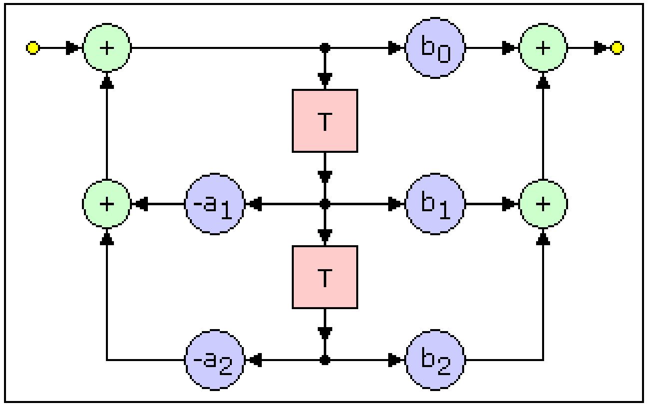
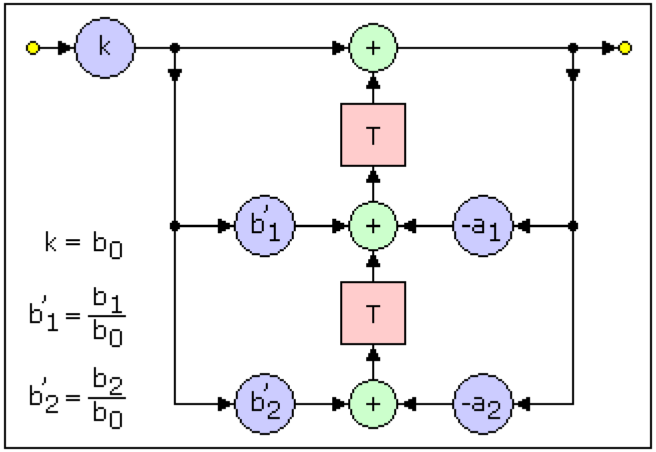
Implementación de Filtros

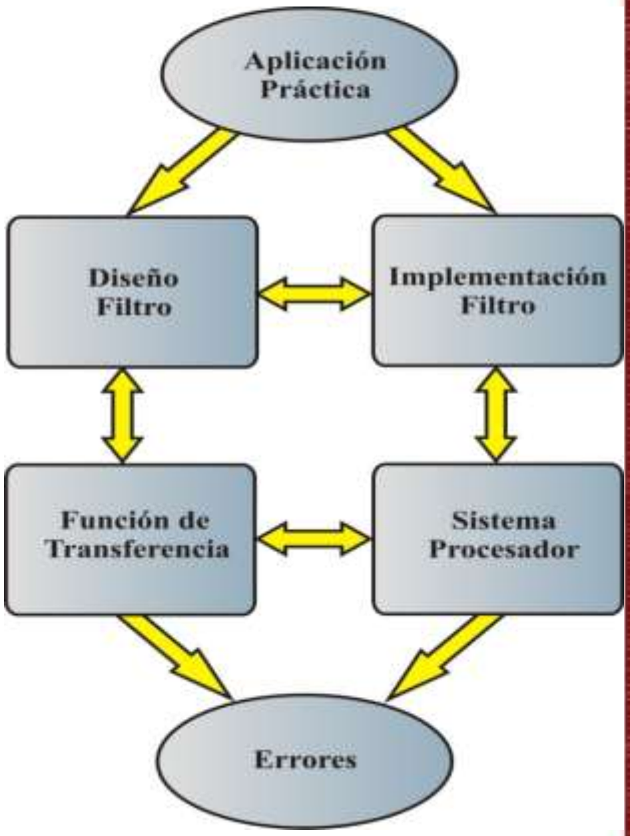
- **Introducción**
  - La implementación es una etapa de igual importancia que el diseño de filtros.
  - La implementación/estructura del filtro influye en:
    - Velocidad
    - Precisión aritmética
    - Arquitectura hardware
  - Las estrategias de diseño influyen en la implementación y viceversa.





Implementación de Filtros

- **Introducción …**
  - Existen interacciones entre diseño e implementación.
    - Son procesos de múltiples etapas que se ejecutan de forma diferente.
    - Distintas h(t), H(z) o H(w) pueden satisfacer las mismas especificaciones de diseño.
    - Distintas estructuras se adaptan a la implementación de un filtro particular.
    - Requiere de pruebas y ajustes para alcanzar la mejor relación entre desempeño y complejidad computacional.



humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Implementación de Filtros

- **Introducción ...**
  - Por qué existen varios tipos de filtros?
    - Ninguno de los tipos de filtros existentes proporcionan una única y mejor solución.
  - Por qué los métodos de diseño conllevan a distintos resultados?
    - Cada metodología proporciona un nivel diferente de cumplimiento a las especificaciones iniciales de diseño.
    - No existe un único y mejor método para diseñar filtros discretos

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Implementación de Filtros

- **Introducción ...**
  - **Cuál método de diseño es mejor**?
    - Aquel que proporcione el cumplimiento más cercano a las especificaciones establecidas.
  - **Qué tipo de filtro es mejor FIR o IIR**?
    - Ninguno de los filtros FIR o IIR supera completamente al otro en todas sus características.
    - Aquel que satisfaga plenamente las especificaciones de diseño prioritarias

- **Introducción ...**
  - **Cuál filtro es más económico**?
    - Aquel que cumpliendo las especificaciones demande menos:
      - Precisión
      - Número de ALUs
      - Velocidad computacional
      - Cantidad de memoria.
      - Compra de nuevas herramientas soft/hard.

- **Generalidades**
  - La realización se centra en:
    - **Ec. Convolución**

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) \quad \text{ó} \quad y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n-k)h(k)$$

    - **Ec. de diferencia**

$$y(n) = -\sum_{k=1}^{N} \frac{a_k}{a_0} y(n-k) + \sum_{k=0}^{M} \frac{b_k}{a_0} x(n-k) \qquad a_0 \neq 0$$

- **Generalidades …**
  - Las operaciones matemáticas de las ecuaciones anteriores se reorganizan para optimizar
    - Complejidad computacional
    - Cantidad de memoria
    - Velocidad de procesamiento
    - Robustez a cuantificación, redondeo, truncamiento, sobreflujo
  - Cada reorganización conduce a un algoritmo, estructura, realización o implementación diferente.

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

- **Generalidades …**
  - **Estructura canónica**
    - Aquella donde el número de retrasos en el diagrama de bloques es igual al orden de la ecuación de diferencias.
  - **Estructura equivalente**
    - Estructuras distintas que tienen la misma función de transferencia
    - Existe un número infinito de estructuras equivalentes.
  - **Estructura Transpuesta**
    - Estructura equivalente obtenida con tres operaciones al diagrama de bloques:
      - Inversión del sentido de las trayectorias
      - Reemplazo de sumadores por bifurcaciones y viceversa.
      - Intercambio de la entrada por la salida

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Implementación de Filtros

- **Generalidades …**
  - **Aritmética precisión infinita**
    - Todas las realizaciones equivalentes arrojan igual resultado.
  - **Aritmética de precisión finita**
    - Se producen resultados diferentes para estructuras equivalentes.
  - **Recomendación**
    - Preferir estructuras con baja sensibilidad a los efectos de longitud de palabra finita.

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Estructuras Filtros FIR

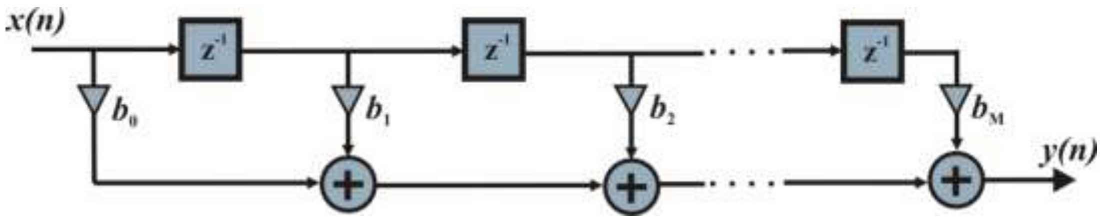
- **Introducción**
  - Debido a que los filtros FIR no presentan polos, las implementaciones son estables y relativamente más simples que las IIR.
  - **Principales estructuras**
    - Forma directa
    - Cascada
    - Fase lineal
    - Muestreo en frecuencia
    - Celosia

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Estructuras Filtros FIR

- **Realización en forma directa**
  - Se implementa directamente la ecuación de diferencia

$$y(n) = b_0\, x(n) + b_1\, x(n-1) + b_2\, x(n-2) + \cdots + b_M\, x(n-M)$$



  - No hay variantes por no contar con retroalimentación
  - Requiere M elementos de memoria, M+1 multiplicaciones y M sumas.

Estructuras Filtros FIR

- **Ejemplo:** Obtener la estructura en forma directa del filtro

$$H(z) = 10^{-2}\,[-6.4942\ - 4.5721z^{-1} + 9.9484z^{-2} + 29.6137z^{-3} + 38.8594\ z^{-4} + 29.6137z^{-5} + 9.9484z^{-6} - 4.5721z^{-7} - 6.4942\,z^{-8}]$$

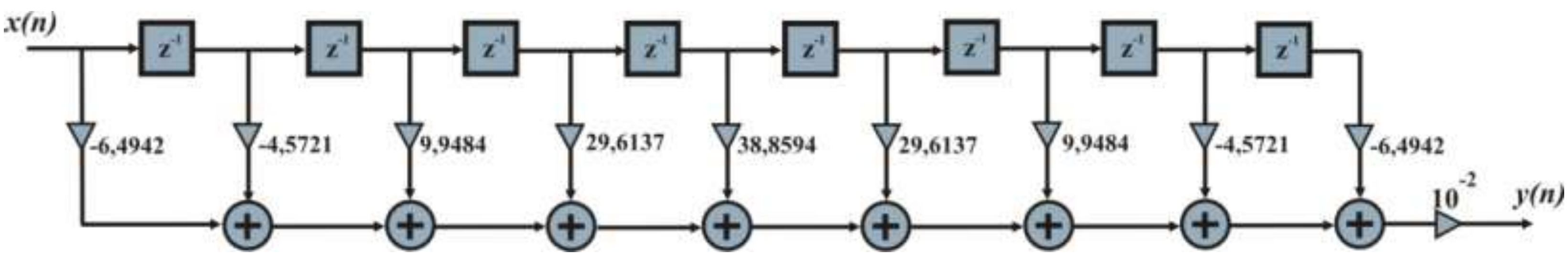
- **Solución:**
  - Ecuación de diferencia

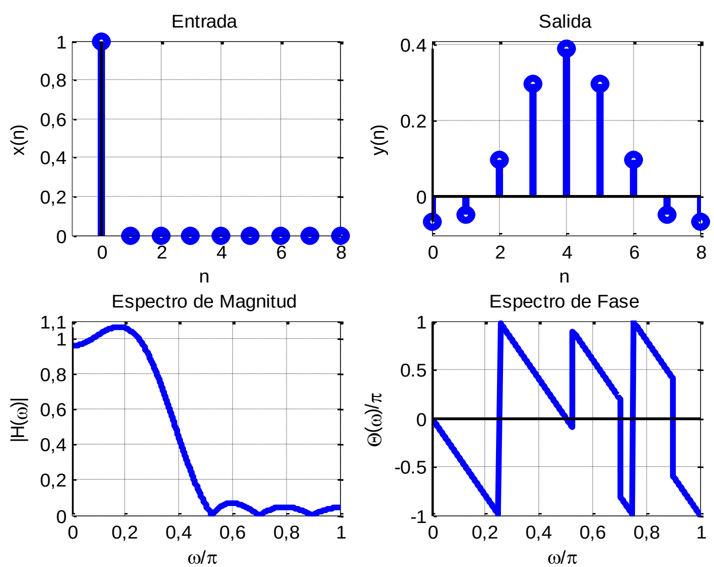
$$y(n) = 10^{-2}[-6.4942\ x(n) - 4.5721x(n-1) + 9.9484x(n-2) + 29.6137x(n-3) + 38.8594\ x(n-4) + 29.6137x(n-5) + 9.9484x(n-6) - 4.5721x(n-7) - 6.4942\ x(n-8)]$$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Estructuras Filtros FIR

Solución…





Estructuras Filtros FIR

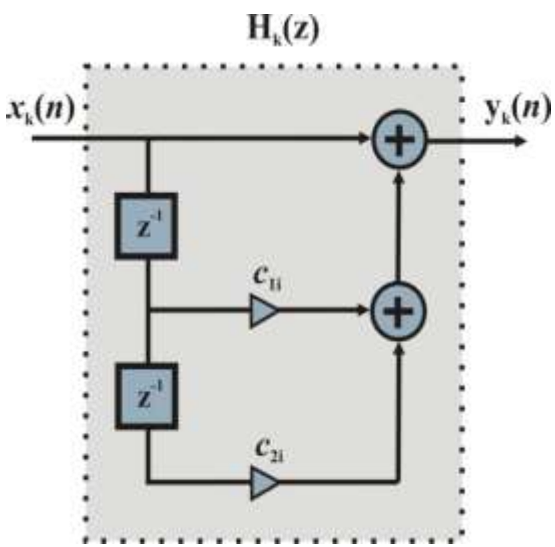
- **Realización en cascada**
  - Descompone H(z) en factores de primer o segundo orden y los conecta en cascada.

$$H(z) = b_0 \prod_{i=1}^{L} H_i(z) \qquad\qquad H_i(z) = 1 + c_{1,i}\, z^{-1} + c_{2,i}\, z^{-2}$$

  - donde, $L = \frac{M}{2}$ si M es par ó $L = \frac{M+1}{2}$ si M es impar, en cuyo caso $c_{2,i} = 0$.
  - Dependiendo del agrupamiento de las raíces, se obtendrán diferentes subsistemas de segundo orden.

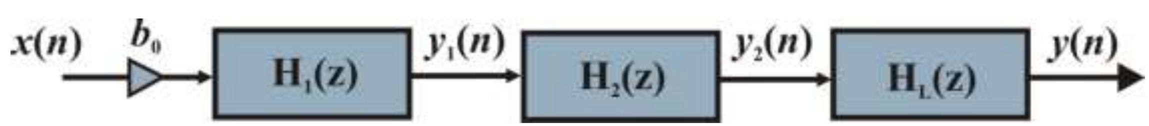
Estructuras Filtros FIR

Realización en cascada …



$$H_i(z) = 1 + c_{1,i}\, z^{-1} + c_{2,i}\, z^{-2}$$

$$H(z) = b_0 \prod_{i=1}^{L} H_i(z)$$



Estructuras Filtros FIR

- **Ejemplo:** Obtener la estructura en cascada

$$H(z) = 1 - 4{,}4\mathrm{z}^{-1} + 3{,}78\mathrm{z}^{-2} + 50{,}22\mathrm{z}^{-3} - 182.7975\mathrm{z}^{-4} + 127{,}23\mathrm{z}^{-5} + 103.0925\mathrm{z}^{-6} - 63{,}7\mathrm{z}^{-7}$$

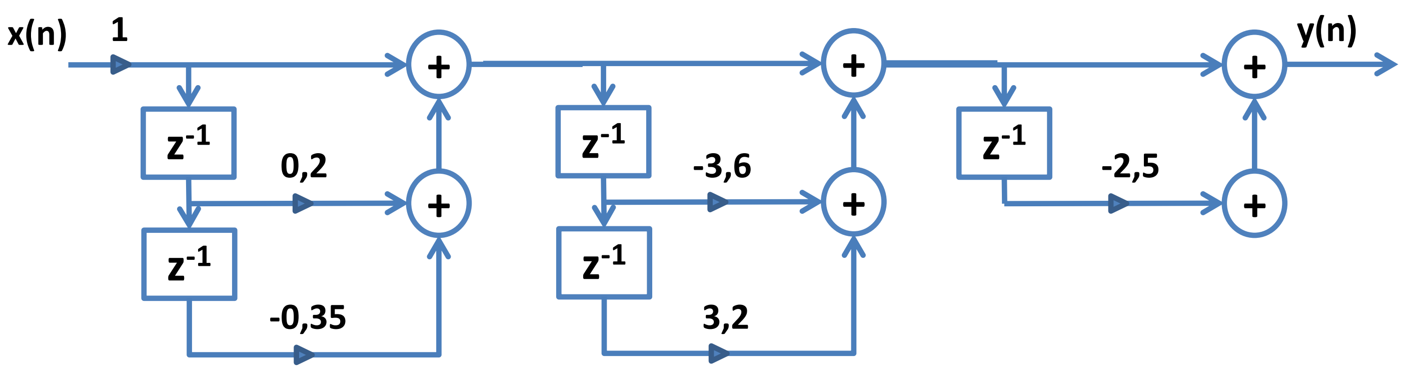
- **Solución:**
  - Descomposición en factores de segundo orden

$$b0 = 1 \qquad H_1(z) = 1 + 0{,}2z^{-1} - 0{,}35z^{-2}$$

$$H_2(z) = 1 - 3{,}6z^{-1} + 3{,}2z^{-2} \qquad H_3(z) = 1 - 2{,}5z^{-1}$$

Estructuras Filtros FIR

- **Solución…**
  - Diagrama de bloques:



Estructuras Filtros FIR

- **Realización de fase lineal**
  - La característica de linealidad está presente en la fase $H(w)$ de los filtros FIR.
    - Se aprovecha la simetría de los coeficientes $h(n)$ y $H(z)$ para reducir el número de multiplicaciones en su implementación.
  - La fase de $H(w)$ de un filtro FIR de fase lineal está dada por:

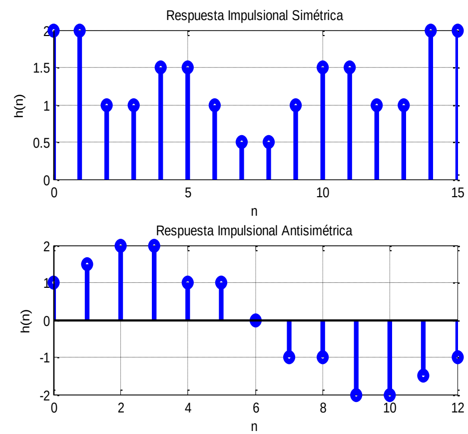
$$\Theta(w) = \alpha - \beta w, \qquad -\pi < w \leq \pi \qquad \alpha = \begin{cases} 0 \\ \pm\frac{\pi}{2} \end{cases} \text{ y } \beta \in \mathbb{R}$$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Estructuras Filtros FIR

Realización de fase lineal …

- La fase lineal implica la condición **de simetría en $h(n)$:**



$$h(n) = \begin{cases} h(M-n), & \alpha = 0 \\ -h(M-n), & \alpha = \pm\dfrac{\pi}{2}, \end{cases}$$

$$\beta = \frac{M}{2}, \qquad 0 \le n \le M$$

- Lo que se refleja en los coeficientes, tal que:

$$y(n) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + b_2 x(n-2) + \cdots + b_2 x(n-M-2) + b_1 x(n-M-1) + b_0 x(n-M)$$

Estructuras Filtros FIR

Realización de fase lineal …

- Al reagrupar se obtienen ecuaciones de diferencia con un 50% menos de multiplicaciones que las realizaciones en forma directa o en cascada.
- M par

$$
\begin{aligned}
y(n) = {} & b_0[x(n) + x(n-M)] + b_1[x(n-1) + x(n-M-1)] \\
& + b_2[x(n-2) + x(n-M-2)] + \cdots \\
& + b_{\frac{M}{2}-1}\left[x\left(n-\frac{M}{2}+1\right) + x\left(n-\frac{M}{2}-1\right)\right] + b_{M/2}\,x\left(n-\frac{M}{2}\right)
\end{aligned}
$$

- M impar

$$
\begin{aligned}
y(n) = {} & b_0[x(n) + x(n-M)] + b_1[x(n-1) + x(n-M-1)] \\
& + b_2[x(n-2) + x(n-M-2)] + \cdots \\
& + b_{\frac{M-1}{2}}\left[x\left(n-\frac{M-1}{2}\right) + x\left(n-\frac{M+1}{2}\right)\right]
\end{aligned}
$$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Estructuras Filtros FIR

- **Ejemplo.** Obtener la estructura en forma directa FIR de fase lineal del sistema,

$$y(n) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + b_2 x(n-2) + b_3 x(n-3) \\ + b_2 x(n-4) + b_1 x(n-5) + b_0 x(n-6)$$

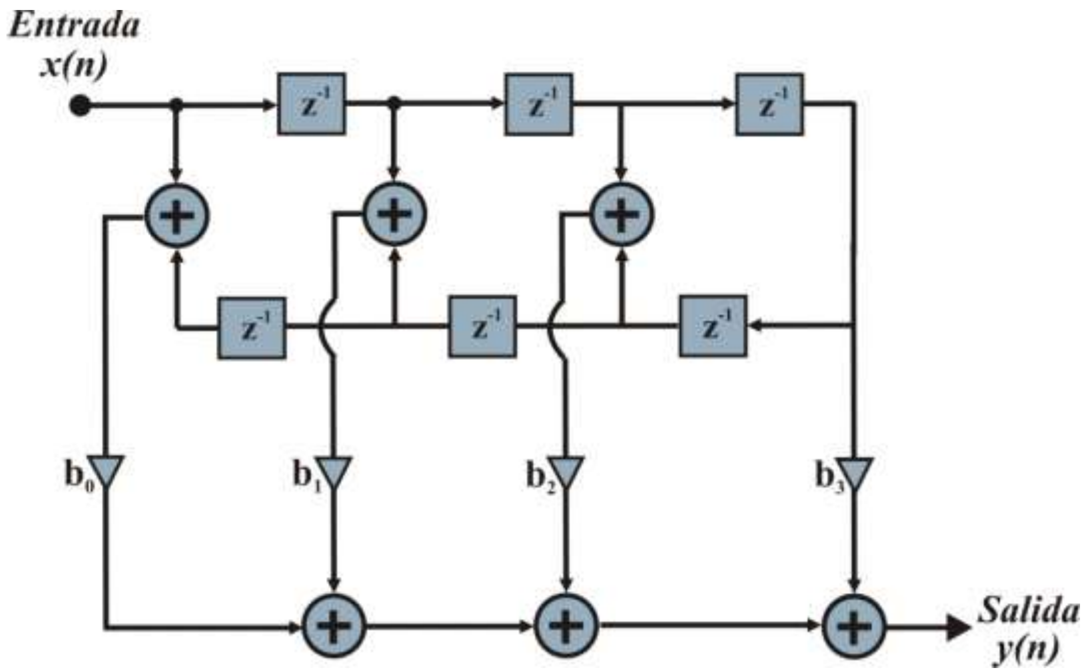
- **Solución.** Al reagrupar se obtiene,

$$y(n) = b_0[x(n) + x(n-6)] + b_1[x(n-1) + x(n-5)] \\ + b_2[x(n-2) + x(n-4)] + b_3 x(n-3)$$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

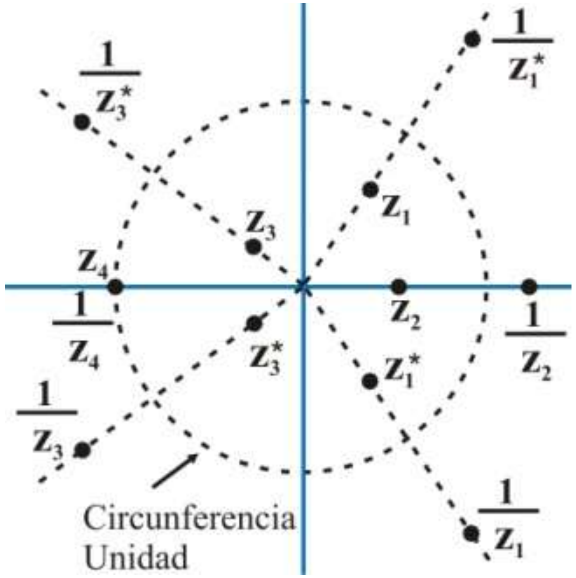
Estructuras Filtros FIR

- **Solución.** Diagrama de bloques,



Realización de fase lineal …

- La fase lineal implica que los ceros de $H(z)$ se producen **en pares recíprocos**, distribuidos simetricamente en el plano z.
  - Para un filtro FIR causal y de fase lineal se cumple que:
    - Si z_i y z_i^* son un par de ceros complejos conjugados de $H(z)$
    - $\frac{1}{z_i}$ y $\frac{1}{z_i^*}$ también son ceros de $H(z)$.



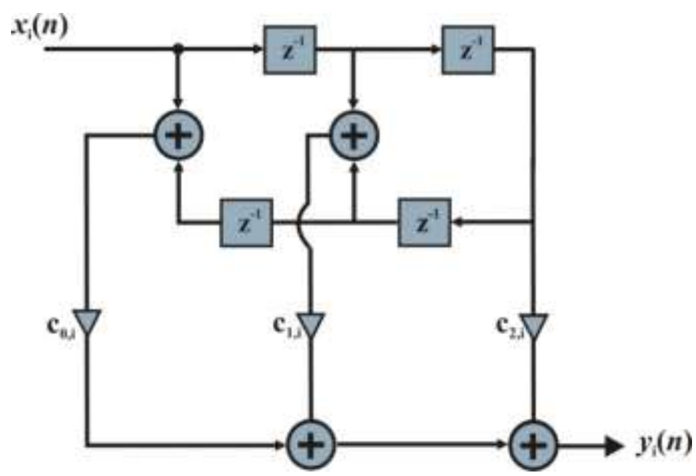
humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Estructuras Filtros FIR

Realización de fase lineal …

- Estos cuatro ceros generan un subsistema de cuarto orden:

$$H_i(z) = c_{0,i}(1 + z^{-4}) + c_{1,i}\,(z^{-1} + z^{-3}) + c_{2,i}\,z^{-2}$$



- Utilizado como bloque básico para implementar sistemas de órdenes superiores mediante la interconexión en cascada.

Estructuras Filtros FIR

- **Ejemplo.** Obtener la estructura de fase lineal mediante la interconexión en cascada de subsistemas de *cuarto orden* del filtro FIR,

$$H(z) = 1 - 5.8868z^{-1} + 17.3269z^{-2} - 31.3771z^{-3} + 38.0705z^{-4} - 31.3771z^{-5} + 17.3269z^{-6} - 5.8868z^{-7} + z^{-8}$$

- **Solución**
  - El sistema presenta 8 ceros

$$z_1 = \frac{1}{2}(1+j), \quad z_2 = \frac{1}{2}(1-j), \quad z_3 = 1-j\,, \quad z_4 = 1+j$$

$$z_5 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1+j), \quad z_6 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1-j), \quad z_7 = \frac{\sqrt{3}}{2}(1-j), \quad z_8 = \frac{\sqrt{3}}{2}(1+j)$$

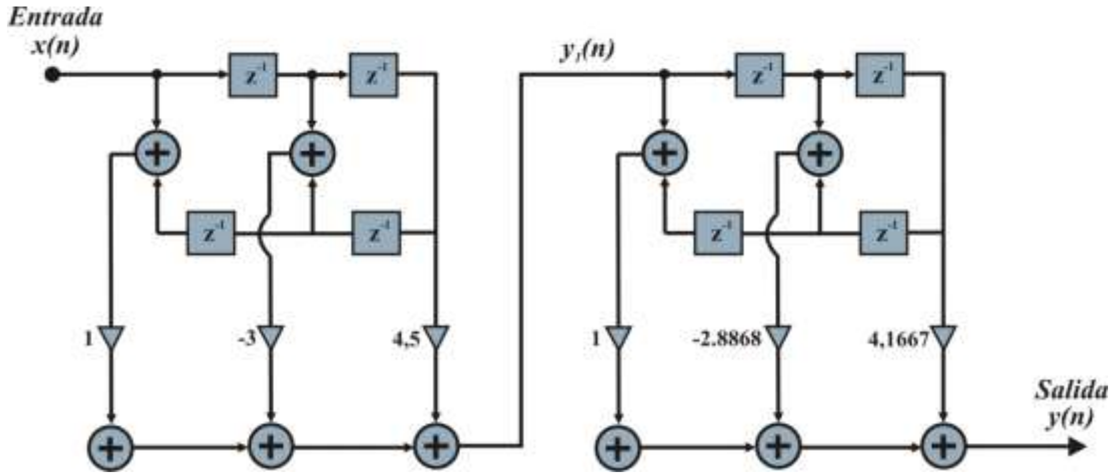
Estructuras Filtros FIR

- **Solución…**
  - Se obtienen dos subsistemas de cuarto orden:

$$H_{s1}(z) = 1 - 3z^{-1} + 4{,}5z^{-2} - 3\,z^{-3} + z^{-4}$$

$$H_{s2}(z) = 1 - 2{,}8868z^{-1} + 4{,}1667z^{-2} - 2{,}8868\,z^{-3} + z^{-4}$$

  - Diagrama de bloques



Realización de Muestreo en Frecuencia

- Emplea valores de $H(w)$ en lugar de $h(n)$ como parámetros de la estructura.
- $H(z)$ para un filtro FIR de orden N se obtiene como:

$$H(z) = \frac{1}{M+1}\sum_{n=0}^{M}\left[\sum_{k=0}^{M} H(w_k)e^{jw_k n}\right]z^{-n}$$

- Donde, $H(w_k) = \sum_{n=0}^{M} h(n)e^{-jw_k n}$,

Con $k = 0,1,\ldots,M$ y $w_k = \frac{2\pi}{M+1}(k+\alpha)$ y $\alpha = \begin{cases} 0 \\ 1/2 \end{cases}$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Estructuras Filtros FIR

Realización de Muestreo en Frecuencia …

- Manipulando $H(z)$ se obtiene:

$$H(z) = \frac{1 - z^{-(M+1)}\ e^{j2\pi\alpha}}{M+1} \sum_{k=0}^{M} \frac{H(w_k)}{1 - e^{j2\pi(k+\alpha)/(M+1)}\ z^{-1}}$$

- La nueva expresión puede interpretarse como la interconexión en cascada de dos subsistemas:

$$H(z) = H_1(z)H_2(z)$$

- **Realización de Muestreo en Frecuencia …**

  - Donde, $H_1(z)$es un filtro todo ceros dado por,

$$H_1(z) = \frac{1}{M+1}\left[1 - z^{-(M+1)}\, e^{j2\pi\alpha}\right]$$

    - Ubicación de ceros: $q_k = e^{j2\pi(k+\alpha)/(M+1)},\ \forall\, k = 0,1,..\ M$

  - Y $H_2(z)$ es una función de transferencia, compuesta de $M+1$ filtros de un solo polo interconectados en paralelo, dada por,

$$H_2(z) = \sum_{k=0}^{M} \frac{H(w_k)}{1 - e^{j2\pi(k+\alpha)/(M+1)}\ z^{-1}}$$

    - Ubicación de polos: $p_k = e^{j2\pi(k+\alpha)/(M+1)},\ \forall\, k = 0,1,..\ M$

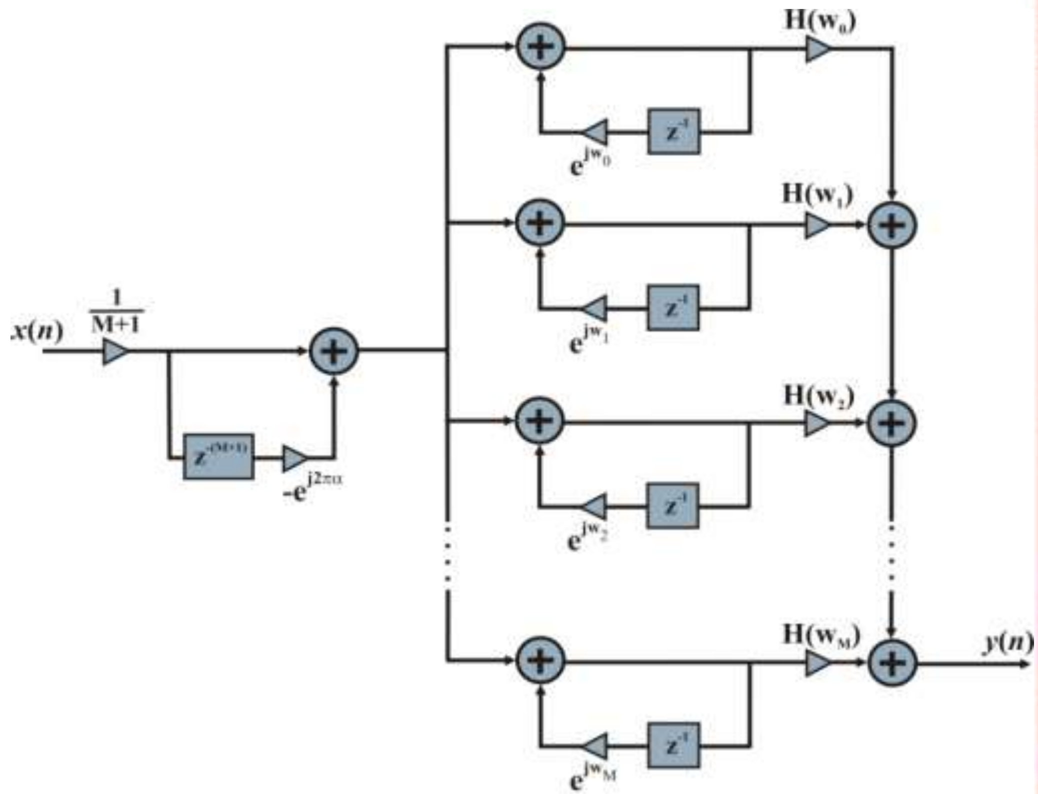
humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Estructuras Filtros FIR

PSI Percepción y Sistemas Inteligentes

Realización de Muestreo en Frecuencia …

- Estructura básica de muestreo en frecuencia
  - **Problema:** presencia de coeficientes complejos.



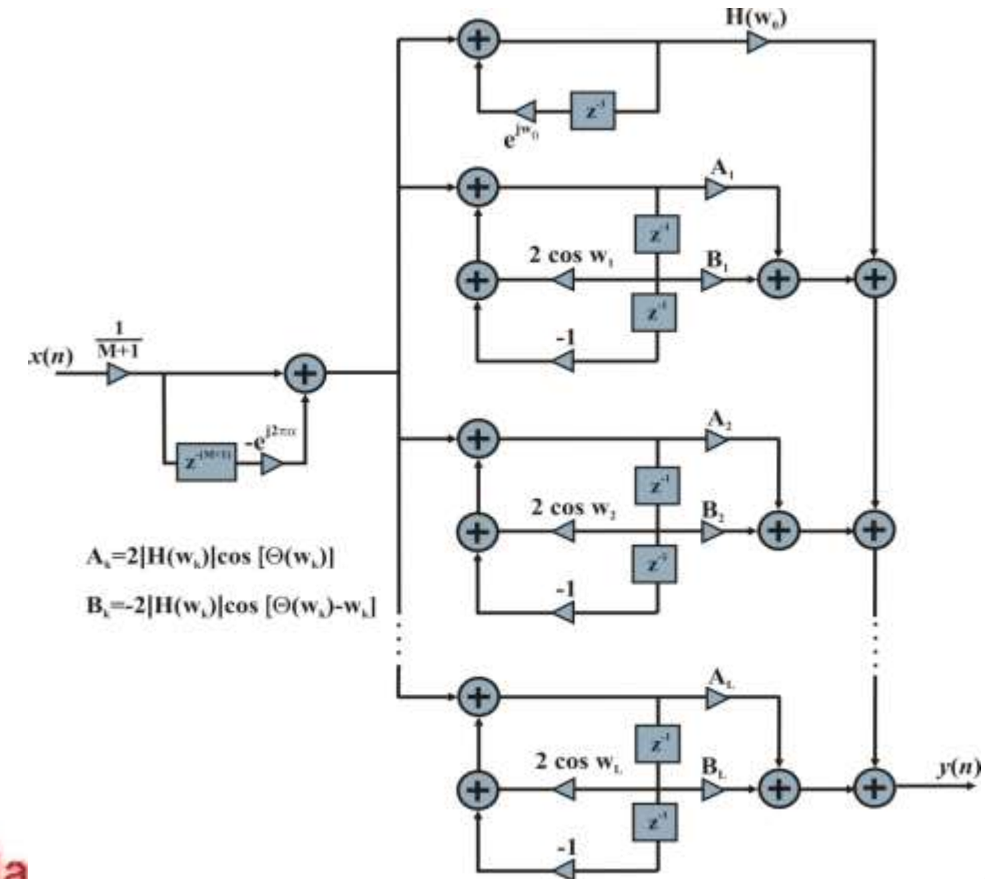
humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

- **Realización de Muestreo en Frecuencia …**
  - **Solución**: incluir las condiciones de simetría de los polos de $H_2(z)$ y de la T.F. de tiempo discreto $H(w)$.
    - Aritmética real,
    - Menos multiplicaciones y sumas que la realización en forma directa.

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Para *M* par

$$H_2(z) = \frac{H(w_0)}{1 - e^{jw_0}z^{-1}} + 2\sum_{k=1}^{\frac{M}{2}} \frac{|H(w_k)|[cos[\Theta(w_k)] - cos[\Theta(w_k) - w_k]z^{-1}]}{1 - 2cos(w_k)z^{-1} + z^{-2}}$$



Percepción y Sistemas Inteligentes

Para *M* impar

$$H_2(z) = \frac{H(w_0)}{1-e^{jw_0}z^{-1}} + \frac{H\left[w_{(M+1)/2}\right]}{1-e^{jw\left(\frac{M+1}{2}\right)}z^{-1}} + 2\sum_{k=1}^{\frac{M-1}{2}} \frac{|H(w_k)|\left[cos[\Theta(w_k)]-cos[\Theta(w_k)-w_k]z^{-1}\right]}{1-2cos(w_k)z^{-1}+z^{-2}}$$