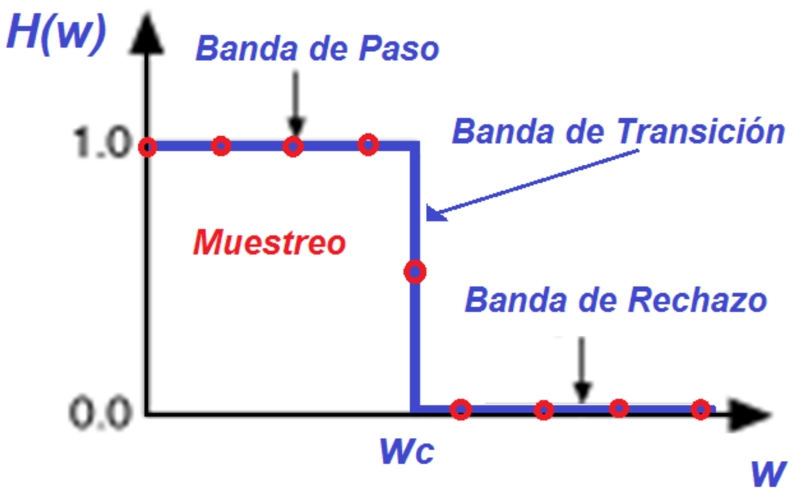
Procedimiento

- $h(n)$ se obtiene a partir de los valores de $H_d(w)$, **que** toman en un conjunto de frecuencias **equiespaciadas** w_k,

$$w_k = \frac{2\pi}{M}(k+\alpha) \quad [ec.1]$$

donde,
$$\begin{cases} k = 0,1,\ldots,\dfrac{M-1}{2} & M \text{ par} \\ k = 0,1,\ldots,\dfrac{M}{2}-1 & M \text{ impar} \\ \alpha = 0 \text{ ó } 1/2 & \end{cases}$$



Filtro Ideal

Método de Muestreo en Frecuencia

- **Procedimiento…**
  - **Supuesto**: la respuesta en frecuencia especificada se caracteriza únicamente por las M muestras de frecuencia y en consecuencia, $h(n)$ puede recuperarse de estas muestras.
  - Los **lóbulos laterales** de $H(w)$ del filtro resultante, pueden **reducirse optimizando** la **especificación** de frecuencia en la **banda de transición** del filtro.
    - Mediante técnicas de programación lineal (por ejemplo, el trabajo de Rabiner et al. 1970).
  - Los **cálculos** durante el diseño pueden **simplificarse** si se explotan las propiedades básicas de **simetría** de $H_d(w)$.

Método de Muestreo en Frecuencia

Procedimiento…

- La respuesta frecuencial deseada para el filtro es,

$$H_d(w) = \sum_{n=0}^{M-1} h(n)\ e^{-jwn}$$

- Si se especifica la respuesta del filtro para M frecuencias equiespaciadas [ec. 1], se tiene,

$$H(w_k) \equiv H_d\left(\frac{2\pi}{M}(w+\alpha)\right) = \sum_{n=0}^{M-1} h(n)\ e^{-j2\pi\,(w+\alpha)\frac{n}{M}} \qquad k = 0,1,\ldots,M-1 \qquad [ec.2]$$

- Para obtener $h(n)$ se procede a multiplicar [ec. 2] por

$$e^{j\,2\pi\,k\,m/M}, m = 0, 1, ..\, M - 1,$$

y sumar sobre $k = 0, 1, ..\, M - 1.$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Método de Muestreo en Frecuencia…

- Con lo anterior, el lado derecho de la ecuación [ec. 2] se reduce a

$$M\ h(m)e^{-j2\pi\alpha m/M}.$$

- Finalmente se obtiene,

$$h(n)=\frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1}H(w_k)\ e^{j2\pi\,(w+\alpha)\frac{n}{M}} \qquad n=0,1,\ldots,M-1 \qquad [ec.3]$$

- La ecuación [ec.3] da los valores de $h(n)$ a partir de las especificaciones de las M muestras en frecuencia $H(k+\alpha)$, $k=0, 1, \ldots, M-1$.

- **Método de Muestreo en Frecuencia…**
  - **Observaciones**
    - Cuando $\alpha = 0$,
      - la ecuación [ec.2] se reduce a la **transformada discreta de Fourier** de la secuencia $h(n)$
      - la ecuación [ec.3] se reduce a la **transformada inversa de Fourier** de $H(k)$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Método de Muestreo en Frecuencia

- **Reducción de la complejidad de diseño del filtro por simetría.**

  - Como $h(n)$ es **real**, las muestras $H(w_k)$ satisfacen la condiciones de **simetría**.

$$H\left(2\pi(k+\alpha)/M\right) = H^*\left(2\pi(M-k-\alpha)/M\right) \qquad k = 0,1,\ldots,M-1$$

  - La simetría reduce las especificaciones en frecuencia de M puntos a $(M+1)/2$ puntos para M impar y $M/2$ puntos para M par.

- **Reducción de la complejidad de diseño del filtro por simetría.**

  - Del análisis previo de la simetría de *h*(*n*) para los filtros FIR, se tiene,

$$H(w) = H_r(w) e^{j[\beta\frac{\pi}{2} - w(M-1)/2]} \qquad \begin{cases} \beta = 0 & \rightarrow Simetría \quad par \\ \beta = 1 & \rightarrow Simetría \quad impar \end{cases}$$

Al evaluar en las frecuencias $w_k = \frac{2\pi}{M}(k+\alpha)$ se llega a,

$$H(k+\alpha) = H_r\left(\frac{2\pi}{M}(k+\alpha)\right) e^{j[\beta\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{M}(k+\alpha)(M-1)]}$$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Método de Muestreo en Frecuencia

- **Reducción de la complejidad de diseño del filtro por simetría.**

  - Si sólo se define un conjunto de *muestras reales* $\{G(k+m)\}$, para la respuesta en frecuencia del filtro, puede lograrse una mayor simplificación, puesto que,

$$G(k+\alpha) = (-1)^k H_r\left(\frac{2\pi}{M}(k+\alpha)\right) \qquad k = 0,1,\ldots,M-1$$

De donde,

$$H(k+\alpha) = G(k+\alpha)\, e^{j\pi k}\; e^{j[\beta\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{M}(k+\alpha)(M-1)]}$$

Expresiones de Diseño

Para los cuatro casos, $\alpha = 0, \alpha = 1/2, \beta = 0 \; y \; \beta = 1$ se puede el cálculo de $h(n)$ al retomar la condición de simetría de la respuesta frecuencial.

Filtro Simétrico β=0

$$\alpha = 0$$

$$H(k) = G(k)e^{j\pi k/M} \qquad k = 0,1,\ldots, M-1$$

$$G(k) = (-1)^k H_r\left(\frac{2\pi k}{M}\right) \qquad G(k) = -G(M-k)$$

$$h(n) = \frac{1}{M}\left\{G(0) + 2\sum_{k=1}^{U} G(k)\cos\frac{2\pi k}{M}\left(n+\frac{1}{2}\right)\right\}$$

$$U = \begin{cases} \dfrac{M-1}{2}, & M \text{ impar} \\ \dfrac{M}{2}-1, & M \text{ par} \end{cases}$$

Método de Muestreo en Frecuencia

- **Expresiones de Diseño …**

Filtro Simétrico β=0

$$H\left(k+\frac{1}{2}\right)=G\left(k+\frac{1}{2}\right)e^{-j\pi/2}e^{j\pi(2k+1)/2M}$$

$$\alpha=\frac{1}{2}$$

$$G\left(k+\frac{1}{2}\right)=(-1)^k H_r\left[\frac{2\pi}{M}\left(k+\frac{1}{2}\right)\right]$$

$$G\left(k+\frac{1}{2}\right)=G\left(M-k-\frac{1}{2}\right)$$

$$h(n)=\frac{2}{M}\sum_{k=0}^{U}G\left(k+\frac{1}{2}\right)sen\frac{2\pi}{M}\left(k+\frac{1}{2}\right)\left(n+\frac{1}{2}\right)$$

- **Expresiones de Diseño…**

  Filtro Antisimétrico β=1

$$H(k)=G(k)e^{j\pi/2}e^{j\pi k/M} \qquad k=0,1,\ldots,M-1$$

$$G(k)=(-1)^k H_r\left(\frac{2\pi k}{M}\right) \qquad G(k)=G(M-k)$$

$$\alpha=0$$

$$h(n)=-\frac{2}{M}\sum_{k=1}^{(M-1)/2}G(k)sen\frac{2\pi k}{M}\left(n+\frac{1}{2}\right) \qquad M \text{ impar}$$

$$h(n)=\frac{1}{M}\left\{(-1)^{n+1}G(M/2)-2\sum_{k=1}^{(M-2)-1}G(k)sen\frac{2\pi}{M}k\left(n+\frac{1}{2}\right)\right\} \qquad M \;\; par$$

- **Expresiones de Diseño…**

Filtro Antisimétrico β=1

$$\alpha = \frac{1}{2}$$

$$H\left(k+\frac{1}{2}\right) = G\left(k+\frac{1}{2}\right) e^{j\pi(2k+1)/2M} e^{j\pi(2k+1)/2M}$$

$$G\left(k+\frac{1}{2}\right) = (-1)^k H_r\left[\frac{2\pi}{M}\left(k+\frac{1}{2}\right)\right]$$

$$G\left(k+\frac{1}{2}\right) = -G\left(M-k-\frac{1}{2}\right); \quad G(M/2) = 0 \quad para \;\; M \;\; impar$$

$$h(n) = \frac{2}{M}\sum_{k=0}^{V} G\left(k+\frac{1}{2}\right)\cos\frac{2\pi}{M}\left(k+\frac{1}{2}\right)\left(n+\frac{1}{2}\right)$$

$$V = \begin{cases} \dfrac{M-3}{2}, & M \text{ impar} \\ \dfrac{M}{2}-1, & M \text{ par} \end{cases}$$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

- **Ejemplo 1**
  - Determine los coeficientes de un filtro FIR de fase lineal de longitud M=15 con $h(n)$ simétrica y respuesta frecuencial que satisface las condiciones,

$$H_r\left(\frac{2\pi k}{15}\right)=\begin{cases}1 & k=0,1,2,3\\ 0.4 & k=4\\ 0 & k=5,6,7\end{cases}$$

Método de Muestreo en Frecuencia

- **Solución**
  - Se aprecia en H_r que $\alpha = 0$, y puesto que $h(n)$ es simétrico ($\beta=0$), de las tablas anteriores,

$$G(k) = (-1)^k H_r\left(\frac{2\pi k}{15}\right) \qquad k = 0,1,\ldots,7$$

$$h(n) = \frac{1}{M}\left\{ G(0) + 2\sum_{k=1}^{U} G(k)\cos\frac{2\pi k}{M}\left(n+\frac{1}{2}\right) \right\}$$

donde, $$U = \begin{cases} \dfrac{M-1}{2} & M \ impar \\ \dfrac{M}{2}-1 & M \ par \end{cases}$$

Método de Muestreo en Frecuencia

Percepción y Sistemas Inteligentes

- **Solución …**
  - Respuesta impulsional h(n) resultante

$h(0)=h(14)=-0.014113$

$h(1)=h(13)=-0.001945$

$h(2)=h(12)= 0.040000$

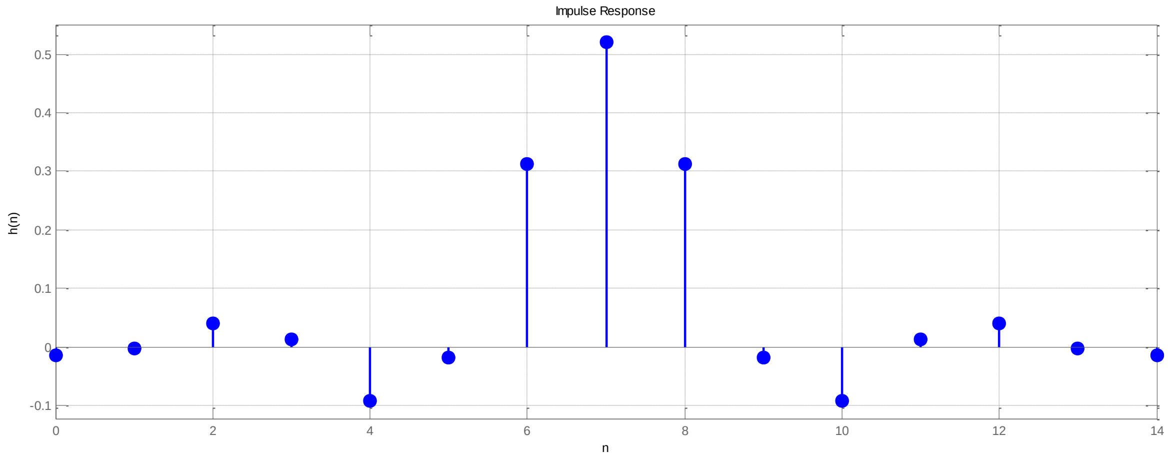
$h(3)=h(11)= 0.012234$

$h(4)=h(10)= -0.091388$

$h(5)=h(9) = -0.0180899$

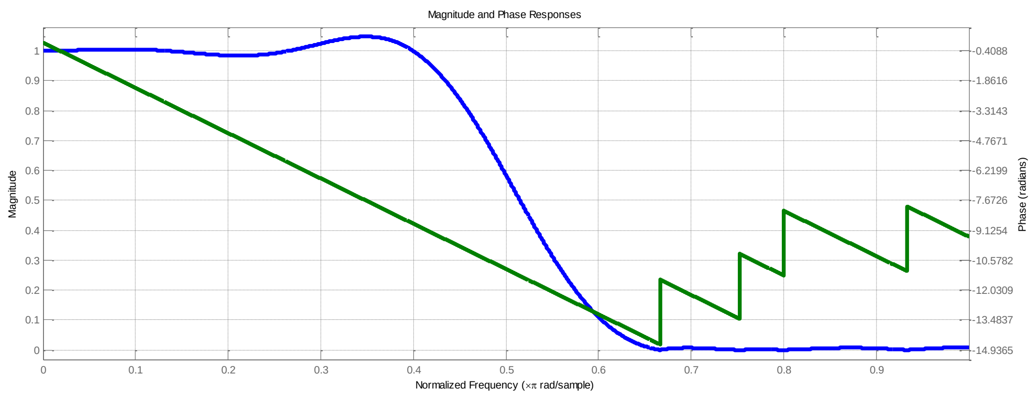
$h(6)=h(8) = 0.3133176$

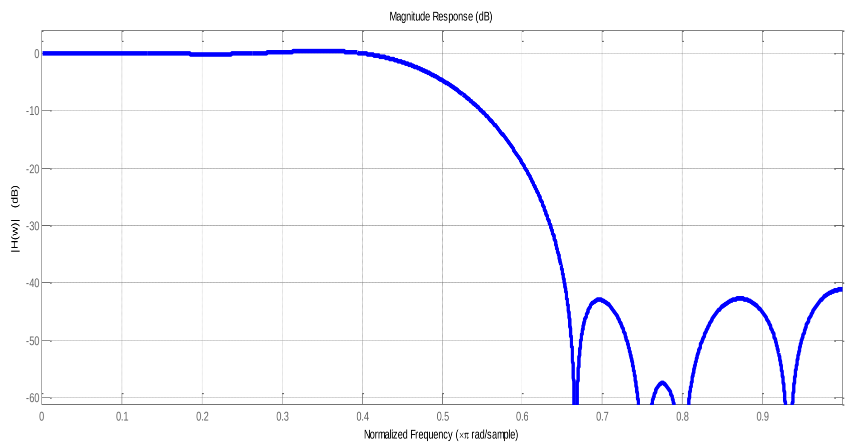
$h(7)= 0.52$



Método de Muestreo en Frecuencia

- **Solución …**
  - Respuesta en frecuencia H(w) del filtro resultante





- **Ejemplo 2**
  - Determine los coeficientes de un filtro FIR de fase lineal de longitud M=32 con $h(n)$ simétrica y respuesta frecuencial que satisface las condiciones,

$$H_r\left(\frac{2\pi\left(k+\alpha\right)}{32}\right)=\begin{cases}1 & k=0,1,2,3,4,5\\ T_1 & k=6\\ 0 & k=7,8,\dots,15\end{cases}$$

- **Solución**
  - Para disminuir los lóbulos, T_1 puede seleccionarse de tablas de valores óptimos.
    - $T_1 = 0.3789795$ para $\alpha=0$
    - $T_1 = 0.3570496$ para $\alpha=1/2$, (el filtro resultante alcanza un mayor ancho de banda)

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Coeficientes de transición

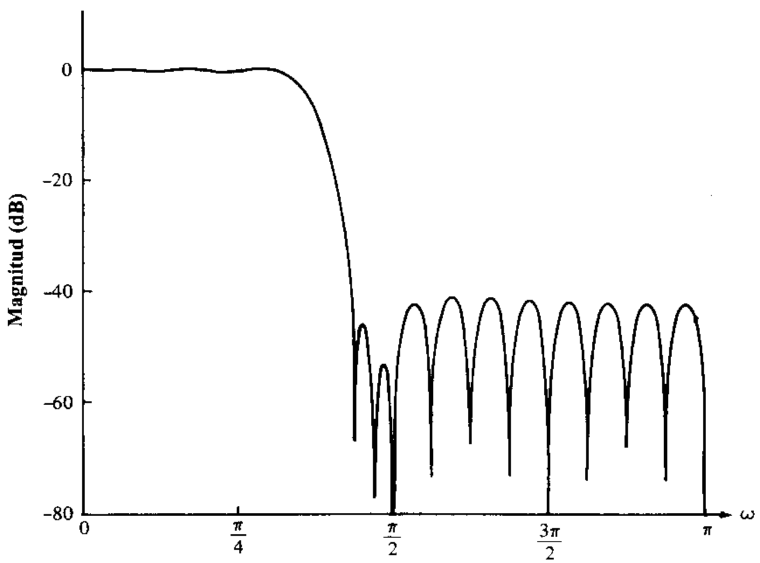
α = 0

BW	Minimax	T_1	BW	Minimax	T_1
	M Impar			M Par	
	$M = 15$			$M = 16$	
1	−42.30932283	0.43378296	1	−39.75363827	0.42631836
2	−41.26299286	0.41793823	2	−37.61346340	0.40397949
3	−41.25333786	0.41047636	3	−36.57721567	0.39454346
4	−41.94907713	0.40405884	4	−35.87249756	0.38916626
5	−44.37124538	0.39268189	5	−35.31695461	0.38840332
6	−56.01416588	0.35766525	6	−35.51951933	0.40155639
	$M = 33$			$M = 32$	
1	−43.03163004	0.42994995	1	−42.24728918	0.42856445
2	−42.42527962	0.41042481	2	−41.29370594	0.40773926
3	−42.40898275	0.40141601	3	−41.03810358	0.39662476
4	−42.45948601	0.39641724	4	−40.93496323	0.38925171
6	−42.52403450	0.39161377	5	−40.85183477	0.37897949
8	−42.44085121	0.39039917	8	−40.75032616	0.36990356
10	−42.11079407	0.39192505	10	−40.54562140	0.35928955
12	−41.92705250	0.39420166	12	−39.93450451	0.34487915
14	−44.69430351	0.38552246	14	−38.91993237	0.34407349
15	−56.18293285	0.35360718			
	$M = 65$			$M = 64$	
1	−43.16935968	0.42919312	1	−42.96059322	0.42882080
2	−42.61945581	0.40903320	2	−42.30815172	0.40830689
3	−42.70906305	0.39920654	3	−42.32423735	0.39807129
4	−42.86997318	0.39335937	4	−42.43565893	0.39177246
5	−43.01999664	0.38950806	5	−42.55461407	0.38742065
6	−43.14578819	0.38679809	6	−42.66526604	0.38416748
10	−43.44808340	0.38129272	10	−43.01104736	0.37609863
14	−43.54684496	0.37946167	14	−43.28309965	0.37089233
18	−43.48173618	0.37955322	18	−43.56508827	0.36605225
22	−43.19538212	0.38162842	22	−43.96245098	0.35977783
26	−42.44725609	0.38746948	26	−44.60516977	0.34813232
30	−44.76228619	0.38417358	30	−43.81448936	0.29973144
31	−59.21673775	0.35282745			
	$M = 125$			$M = 128$	
1	−43.20501566	0.42899170	1	−43.15302420	0.42889404
2	−42.66971111	0.40867310	2	−42.59092569	0.40847778
3	−42.77438974	0.39868774	3	−42.67634487	0.39838257
4	−42.95051050	0.39268189	4	−42.84038544	0.39226685
6	−43.25854683	0.38579101	5	−42.99805641	0.38812256
8	−43.47917461	0.38195801	7	−43.25537014	0.38281250
10	−43.63750410	0.37954102	10	−43.52547789	0.3782638
18	−43.95589399	0.37518311	18	−43.93180990	0.37251587
26	−44.05913115	0.37384033	26	−44.18097305	0.36941528

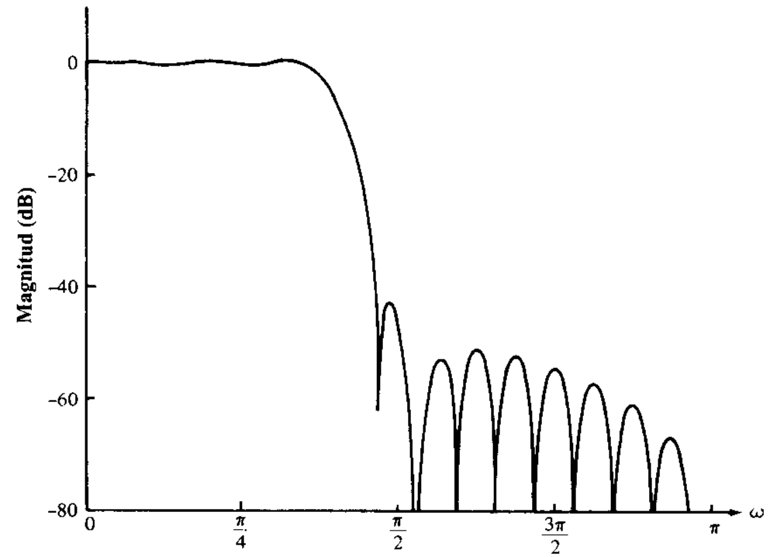
α = 1/2

BW	Minimax	T_1
	$M = 16$	
1	−51.60668707	0.26674805
2	−47.48000240	0.32149048
3	−45.19746828	0.34810181
4	−44.32862616	0.36308594
5	−45.68347692	0.36661987
6	−56.63700199	0.34327393
	$M = 32$	
1	−52.64991188	0.26073609
2	−49.39390278	0.30878296
3	−47.72596645	0.32984619
4	−46.68811989	0.34217529
6	−45.33436489	0.35704956
8	−44.30730963	0.36750488
10	−43.11168003	0.37810669
12	−42.97900438	0.38465576
14	−56.32780266	0.35030518
	$M = 64$	
1	−52.90375662	0.25923462
2	−49.74046421	0.30603638
3	−48.38088989	0.32510986
4	−47.47863007	0.33595581
5	−46.88655186	0.34287720
6	−46.46230555	0.34774170
10	−45.46141434	0.35859375
14	−44.85988188	0.36470337
18	−44.34302616	0.36983643
22	−43.69835377	0.37586059
26	−42.45641375	0.38624268
30	−56.25024033	0.35200195
	$M = 128$	
1	−52.96778202	0.25885620
2	−49.82771969	0.30534668
3	−48.51341629	0.32404785
4	−47.67455149	0.33443604
5	−47.11462021	0.34100952
7	−46.43420267	0.34880371
10	−45.88529110	0.35493774
18	−45.21660566	0.36182251
26	−44.87959814	0.36521607
34	−44.61497784	0.36784058
42	−44.32706451	0.37066040
50	−43.87646437	0.37500000

- **Ejemplo 2…**
  - Siguiendo el procedimiento del ejemplo 1, se llega a:



Respuesta en frecuencia del filtro FIR de fase lineal.. M=32, α =0



Respuesta en frecuencia del filtro FIR de fase lineal.. M=32, α =1/2

■ Introducción

- El método de diseño se formula como un problema de **Aproximación de Chevyshev.**

- El **criterio de optimalidad** es en el sentido de que el **error** de aproximación **ponderado** entre la respuesta en frecuencia **deseada** y **obtenida** se distribuye **equitativamente** a lo largo de la bandas de paso y de atenuación del filtro que minimiza el error máximo.

■ Introducción…

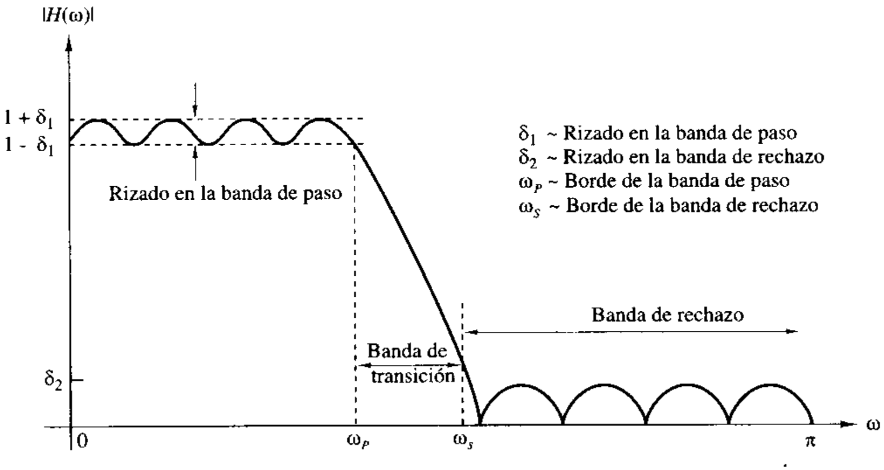
- Los filtros obtenidos presentan rizados en todas las bandas.

$*$banda de paso:

$$1-\delta_1 \leq H_r(w) \leq 1+\delta_1 \qquad |w| \leq w_p$$

$*$banda de rechazo:

$$-\delta_2 \leq H_r(w) \leq \delta_2 \qquad |w| > w_s$$



- Para el diseño, es conveniente obtener una ***estructura común*** de $H_r(w)$ para los diferentes casos de filtros FIR.

Filtros FIR de Fase Lineal: CASO 1

- Respuesta impulsional **simétrica**

  h(n)=h(M-1-n) y M **impar**

$$H_r(w) = h\left(\frac{M-1}{2}\right) + 2\sum_{n=0}^{(M-3)/2} h(n)\cos w\left(\frac{M-1}{2} - n\right)$$

Haciendo **k = (M-1) / 2 - n** y definiendo un nuevo conjunto de parámetros del filtro {a(k)} como,

$$a(k) = \begin{cases} h\left(\frac{M-1}{2}\right), & k = 0 \\ 2h\left(\frac{M-1}{2} - k\right), & k = 1, 2, \ldots, \frac{M-1}{2} \end{cases}$$

entonces $H_r(w)$ se reduce a:

$$\Rightarrow \qquad H_r(w) = \sum_{k=0}^{(M-1)/2} a(k)\cos wk$$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Filtros FIR de Fase Lineal: CASO 2

- Respuesta impulsional **simétrica**

  h(n)=h(M-1-n) y M **par**

$$H_r(w) = 2\sum_{n=0}^{(M/2)-1} h(n)\cos w\left(\frac{M-1}{2} - n\right)$$

Haciendo **k = M / 2 - n** y definiendo un nuevo conjunto de parámetros del filtro {b(k)} como,

$$b(k) = 2h\left(\frac{M}{2} - k\right), \qquad k = 1, 2, \ldots, M/2$$

entonces $H_r(w)$ se convierte en:

$$H_r(w) = \sum_{k=1}^{M/2} b(k)\cos w\left(k - \frac{1}{2}\right)$$

Filtros FIR de Fase Lineal: CASO 2

PSI Percepción y Sistemas Inteligentes

- Respuesta impulsional **simétrica**
  h(n)=h(M-1-n) y M **par…**

Para lograr la optimización, es conveniente expresar $H_r(w)$ como,

$$\Rightarrow \qquad H_r(w) = \cos\frac{w}{2} \sum_{k=0}^{(M/2)-1} \tilde{b}(k)\cos wk$$

donde los nuevos coeficientes están dados por,

$$\tilde{b}(0) = \frac{1}{2}b(1), \qquad \tilde{b}(k) = 2\,b(k) - \tilde{b}(k-1) \quad k = 1, 2, \ldots, \frac{M}{2} - 2, \qquad \tilde{b}\left(\frac{M}{2} - 1\right) = 2b\left(\frac{M}{2}\right)$$

Filtros FIR de Fase Lineal: CASO 3

- Respuesta impulsional **antisimétrica**

  h(n)=-h(M-1-n) y M **impar**

$$H_r(w) = 2\sum_{n=0}^{(M-3)/2} h(n)\, senw\left(\frac{M-1}{2} - n\right)$$

Haciendo **k = (M-1) / 2 - n** y definiendo un nuevo conjunto de parámetros del filtro {c(k)} como,

$$c(k) = 2h\left(\frac{M-1}{2} - k\right), \qquad k = 1, 2, \ldots, (M-1)/2$$

entonces $H_r(w)$ se convierte en:

$$H_r(w) = \sum_{k=1}^{(M-1)/2} c(k)\, \mathrm{sen}\, wk$$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Filtros FIR de Fase Lineal: CASO 3

PSI Percepción y Sistemas Inteligentes

- Respuesta impulsional **antisimétrica**
  h(n)=-h(M-1-n) y M **impar…**

Para lograr la optimización, es conveniente expresar $H_r(w)$ como,

$$\Rightarrow \quad H_r(w) = \operatorname{sen} w \sum_{k=0}^{(M-3)/2} \tilde{c}(k) \cos wk$$

donde los nuevos coeficientes están dados por,

$$\tilde{c}\left(\frac{M-3}{2}\right) = c\left(\frac{M-1}{2}\right), \qquad \tilde{c}\left(\frac{M-5}{2}\right) = 2c\left(\frac{M-3}{2}\right), \ldots,$$

$$\tilde{c}(k-1) - \tilde{c}(k+1) = 2c(k) \quad 2 \le k \le \frac{M-5}{2}, \qquad \tilde{c}(0) + \frac{1}{2}\tilde{c}(2) = c(1)$$

Filtros FIR de Fase Lineal: CASO 4

- Respuesta impulsional **antisimétrica**
  h(n)=-h(M-1-n) y M **par**

$$H_r(w) = 2\sum_{n=0}^{(M/2)-1} h(n)\, senw\left(\frac{M-1}{2} - n\right)$$

Haciendo **k = M / 2 - n** y definiendo un nuevo conjunto de parámetros del filtro {d(k)} como,

$$d(k) = 2h\left(\frac{M}{2} - k\right), \qquad k = 1, 2, \ldots, M/2$$

entonces $H_r(w)$ se convierte en:

$$H_r(w) = \sum_{k=1}^{M/2} d(k)\, senw\left(k - \frac{1}{2}\right)$$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Filtros FIR de Fase Lineal: CASO 4

- Respuesta impulsional **antisimétrica**
  h(n)=-h(M-1-n) y M **par…**

Para lograr la optimización, es conveniente expresar $H_r(w)$ como,

$$\Rightarrow \quad H_r(w) = \operatorname{sen}\frac{w}{2} \sum_{k=0}^{(M/2)-1} \tilde{d}(k) \cos wk$$

donde los nuevos coeficientes están dados por,

$$\tilde{d}\left(\frac{M}{2}-1\right) = 2d\left(\frac{M}{2}\right), \qquad \tilde{d}(k-1) - \tilde{d}(k) = 2\,d(k) \quad 2 \le k \le \frac{M}{2}-1, \quad \tilde{d}(0) - \frac{1}{2}\tilde{d}(1) = d(1)$$

Filtros FIR de Fase Lineal

- $H_r(w)$ presenta la misma forma en los ***cuatro casos***,

$$H_r(w) = Q(w)\,P(w)$$

donde,

$$Q(w) = \begin{cases} 1 & caso\ 1 \\ \cos\dfrac{w}{2} & caso\ 2 \\ sen\, w & caso\ 3 \\ sen\dfrac{w}{2} & caso\ 4 \end{cases}$$

$$P(w) = \sum_{k=0}^{L} \alpha(k) \cos wk \qquad \text{donde} \quad L = \begin{cases} (M-1)/2 & caso\ 1 \\ M/2-1 & caso\ 2 \\ (M-3)/2 & caso\ 3 \\ M/2-1 & caso\ 4 \end{cases}$$

parámetros del filtro

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Filtros FIR de Fase Lineal

- **Respuesta en frecuencia real deseada $H_{dr}(w)$ y función de ponderación W(w)**
  - **$H_{dr}(w)$** se define como igual a uno en la banda de paso y cero en la banda de rechazo.
  - **W(w)** función que permite elegir el tamaño relativo del los errores en las diferentes bandas de frecuencia (normalizada en la banda de paso).

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Filtros FIR de Fase Lineal

- **Respuesta en frecuencia real deseada $H_{dr}(w)$ y función de ponderación W(w)…**

  - Dadas las especificaciones de $H_{dr}(w)$ y W(w), puede definirse el **Error de Aproximación Ponderado E(w)** como,

$$E(w)=W(w)\left[H_{dr}(w)-H_r(w)\right]=W(w)\left[H_{dr}(w)-Q(w)P(w)\right]$$

$$E(w)=W(w)Q(w)\left[\frac{H_{dr}(w)}{Q(w)}-P(w)\right]$$

  por conveniencia matemática, se definen las *funciones modificadas* como:

$$\widehat{W}(w)=W(w)Q(w) \qquad \widehat{H}_{dr}=\frac{H_{dr}(w)}{Q(w)}$$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Filtros FIR de Fase Lineal

- **Respuesta en frecuencia real deseada $H_{dr}(w)$ y función de ponderación W(w)…**

Por lo que el error de aproximación ponderado se puede expresar, para los cuatro filtros FIR de fase lineal, como:

$$E(w)=\widehat{W}(w)\left[\widehat{H}_{dr}(w)-P(w)\right]$$

Filtros FIR de Fase Lineal

- **Respuesta en frecuencia real deseada $H_{dr}(w)$ y función de ponderación W(w)…**
  - La **aproximación de Chebyshev** consiste en determinar los **parámetros {α (k)}** que **minimizan** el valor máximo de **|E(w)|** sobre las bandas de frecuencia en las que se realiza la aproximación:

$$\min_{sobre\{\alpha(k)\}}\left[\max_{w\in S}\left|E(w)\right|\right]=\min_{sobre\{\alpha(k)\}}\left[\max_{w\in S}\left|\hat{W}(w)\left[\hat{H}_{dr}(w)-\sum_{k=0}^{L}\alpha(k)\cos wk\right]\right|\right]$$

  donde, **S**: conjunto de bandas de frecuencia para la optimización.

  - La **solución a este problema** [Park y McClellan 1972] se efectua utilizando el ***teorema de alternancia*.**

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Teorema de Alternancia

- **Definición**
  - Sea S un subconjunto compacto del intervalo [0,π).
  - Una condición necesaria y suficiente para que,

$$P(w) = \sum_{k=0}^{L} \alpha(k) \cos wk$$

sea la **mejor y única aproximación ponderada de Chebyshev** $\widehat{H}_{dr}(w)$ en **S** es que el error E(w) presente **al menos** L+2 frecuencias ***extremas*** $\{w_i\}$ en S, tal que:

$$w_1 < w_2 < \ldots\ldots < w_{L+2}$$
$$E(w_i) = -E(w_{i+1})$$
$$|E(w_i)| = \max_{w \in S} |E(w)| \qquad i = 1,2,\ldots.., L+2$$

Teorema de Alternancia

Definición …

- La función de error $E(w)$ ***alterna su signo*** entre dos frecuencias extremas sucesivas; de ahí su nombre.

- Las frecuencias $\{w_i\}$ correspondientes a los picos de $E(w)$ también corresponden a los picos para los que $H_r(w)$ verifica la tolerancia del error.

- El teorema de alternancia garantiza una ***solución única*** para el problema de ***optimización de Chebyshev.***

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Teorema de Alternancia

- **Solución**
  - En las frecuencias extremas deseadas $\{w_n\}$, se tiene el conjunto de ecuaciones,

$$\hat{W}(w_n)\left[\hat{H}_{dr}(w_n)-P(w_n)\right]=(-1)^n\,\delta \qquad n=0,1,\ldots,L+1 \qquad [1]$$

donde δ representa el valor máxino de la función de error E(w). Para la función de W(w) escogida, se desprende que $\delta = \delta_2$.

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Teorema de Alternancia

Solución…

- El conjunto de ecuaciones de [1], se puede representar como,

$$P(w_n) + \frac{(-1)^n \delta}{\widehat{W}(w_n)} = \widehat{H}_{dr}(w_n) \qquad n = 0,1,\ldots,L+1 \qquad [2]$$

o de la forma,

$$\sum_{k=0}^{L} \alpha(k) \cos w_n k + \frac{(-1)^n \delta}{\widehat{W}(w_n)} = \widehat{H}_{dr}(w_n) \qquad n = 0,1,\ldots,L+1 \qquad [3]$$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Teorema de Alternancia

- **Solución…**

  - Si {α (k) }y δ son los parámetros que se deben determinar a partir de una estimación de {w_n}, la ecuación [3] puede expresarse matricialmente:

$$\begin{bmatrix} 1 & \cos w_0 & \cos 2w_0 & \dots & \cos Lw_0 & \dfrac{1}{\widehat{W}(w_0)} \\ 1 & \cos w_1 & \cos 2w_1 & \dots & \cos Lw_1 & \dfrac{-1}{\widehat{W}(w_1)} \\ & \vdots & & & & \\ 1 & \cos w_{L+1} & \cos 2w_{L+1} & \dots & \cos Lw_{L+1} & \dfrac{(-1)^{L+1}}{\widehat{W}(w_{L+1})} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha(0) \\ \alpha(1) \\ \vdots \\ \alpha(L) \\ \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widehat{H}_{dr}(w_0) \\ \widehat{H}_{dr}(w_1) \\ \vdots \\ \widehat{H}_{dr}(w_{L+1}) \end{bmatrix} \quad [4]$$

Cuales son los parámetros desconocidos??

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Teorema de Alternancia

- **Solución…**
  - Se **desconocen**:
    - Las frecuencias extremas $\{w_n\}$
    - El conjunto de parámetros $\{\alpha\ (k)\ \}$
    - δ, el valor máximo del error E(w)
  - El sistema de ecuaciones [4] se resuelve utilizando el ***Algoritmo de Intercambio de Remez*** (Rabiner et al. 1975)

Algoritmo de Intercambio de Remez

■ Introducción

- Algoritmo iterativo en el que se propone un conjunto inicial de frecuencias extremas $\{w_n\}$ para calcular P(w) y δ, y posteriormente se determina la función de error E(w).
- A partir de E(w) se obtiene otro conjunto de L+2 frecuencias extremas.
- El proceso anterior se repite iterativamente hasta que converga al conjunto óptimo de frecuencias extremas.

■ Introducción…

- Puesto que la inversión de matrices es un procedimiento costoso en tiempo, se prefiere utilizar un procedimiento más eficiente para calcular δ analíticamente:

$$\delta = \frac{\gamma_0 \widehat{H}_{dr}(w_0) + \gamma_1 \widehat{H}_{dr}(w_1) + \cdots + \gamma_{L+1} \widehat{H}_{dr}(w_{L+1})}{\dfrac{\gamma_0}{\widehat{W}(w_0)} - \dfrac{\gamma_1}{\widehat{W}(w_1)} + \cdots + \dfrac{(-1)^{L+1}\gamma_{L+1}}{\widehat{W}(w_{L+1})}} \qquad [1]$$

donde,

$$\gamma_k = \prod_{\substack{n=0 \\ n\neq k}}^{L+1} \frac{1}{\cos w_k - \cos w_n} \qquad [2]$$

Así, δ se calcula al seleccionar las L+2 frecuencias extremas iniciales.

Algoritmo de Intercambio de Remez

- Como P(w) es un polinomio trigonométrico de la forma,

$$P(w) = \sum_{k=0}^{L} \alpha(k) x^k \qquad x = \cos w \qquad [3]$$

y se sabe que en los puntos $x_n \equiv \cos w_n$, n=0, 1, …, L+1, el polinomio tiene los valores,

$$P(w_n) = \widehat{H}_{dr}(w_n) - \frac{(-1)^n \delta}{\widehat{W}(w_n)} \qquad n = 0,1,\ldots,L+1 \qquad [4]$$

se puede usar la formula de interpolación de Lagrange para P(w).

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Algoritmo de Intercambio de Remez

Así, P(w) se puede expresar como [Hamming, 1962]:

$$P(w)=\frac{\sum_{k=0}^{L} P(w_k)[\beta_k/(x-x_k)]}{\sum_{k=0}^{L}[\beta_k/(x-x_k)]} \quad \text{donde} \quad x_k = \cos w_k \quad \text{y} \quad \beta_k = \prod_{\substack{n=0\\ n\neq k}}^{L+1} \frac{1}{x_k - x_n} \qquad [5]$$

Luego de obtener la solución para P(w), se calcula la función de error E(w) a partir de,

$$E(w)=\widehat{W}(w)\left[\widehat{H}_{dr}(w)-P(w)\right]$$

en un conjunto denso de puntos de frecuencia (normalmente 16 M, donde M es la longitud del filtro).

Algoritmo de Intercambio de Remez

- Si $|E(w)| \geq \delta$ para alguna frecuencia en el conjunto denso, entonces se **selecciona** un nuevo conjunto de frecuencias correspondientes a los L+2 picos más grandes de E(w) y se **repite** el proceso empezando con la ecuación [1].

- Como el nuevo conjunto de L+2 frecuencias se selecciona para coincidir con los picos de la función de error $|E(w)|$, el algoritmo obliga a que **δ se incremente** en cada iteración hasta que **converge** al límite superior $|E(w)| < \delta$.

Algoritmo de Intercambio de Remez

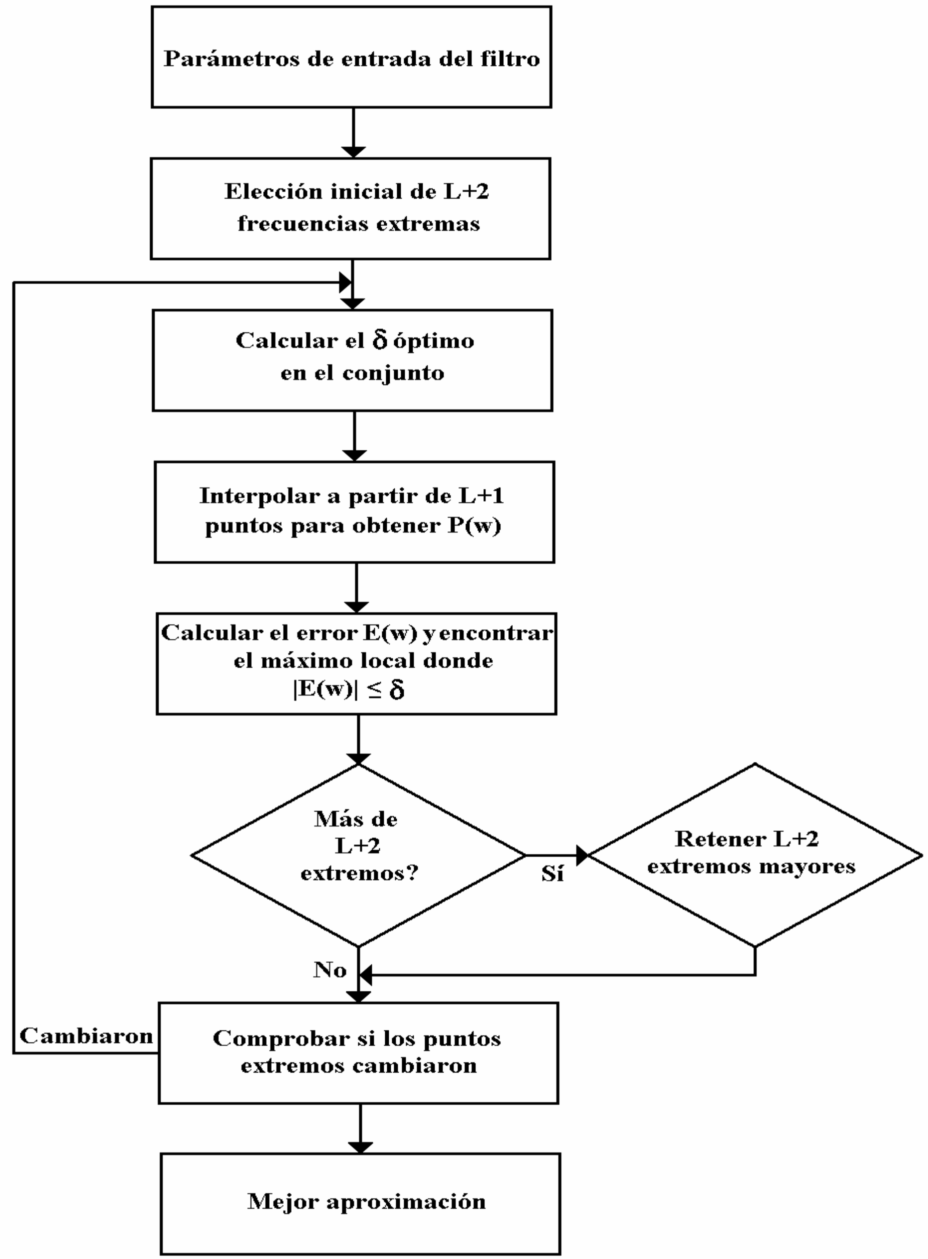
- Al obtener la solución óptima de Chebyshev para P(w), se conocen los parámetros $\alpha(k)$.

- Los valores de h(n) se obtienen de las relaciones entre $\alpha(k)$ y h(k).

- Si se requiere, Q(w) se determina según el tipo de filtro: $H_r(w) = Q(w)\, P(w)$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Diagrama de Flujo del Algoritmo de Remez



Diseño de Filtros FIR

- **Estimación de la Longitud del Filtro**
  - En el proceso de diseño del filtro digital es necesario estimar el orden para cumplir con las especificaciones deseadas.
  - El orden debe ser el entero más pequeño posible para reducir la complejidad computacional.
  - Se recurre a propuestas heurísticas de varios autores que parten de los valores de w_p y w_s, δ_1 y δ_2 esperados del filtro.

Estimación de la Longitud del Filtro

Propuesta de Kaiser

$$\tilde{M} = \frac{-20\log_{10}\left(\sqrt{\delta_1\,\delta_2}\right) - 13}{14.6\Delta f} + 1$$

Propuesta de Herrmann

$$\tilde{M} = \frac{D_\infty(\delta_1,\delta_2) - f(\delta_1,\delta_2)(\Delta f)^2}{\Delta f} + 1$$

Propuesta de Bellanger

$$\tilde{M} = \frac{-20\log_{10}(10\,\delta_1\,\delta_2)}{3\Delta f - 1} + 1$$

Donde, $\Delta f = (\omega_s - \omega_p)/2\pi$

$$D_\infty(\delta_1,\delta_2) = (\log_{10}\delta_2)\left[0.005(\log_{10}\delta_1)^2 + 0.071(\log_{10}\delta_1) - 0.476\right] - \left[0.003(\log_{10}\delta_1)^2 + 0.594(\log_{10}\delta_1) + 0.428\right]$$

$$f(\delta_1,\delta_2) = 11.012 + 0.5124(\log_{10}\delta_1 - \log_{10}\delta_2)$$

Comparación de las Fórmulas

- **Bandas de transición**
  - Si $(w_s - wp)$ es angosta se generan mayores valores de M.
  - M se calcula inversamente proporcional a $(w_s - wp)$
- **Errores en las bandas**
  - Para valores **pequeños** de δ_1 y δ_2:
    - Todas las fórmulas proporcionan resultados cercanos y precisos.
  - Para valores **grandes** de δ_1 y δ_2
    - F. Hermann produce una mejor aproximación.

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Comparación de las Fórmulas

- **Comparación Cálculo de M**
  - Comparación de tres Filtros FIR paso-bajo con sus características conocidas.
  - Estimaciones de la longitud del filtro:

Filtro FIR	w_p	w_s	δ_1	δ_2
1	$0.10625\,\pi$	$0.14375\,\pi$	0.0224	$0.112\ 10^{-3}$
2	$0.20750\,\pi$	$0.28750\,\pi$	0.0170	$34.0\ 10^{-3}$
3	$0.3450\,\pi$	$0.57500\,\pi$	0.0411	$13.7\ 10^{-3}$

Filtro FIR	Orden Actual	F. Kaiser	F. Bellanger	F. Hermann
1	159	159	164	152
2	38	35	38	38
3	14	13	14	13

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Comparación de Métodos de Diseño de Filtros FIR

- Método Directo
- Método por Enventanado
- Método Muestreo en Frecuencia
- Método Rizado Constante

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Método Directo

Método simple que consiste en obtener y resolver un sistema de ecuaciones lineales.

El resultado sólo garantiza el cumplimiento de las especificaciones de diseño utilizadas en la formulación de las ecuaciones.

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Método de Enventanado

Primer método propuesto para el diseño de filtros FIR de fase lineal.

Carece de control preciso de las frecuencias críticas, tales como w_p y w_s en el diseño del filtro.

Los valores de w_p , w_s y δ dependen del tipo de ventana y de la longitud M del filtro.

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Método Muestreo en frecuencia

- Proporciona más control sobre las frecuencias críticas que el método de ventanas,
- Debido a que $H_r(w)$ se especifica en las frecuencias $w_k = 2\pi k / M$ o $w_k = \pi(2k+1)/M$ y la banda de transición es un múltiplo de $2\pi/M$.
- Puede implementarse con estructuras eficientes (menos operaciones) cuando la mayoría de las muestras en frecuencias son cero.
- La ubicación de polos y ceros es sensible a los efectos de cuantificación.

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Método Rizado Constante

Proporciona control total de las especificaciones del filtro y se prefiere habitualmente sobre los otros métodos.

Especificaciones de diseño en función de w_p, w_s, δ_1, δ_2 y M.

Distribuye el error de aproximación en las bandas de paso y de rechazo y se obtiene un filtro óptimo que minimiza el nivel de los lóbulos laterales (optimizar δ_2).

Algoritmo iterativo computacional que converge a una solución óptima.