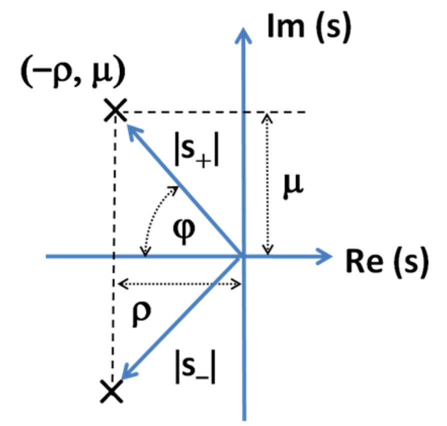
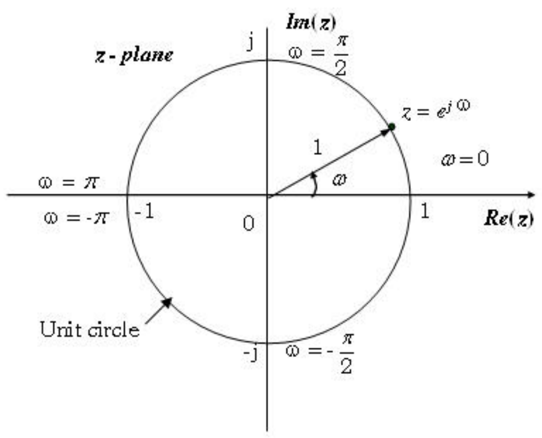
La Transformada Z en sistemas LTI

Introducción

- La **T.z** es al análisis de señales y sistemas **discretos** LTI como la **T.Laplace** es al análisis de señales y sistemas **contínuos** LTI.

- La **T.z** cubre una clase más **amplia** de señales que la **T.Fourier.**





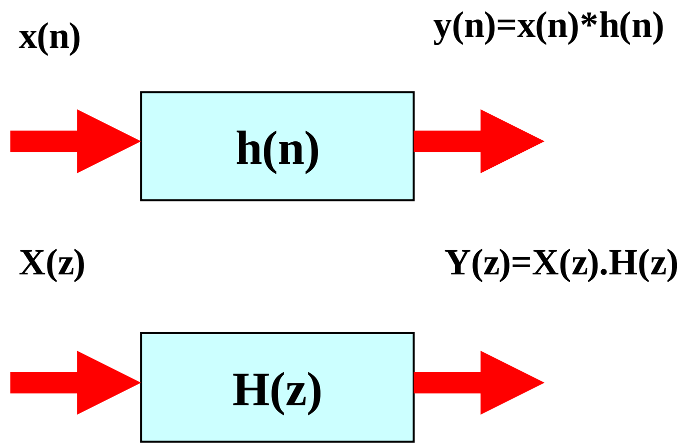
humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

La Transformada Z en sistemas LTI

Percepción y Sistemas Inteligentes

Introducción…

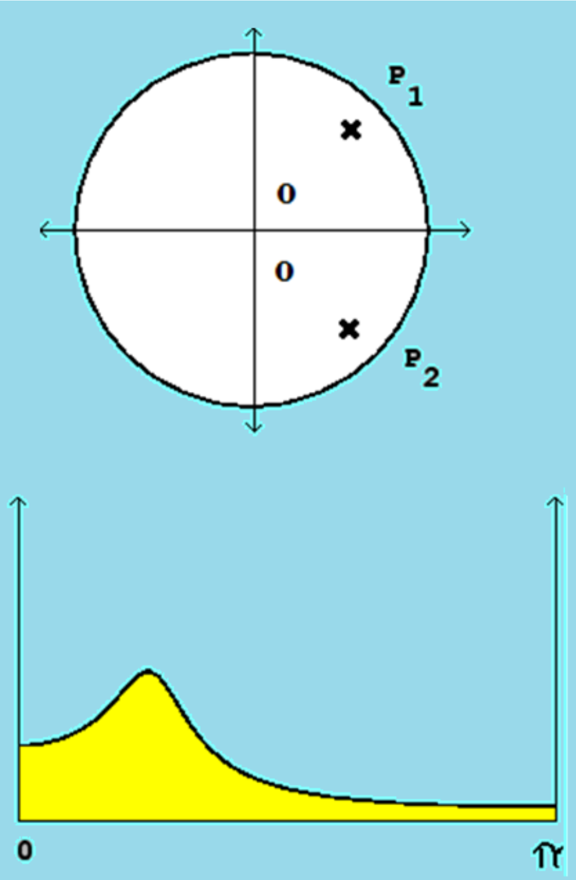
- La **convolución** de dos señales en el dominio del tiempo corresponde a una **multiplicación** de sus transformadas Z.
  - **simplifica** el **análisis** de las respuestas de los sistemas LTI.



humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

La Transformada Z en sistemas LTI

- **Introducción…**
  - La T.z proporciona una manera de **caracterizar** sistemas LTI y sus **respuestas** a las entradas.
    - Emplea la localización de las raíces del polinomio numerador y denominador (polos y ceros) para determinar los atributos del sistema.



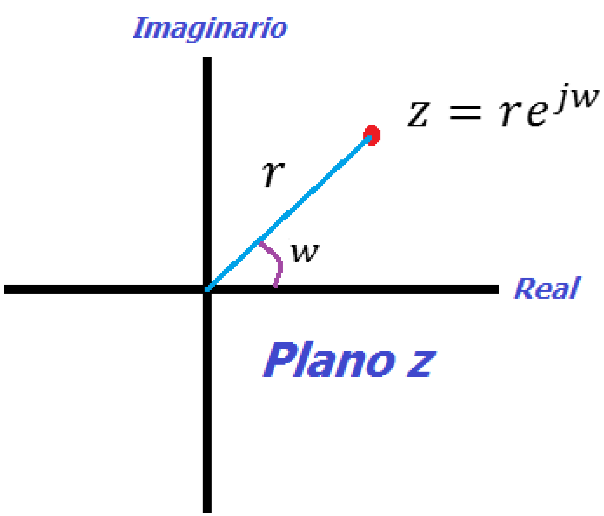
Transformada z bilateral

Definición

- La T.z bilateral de una señal discreta $x(n)$ se define como la serie de potencias:

$$X(z) \equiv \mathcal{Z}\{x(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

  - z variable compleja de forma $z = re^{jw}$



- La relación entre $x(n)$ y $X(z)$ se denota:

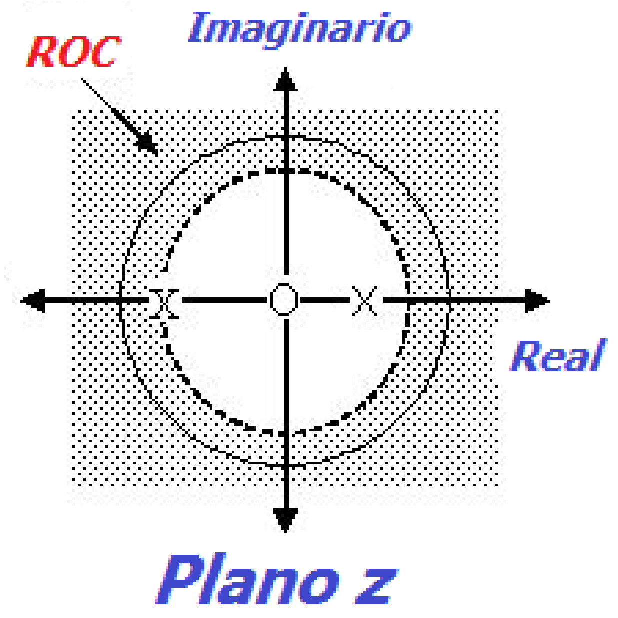
$$x(n) \overset{z}{\longleftrightarrow} X(z)$$

- Es necesario definir la ROC de la T.z.

Región de Convergencia (ROC)

Definición

- La ROC de $X(z)$ es el conjunto de todos los valores de z para los que $X(z)$ es finita.
- La T.z es una serie infinita de potencias.
  - Existe sólo para aquellos valores de z para los que la serie converge.
- Siempre que se determine una T.z bilateral debe indicarse su ROC.



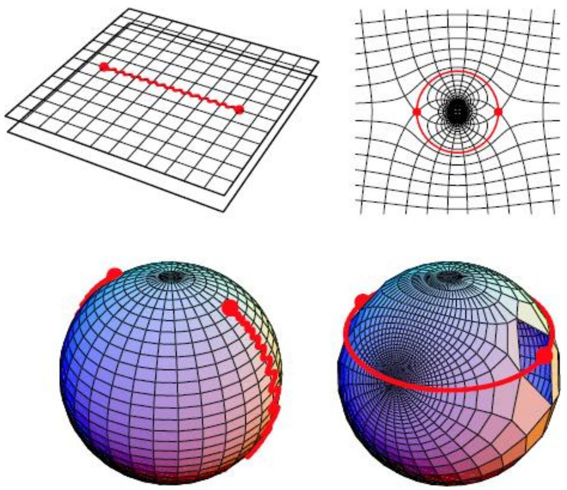
humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Región de Convergencia

- **Ejemplo:** Encontrar la T.z bilateral de las señales de duración finita:
  - $x_1(n) = \{\underline{4}\,,\ \ 2,\ 5,\ -7,\ 0,\ 3\}$
  - $x_2(n) = \{4,\ \ 2,\ \ \underline{5},\ -7,\ 0,\ 3\}$
  - $x_3(n) = \delta(n)$
- **Solución**
  - $X_1(z) = 4 + 2z^{-1} + 5z^{-2} - 7z^{-3} + 3z^{-5}$
    - ROC: $plano\ z,\ \ excepto\ z = 0$
  - $X_2(z) = 4z^2 + 2z^1 + 5 - 7z^{-1} + 3z^{-3}$
    - ROC: $plano\ z,\ \ excepto\ z = 0\ y\ z = \infty$
  - $X_3(z) = 1$
    - ROC: $plano\ z$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

- **Observación**
  - La ROC de señales de **duración finita** es todo el plano z, excepto quizás z=0 y/o $z = \infty$.
  - Desde el punto de vista matemático, la T.z es una forma alternativa de **representar** una señal discreta.



ROC: Parte causal y no-causal

- **Introducción**

  - Encontrar la ROC de X(z) es equivalente a determinar **el rango de valores de $\boldsymbol{r}$** para los que la secuencia $\boldsymbol{x(n)r^{-n}}$ es **absolutamente sumable**.

$$z = re^{j\theta} \Rightarrow \quad X(z)\Big|_{z=re^{j\theta}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) r^{-n} e^{-j\theta n}$$

  - La magnitud de X(z) está dada por**,**

$$|X(z)| = \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) r^{-n} e^{-j\theta n} \right| \le \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| x(n) r^{-n} \right|$$

ROC: Parte causal y no-causal

- **Introducción …**
  - Reorganizando la sumatoria,

$$\left|X(z)\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty}\left|x(-n)r^{n}\right| + \sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{x(n)}{r^{n}}\right|$$

    - Se observan dos componentes: **anticausal** y **causal**
  - Para que exista $X(z)$ ambos componentes deben **converger**:
    - Parte **anticausal:**

$$\sum x(-n)\, r^{n} \leq \infty, \quad 1 \leq n < \infty \quad converge \;\; para \quad r < r_1 < \infty$$

    - Parte **causal:**

$$\sum \frac{x(n)}{r^{n}} \leq \infty, \qquad 0 \leq n < \infty \quad converge \;\; para \quad r > r_2 < \infty$$

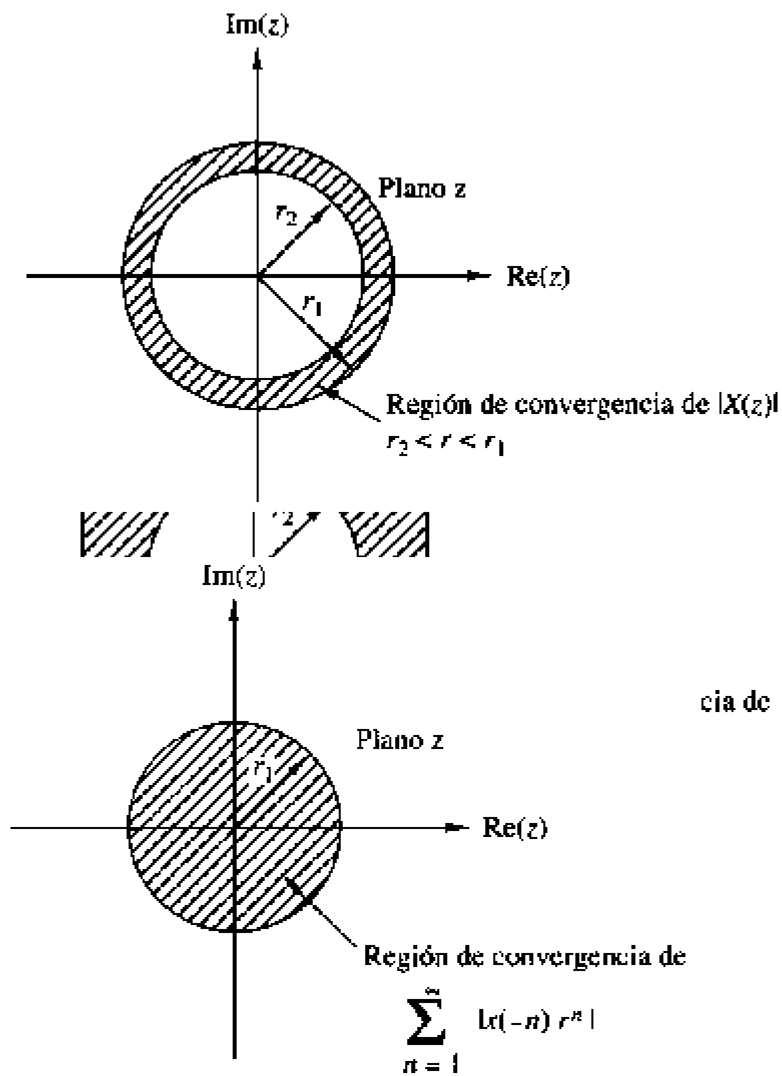
humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

ROC: Parte causal y no-causal

- **ROC Anular**: corresponde a una X(z) con parte causal y anticausal, tal que tal que $\mathbf{r_2} < \mathbf{r} < \mathbf{r_1}$
  - Si $\mathbf{r_2} > \mathbf{r_1} \Rightarrow$ ROC no existe $\Rightarrow$ X(z) no existe

- **ROC Externa a un círculo $\mathbf{r_2}$**: corresponde a una X(z) sólo con parte **causal**.

- **ROC Interna a un círculo $\mathbf{r_1}$**: corresponde a una X(z) sólo con parte **anticausal**.



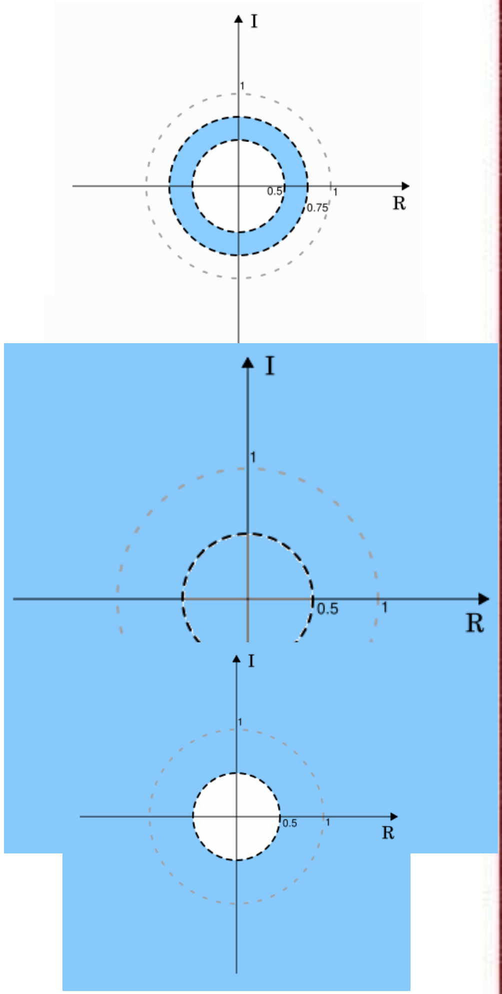
Propiedades de la ROC

■ **Propiedad 1**. Si $x(n)$ es duración *infinita*, La ROC en el plano z puede ser un anillo o un disco o el exterior de un disco, centrados en el origen.

■ **Propiedad 2.** La T. F. de $x(n)$ converge sii la ROC de la T.Z. de $x(n)$ contiene la circunferencia unidad.

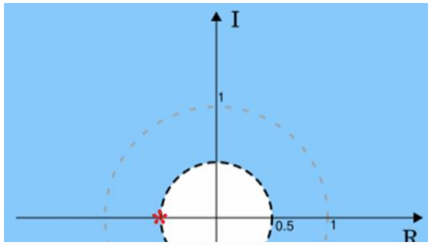
■ **Propiedad 3**. La ROC no contiene ningún polo.

■ **Propiedad 4.** Si $x(n)$ es de duración *finita*, la ROC es el plano z completo, pudiendo exceptuarse los valores $z = 0$ y $z = \infty$.

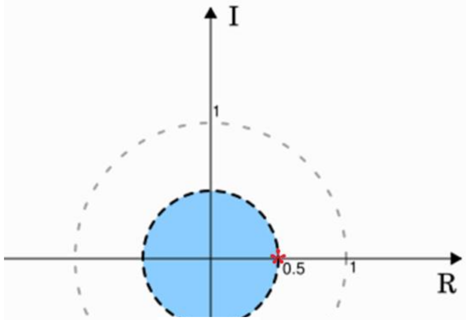


Propiedades de la ROC

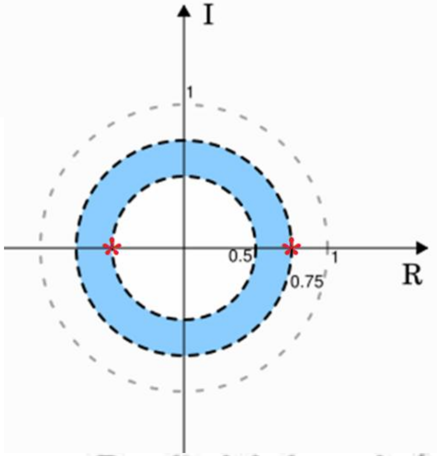
- **Propiedad 5**. Si $x(n)$ es una secuencia limitada por la izquierda , es decir $x(n) = 0$ para $n < N_1 < \infty$, la ROC se extiende hacia afuera desde el *polo finito de mayor* magnitud de $X(z)$ hasta el valor $z = \infty$.



- **Propiedad 6**. Si $x(n)$ es una secuencia limitada por la derecha , es decir $x(n) = 0$ para $n > N_2 > -\infty$, la ROC se extiende hacia adentro desde el *polo finito de menor* magnitud de $X(z)$ hasta el valor $z = 0$.



- **Propiedad 7.** Si $x(n)$ es una secuencia bilateral, la ROC será un anillo en el plano z *limitado en el interior y exterior por un polo* y no contendrá ningún polo.



- **Propiedad 8.** La ROC debe ser una región conexa.

Propiedades de la ROC

PSI Percepción y Sistemas Inteligentes

- **Ejemplo 1.** Determinar X(z) para

$$x(n) = \alpha^n u(n) = \begin{cases} \alpha^n & n \geq 0 \\ 0 & n \leq -1 \end{cases}, \qquad |\alpha| < 1$$

- **Solución**
  - Por definición

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha z^{-1})^n$$

  - Utilizando la serie

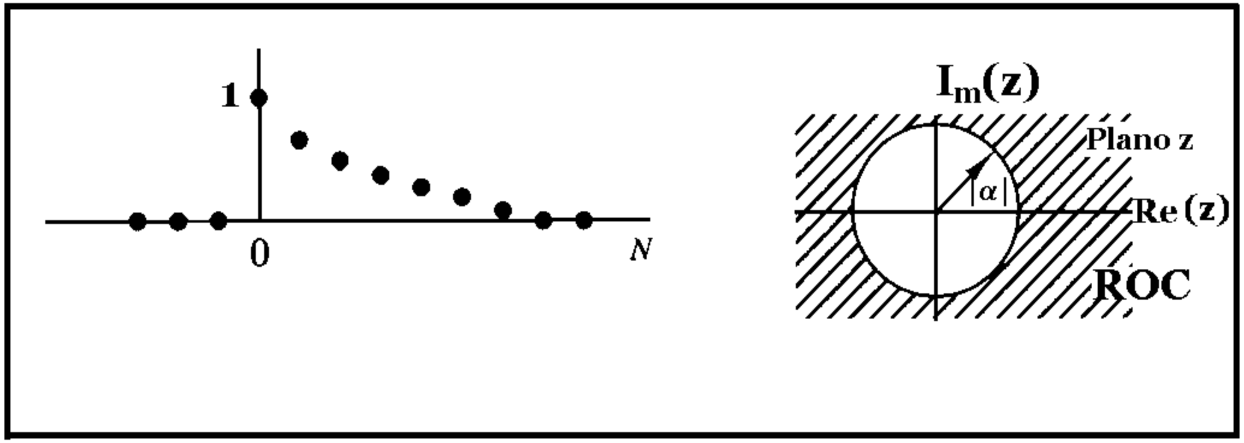
$$1 + A + A^2 + A^3 + \ldots = \frac{1}{(1-A)} \qquad \therefore \; |A| < 1$$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

- **Solución …**
  - Igualando $A = (\alpha\, z^{-1})$, se encuentra:

$$X(z) = \frac{1}{1-\alpha\ z^{-1}} = \quad \therefore \quad \left|\alpha\, z^{-1}\right| < 1 \ \text{ó}\ |z| > |\alpha|$$

  - De donde: ROC: $|z| > |\alpha|$



Propiedades de la ROC

- **Ejemplo 2.** Determinar $\mathrm{X}(z)$ para

$$x(n) = -\beta^n u(-n-1) = \begin{cases} 0 & n \geq 0 \\ -\beta^n & n \leq -1 \end{cases} \qquad |\beta| < 1$$

- **Solución**
  - Por definición

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} \left(-\beta^n\right) z^{-n} = -\sum_{l=1}^{\infty} (\beta^{-1} z)^l \qquad donde \;\; l = -n$$

  - Utilizando la serie

$$A + A^2 + A^3 + \ldots = A\left(1 + A + A^2 + \ldots\right) = \frac{A}{(1-A)} \qquad \therefore \; |A| < 1$$

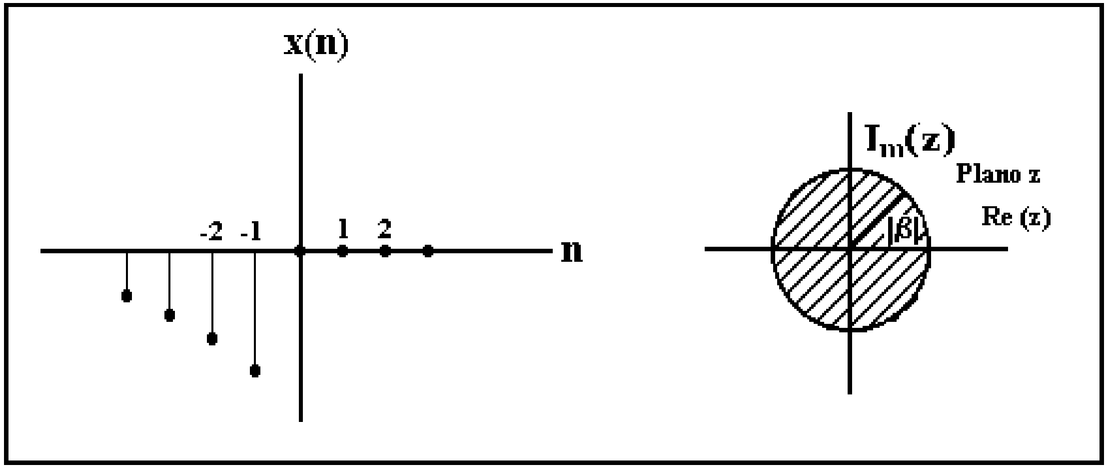
Propiedades de la ROC

PSI Percepción y Sistemas Inteligentes

- **Solución …**
  - Al igualar $A = (\beta^{-1}z)$, se encuentra:

$$X(z) = -\frac{\beta^{-1}z}{1-\beta^{-1}z} = \frac{1}{1-\beta z^{-1}} \quad \therefore \quad \left|\beta^{-1}\, z\right| < 1 \text{ ó } |z| < |\beta|$$

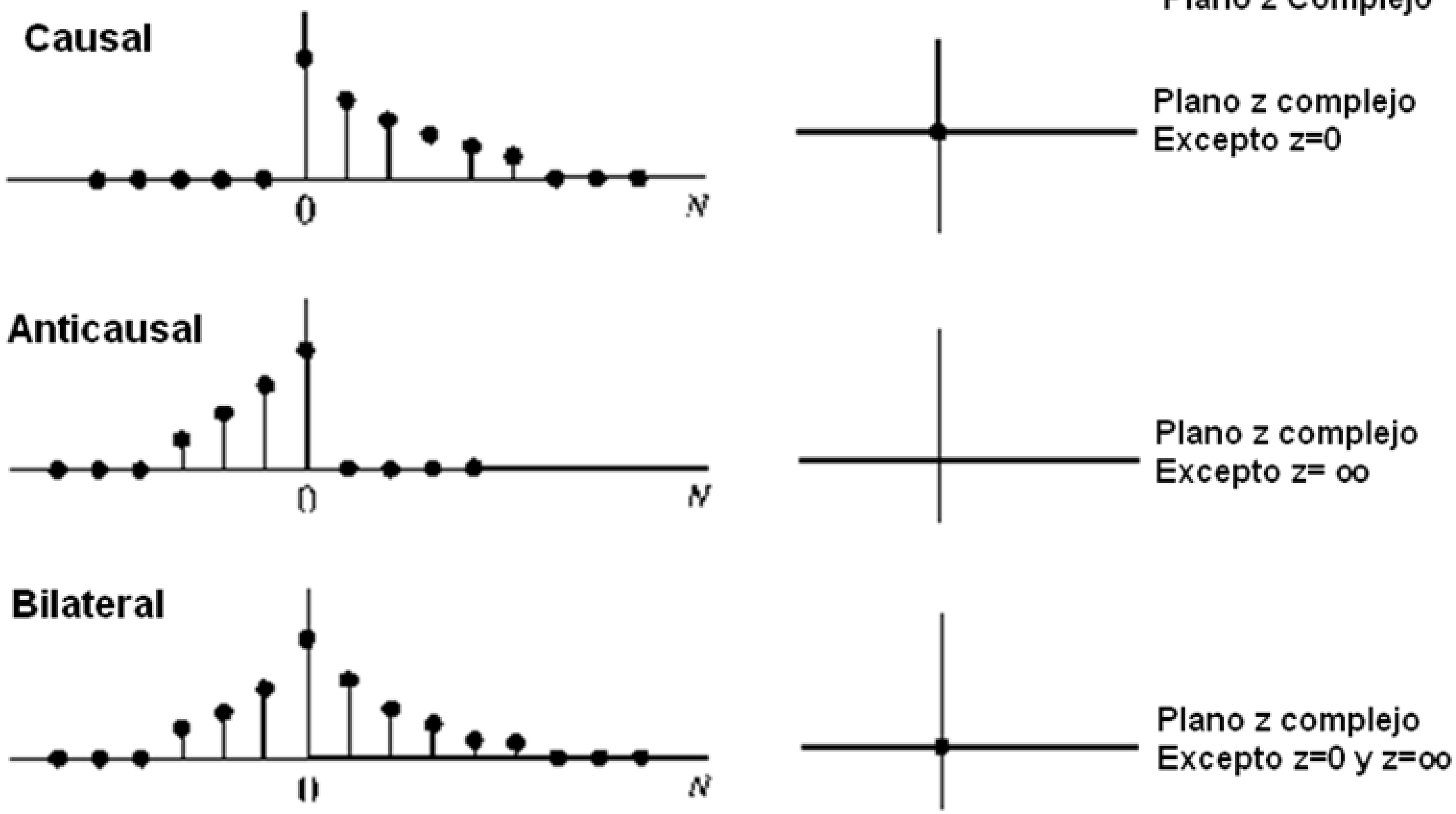
  - De donde: ROC: $|z| < |\beta|$



Señales Típicas y sus ROC

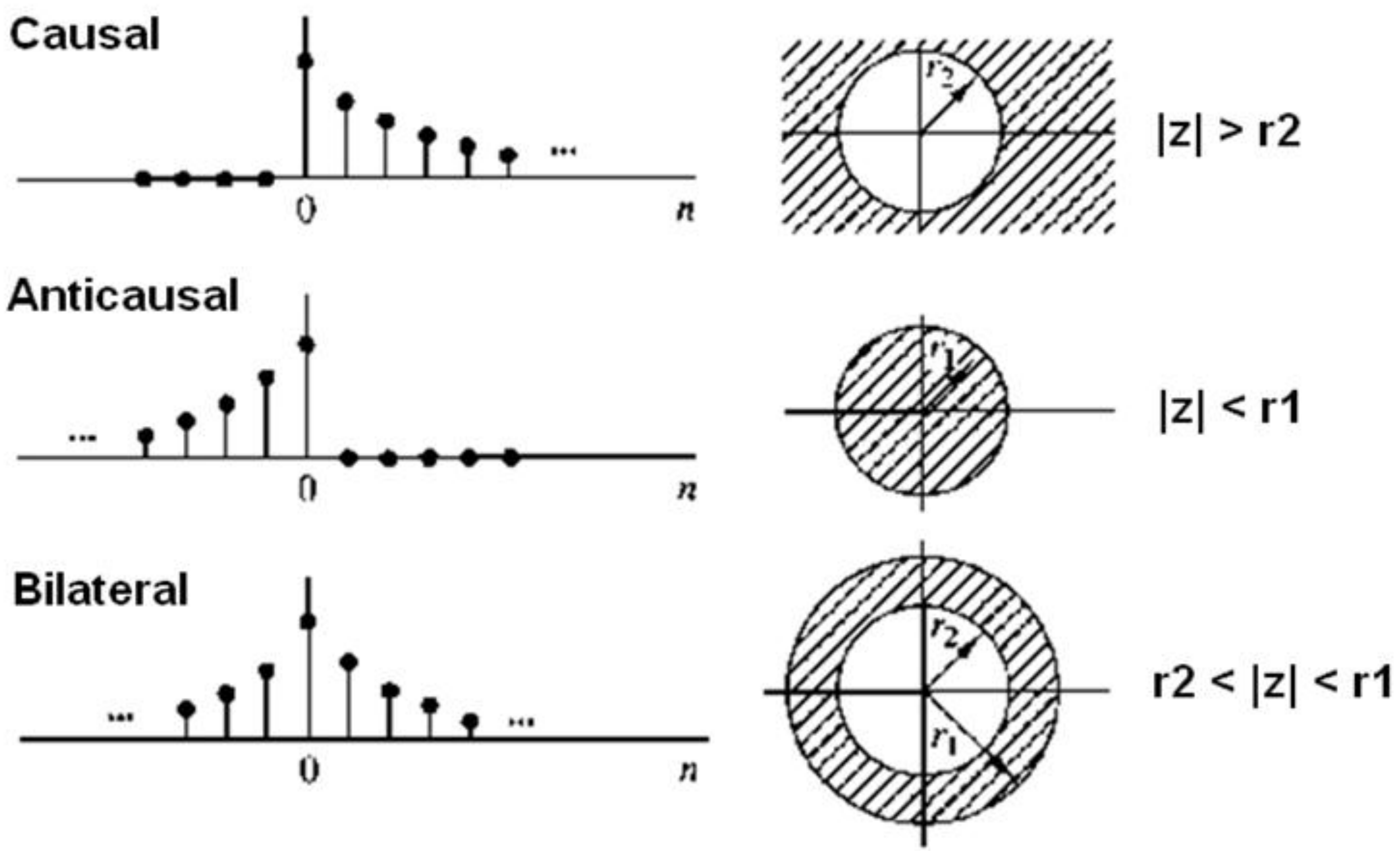
Señales de Duración Finita

Plano z Complejo



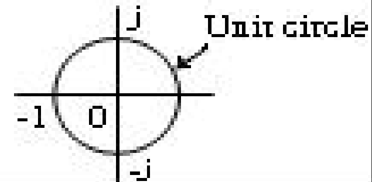
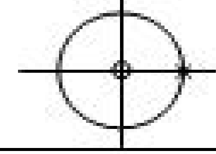
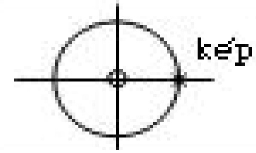
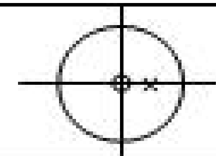
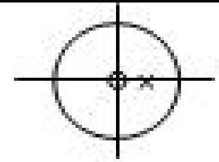
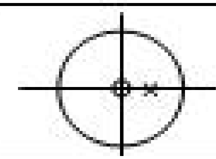
Señales Típicas y sus ROC

Señales de Duración Infinita

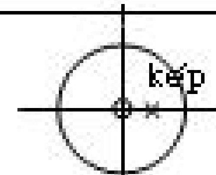
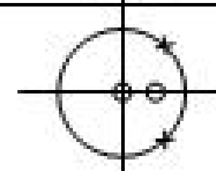
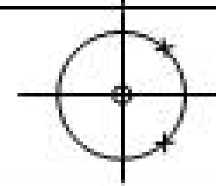
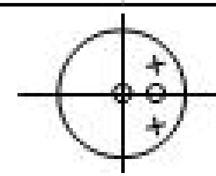
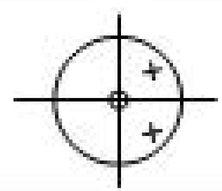


humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Pares Comunes de Transformadas z

Signal $x(n)$	Transform $X(z)$	Pole – zero plot	ROC
Unit sample $\delta(n)$	1		
Unit step $u(n)$	$\dfrac{1}{1-z^{-1}}\ \left(=\dfrac{z}{z-1}\right)$		$\lvert z\rvert > 1$
Unit ramp $r(n) = nu(n)$	$\dfrac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}\ \left(=\dfrac{z}{(z-1)^2}\right)$		$\lvert z\rvert > 1$
Real exponential $a^n\, u(n)$ $0 < a < 1$	$\dfrac{1}{1-az^{-1}}\ \left(=\dfrac{z}{z-a}\right)$		$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
Real exponential $(-a)^n\, u(n)$ $0 < a < 1$	$\dfrac{1}{1+az^{-1}}\ \left(=\dfrac{z}{z+a}\right)$		$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
$-a^n\, u(-n-1)$ (anticausal) $0 < a < 1$	$\dfrac{1}{1-az^{-1}}\ \left(=\dfrac{z}{z-a}\right)$		$\lvert z\rvert < \lvert a\rvert$

Pares Comunes de Transformadas z

Signal $x(n)$	Transform $X(z)$	Pole – zero plot	ROC
$-na^n u(-n-1)$ (anticausal) $0 < a < 1$	$\dfrac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$		$\lvert z\rvert < \lvert a\rvert$
Cosine $(\cos n\omega_0)\,u(n)$	$\dfrac{1-z^{-1}\cos\omega_0}{1-2z^{-1}\cos\omega_0+z^{-2}}$		$\lvert z\rvert > 1$
Sine $(\sin n\omega_0)\,u(n)$	$\dfrac{z^{-1}\sin\omega_0}{1-2z^{-1}\cos\omega_0+z^{-2}}$		$\lvert z\rvert > 1$
Damping Cosine $(a^n\cos n\omega_0)\,u(n)$	$\dfrac{1-az^{-1}\cos\omega_0}{1-2az^{-1}\cos\omega_0+a^2z^{-2}}$		$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
Damping Sine $(a^n\sin n\omega_0)\,u(n)$	$\dfrac{az^{-1}\sin\omega_0}{1-2az^{-1}\cos\omega_0+a^2z^{-2}}$		$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$

Transformada z

Propiedades

Propiedad	Dominio del Tiempo	Dominio z	ROC
Notación	$x(n)$ $x_1(n)$ $x_2(n)$	$X(z)$ $X_1(z)$ $X_2(z)$	$ROC: r_2 < \|z\| < r_1$ ROC_1 ROC_2
Linealidad	$a_1x_1(n) + a_2x_2(n)$	$a_1X_1(z) + a_2X_2(z)$	*Como minimo la intersección de* ROC_1 *y* ROC_2
Desplazamiento en el tiempo	$x(n-k)$	$z^{-k}X(z)$	*La de* $X(z)$*, excepto* $z = 0$ *si* $k > 0$ *y* $z = \infty$ *si* $k < 0$
Escalado en el dominio z	$a^n x(n)$	$X(a^{-1}z)$	$\|a\| r_2 < \|z\| < \|a\| r_1$
Escalado en el tiempo	$x\left(\frac{n}{k}\right)$	$X(z^k)$	$\frac{1}{r_1^k} < \|z\| < \frac{1}{r_2^k}$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Transformada z

PSI Percepción y Sistemas Inteligentes

Propiedades …

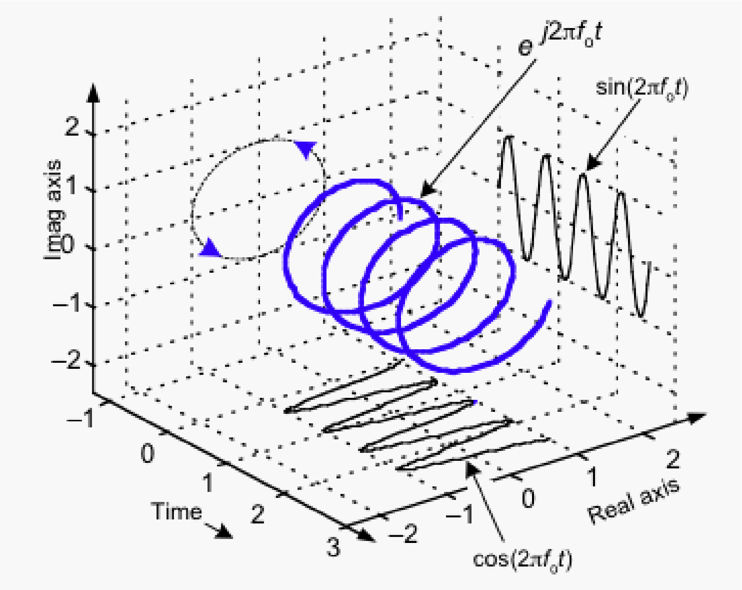
Propiedad	Dominio del Tiempo	Dominio z	ROC
Inversión temporal	$x(-n)$	$X(z^{-1})$	$\frac{1}{r_1} < \lvert z\rvert < \frac{1}{r_2}$
Conjugación	$x^*(n)$	$X^*(z^*)$	ROC
Parte Real	$Re\{x(n)\}$	$\frac{1}{2}[X(z) + X^*(z^*)]$	$Incluye\ a\ la\ ROC$
Parte Imaginaria	$Im\{x(n)\}$	$\frac{1}{2J}[X(z) - X^*(z^*)]$	$Incluye\ a\ la\ ROC$
Diferenciación en el dominio z	$nx(n)$	$-z\frac{dX(z)}{dz}$	$r_2 < \lvert z\rvert < r_1$

Propiedades …

Propiedad	Dominio del Tiempo	Dominio z	ROC
Convolución	$x_1(n) * x_2(n)$	$X_1(z)X_2(z)$	*Como minimo la interseccion de* ROC_1 *y* ROC_2
Correlación	$r_{x_1x_2}(l) = x_1(l) * x_2(-l)$	$R_{x_1x_2}(z) = X_1(z) * X_2(z^{-1})$	*Como minimo la intersección de ROC de* $X_1(z)X_2(z^{-1})$
Teorema del Valor Inicial	*Si* $x(n)$ *es causal*	$x(0) = \lim_{x\to\infty} X(z)$	
Teorema del Valor Final	$\lim_{n\to\infty} x(n)$	$\lim_{z\to 1} ((z-1)X(z))$	*Valido solo si los polos de* $(z-1)X(z)$ *se encuentran dentro del circulo unitaro.*
Multiplicación	$x_1(n)x_2(n)$	$\frac{1}{2\pi j}\oint_C X_1(v)X_2\left(\frac{z}{v}\right)v^{-1}dv$	$r_{1l}r_{2l} < \|z\|r_{1u}r_{2u}$
Relación de Parseval	$\sum^{\infty} x_1(n)x_2^*(n)$	$\frac{1}{2\pi j}\oint_C X_1(v)X_2^*\left(\frac{1}{v^*}\right)v^{-1}dv$	

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

- **Ejemplo 1:**
  - Para la señal compleja $x(n)$ con transformada z dada por $X(z)$ y con una región de convergencia ROC_x, obtener:
    - La Transformada z y la ROC de la parte real de $x(n)$ en términos de $X(z)$ y ROC_x respectivamente



$e^{j2\pi f_o t} = \cos(2\pi f_o t) + j\sin(2\pi f_o t)$

http://www.eetimes.com/document.asp?doc_id=1275580

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

- **Solución:**
  - La parte real de una señal compleja se obtiene como:

$$Re\{x(n)\} = \frac{1}{2}\,[x(n) + x^*(n)]$$

  - De la propiedad de conjugación de la Transformada z:

Propiedad	Dominio del Tiempo	Dominio z	ROC
Conjugación	$x^*(n)$	$X^*(z^*)$	ROC

  - Luego

$$\mathcal{Z}\{Re\{x(n)\}\} = \frac{1}{2}[X(z) + X^*(z^*)], \qquad ROC = ROC_x$$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

- **Ejemplo 2:**
  - **Sin calcular** la Transformada z inversa, determine si el sistema

$$H(z) = \frac{\frac{3}{\sqrt{2}}}{z^{-2} - 6\cos(\pi/4)\, z^{-1} + 9}$$

fue generado por una respuesta impulsional $h(n)$ real.

- **Solución:**
  - Utilizar la Propiedad de Conjugación !!

Propiedad	Dominio del Tiempo	Dominio z	ROC
Conjugación	$x^*(n)$	$X^*(z^*)$	ROC

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Propiedades de la Transformada z

- **Solución …**
  - Implicaciones de la Propiedad de Conjugación

Propiedad	Dominio del Tiempo	Dominio z	ROC

  - Si $x(n)$ es real, se puede concluir que $X(z) = X^*(z^*)$
    - Lo cual significa que si $X(z)$ tiene un polo (cero) en $z = z_0$, también debe tener un polo (cero) en el punto complejo conjugado $z = z_0{}^*$.

- **Solución …**
  - Calculando las raíces del numerador y denominador de $H(z)$ se encuentra que :
    - Ceros $z_{c1,c2} = 0$
    - Polos $z_{p1,p2} = (1/3)e^{\pm j\pi/4}$
  - Por lo tanto Puesto que $H(z)$ tiene ceros reales y un par de polos complejos conjugados, el sistema $h(n)$ es real !!

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Transformadas z Racionales

PSI Percepción y Sistemas Inteligentes

Introducción

- $X(z)$ es una función racional si se puede expresar como el cociente de dos polinomios en z^{-1} (ó z).

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}$$

- Si $a_0 \neq 0$ y $b_0 \neq 0$ se tiene,

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{b_0 z^{-M}}{a_0 z^{-N}} \quad \frac{z^{M} + (b_1/b_0) z^{M-1} + \ldots + (b_M/b_0)}{z^{N} + (a_1/a_0) z^{N-1} + \ldots + (a_M/a_0)}$$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Transformadas z racionales

Introducción …

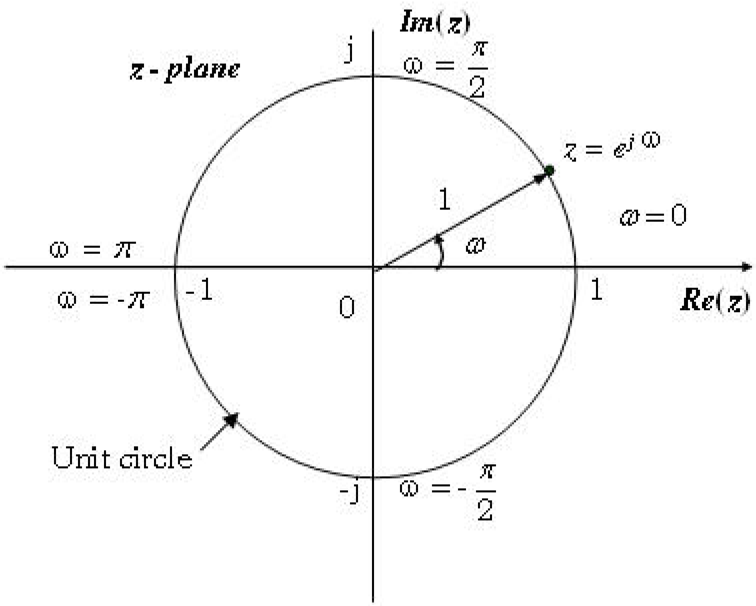
- Dado que N(z) y D(Z) son polinomios, X(z) puede expresarse como un producto de factores:

$$X(z) = \frac{b_0}{a_0} z^{N-M} \frac{\prod_{k=1}^{M} (z - c_k)}{\prod_{k=1}^{N} (z - p_k)}$$

  - $\mathbf{c_k}$ ≅ **Ceros** de X(z): valores de z para los cuales X(z) = 0
  - $\mathbf{p_k}$ ≅ **Polos** de X(z): valores de z para los cuales X(z) = ∞
  - Por definición, la ROC de X(z) **no puede contener ningún polo**.

Introducción

- Existe una relación directa entre la localización de los polos y la forma de la señal discreta correspondiente en el dominio del tiempo.
- El comportamiento característico de las señales causales está influenciado por la ubicación de los polos respecto al círculo unitario en el plano z.



Polos vs. Comportamiento Temporal

Señal con un solo polo

- Una transformada con un solo polo corresponde a una señal exponencial con base real.

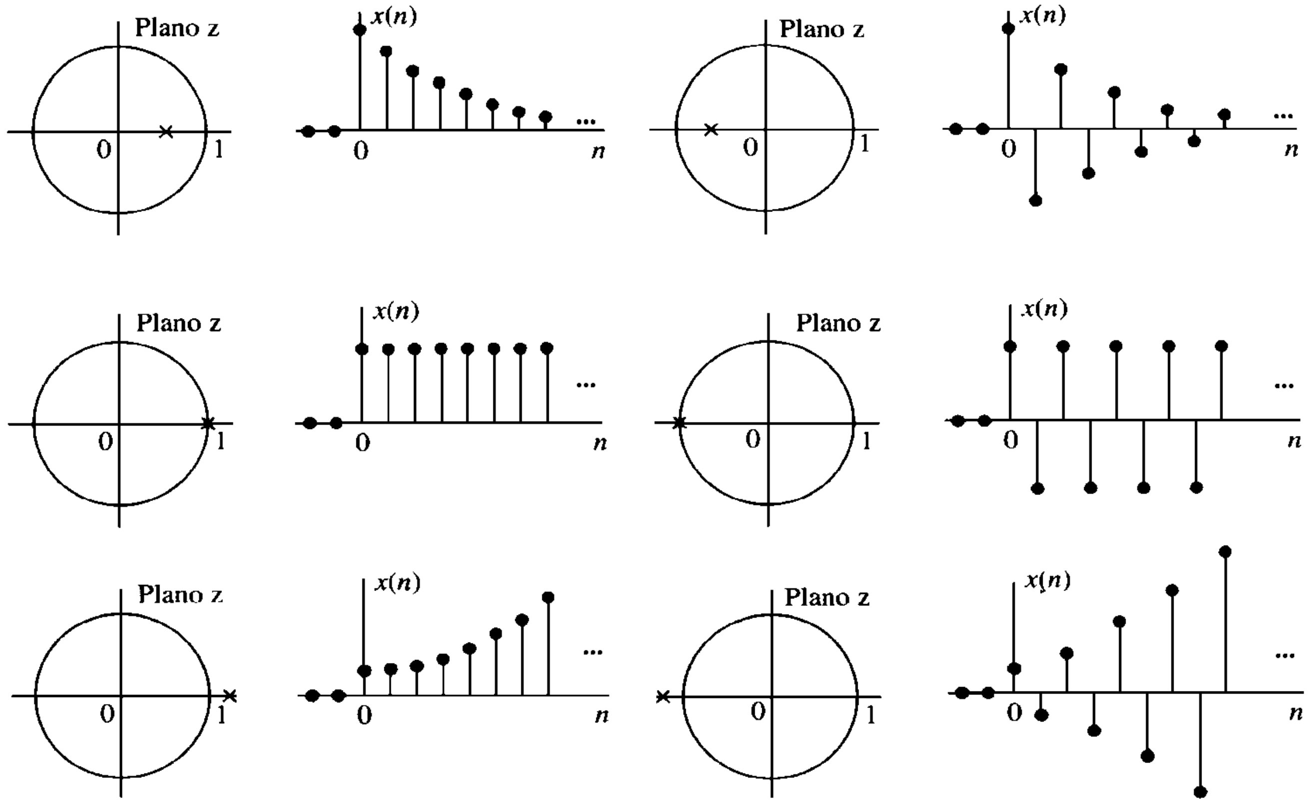
$$x(n) = a^n u(n)$$

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}$$

$$Cero \quad z_1 = 0$$

$$Polo \quad p_1 = a$$

$$ROC : |z| > |a|$$



Polos vs. Comportamiento Temporal

Señal con un polo real doble

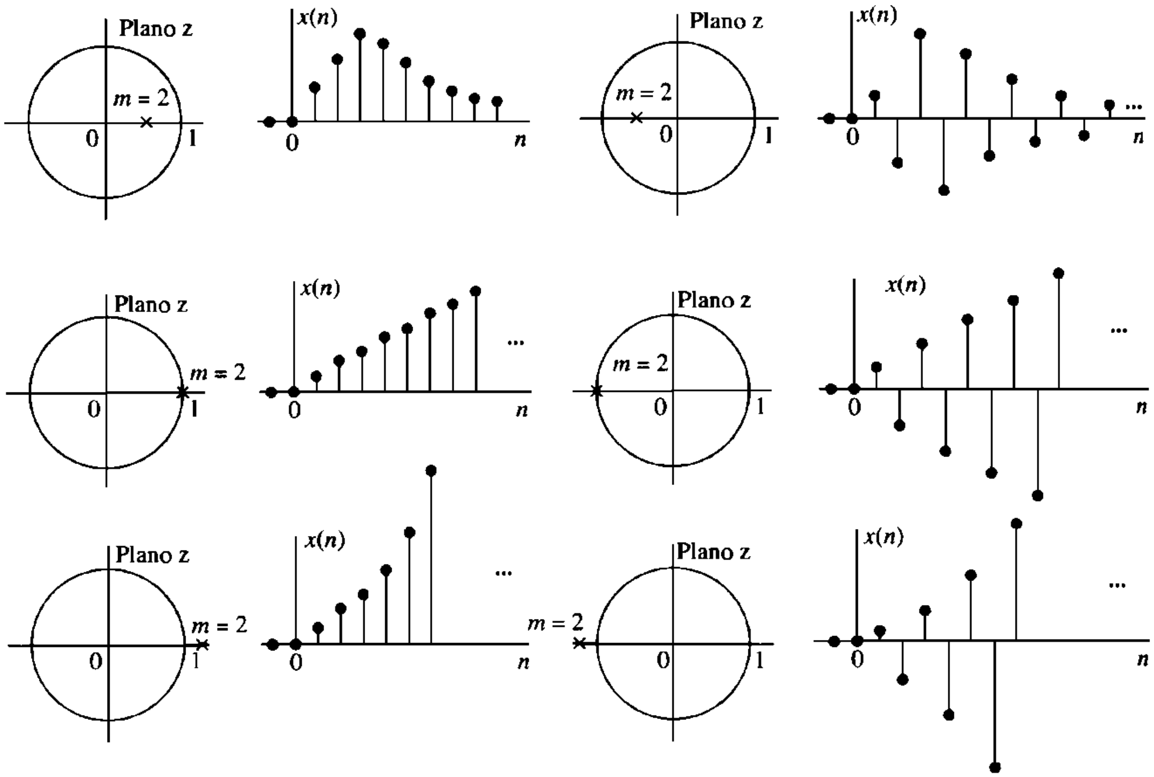
- Una transformada con un polo real doble corresponde a una señal exponencial con base real multiplicada por n.

$$x(n) = n\,a^n u(n)$$

$$X(z) = \frac{az^{-1}}{\left(1 - az^{-1}\right)^2}$$

$$p_{1,2} = a$$

$$ROC: |z| > |a|$$



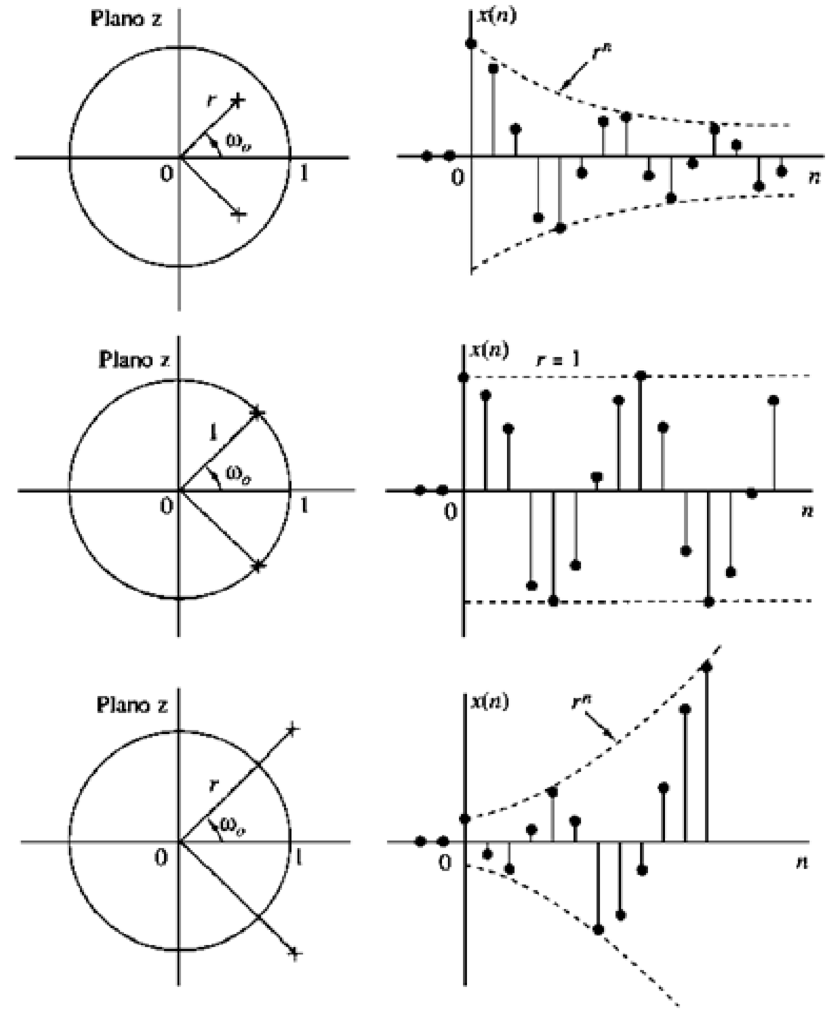
Polos vs. Comportamiento Temporal

- **Señal con un par de polos complejos conjugados**
  - Una transformada con un polo real doble corresponde a una señal sinusoidal ponderada exponencial con base real.

$$x(n) = a^n \cos\left(w_o n\right) u(n)$$

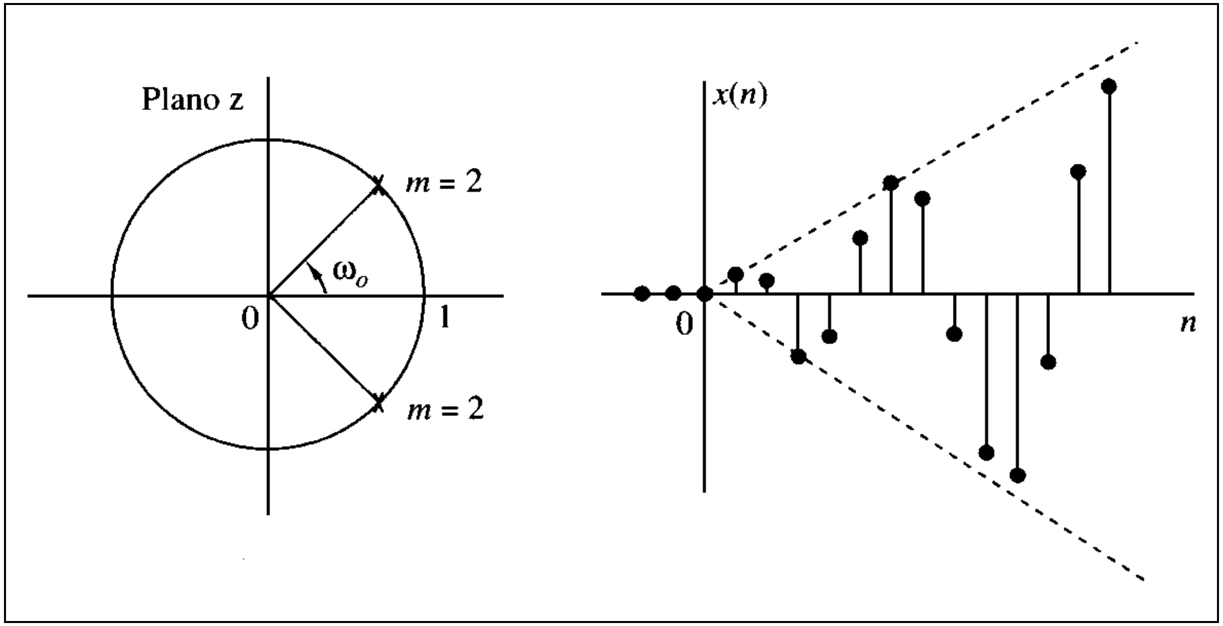
$$X(z) = \frac{1 - a\,z^{-1} \cos w_o}{1 - 2az^{-1} \cos w_o + a^2 z^{-2}}$$

$$ROC : |z| > |a|$$



Señal con una pareja de polos dobles complejos conjugados

- Señal causal correspondiente a un par de polos conjugado doble sobre la circunferencia unidad.



Observaciones

Comportamiento	• Los polos determinan el comportamiento de la señal en el tiempo • Los ceros tienen menor incidencia en las características de la señal • Los efectos de los polos se aplica tanto a señales como a sistemas
Señal decreciente	• Polos dentro del círculo unitario • La tasa de decaimiento es inversamente proporcional a la distancia de los polos
Señal creciente	• Polos por fuera del círculo unitario • Polos múltiples sobre la circunferencia unidad
Señal constante	• Polos sobre la circunferencia unidad

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Función de Transferencia-Sistemas LTI

Definición:

- Para un sistema LTI, se cumple que:

$$y(n) = h(n) * x(n) \xleftrightarrow{z} Y(z) = H(z)X(z)$$

- Luego, la transformada z de $h(n)$ puede determinarse como,

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

- $H(z)$ recibe el nombre de **Función de Transferencia** del sistema, y describe el sistema en el dominio z.

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Función de Transferencia-Sistemas LTI

- Para un sistema descrito por e.d.c.c.

$$y(n) = -\sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k) \xleftrightarrow{z} Y(z) = -\sum_{k=1}^{N} a_k Y(z) z^{-k} + \sum_{k=0}^{M} b_k X(z) z^{-k}$$

- Se obtiene:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{K=0}^{M} b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}} \left\{ \begin{array}{l} Sistema\ \ de\ \ todo\ \ ceros \rightarrow FIR \\ \qquad Si\ a_k = 0\ para\ \ 1 \leq\ k \leq M \Rightarrow H(z) = \sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k} = \frac{1}{z^M} \sum_{k=0}^{M} b_k z^{M-K} \\ Sistema\ \ de\ \ todo\ \ polos \rightarrow IIR \\ \qquad Si\ b_k = 0,\ para\ 1 \leq k \leq M \Rightarrow H(z) = \frac{b_0 z^N}{\sum_{k=0}^{M} a_k z^{N-k}} \quad ,\quad a_0 \equiv 1 \end{array} \right.$$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Transformada z inversa

- **Definición**
  - Procedimiento para pasar del dominio z al dominio temporal.
  - Dada por la integral de contorno que encierra el origen y se encuentra en la ROC de $X(z)$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi\, j} \oint_C X(z) z^{n-1} dz$$

Procedimientos de solución

Inspección de pares de transformadas	Resolución directa de la integral	Expansión en series de potencias	Expansión en fracciones parciales

Transformada z Inversa

Inpección de pares de transformadas

- Técnica que consiste en identificar en una tabla de transformadas las parejas correspondientes.
- La transformada puede expresarse como una suma de términos y encontrar las transformadas inversas de cada uno de ellos a partir de la tabla.
- Para ampliar el alcance de las tablas de transformadas se recurre a las propiedades.

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Transformada z Inversa

- **Ejemplo:** Encontrar la Transf. Inversa de:

$$X(z) = \left(\frac{z^{-3}}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}} \right) \qquad ROC: \ |z| > \left| \frac{1}{2} \right|$$

- De la tabla de pares:

$$a^{n} \ u(n) \overset{z}{\Leftrightarrow} \frac{1}{1 - a z^{-1}} \qquad ROC: \ |z| > |a|$$

- De las propiedades:

$$x(n - n_o) \ \overset{z}{\Leftrightarrow} \ z^{-n_o} X(z)$$

ROC : Región x, adic./supr. de z = 0 ó z = ∞

- Solución:

$$x(n) = \left(\frac{1}{2} \right)^{n-3} u(n-3)$$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Transformada z Inversa

Resolución de la Integral

La integral de contorno se calcula usando el Teorema de Residuo de Cauchy.

Si la derivada de orden (k+1) de $f(z)$ existe dentro de y sobre el contorno C, y $f(z)$ no tiene polos en $z = z_0$, entonces:

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^k}dz = \begin{cases} \dfrac{1}{(k-1)!}\left.\dfrac{\partial^{k-1} f(z)}{\partial z^{k-1}}\right|_{z=z_0} & si\ z_0 \in C \\ 0 & si\ z_0 \notin C \end{cases}$$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Transformada z inversa

- **Ejemplo:** Por resolución de la integral encontrar la Transf. Inversa de:

$$X(z)=\frac{1}{1-a\ z^{-1}} \quad ROC: |z|>|a|$$

- **Solución:** De la definición se tiene:

$$x(n)=\frac{1}{2\pi\ j}\oint_C \frac{z^{n-1}}{1-a\ z^{-1}}dz \quad =\frac{1}{2\pi\ j}\oint_C \frac{z^{n}}{z-a}dz$$

donde C es una circunferencia de radio mayor que $|a|$

- Por comparación, se aprecia que $f(z)=z^n$, $z_0 = a$ y $k=1$.
- Como $X(z)$ es causal se evalúa para $n\geq 0$ y se verifica que z_0 no es polo de $f(z)$.
- Luego:

$$x(n)=f(z_0)=a^n\ u(n)$$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Transformada z inversa

Expansión en series de potencias

La expresión de la T.z es una serie de Laurent en la que los valores de $x(n)$ son los coeficientes de z^{-n}.

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

Si la Transformada z se expresa como una serie de potencias

$$X(z) = \ \dots + x(-2)\, z^{2} + x(-1)\, z^{1} + x(0) \ + x(1)\, z^{-1} + x(2)\, z^{-2} + \cdots$$

Cualquier valor de $x(n)$ se obtiene del coeficiente de la potencia apropiada de z^{-n}

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Transformada z inversa

Expansión en series de potencias

- Cuando $X(z)$ es racional, la expansión se obtiene mediante la división entre los polinomios numerador y denominador.
- Es posible que se obtenga series de potencia finitas o infinitas

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

- **Ejemplo.** Encontrar por expansión **en serie de potencias** de la transformada inversa de:

$$X(z) = \log\left(1 + a\,z^{-1}\right) \quad ROC: |z| > |a|$$

- **Solución:**
  - Usar la serie de potencias para **log(1+x)**, con |x|<1 dada por,

$$X(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} a^n z^{-n}}{n}$$

  - La Transformada inversa se obtiene de los coeficientes:

$$x(n) = \begin{cases} (-1)^{n+1} \dfrac{a^n}{n}, & n \geq 1 \\ 0 & n \leq 0 \end{cases}$$

Transformada z inversa

Expansión en fracciones parciales

Se expresa $X(z)$ como una combinación lineal de transformadas z simples, tal que sus transformadas inversas sean conocidas:

$$X(z) = a_1 X_1(z) + a_2 X_2(z) + \cdots a_k X_k(z)$$

Por la propiedad de linealidad, la transformada se obtiene como la suma de transformadas inversas individuales:

$$x(n) = a_1 x_1(n) + a_2 x_2(n) + \cdots a_k x_k(n)$$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Transformada z inversa

Expansión en Fracciones Parciales …

- Método bastante útil cuando X(z) es una función **racional**.

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_M z^{-M}}{1 + a_1 z^{-1} + \ldots + a_N z^{-N}}$$

- F. Racional **Propia** si $a_N \neq 0$ y $M < N$
- F. Racional **Impropia** si $M \geq N$
  - Una F. Racional **Impropia** siempre **puede expresarse** como la suma de un **polinomio** y una función **racional propia.**

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Expansión en Fracciones Parciales

- **Polos diferentes**: ningún polo se repite
  - Forma de la expansión:

$$X(z) = \sum_{k=0}^{M-N} c_k z^{-k} + \sum_{k=1}^{K_1} \frac{b_k}{1 + a_k z^{-1}} + \sum_{k=1}^{K_2} \frac{b_{0k} + b_{1k} z^{-1}}{1 + a_{1k} z^{-1} + a_{2k} z^{-2}}$$

- **Polos repetidos**: polos con multiplicidad *l*
  - Forma de la expansión:

$$X(z) = \frac{A_{1k}}{z - p_k} + \frac{A_{2k}}{(z - p_k)^2} + \ldots + \frac{A_{lk}}{(z - p_k)^l}$$

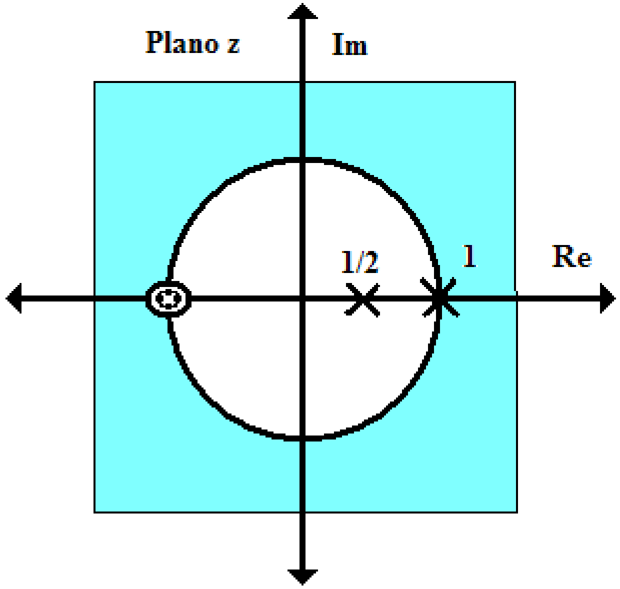
Transformada z inversa

- **Ejemplo.** Encontrar por expansión en *fracciones parciales* la transformada inversa de:

$$X(z) = \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{1 - \frac{3}{2}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}} \qquad ROC: |z| > 1$$

  - Factorizando:

$$X(z) = \frac{\left(1 + z^{-1}\right)^2}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 - z^{-1}\right)}$$



  - Por expansión en fracciones:

$$X(z) = 2 - \frac{9}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)} + \frac{8}{\left(1 - z^{-1}\right)}$$

  - Antitransformando:

$$x(n) = 2\,\delta(n) - 9\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) + 8\,u(n)$$

Transformada z Unilateral

Introducción

- La T.z. **bilateral** exige que las **señales** correspondientes estén **especificadas** para $-\infty < n < \infty$.

- En **sistemas prácticos** la **entrada** se **aplica** en un instante $\mathbf{n_0}$,
  - La **entrada** como la **salida** quedan **especificados** para $\mathbf{n \geq n_0}$, lo que no significa que sean cero para $n < n_0$.
  - **No** puede **utilizarse** la T.z. **bilateral**.

- La T.z. **unilateral** se **aplica** en el análisis de **sistemas causales** especificados por e.d.c.c. y con condiciones iniciales.

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Transformada z Unilateral

Definición

- La transformada z unilateral $X^+(z)$ de una señal $x(n)$ se define como,

$$X^+(z) = Z^+\{x(n)\} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n} \qquad x(n) \xleftrightarrow{z^+} X^+(z)$$

Características

Por ser siempre **cero el límite inferior** de la transformada unilateral, presenta las siguientes características:

- **No** contiene **información** sobre la señal x(n) para valores negativos del tiempo (n<0).

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Transformada z Unilateral

Características …

- Es **única** sólo para señales causales, ya que $x(n) = 0$ para $n < 0$.

- La T.Z. **unilateral** $X^{+}(z)$ de **x(n)** es **idéntica** a la T.Z. **bilateral** X(z) de la señal **x(n) u(n).**

- Puesto que $x(n)\, u(n)$ es causal, **la ROC de X(z)** y $\mathbf{X^{+}}$ **(z) es siempre exterior a un círculo .**

- No es necesario **especificar** la ROC cuando se trabaja con transformadas z unilaterales.

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Transformada z Unilateral

Propiedades

- Todas las **propiedades** de la transformada z **bilateral** se **extienden** a la transformada z **unilateral** con la **excepción** de algunas, entre las cuales está la propiedad de **desplazamiento temporal.**

- La propiedad de **desplazamiento temporal** facilita la **solución** de e.d.c.c. y condiciones iniciales distintas de cero para sistemas recursivos LTI.

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Retardo Temporal

$$si \quad x(n) \xleftrightarrow{z^+} X^+(z) \qquad entonces:$$

$$x(n-k) \xleftrightarrow{z^+} z^{-k}\left[X^+(z) + \sum_{n=1}^{k} x(-n) z^{n}\right] \quad k>0$$

$$Para \quad señales \quad x(n) \quad causales \quad se\ tiene:$$

$$x(n-k) \xleftrightarrow{z^+} z^{-k} X^+(z)$$

- **Ejemplo.** Encuentre la transformada unilateral de:

$$a)\ x_1(n) = a^n\ u(n) \quad , \quad |a| < 1$$

$$b)\ x_2(n) = x(n-2)\ donde\ x(n) = a^n$$

- **Solución:**

$$a) \quad X_1^+(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} \quad = \frac{1}{1 - a\,z^{-1}}$$

$$b) \quad X_2^+(z) = z^{-2}\left[\frac{1}{1 - a\,z^{-1}} + x(-1)z + x(-2)z^2\right]$$

$$con \quad x(-1) = a^{-1}\ \ y\ \ x(-2) = a^{-2}$$

$$X_2^+(z) = \frac{z^{-2}}{1 - a\,z^{-1}} + a^{-1}\ z^{-1} + a^{-2}$$

Transformada z Unilateral

Avance Temporal

$$si \quad x(n) \xleftrightarrow{z^+} X^+(z)$$

$$entonces:$$

$$x(n+k) \xleftrightarrow{z^+} z^k \left[X^+(z) - \sum_{n=0}^{k-1} x(n) z^{-n} \right] \quad k > 0$$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

- **Ejemplo.** Encuentre la transformada unilateral de:

$$x_3(n) = x(n+3) \ \ donde \ \ x(n) = a^n$$

- **Solución:**

$$X_3^+(z) = z^3\left[X^+(z) - x(0) - x(1)z^{-1} - x(2)z^{-2}\right]$$

$$= z^3 \ X^+(z) - x(0)z^3 - x(1)z^2 - x(2)z$$

$$con \quad X^+(z) = \frac{1}{1 - a\,z^{-1}}, \quad x(0) = 1, \ x(1) = a \ \ y \ \ x(2) = a^2$$

$$X_3^+(z) = \frac{z^3}{1 - a\,z^{-1}} - z^3 - a\,z^2 - a^2 z$$

- **Introducción**
  - La T.Z. unilateral es un método indirecto efectivo para la solución de ecuaciones de diferencia con y sin condiciones iniciales.

RESOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE DIFERENCIA

Aplicar la T.z a la ecuación de diferencia y a la señal de entrada.

Obtener una ecuación algebraíca en z y despejar $Y(z)$.

Obtener $y(n)$ mediante la ransformada z inversa.

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Solución de e.d.c.c mediante T.Z.

- **Ejemplo 1:** Determine la repuesta del sistema ante la entrada dada.
  - Sistema: $y(n) = \alpha\, y(n-1) + x(n), \quad |\alpha| < 1$
  - Condición inicial: $y(-1) = 1$
  - Señal de entrada: $x(n) = u(n)$

- **Solución:**
  - Encontrar la Transformada z de la señal de entrada:

$$Z^{+}\{u(n)\} = X^{+}(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}$$

  - Calcular la T.z unilateral a ambos lados de la ecuación,

$$Y^{+}(z) = \alpha\left[z^{-1}Y^{+}(z) + y(-1)\right] + X^{+}(z)$$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

- **Solución…**
  - Reemplazado $X(z)$ y la condición inicial $y(-1)$ se llega a:

$$Y^{+}(z) = \frac{\alpha}{1-\alpha z^{-1}} + \frac{1}{(1-\alpha z^{-1})(1-z^{-1})}$$

  - Antitransformando se obtiene:

$$y(n) = \frac{1}{1-\alpha}(1-\alpha^{n+2})\ u(n)$$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

- **Ejemplo 2.** Para un sistema con entrada $x(n) = u(n)$ y salida $y(n) = a^n u(n+1)$, determine:
  - a) La respuesta impulsional $h(n)$
  - b) Las condiciones de a para que $h(n)$ sea estable.
  - c) La causalidad del sistema

- **Solución**
  - **Solución a)**
    - La Tz de $x(n)$ es: $X(z) = \dfrac{1}{1 - z^{-1}}$
    - $y(n)$ puede reescribirse como: $y(n) = \dfrac{1}{a}\delta(n+1) + a^n u(n)$
    - La Tz de $y(n)$ es: $Y(z) = \dfrac{1}{a} z + \dfrac{1}{1 - a z^{-1}} = \dfrac{\frac{1}{a} z}{1 - a z^{-1}}$

Solución de e.d.c.c mediante T.Z.

- Como $H(z) = Y(z)/X(z)$, se obtiene:

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{1}{a}\left[\frac{z}{1-az^{-1}}-\frac{1}{1-az^{-1}}\right]$$

  - Anti transformando, se llega a:

$$h(n)=\frac{1}{a}\left[a^{n+1}u(n+1)-a^{n}\ u(n)\right]$$

  - Manipulando matemáticamente:

$$h(n)=\frac{1}{a}\delta(n+1)-a^{n}\left(1-\frac{1}{a}\right)u(n)$$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

- **Solución..**

$$h(n) = \frac{1}{a}\left[a^{n+1}\,u(n+1) - a^{n}\;u(n)\right]$$

- **Solución b)**
  - Condición para que $h(n)$ sea estable?:
    - 0< |a| < 1

- **Solución c)**
  - Sistema causal?:
    - No

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co