **Representación de filtros analógicos**

  - **Mediante** la función de transferencia $H_a(s)$

$$H_a(s) = \frac{\sum_{K=0}^{M} \beta_k s^k}{\sum_{k=0}^{N} \alpha_k s^k}$$

donde {α} y {β} son los coeficientes del filtro.

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

- **Representación de filtros analógicos…**

  - Mediante $H_a(s)$ a través de la **Respuesta Impulsional** $h(t)$

$$H_a(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\, e^{-st}\, \partial t$$

  - Mediante una Ecuación Diferencial Lineal con Coeficientes Constantes,

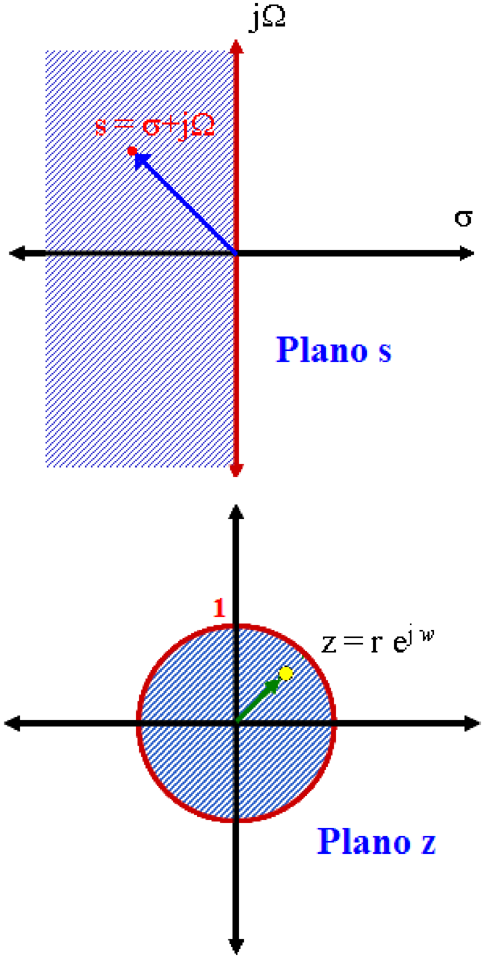
$$\sum_{k=0}^{N} \alpha_k \frac{\partial^k y(t)}{\partial t^k} = \sum_{k=0}^{M} \beta_k \frac{\partial^k x(t)}{\partial t^k}$$

donde $x(t)$ y $y(t)$ indican señal de entrada y de salida del filtro.

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

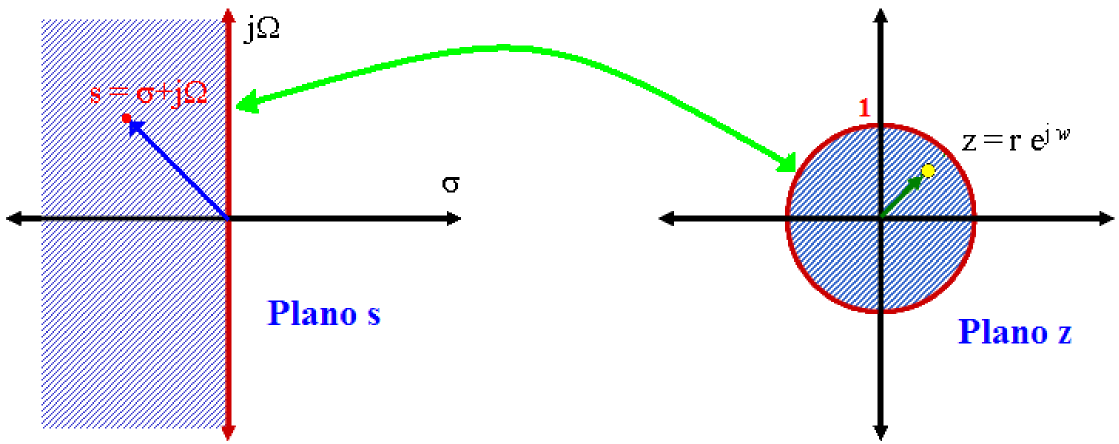
- **Procedimiento de Conversión Análogo-Digital**

  - **Conceptos Claves**
    - Un sistema analógico $H(s)$ LTI es estable si todos sus polos yacen en la mitad izquierda del plano s.
    - Un sistema discreto $H(z)$ LTI es estable si todos sus polos yacen dentro del círculo unitario del plano z.



■Procedimiento de Conversión…

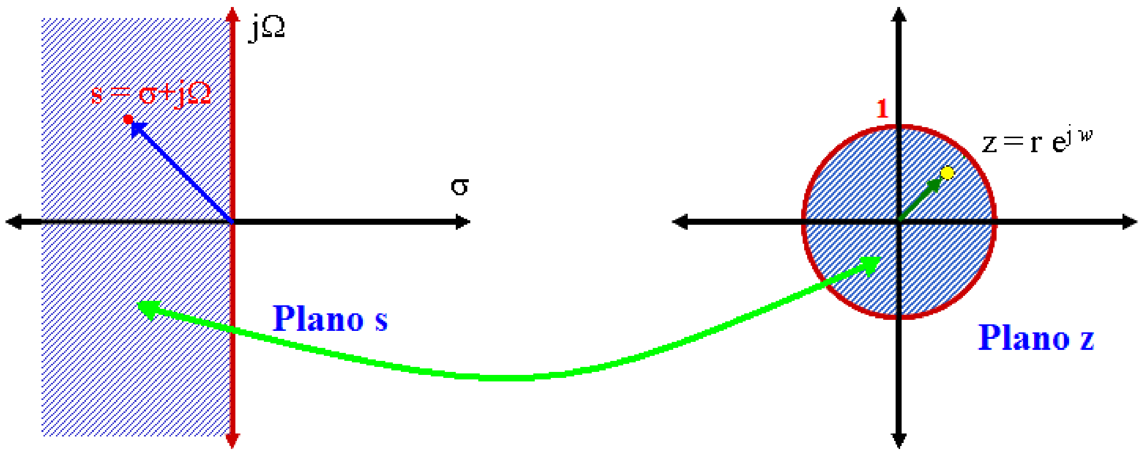
- La **técnica de conversión es efectiva** si:
  - El eje jΩ en el plano s se corresponde con la circunferencia unidad en el plano z.



  - Garantiza relación directa entre variables de frecuencia !!: $\Omega \Leftrightarrow \omega$.

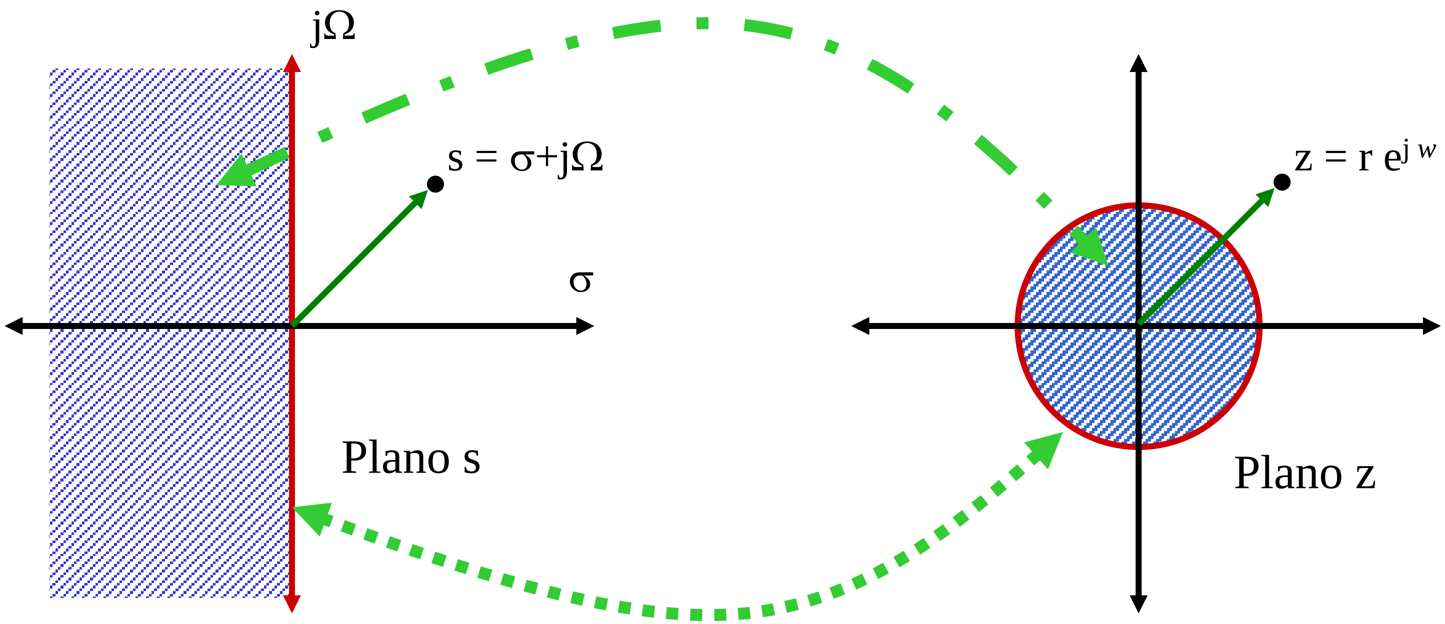
■Procedimiento de Conversión…

- La **técnica de conversión es efectiva** si:
  - El semiplano izquierdo del plano s se corresponde con el interior de la circunferencia en el plano z.



  - Garantiza la estabilidad del filtro digital obtenido!!

- La **técnica de conversión es efectiva** si:



humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Procedimiento de Conversión…

- Los filtros IIR estables y físicamente realizables, no pueden tener fase lineal, puesto que la condición de fase lineal establece que:

$$H(z) = \pm z^{-N} H(z^{-1})$$

lo que implica que por cada polo dentro de la circunferencia haya un polo especular por fuera.

- Prescindiendo de la restricción de realizabilidad física, computacionalmente es posible, en principio, obtener un filtro IIR de fase lineal.
  - Este método presenta un costo de cómputo alto.
  - No proporciona ventajas sobre los filtros FIR de fase lineal.

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Filtros IIR : A partir de Filtros Analógicos

Observaciones

- En el ... R se ... icas del filtro s ... e ac ... de $\varphi(w)$ obtenid
  - H(w ... o ca ... y no se pue ... pend
  - Da ... al), ... aria) se det ... *tran* ... *eta*.

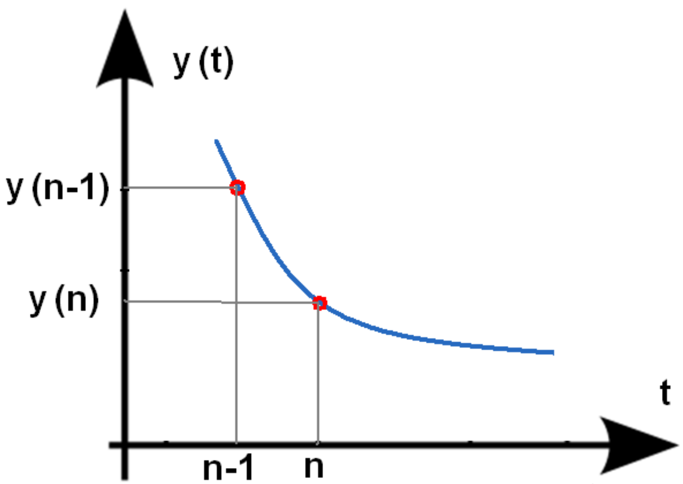
humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Procedimiento

- Busca aproximar la ecuación diferencial por una ecuación en diferencias equivalente.

- La derivada en el tiempo $t = nT$, se sustituye por la *diferencia hacia atrás*:



$$\left.\frac{\partial y(t)}{\partial t}\right|_{t=nT} = \frac{y(nT) - y(nT-T)}{T} = \frac{y(n) - y(n-1)}{T}$$

Filtros IIR :Aproximación de Derivadas

- **Procedimiento…**
  - La parte analógica es un derivador:

$$y(t) \longrightarrow \boxed{H(s) = s} \longrightarrow \frac{\partial y(t)}{\partial t}$$

  - La parte discreta es un diferenciador:

$$y(n) \longrightarrow \boxed{H(z) = \frac{1 - z^{-1}}{T}} \longrightarrow \frac{y(n) - y(n-1)}{T}$$

  - Por lo tanto, la transformación queda determinada por:

$$\boldsymbol{s = \frac{1 - z^{-1}}{T}}$$

- **Procedimiento…**
  - Se deduce que para la k-ésima derivada de $y(t)$ resulta la relación:

$$s^k = \left(\frac{1-z^{-1}}{T}\right)^k$$

  - Para el filtro analógico con función de transferencia $H_a(s)$ caracterizado por la ecuación diferencial,

$$\sum_{k=0}^{N} \alpha_k \frac{\partial^k y(t)}{\partial t^k} = \sum_{k=0}^{M} \beta_k \frac{\partial^k x(t)}{\partial t^k}$$

La función H(z) del filtro IIR digital se obtiene al aplicar,

$$H(z) = H_a(s)\Big|_{s=\left(1-z^{-1}\right)/T}$$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Correspondencia plano *s* ↔ plano *z*

- La relación entre s y z obtenida anteriormente puede reescribirse como,

$$z = \frac{1}{1 - sT}$$

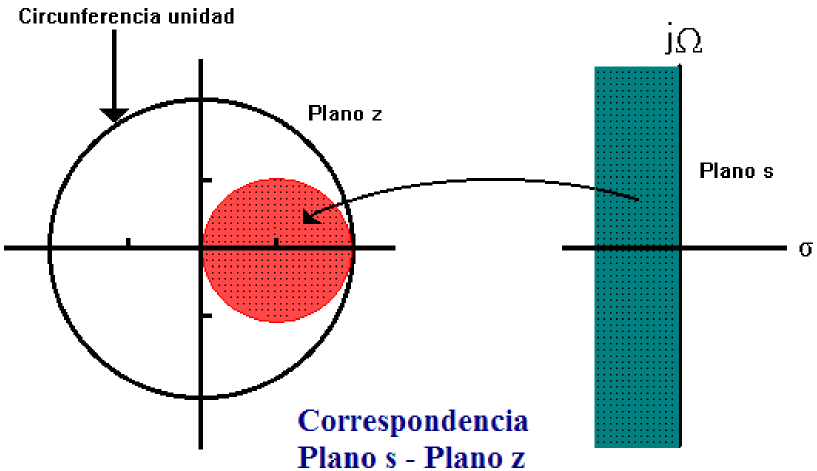
con s = jΩ se obtiene:

$$z = \frac{1}{1 + \Omega^2 T^2} + j\frac{\Omega T}{1 + \Omega^2 T^2}$$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

■Correspondencia plano *s* ↔ plano *z*….

- Cuando Ω varía desde −∞ hasta +∞,
  - z varía dentro de un círculo de radio ½ con centro en ½.



- Correspondencia estable y restringida a filtros paso-bajo y paso-banda con frecuencias resonantes relativamente pequeñas.
  - No es posible convertir un paso-alto analógico en uno paso-alto digital.

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Ejemplo

- Convierta el filtro paso-banda analógico con función de transferencia,

$$H_a(s) = \frac{1}{(s+0.1)^2 + 9}$$

a un filtro IIR digital usando la técnica de Aproximación de Derivadas.

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Filtros IIR: Aproximación de Derivadas

Solución

- Utilizando la sustitución $s^k = \left(\frac{1-z^{-1}}{T}\right)^k$ en $H(s)$ se obtiene,

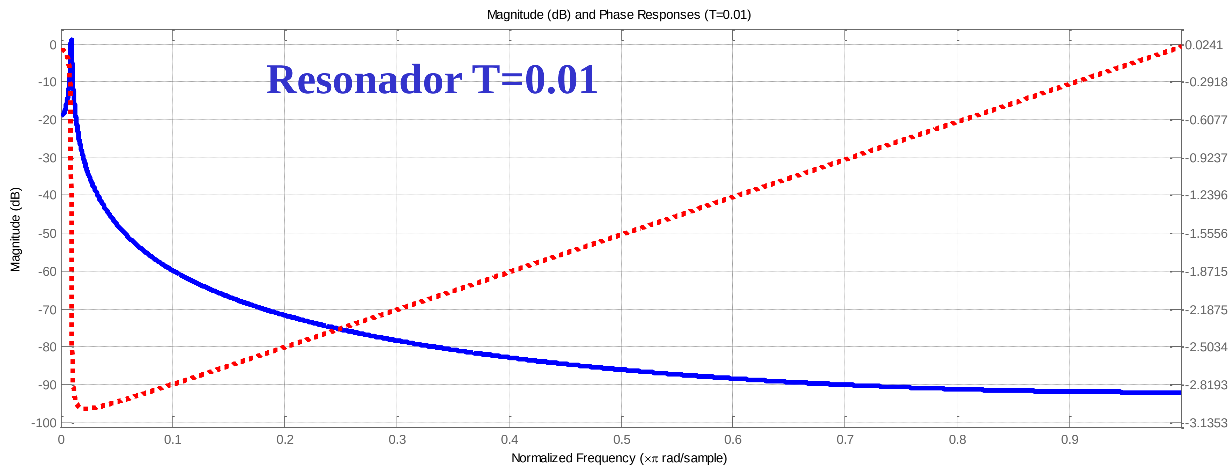
$$H(z) = \frac{1}{\left(\frac{1-z^{-1}}{T}+0.1\right)^2+9} = \frac{T^2/\left(1+0.2T+9.01T^2\right)}{1-\frac{2(1+0.1T)}{1+0.2T+9.01T^2}z^{-1}+\frac{1}{1+0.2T+9.01T^2}z^{-2}}$$

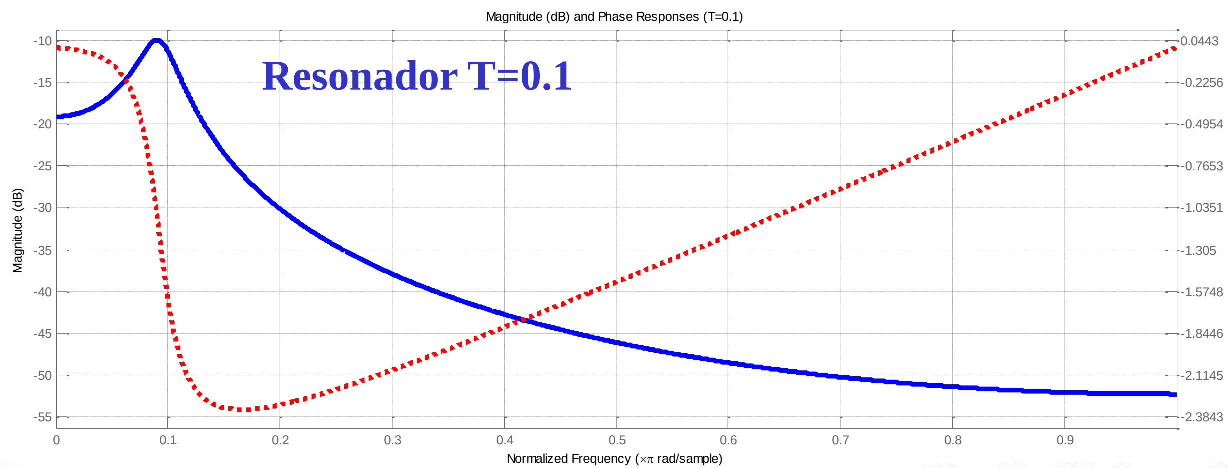
- $H(z)$ tiene forma de un *resonador* si T se selecciona suficientemente pequeño (T ≤ 0.1) → polos estén cerca de la circunferencia unidad.
  - Si $T = 0.1$, los polos son: $z_{p_{1,2}} = 0.91 \pm j0.27 = 0.95e^{\pm j16.54º}$
  - Si $T = 0.01$, los polos son: $z_{p_{1,2}} = 0.99 \pm j0.03 = 0.99e^{\pm j1.72º}$

Filtros IIR: Aproximación de Derivadas

■ Solución …

```
T= 0.01; T2=(T^2);
D=(1+0.2*T+9.01*T2);
%Polinomio Numerador
b0= T2/D ; b1=0;  b2=0;
b= [b0  b1  b2];
%Polinomio Denominador
a0=1;  a1=-2*(1+0.1*T)/D;  a2=1/D;
a=[a0  a1  a2];
%Polos
AngPolos=angle(roots(a))*180/pi
MagPolos=abs(roots(a))
%Graficación
fvtool(b,a)
```

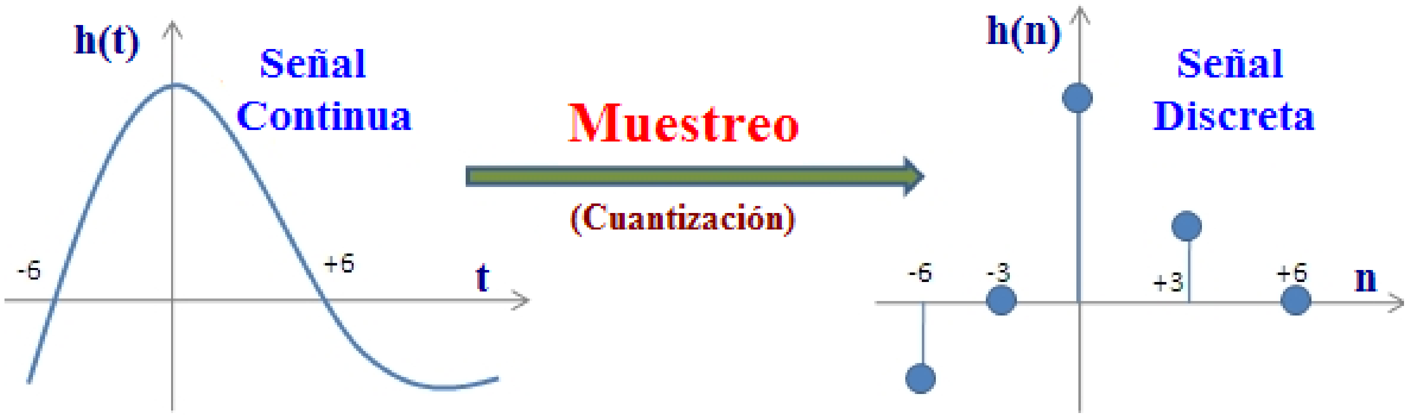




PSI Percepción y Sistemas Inteligentes

■Introducción

- Consiste en diseñar un filtro IIR digital con un $h(n)$ que sea la versión muestreada de $h_a(t)$ del filtro analógico.



- Es decir, $h(n) = h_a(t = nT)$ donde T es el periodo de muestreo.

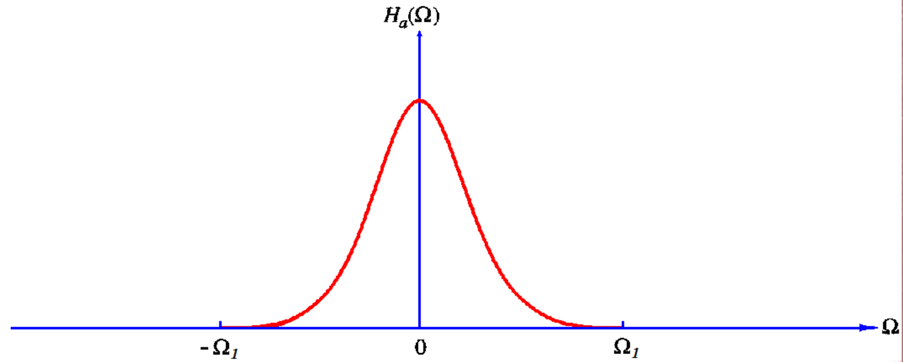
Introducción

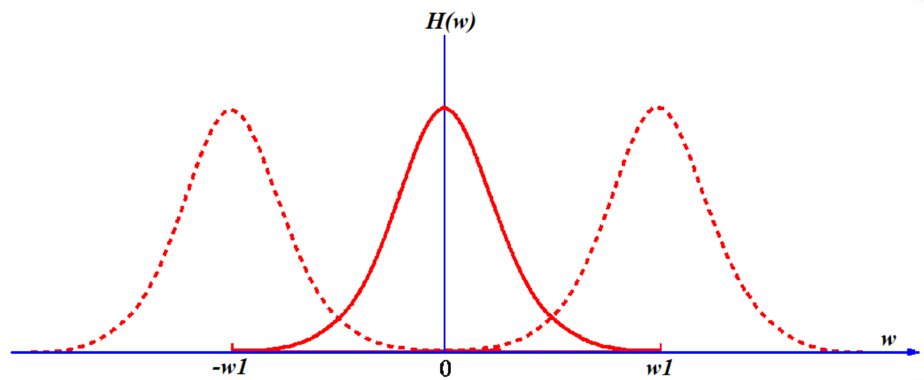
- Cuando una señal análoga $h_a(t)$ con espectro $H_a(F)$ se muestrea a $F_s = 1/T$:

  El espectro de la señal muestreada $h(n) = h_a(nT)$ es la repetición del espectro escalado $F_s H_a(F)$ y con periodo F_s:

$$H(w) = F_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_a[(w - 2\pi k)F_s] \quad ó$$

$$H(\Omega T) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_a\left(\Omega - \frac{2\pi k}{T}\right) \quad con \;\; \Omega = \frac{w}{T}$$





Percepción y Sistemas Inteligentes

Introducción…

- $H(w)$ tendrá las características de respuesta en frecuencia del correspondiente filtro analógico si T es suficientemente pequeño para evitar al máximo el aliasing.
  - El aliasing ocurre si F_s es menor que dos veces la frecuencia más alta contenida en $X_a(F)$.
- Método inapropiado para el diseño de filtros paso-alto, por el traslape de las bandas en alta frecuencia.

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Correspondencia plano *s* y plano *z*

- La correspondencia entre los planos s y z que *genera el proceso de muestreado* se obtiene a partir de la generalización de la relación entre la transformada z de $h(n)$ y la transformada de Laplace de $h_a(t)$, dada por:

$$H(z)\Big|_{z=e^{sT}} = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} H_a\left(s - j\frac{2\pi k}{T}\right) \qquad donde:$$

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n) z^{-n} \qquad y \qquad H(z)\Big|_{z=e^{sT}} = \sum_{n=0}^{\infty} h(n) e^{-sTn}$$

- Es decir, $\boldsymbol{z = e^{sT}}$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Diseño de Filtros IIR mediante Invarianza Impulsional

■ Correspondencia plano *s* ↔ plano *z*

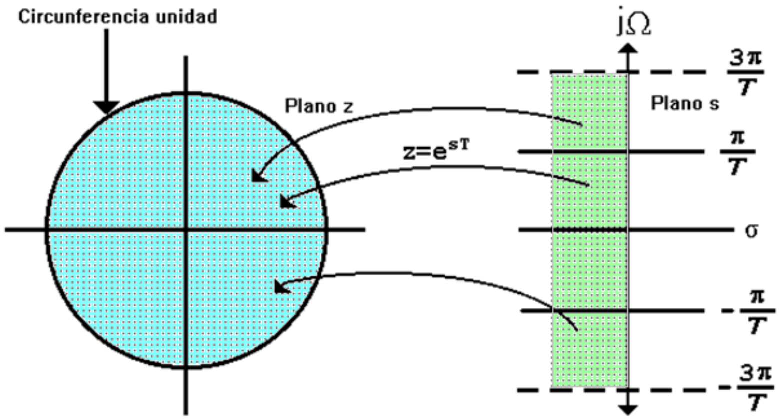
- Al sustituir $s = \sigma + j\Omega$ y $z = re^{jw}$ en $z = e^{sT}$ llega a:

$$re^{jw} = e^{\sigma T} e^{j\Omega T} \quad \text{donde} \quad r = e^{\sigma T} \quad \text{y} \quad w = \Omega T$$

- Para $\sigma < 0$ se tiene $0 < r < 1$
  - Semiplano izquierdo de s $\Rightarrow$ interior de la circunferencia unidad en el plano z.
- Para $\sigma > 0$ se tiene $r > 1$.
  - Semiplano derecho de s $\Rightarrow$ exterior de la circunferencia unidad en el plano z.
- Cuando $\sigma = 0$ se tiene $r = 1$.
  - Eje j $\Omega \Rightarrow$ circunferencia unidad en el plano z.

Correspondencia plano *s* ↔ plano *z*…

- La correspondencia del eje j Ω con el círculo unitario no es uno a uno.



- Al intervalo $-\pi \leq w \leq \pi$ le corresponde $(2k-1)\,\pi/T \leq \Omega \leq (2k+1)\,\pi/T$ cuando k es un entero..
- La correspondencia entre frecuencias Ω y *w* no es inyectiva, lo que refleja el efecto de aliasing debido al muestreo.

Método de Diseño

- De la expresión $z = e^{ST}$ se obtiene $s = (Ln\, z)/T$ la cual no es muy conveniente para obtener la función H(z).
- Considerando el caso en que todos los polos son distintos, por expansión en facciones parciales:

$$H_a(s) = \sum_{k=1}^{N} \frac{c_k}{s - p_k}$$

- Al aplicar la transformar inversa de Laplace, se llega a:

$$h_a(t) = \sum_{k=1}^{N} c_k e^{p_k t}, \quad t \geq 0$$

■Método de Diseño

- Al muestrear $h_a(t)$ periódicamente en $t = nT$, se llega a:

$$h(n) = h_a(nT) = \sum_{k=1}^{N} c_k e^{p_k T n}, \quad n = 0,1,2,....$$

- Aplicando Transformada z,

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n) z^{-n} = \sum_{k=1}^{N} c_k \sum_{n=0}^{\infty} \left(e^{p_k T} z^{-1}\right)^n$$

- Si $p_k < 0$, la sumatoria interna converge a,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(e^{p_k T} z^{-1}\right)^n = \frac{1}{1 - e^{p_k T} z^{-1}}$$

Método de diseño…

- Por lo tanto, el filtro digital es:

$$H(z)=\sum_{k=1}^{N}\frac{c_k}{1-e^{p_k T}z^{-1}}$$

- **Observaciones:**
  - Los polos del filtro digital se localizan en $z_k = e^{p_k T}$, k = 1,2,…,N y se corresponden con los polos del plano s.
  - Los ceros del filtro no satisfacen esta relación.
  - El método no se define mediante la simple correspondencia de puntos dado por $z = e^{sT}$.

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

■Ejemplo

- Convierta el filtro analógico dado, en un filtro IIR digital por el método de Invarianza Impulsional.

$$H_a(s) = \frac{s+0.1}{(s+0.1)^2+9}$$

■Solución

- El filtro $H_a(s)$ tiene un cero en s = -0.1 y polos conjugados en $p_k = -0.1 \pm j3$.

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Solución…

- H(z) se determina directamente a partir de la expansión en fracciones parciales de $H_a(s)$:

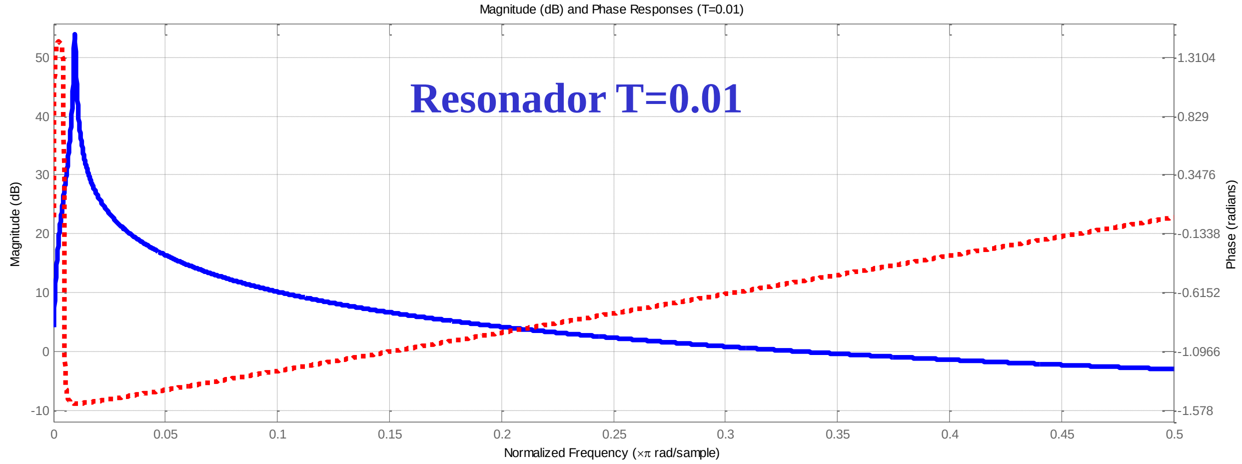
$$H_a(s) = \frac{1/2}{s + 0.1 - j3} + \frac{1/2}{s + 0.1 + j3}$$

- Sustituyendo polos:

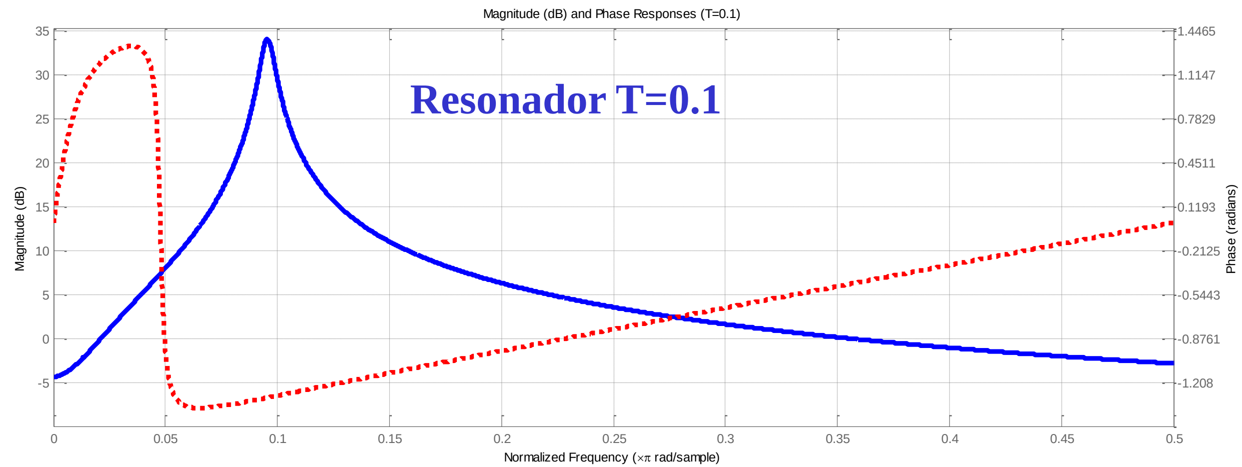
$$H(z) = \frac{1/2}{1 - e^{-0.1T} e^{j3T} z^{-1}} + \frac{1/2}{1 - e^{-0.1T} e^{-j3T} z^{-1}} = \frac{1 - \left(e^{-0.1T} \cos 3T\right) z^{-1}}{1 - \left(2e^{-0.1T} \cos 3T\right) z^{-1} + e^{-0.2T} z^{-2}}$$

Diseño de Filtros IIR mediante Invarianza Impulsional

■Solución…




```
T= 0.01; D= exp(-0.1*T )* cos(3*T);
%Polinomio Numerador
b0= 1 ; b1=-D;  b2=0;
b= [b0  b1  b2];
%Polinomio Denominador
a0=1;  a1=-2*D;  a2=exp(-0.2*T);
a=[a0  a1  a2];
%Polos
polos=roots(a)
AngPolos=angle(polos)*180/pi
MagPolos=abs(polos)
%freqz(b,a)
fvtool(b,a)
```



Solución…

- $H(z)$ tiene forma de un *resonador* si T se selecciona suficientemente pequeño (T ≤ 0.1) → polos estén cerca de la circunferencia unidad.
  - Si $T = 0.1$, los polos son: $z_{p_{1,2}} = 0.95 \pm j0.29 = 0.99e^{\pm j17.19º}$
  - Si $T = 0.01$, los polos son: $z_{p_{1,2}} = 0.99 \pm j0.03 = 0.99e^{\pm j1.72º}$

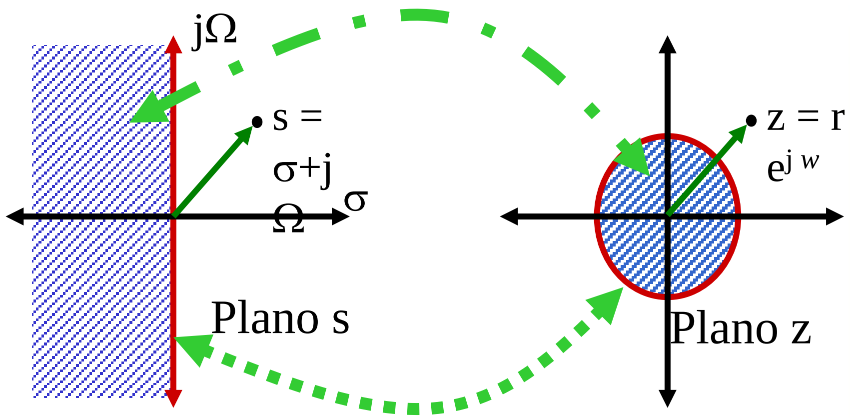
Observaciones

- Valores pequeños de T minimizan el efecto de aliasing.
- Debido al aliasing, el método de invarianza impulsional es apropiado para el diseño de filtros paso-bajo y paso-banda.

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Introducción

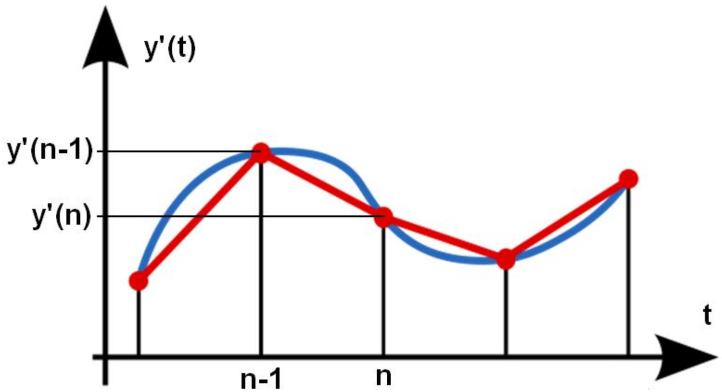
- Transforma el eje $j\Omega$ en la circunferencia unidad sin solapamientos de frecuencias.
- Semiplano izquierdo $\rightarrow$ interior de la circunferencia unidad.
- Semiplano derecho $\rightarrow$ exterior de la circunferencia unidad.
- La transformación bilineal permite diseñar todo tipo de filtros.



humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Deducción

- La transformación bilineal se puede ligar a la fórmula trapezoidal.
- Al integrar una derivada y aproximarla por la fórmula trapezoidal se obtiene,



$$y(t) = \int_{t_0}^{t} y'(\tau)\partial\tau + y(t_0) \quad \Leftrightarrow$$

$$y(nT) = \frac{T}{2}\left[y'(nT) + y'(nT - T) \right] + y(nT - T)$$

Deducción…

- **Caso de estudio:** filtro lineal analógico,

$$H(s)=\frac{b}{s+a} \quad \Leftrightarrow \quad y'(t)+ay(t)=bx(t)$$

- Sustituyendo la expresión de la derivada en la función del filtro y evaluando en $t = nT \equiv n$, se produce,

$$\left(1+\frac{aT}{2}\right)y(n)+\left(1-\frac{aT}{2}\right)y(n-1)=\frac{bT}{2}\left[x(n)+x(n-1)\right]$$

cuya transformada z es:,

$$\left(1+\frac{aT}{2}\right)Y(z)+\left(1-\frac{aT}{2}\right)z^{-1}Y(z)=\frac{bT}{2}\left[1+z^{-1}\right]X(z)$$

Deducción…

- De donde la función de transferencia del filtro discreto es,

$$H(z)=\frac{b}{\frac{2}{T}\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)+a}$$

- Y al compararla con la del filtro analógico,

$$H(s)=\frac{b}{s+a}$$

- Se deduce la correspondencia denominada **transformación bilineal:**

$$s=\frac{2}{T}\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)$$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Correspondencia plano s ↔ plano z

- Con $z = re^{jw}$ y $s = \sigma + j\Omega$ la transformación bilineal puede escribirse como:

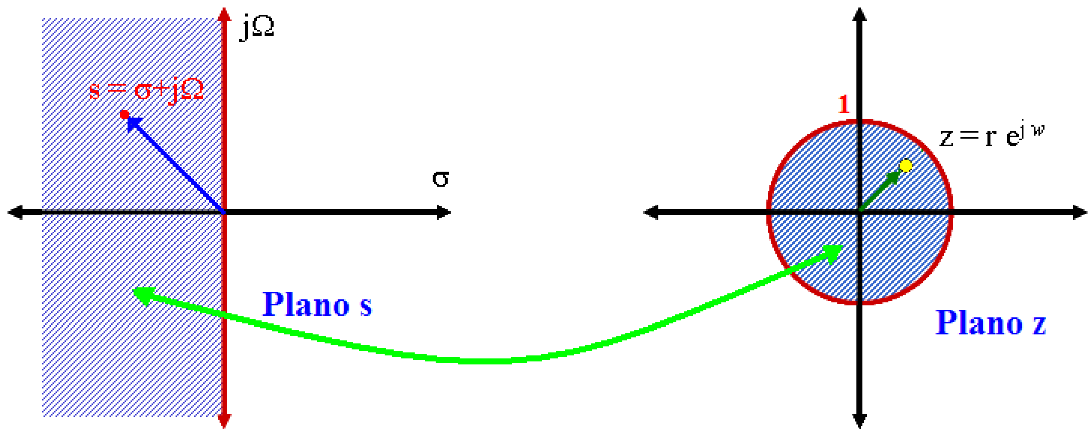
$$s = \frac{2}{T}\left(\frac{z-1}{z+1}\right) = \frac{2}{T}\left(\frac{r^2-1}{1+r^2+2r\cos w} + j\frac{2r\,sen\,w}{1+r^2+2r\cos w}\right)$$

- De donde :

$$\sigma = \frac{2}{T}\left(\frac{r^2-1}{1+r^2+2r\cos w}\right)$$

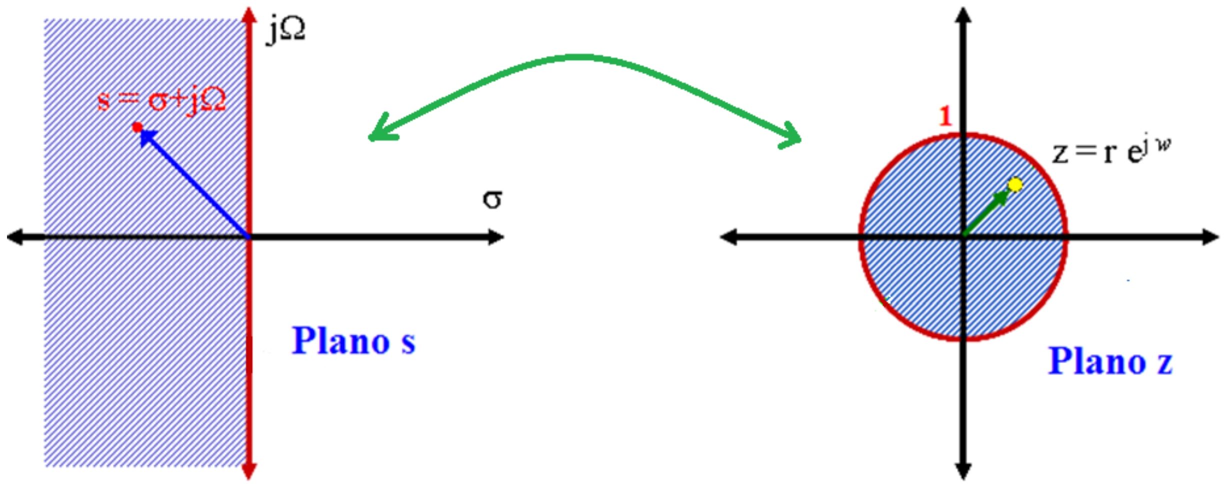
$$\Omega = \frac{2}{T}\left(\frac{2r\,sen\,w}{1+r^2+2r\cos w}\right)$$

- **Correspondencia planos s ↔ z …**
  - $r < 1 \Rightarrow \sigma < 0$
    - semiplano izquierdo en s se corresponde con el interior de la circunferencia unitaria en z.



Correspondencia plano s $\leftrightarrow$ plano z…

- $r > 1 \Rightarrow \sigma > 0$
  - semiplano derecho en s se corresponde con el exterior de la circunferencia unitaria en z.



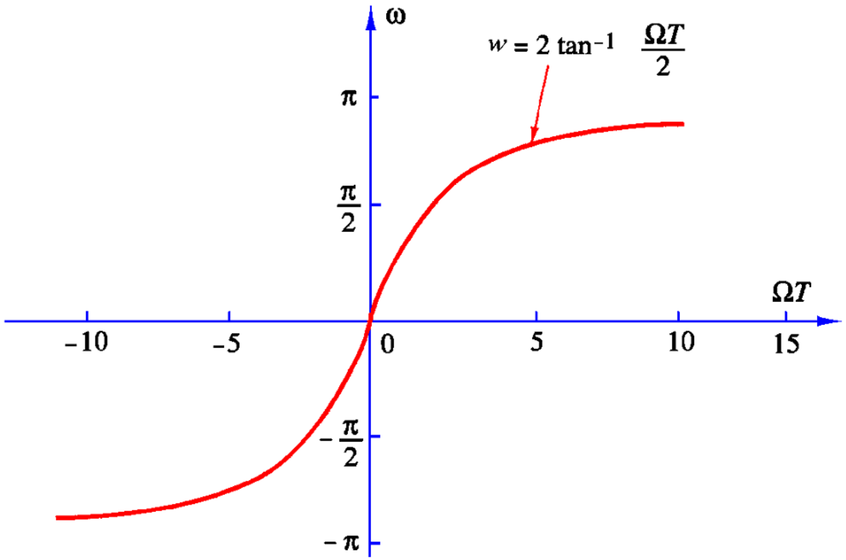
Filtros IIR: Transformación Bilineal

■ Correspondencia plano s ↔ z…

- ■ r = 1 ⇒ σ = 0: se tiene,

$$\Omega = \frac{2}{T}\tan\frac{w}{2}$$

$$w = 2\tan^{-1}\frac{\Omega T}{2}$$



Relación entre las variables de frecuencia en los dos dominios.

Correspondencia plano s $\leftrightarrow$ plano z…

- El rango de $-\infty \leq \Omega \leq \infty$ se corresponde unívocamente con el rango $-\pi \leq w \leq \pi$
  - Correspondencia no lineal $\Rightarrow$ compresión o *deformación de frecuencia.*
  - El punto $s = \infty$ corresponde con el punto $z = -1$
    - Un filtro analógico con un cero en $s = \infty$ resulta en un filtro digital con un cero en $z = -1$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

- **Ejemplo 1.** Convertir el filtro analógico dado en un filtro IIR digital por medio de la transformación bilineal.

  - El filtro digital debe presentar una frecuencia resonante $w_r = \pi/2$, que coincida con $\Omega_r = 4$.

$$H_a(s) = \frac{s+0.1}{(s+0.1)^2+16}$$

- **Solución**

  - De la relación entre frecuencias, se obtiene T.

$$\Omega_r = \frac{2}{T}\tan\frac{w_r}{2} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{1}{2}$$

Solución…

- Reemplazando el valor de T en la transformación bilineal se obtiene la correspondencia deseada,

$$s = \frac{2}{T}\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right) \quad \Rightarrow \quad s = 4\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)$$

- El filtro digital resultante tiene la función de transferencia,

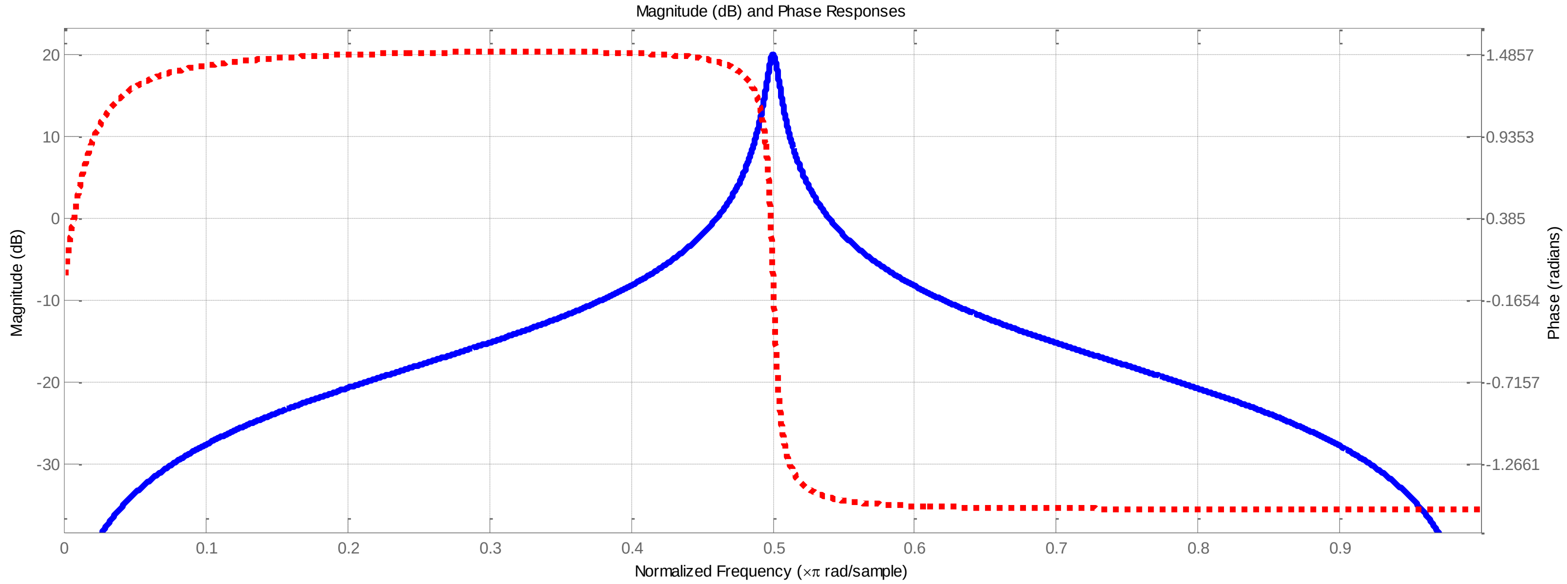
$$H(z) = \frac{0.128 + 0.006z^{-1} - 0.122z^{-2}}{1 + 0.0006z^{-1} + 0.975z^{-2}}$$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Filtros IIR: Transformación Bilineal

Solución…

- Los polos son: $z_{p_{1,2}} = 0.0003 \pm j0.87 = 0.987e^{\pm j90.02º}$



humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Ejemplo 2.

- Usando la transformación bilineal, diseñe un filtro digital paso bajo de un polo simple con ancho de banda de 3 dB en $w_c = 0.2\ \pi$.

$$H_a(s) = \frac{\Omega_c}{s + \Omega_c}$$

donde Ω_c es el ancho de banda de 3 dB del filtro analógico.

Solución

- En el dominio frecuencial, $w_c = 0.2\ \pi$ se corresponde con,

$$\Omega_c = \frac{2}{T}\tan(0.1\pi) = \frac{0.65}{T}$$

Solución…

- Por lo que el filtro tiene la función de transferencia,

$$H(s)=\frac{0.65/T}{s+0.65/T}$$

- Aplicando la transformación bilineal, se obtiene el filtro digital,

$$H(z)=\frac{0.245\left(1+z^{-1}\right)}{1-0.509z^{-1}}$$

- Verificando, la respuesta en frecuencia:

$$H(w)=\frac{0.245\left(1+e^{-jw}\right)}{1-0.509e^{-jw}} \quad \Rightarrow \quad H(w=0)=1, \quad H(w=0.2\pi)=0.707$$

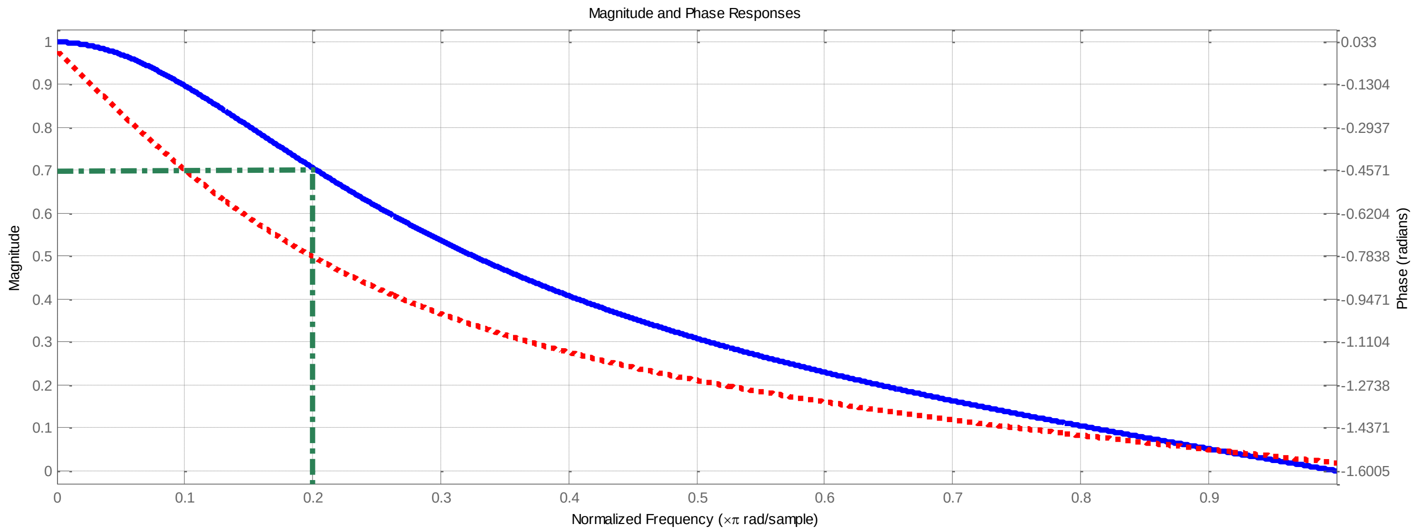
humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Filtros IIR: Transformación Bilineal

■Solución…

- Verificando, la respuesta en frecuencia:

$$H(w)=\frac{0.245\left(1+e^{-jw}\right)}{1-0.509e^{-jw}} \quad \Rightarrow \quad H(w=0)=1,\quad H(w=0.2\pi)=0.707$$



Introducción

- Método que hace corresponder los polos y los ceros de $H_a(s)$ directamente con polos y ceros en el plano z.

- La transformación hace corresponder a cada factor $(s - a)$ el factor $(1 - e^{aT} z^{-1})$, es decir,

$$(s-a) \Leftrightarrow \left(1-e^{aT}z^{-1}\right)$$

Introducción …

- Por consiguiente, para un filtro analógico con función de transferencia expresada en factores,

$$H_a(s) = \frac{\prod_{k=1}^{M}(s - z_k)}{\prod_{k=1}^{N}(s - p_k)}$$

- la función de transferencia del filtro digital es,

$$H(z) = \frac{\prod_{k=1}^{M}\left(1 - e^{a_k T} z^{-1}\right)}{\prod_{k=1}^{N}\left(1 - e^{p_k T} z^{-1}\right)}$$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Diseño de Filtros IIR: Transformación z Adaptada

■ Introducción …

- la función de transferencia para el filtro digital es,

$$H(z) = \frac{\prod_{k=1}^{M}\left(1 - e^{a_k T} z^{-1}\right)_{c}}{\prod_{k=1}^{N}\left(1 - e^{p_k T} z^{-1}\right)}$$

■ Observación

- Los polos obtenidos son idénticos a los polos obtenidos con el método de invarianza impulsional; los ceros son diferentes.
- T debe escogerse bastante pequeño para producir polos y ceros en posiciones equivalentes en el plano z (el aliasing debe evitarse).

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

- **Observaciones Generales**
  - En las transformaciones de filtros el parámetro *T* puede asignársele cualquier valor si las especificaciones del filtro analógico se calculan a partir de las especificaciones en el dominio digital.
    - En este caso, T se cancela en la conversión del filtro analógico a digital.
  - La fase de los filtros analógicos generalmente se distorsionan cuando se aplican las transformaciones del dominio analógico al dominio discreto.
    - Ej: Los filtros Bessel analógicos tienen fase lineal pero el filtro discreto transformado no conserva esta linealidad en la fase.

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Introducción

- Algunas de las técnicas vistas para el diseño de filtros IIR implicaban la **conversión** de un filtro **analógico** en **digital** mediante alguna **correspondencia** del plano **s** al plano **z**.

- Los métodos de **mínimos cuadrados** permiten **diseñar** los filtros digitales directamente en los dominios **temporal y frecuencial**.

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Aproximación de Padé

- El filtro que se va a diseñar presenta la función de transferencia,

$$H(z)=\frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1+\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}=\sum_{k=0}^{\infty} h(k)\, z^{-k}$$

donde $h(n)$ es la respuesta impulsional del filtro.

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Aproximación de Padé…

- **Criterio de error:** Minimizar la suma ε de los errores al cuadrado entre la respuesta impulsional del filtro $h(n)$ y la respuesta deseada $h_d(n)$.

$$\varepsilon = \sum_{n=0}^{U} \left[h_d(n) - h(n)\right]^2$$

- El filtro posee $L = M + N + 1$ parámetros: los coeficientes $\{a_k\}$ y $\{b_k\}$
- Los coeficientes se seleccionan para satisfacer el criterio de optimización del error.

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Aproximación de Padé…

- En general $h(n)$ es una función ***no lineal*** de los parámetros del filtro.
  - La solución involucra ecuaciones ***no lineales*** para minimizar ε.
- Si se selecciona el límite superior como $U = L - 1$, es posible ajustar $h(n)$ perfectamente a $h_d(n)$ para $0 \leq n \leq M + N$.
- La ecuación en diferencias para el filtro deseado es,

$$\begin{aligned} y(n) = &-a_1 y(n-1) - a_2 y(n-2) - \ldots. - a_N y(n-N) \\ &+ b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + \ldots.. + b_M x(n-M) \end{aligned}$$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Aproximación de Padé…

- Con una entrada $x(n) = \delta(n)$ la respuesta del filtro es $y(n) = h(n)$, por lo que:

$$h(n) = -a_1 h(n-1) - a_2 h(n-2) - \dots - a_N h(n-N) + b_0\delta(n) + b_1\delta(n-1) + \dots + b_M\delta(n-M)$$

- *como* $\delta(n-k) = 0$ excepto para $k = n$ $(0 \le n \le M)$, la expresión anterior se reduce a:

$$h(n) = -a_1 h(n-1) - a_2 h(n-2) - \dots - a_N h(n-N) + b_n \qquad 0 \le n \le M \qquad [ec.1]$$

- y para n > M se obtiene:

$$h(n) = -a_1 h(n-1) - a_2 h(n-2) - \dots - a_N h(n-N) \qquad n > M \qquad [ec.2]$$

Aproximación de Padé…

Procedimiento

Usando el conjunto de ecuaciones lineales [ec.1] y [ec.2] se puede hacer que $h(n) = h_d(n)$ para $0 \leq n \leq M+N$.

- **Paso 1:** Encontrar $\{a_k\}$ haciendo $h(n) = h_d(n)$ en [ec. 2] $(M < n \leq M+N)$
- **Paso 2:** Con los $\{a_k\}$ encontrados, determinar $\{b_k\}$ a partir de [ec. 1] $(0 \leq n \leq M)$

Aproximación de Padé…

Observaciones

El grado con que la técnica de Padé produce filtros aceptables depende del número de coeficientes del filtro seleccionado.

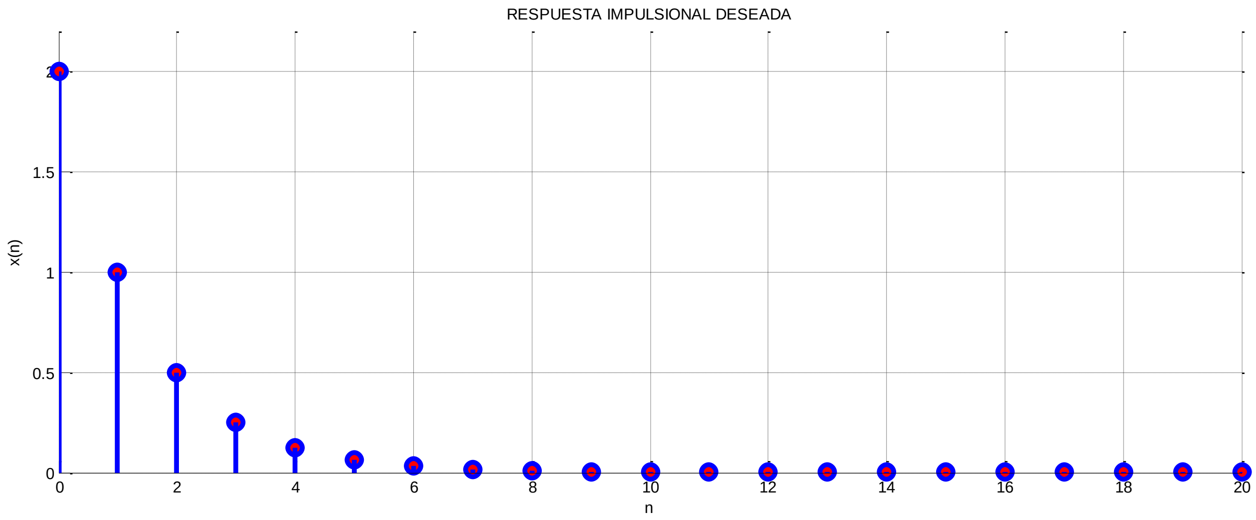
- $h_d(n)$ sólo se ajusta hasta el número de parámetros del filtro.
- Cuanto más complejo el filtro, mejor será la aproximación.
- Para mejorar la aproximación, el filtro debe poseer un gran número de polos y ceros.
- La técnica requiere ensayar varios valores de M y N para obtener un filtro que converja a la respuesta deseada.

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Ejemplo

- Use el método de aproximación de Padé para diseñar un filtro si se sabe que la respuesta impulsional deseada es:

$$h_d(n) = \{\underline{2}, 1, 1/2, 1/4, 1/8, 1/16, 1/32, 1/64, 1/128, \ldots\}$$



Solución

- Suponiendo $N = 1$ y $M = 1$, la función de Transferencia es:

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}}$$

- Con $\delta(n)$ como entrada a $H(z)$, se obtiene la salida $y(n) = h(n)$

$$h(n) = -a_1 h(n-1) + b_0 \delta(n) + b_1 \delta(n-1)$$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Diseño de filtros IIR: Métodos de Mínimos Cuadrados

Solución…

- **Paso 1**: Para **n > M**,

$$n = 2 \;\Rightarrow\; h(2) = -a_1 h(1)$$

$$\text{con} \quad h_d(2) = 1/2, \;\; h_d(1) = 1 \;\;\Rightarrow\;\; a_1 = -1/2$$

- **Paso 2**: Para **0 ≤ n ≤ M**

$$n = 0 \;\Rightarrow\; h(0) = (1/2)h(-1) + b_0$$

$$\text{con} \quad h_d(0) = 2, \;\; h_d(-1) = 0 \;\;\Rightarrow\;\; b_0 = 2$$

$$n = 1 \;\Rightarrow\; h(1) = (1/2)\; h(0) + b_1$$

$$\text{con} \quad h_d(0) = 2, \;\; h_d(\;\;1) = 1 \;\;\Rightarrow\;\; b_1 = 0$$

Solución…

- El filtro resultante es: $$H(z)=\frac{2}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$
- Su respuesta impulsional es:

$$h(n)=2\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u(n) \qquad h(n)=\frac{1}{2}h(n-1)+2\,\delta(n)$$

- **Observación**: La secuencia deseada

$$h_d(n)=\{2,1,1/2,1/4\,,1/8,1/16,1/32,1/64,1/128,\ldots\ \}$$

coincide exactamente con: $h_d(n)=2(1/2)^n u(n)$,

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Observación

- La aproximación de Padé resulta en un **ajuste perfecto** a $H_d(z)$ cuando la función de transferencia deseada es *racional* y se **conocen *a priori*** el número de polos y ceros del sistema.
- Generalmente lo anterior no es el caso, ya que $h_d(n)$ se determina a partir de algunas especificaciones de $H_d(w)$.
  - En estos casos, la aproximación de Padé puede ***NO*** resultar en un buen diseño del filtro.

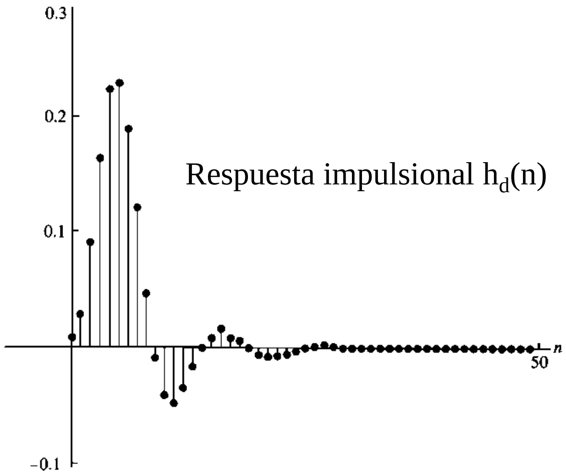
humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

■ Efecto de la selección de los valores de M y N

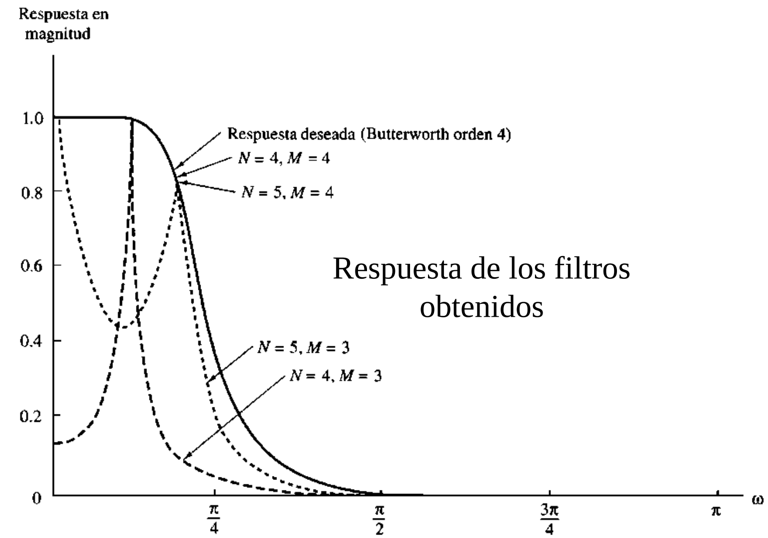
- ► Considerar el filtro Butterworth de cuarto orden dado por,

$$H_d(z)=\frac{4.8334x10^{-3}(z+1)^4}{\left(z^2-1.3205z+0.6326\right)\left(z^2-1.0482z+0.2959\right)}$$

- ► Con respuesta impulsional:



- **Efecto de la selección de los valores de M y N…**
  - Determinar la aproximación de Padé para diferentes valores de de polos (N) y ceros (M).



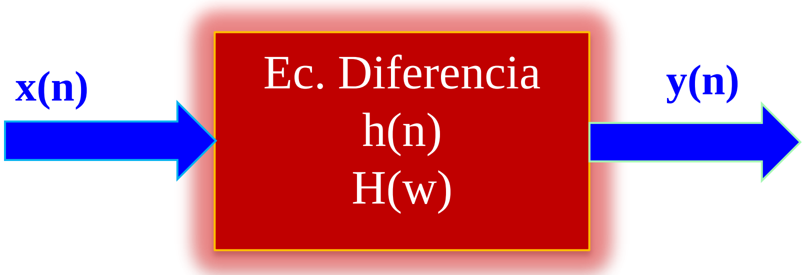
Respuesta de los filtros obtenidos

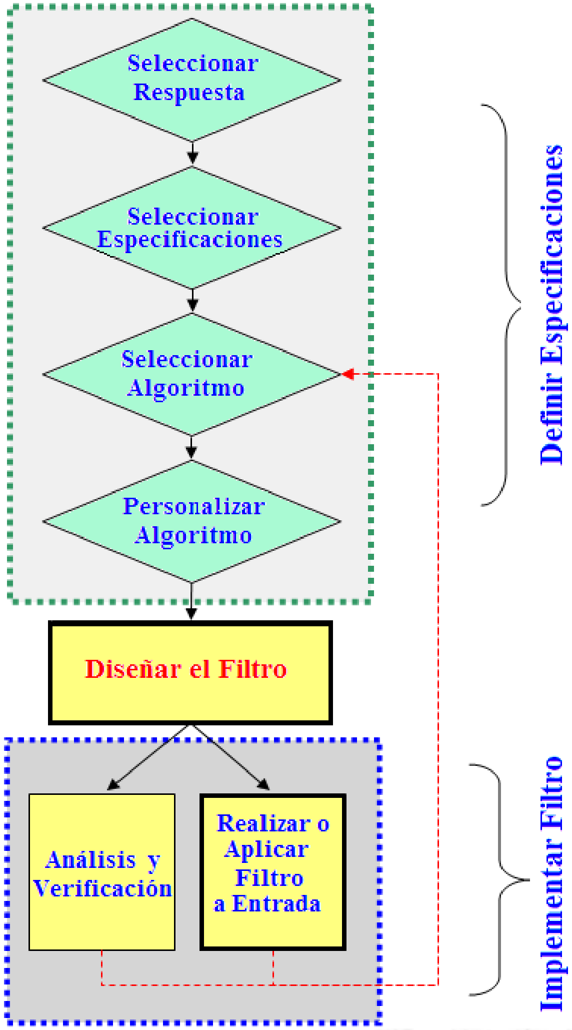
- Para valores de **M y N** menores que 4, la aproximación es pobre.
- Para valores de **M ≥ 4** se obtiene una muy buena aproximación.
- Para valores de **M > 4** se puede obtener un buen resultado incluso para **N < 4**.

Realización de Filtros

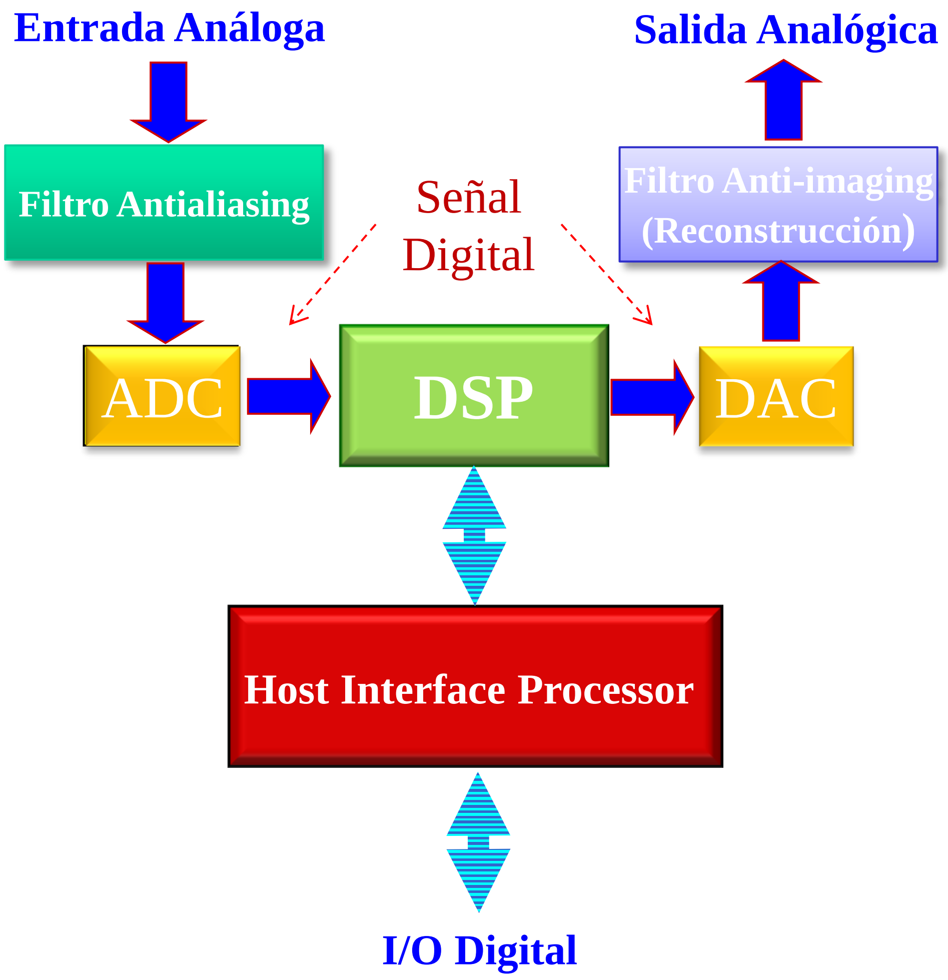
■ Introducción

- La **realización** de filtros corresponde al **cálculo de la salida** del filtro en **respuesta a cualquier entrada**.





■ Introducción…



Introducción…

- En el **Dominio Temporal** la **relación entrada-salida** está dada por la convolución,

$$y(n) = h(n) * x(n) = \sum_{k=N_1}^{N_2} h(k)x(n-k) \qquad [ec.1]$$

donde N_1 y N_2 son los indices de la primera y última muestras diferentes de cero de ***h*(*n*).**

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Introducción…

- En el **Dominio Frecuencial** la convolución corresponde al producto de las transformadas,

$$Y(w) = H(w)\, X(w) \qquad [ec.2]$$

  - Puesto que la **T.F es continua** en *w*, se recurre a la **transformada discreta de Fourier** DFT,

$$Y(w_k) = H(w_k)\, X(w_k) \qquad [ec.3]$$

$$\text{Donde}: \ w_k = (2\pi k / N_{DFT}), \quad k = 0,1,\ldots,N_{DFT}$$

Introducción…

- **Observaciones:**
  - N_{DFT} es el tamaño de la DFT y corresponde al número de muestras en el periodo 2π.
  - $N_{DFT} \geq$ máx{longitud de $x(n)$ + longitud de $h(n)$ -1} para realizar la multiplicación punto a punto.
  - La DFT puede calcularse muy eficientemente usando el algoritmo FFT.

Realización de Filtros FIR

Introducción

- **Dominio Temporal**: el requerimiento de almacenamiento depende sólo de la longitud de $h(n)$.

- **Dominio frecuencial:** la capacidad de almacenamiento varía con el tamaño de la señal de entrada.

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

■ Realización de Filtros FIR

- **Dominio Temporal**:

- **Convolución:**

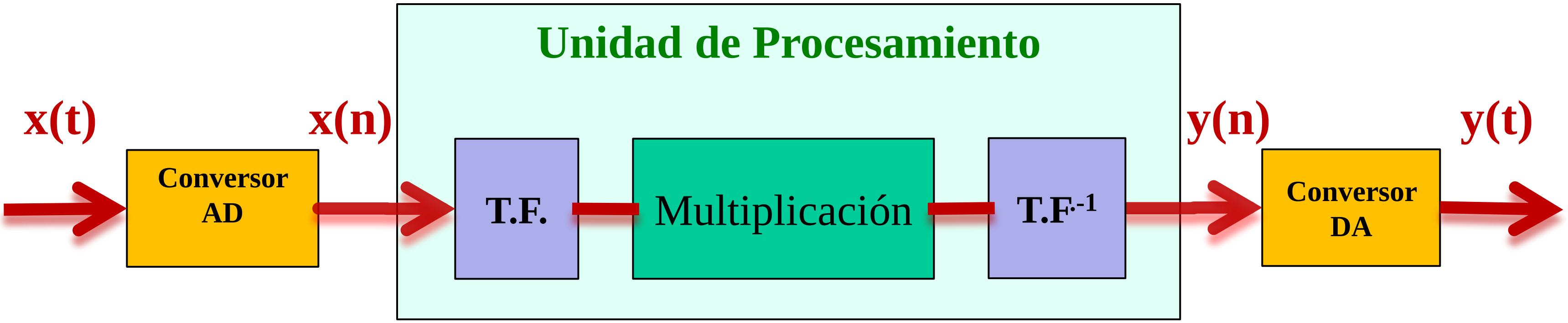
$$y(n) = h(n) * x(n) = \sum_{k=N_1}^{N_2} h(k) x(n-k)$$

- **Ecuaciones de Diferencia:**

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M} b_k \; x(n-k)$$

Realización de Filtros FIR ..

- **Dominio frecuencial**



- **Multiplicación:**

$$Y(w) = H(w)\, X(w)$$

$$Y(w) = e^{-jwN_0} \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k\, e^{-jwk}}{\sum_{k=0}^{N} a_k\, e^{-jwk}}\, X(w)$$

Realización de Filtros IIR

►Introducción

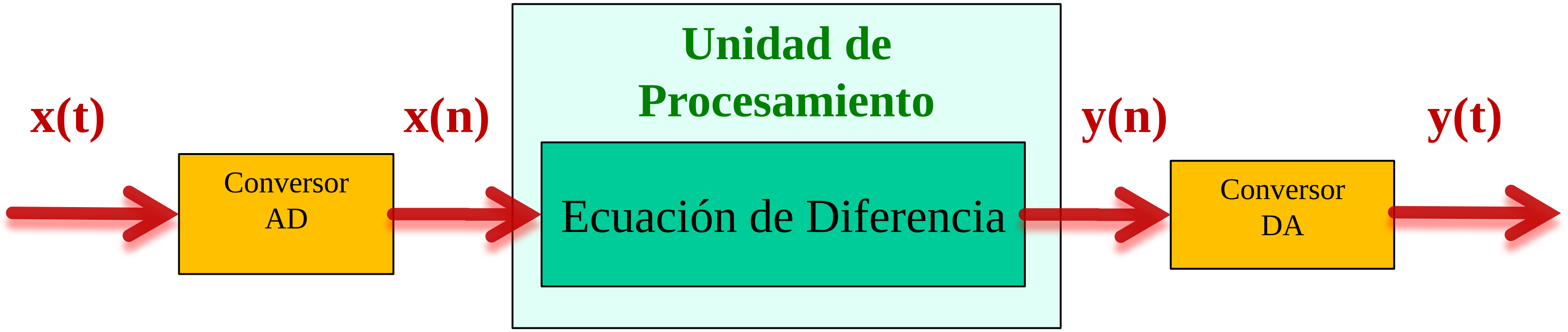
- La **convolución no puede utilizarse** por la longitud de $h(n)$

- Se recurre a la **Transformada de Fourier** o a las **ecuaciones de diferencia**.

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Realización de Filtros IIR ..

▸ **Dominio Temporal:**



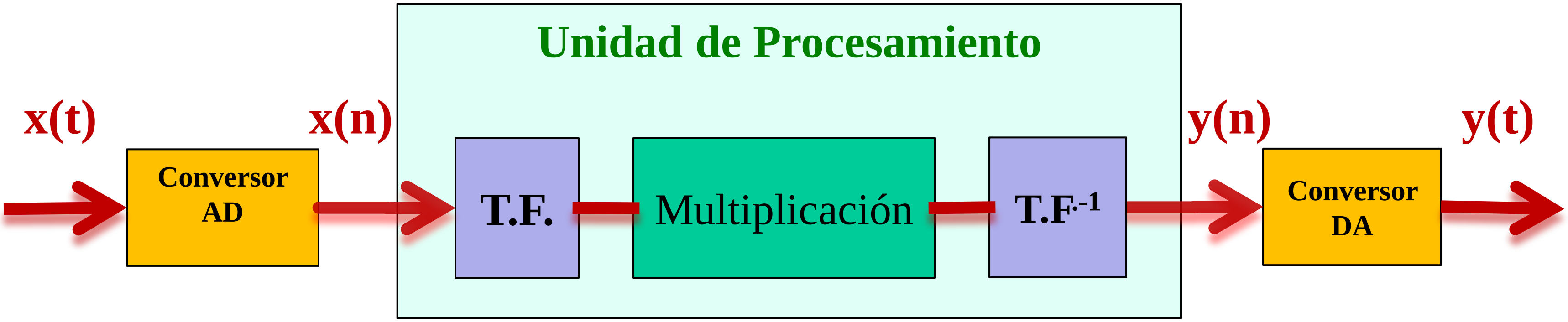
▸ **Ecuaciones de Diferencia:**

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M} \frac{b_k}{a_0}\, x(n-k) - \sum_{k=1}^{N} \frac{a_k}{a_0}\, y(n-k) \quad \text{para } n \geq n_0$$

Requiere N condiciones *iniciales*: $y(n_0 - 1), \ldots, y(n_0 - N)$.

Realización de Filtros IIR ..

- **Dominio frecuencial:**



- **Multiplicación:**

$$Y(w) = H(w)\, X(w)$$

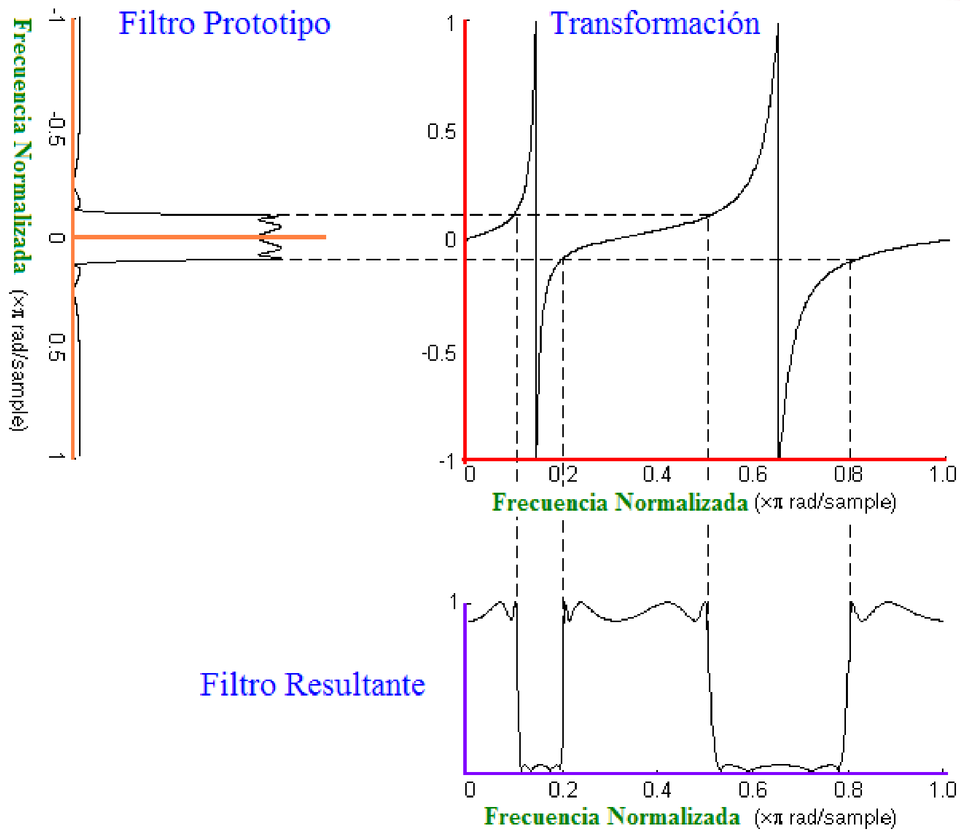
$$Y(w) = e^{-jwN_0} \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k \; e^{-jwk}}{\sum_{k=0}^{N} a_k \; e^{-jwk}} X(w)$$

PSI Percepción y Sistemas Inteligentes

■ Introducción

▸ El estudio de filtros IIR se centra en el diseño de filtros paso-bajo.

▸ La obtención de un filtro PA, PB, BR se realiza fácilmente aplicando una **transformación de frecuencia** a un **prototipo** PB.



Transformaciones de Frecuencia en el Dominio Analógico

Tipo de transformación	Transformación	Frecuencias de corte del nuevo filtro
Paso bajo	$s \longrightarrow \frac{\Omega_p}{\Omega'_p} s$	Ω'_p
Paso alto	$s \longrightarrow \frac{\Omega_p \Omega'_p}{s}$	Ω'_p
Paso banda	$s \longrightarrow \Omega_p \frac{s^2 + \Omega_l \Omega_u}{s(\Omega_u - \Omega_l)}$	Ω_l, Ω_u
Banda eliminada	$s \longrightarrow \Omega_p \frac{s(\Omega_u - \Omega_c)}{s^2 + \Omega_u \Omega_l}$	Ω_l, Ω_u

Transformaciones de Frecuencia en el dominio Digital

Tipo de transformación	Transformación	Parámetros
Paso bajo	$z^{-1} \longrightarrow \dfrac{z^{-1} - a}{1 - az^{-1}}$	$\omega'_p =$ frecuencia de corte del nuevo filtro $a = \dfrac{\mathrm{sen}[(\omega_p - \omega'_p)/2]}{\mathrm{sen}[(\omega_p + \omega'_p)/2]}$
Paso alto	$z^{-1} \longrightarrow -\dfrac{z^{-1} + a}{1 + az^{-1}}$	$\omega'_p =$ frecuencia de corte del nuevo filtro $a = -\dfrac{\cos[(\omega_p + \omega'_p)/2]}{\cos[(\omega_p - \omega'_p)/2]}$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Transformaciones de Frecuencia en el dominio Digital

Tipo de transformación	Transformación	Parámetros
Paso banda	$z^{-1} \longrightarrow -\dfrac{z^{-2} - a_1 z^{-1} + a_2}{a_2 z^{-2} - a_1 z^{-1} + 1}$	$\omega_l =$ frecuencia de corte inferior $\omega_u =$ frecuencia de corte superior $a_1 = -2\alpha K/(K+1)$ $a_2 = (K-1)/(K+1)$ $\alpha = \dfrac{\cos[(\omega_u+\omega_l)/2]}{\cos[(\omega_u-\omega_l)/2]}$ $K = \cot\dfrac{\omega_u-\omega_l}{2}\tan\dfrac{\omega_p}{2}$
Banda eliminada	$z^{-1} \longrightarrow \dfrac{z^{-2} - a_1 z^{-1} + a_2}{a_2 z^{-1} - a_1 z^{-1} + 1}$	$\omega_l =$ frecuencia de corte inferior $\omega_u =$ frecuencia de corte superior $a_1 = -2\alpha/(K+1)$ $a_2 = (1-K)/(1+K)$ $\alpha = \dfrac{\cos[(\omega_u+\omega_l)/2]}{\cos[(\omega_u-\omega_l)/2]}$ $K = \tan\dfrac{\omega_u-\omega_l}{2}\tan\dfrac{\omega_p}{2}$

Transformaciones de Frecuencia

■ Observaciones

- El diseñador puede ***elegir*** transformaciones en frecuencia en el dominio analógico o digital.
- Las ***transformaciones*** en el dominio ***digital*** son apropiadas para filtros IIR, pues si se aplican a filtros FIR se obtendrá un filtro IIR.
  - ***Método Invarianza al Impulso y Aproximación de Derivadas***
    - Hacer la transformación ***final*** en el dominio digital para evitar el problema de aliasing en filtros paso alto y filtros paso banda.
  - ***Método de Transformación Bilineal***
    - No presenta inconveniente el orden de aplicación.

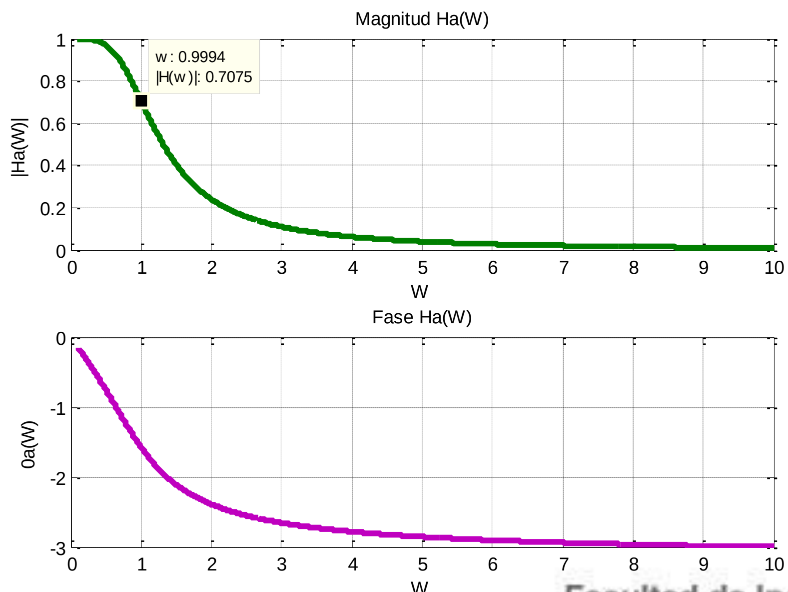
humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Ejemplo

- Diseñar mediante la T. Bilineal un filtro paso-banda digital a partir de un filtro prototipo paso-bajo Butterworth analógico de orden dos y punto de potencia mitad en $\Omega_p = 1$, definido como:

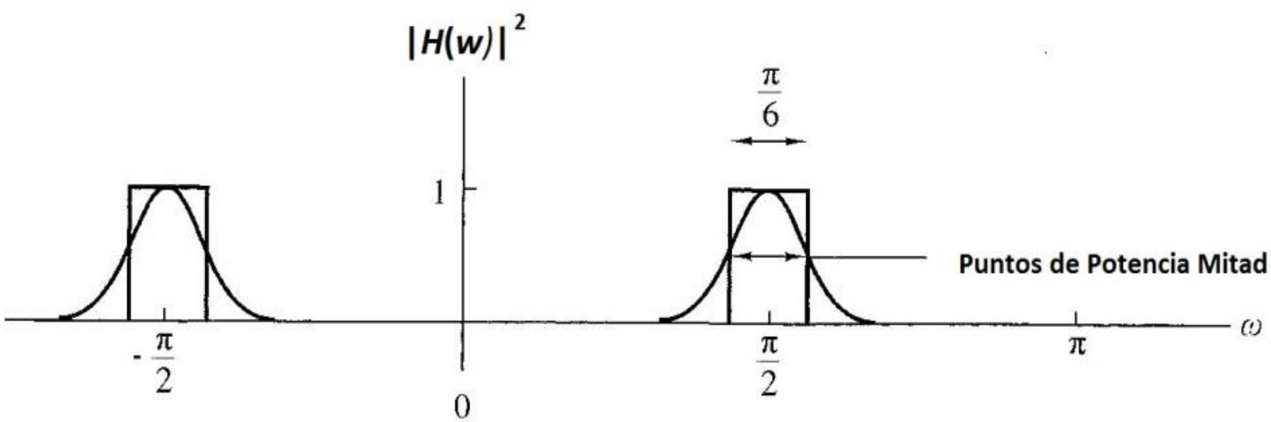
$$H(s) = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}\, s + 1}$$

```
% Función de Transferencia del Filtro H(s)
K_a=1;
num_a=K_a*[0  0  1];
den_a=[1 sqrt(2) 1];

% Respuesta en Frecuencia H(W)
[Ha,W]=freqs(num_a,den_a, 4*1024);
Hmaga=abs(Ha);
Hanga=angle(Ha);

% Graficación
subplot(2,1,1);
plot(W,Hmaga);
grid on; xlabel('W'); ylabel('|Ha(W)|');
title('Magnitud Ha(W)')
subplot(2,1,2);
plot(W,Hanga); grid on; xlabel('W');
ylabel('0a(W)'); title('Fase Ha(W)')
```



Transformaciones de Frecuencia

- **Ejemplo …**
  - Las frecuencias de corte (medidas en los puntos de potencia mitad) para el filtro digital deben estar en $w = \frac{5\pi}{12}$ y $w = \frac{7\pi}{12}$.
  - El sistema digital tiene una frecuencia de muestreo $f_s = 0{,}5$ y las especificaciones del filtro digital se ilustran en la siguiente figura.



humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Transformaciones de Frecuencia

- **Solución**
  - Mediante la ecuación de frecuencias de la T. Bilineal se obtiene las especificaciones frecuenciales del filtro analógico paso-banda:

$$\Omega = \frac{2}{T}\tan\left(\frac{w}{2}\right)$$

$$\Omega_L = \frac{2}{2}\tan\left(\frac{5\pi/12}{2}\right) = 0.7673 \quad y \quad \Omega_U = \frac{2}{2}\tan\left(\frac{7\pi/12}{2}\right) = 1.3032$$

  - La conversión de un filtro paso-bajo a un paso-banda está dado por:

$$s = \Omega_p \frac{s^2 + \Omega_L \Omega_U}{s(\Omega_U - \Omega_L)} = \frac{s^2 + 1}{0.5359 \; s}$$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

- **Solución …**
  - Reemplazando la T. Bilineal $s = \frac{2}{T}\,\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$ en la ecuación de conversión analógica, con $T = 2$, se obtiene:

$$s = \frac{(1-\ z^{-1})^2 +\ \Omega_u\Omega_L(1+z^{-1})^2}{(1-z^{-2})(\Omega_u - \Omega_L)} = 3.7321\frac{(1+z^{-2})}{(1-z^{-2})}$$

  - El filtro digital se obtiene reemplazando la ecuación anterior en el filtro prototipo paso-bajo analógico:

$$H(z) = H(s)_{\mid\, s=3.7321\frac{(1+z^{-2})}{(1-z^{-2})}}$$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Transformaciones de Frecuencia

- **Solución …**
  - De donde,

$$H(z) = \frac{1}{20{,}2065} \quad \frac{(1 - z^{-2})^2}{1 + 1{,}2796\, z^{-2} + 0{,}4776\, z^{-4}}$$

  - Filtro de cuarto orden estable y con polos en:
    - $z_1 = -0.1601 + 0.8157j$
    - $z_2 = -0.1601 - 0.8157j$
    - $z_3 = 0.1601 + 0.8157j$
    - $z_4 = 0.1601 - 0.8157j$

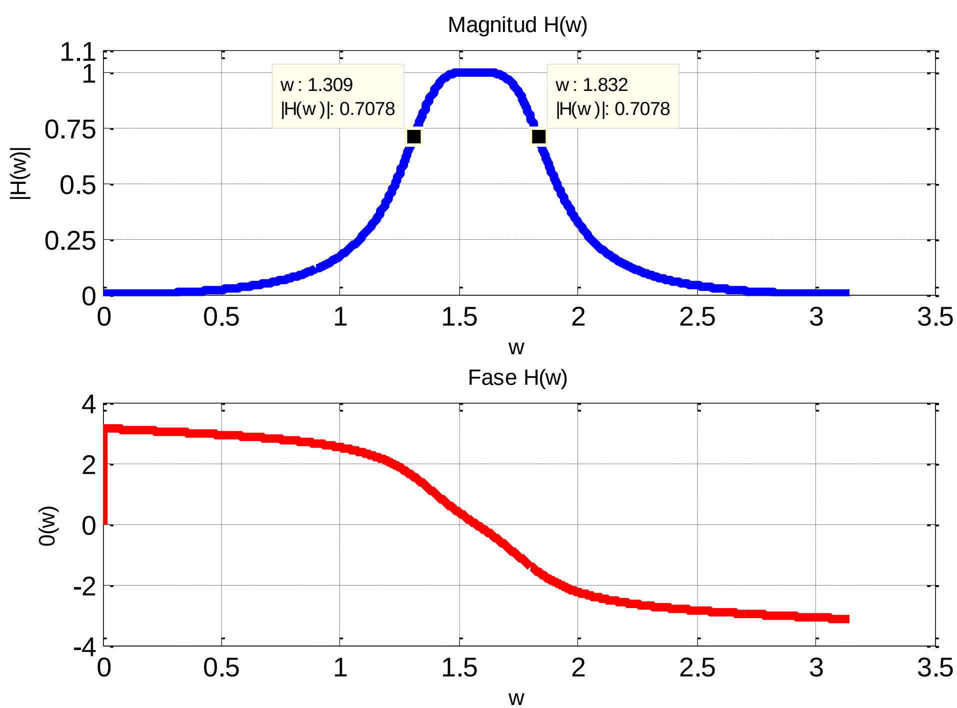
humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Transformaciones de Frecuencia

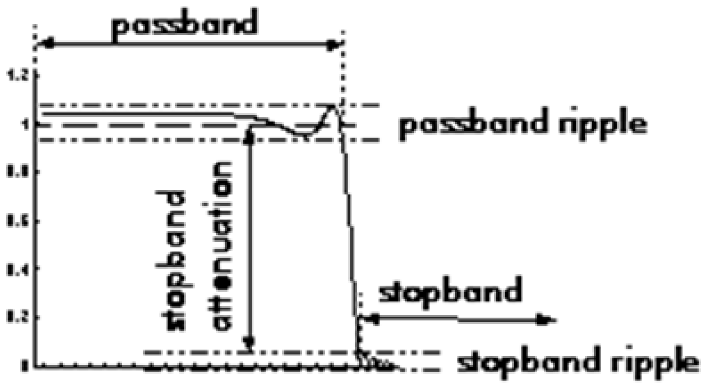
- **Solución …**
  - La respuesta en Frecuencia se obtiene como:

$$H(w) = H(z)_{|z=e^{jw}}$$

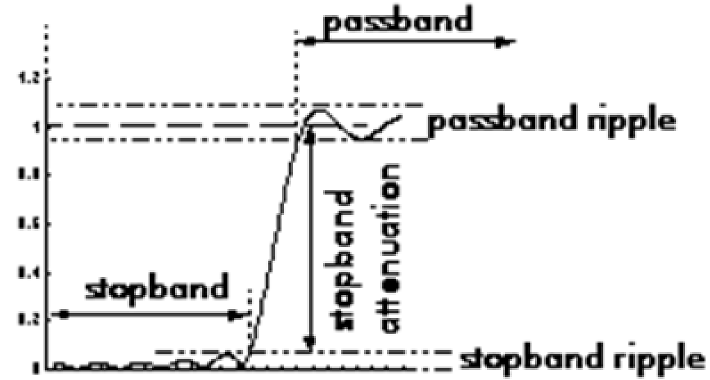
```
% Función de Transferencia del Filtro
H(z)
K=1/20.2065;
num= K* [1  0  -2   0   1 ];
den=[1 0  1.2796  0   0.4776];

% Respuesta en Frecuencia  H(w)
[H,w]=freqz(num,den, 4*1024);
Hmag=abs(H);
Hang=angle(H);

% Graficación
subplot(2,1,1);
plot(w,Hmag); grid on; xlabel('w');
ylabel('|H(w)|'); title('Magnitud H(w)')
subplot(2,1,2);
plot(w,Hang); grid on;xlabel('w');
ylabel('0(w)'); title('Fase H(w)')
```



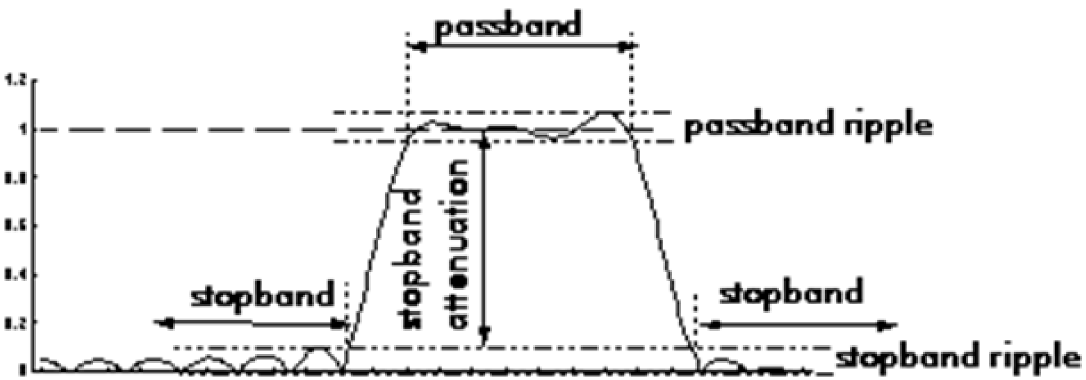
humberto.loaiza@correounivalle.edu.co



low pass filter



high pass filter



band pass filter

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Fin Asignatura

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co