

## ■ Introducción

- La **función de transferencia**  $H(z)$  se emplea para obtener la **respuesta de un sistema** a una entrada, **con y sin** condiciones iniciales.
- Se estudia la **estabilidad** de los sistemas LTI y se describe un **test** para determinar la estabilidad en función de los coeficientes del polinomio de  $H(z)$ .
- Se analizan detalladamente los **sistemas de segundo orden**, que constituyen los bloques elementales para la implementación de sistemas de orden mayor.

## ■ Introducción...

- Un sistema LTI se describe por una ecuación de diferencias de coeficientes constantes por,

$$y(n) = -\sum_{k=1}^N a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^M b_k x(n-k)$$

- Su **función de transferencia** se obtiene directamente calculando la transformada z a ambos lados,

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}$$

## ■ Introducción ...

- Los sistemas descritos por e.d.c.c. presentan una función de transferencia racional:

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$$

- $B(z)$  contiene los ceros de  $H(z)$  y  $A(z)$  los polos de  $H(z)$
- La mayoría de señales de interés práctico también tienen transformadas  $z$  racionales:

$$X(z) = \frac{N(z)}{Q(z)}$$

## ■ Respuesta del Sistema en Reposo

### ■ Condiciones Iniciales:

- Reposo implica que las condiciones iniciales sean cero, es decir:

$$y(-1) = y(-2) = \cdots y(-N) = 0$$

### ■ Forma de la transformada $z$ de $y(n)$ :

$$Y(z) = H(z)X(z) = \frac{B(z)}{A(z)} \frac{N(z)}{Q(z)}$$

### ■ Origen de los Polos en la respuesta $Y(z)$

- Por el sistema  $H(z) : p_1, p_2, \dots, p_N$
- Por la señal de entrada  $X(z) : q_1, q_2, \dots, q_L$

## ■ Respuesta del Sistema en Reposo con Polos Simples

- **Supuesto:** no hay cancelación de polos y ceros
- La expansión en fracciones de  $Y(z)$  es de la forma,

$$Y(z) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{1 - p_k z^{-1}} + \sum_{k=1}^L \frac{Q_k}{1 - q_k z^{-1}}$$

- Y la forma de la señal  $y(n)$  por Transformada  $z$  inversa es,

$$y(n) = \sum_{k=1}^N A_k (p_k)^n u(n) + \sum_{k=1}^L Q_k (q_k)^n u(n)$$



## ■ Respuesta del Sistema en Reposo con Polos Simples ...

- La señal  $y(n) = \sum_{k=1}^N A_k (p_k)^n u(n) + \sum_{k=1}^L Q_k (q_k)^n u(n)$   
 consta de dos partes:  $y(n) = y_{nat}(n) + y_{forz}(n)$

- **Respuesta natural,  $y_{nat}(n)$**

- función de los polos del sistema  $H(z)$ .
- $X(z)$  influye en la salida a través de los coeficientes  $\{A_k\}$

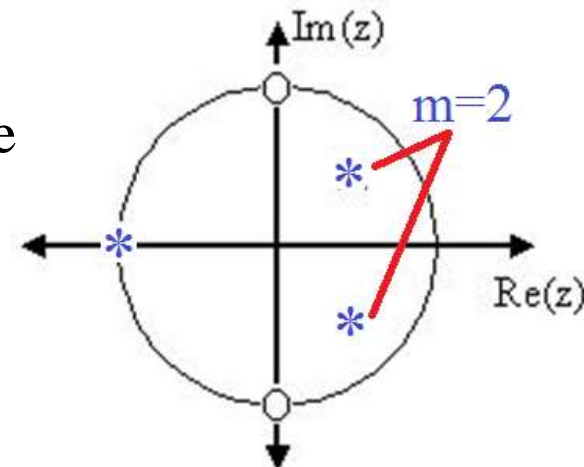
- **Respuesta forzada,  $y_{forz}(n)$**

- función de los polos de la señal  $X(z)$ .
- $H(z)$  influye en la salida a través de los coeficientes  $\{Q_k\}$

- Los factores  $\{A_k\}$  y  $\{Q_k\}$  son función de  $\{p_k\}$  y  $\{q_k\}$

## ■ Respuesta del Sistema en Reposo con Polos Múltiples

- Polos con multiplicidad se presentan cuando:
  - $X(z)$  o  $H(z)$  tienen polos en común
  - $X(z)$  y/o  $H(z)$  tienen polos de orden múltiple
- La salida  $Y(z)$  tendrá polos de orden múltiples.
- Supuesto: no hay cancelación de polos y ceros



## ■ Sistema en Reposo con Polos Múltiples ...

- La expansión en fracciones parciales de  $Y(z)$  contendrá factores de la forma:

$$\frac{1}{(1 - p_l z^{-1})^k} \quad k = 1, 2, \dots, m$$

donde  $m$  es la multiplicidad del polo.

- La TZ inversa de estos factores producirá en la salida  $y(n)$  términos de la forma:

$$n^{k-1} p_l^n$$



## ■ Sistema en Reposo con Polos Múltiples ...

- **Ejemplo:** calcular la respuesta del sistema caracterizado por

$$H(z) = \frac{7}{1 + 0,3z^{-1} - 0,1z^{-2}}$$

cuando está en reposo y se excita con la entrada  $x(n) = (0,2)^n u(n)$

- **Solución:** para el sistema en reposo, la salida está dada por,

$$Y(z) = H(z)X(z), \quad \text{con} \quad X(z) = \frac{1}{1 - 0,2 z^{-1}}$$

## ■ Sistema en Reposo con Polos Múltiples ...

### ■ Solución ...

- Por lo tanto,

$$Y(z) = \frac{7}{(1+0,3z^{-1}-0,1z^{-2})} \frac{1}{(1-0,2z^{-1})}$$

- La expansión está dada por,

$$Y(z) = \frac{25/7}{(1+0,5z^{-1})} + \frac{10/7}{(1-0,2z^{-1})} + \frac{2}{(1-0,2z^{-1})^2}$$

- La Transformada inversa

$$y(n) = [(25/7) (-0,5)^n + (10/7) (0,2)^n + 10(n+1)(0,2)^{n+1}]u(n)$$

## ■ Respuesta del Sistema NO en reposo

### ■ Consideraciones

- La entrada al sistema se aplica en el instante  $n = 0$
- Se supone que la señal de entrada  $x(n)$  es causal.
- Los efectos en el sistema de las señales de entradas anteriores se reflejan en las condiciones iniciales.
- Se busca obtener  $y(n)$  para  $n \geq 0$  ante una entrada  $x(n)$  causal y condiciones iniciales distintas de cero.
- Se utiliza la transformada  $z$  *unilateral*.

## ■ Sistema No en Reposo ...

- La TZ unilateral del sistema LTI descrito por e.d.c.c queda:

$$Y^+(z) = -\sum_{k=1}^N a_k z^{-k} \left[ Y^+(z) + \sum_{n=1}^k y(-n) z^n \right] + \sum_{k=0}^M b_k z^{-k} X^+(z)$$

- Dado que  $x(n)$  es causal, entonces  $X^+(z) = X(z)$ . Luego:

$$Y^+(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} X(z) - \frac{\sum_{k=1}^N a_k z^{-k} \sum_{n=1}^k y(-n) z^n}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}$$

$$Y^+(z) = H(z) X(z) + \frac{N_0(z)}{A(z)} \quad \text{donde} \quad N_0(z) = -\sum_{k=1}^N a_k z^{-k} \sum_{n=1}^k y(-n) z^n$$

## ■ Sistema No en Reposo...

- $Y^+(z)$  puede descomponerse en dos partes,

$$Y^+(z) = Y_{zs}(z) + Y_{zi}(z)$$

- $Y_{zs}(z) = H(z)X(z)$ : respuesta del sistema en estado nulo.
- $Y_{zi}(z) = N_o(z)/A(z)$ : respuesta del sistema a las condiciones iniciales no nulas.
- La respuesta total en el tiempo,  $y(n)$ , se obtiene como la suma de las transformadas inversas individuales de  $Y_{zs}(z)$  y  $Y_{zi}(z)$ :

$$y(n) = y_{zs}(n) + y_{zi}(n)$$



## ■ Sistema No en Reposo...

- Como el denominador de  $Y_{zi}^+(z)$  es  $A(z)$ , sus polos son  $p_1, p_2, \dots, p_N$ . Por lo tanto,  $y_{zi}(n)$  tiene la forma,

$$y_{zi}(n) = \sum_{K=1}^N D_K (p_K)^n u(n)$$

- $Y_{zi}(n)$  puede sumarse a la respuesta  $y(n)$  obtenida para el caso del sistema en reposo, y los términos en que aparecen los polos  $\{p_K\}$  pueden combinarse para generar la respuesta total,

$$y(n) = \sum_{K=1}^N (A_K + D_K) (p_K)^n u(n) + \sum_{K=1}^L Q_K (q_K)^n u(n)$$

## ■ Sistema no en Reposo...

### ■ Observaciones:

- Las condiciones iniciales alteraran la respuesta natural del sistema modificando los factores de escala  $\{A_K\}$ .
- Las c.i. no introducen polos nuevos en el sistema.
- Las c.i. no tienen efecto sobre la respuesta forzada del sistema.

■ **Ejemplo:** Encuentre para el sistema dado

$$y(n) = 0.9y(n-1) - 0.81y(n-2) + x(n)$$

- La función de transferencia
- La respuesta  $y(n)$  del sistema para
  - $x(n) = u(n)$  con  $y(-1) = y(-2) = 0$
- La respuesta  $y(n)$  del sistema para
  - $x(n) = u(n)$  con  $y(-1) = y(-2) = 1$

## ■ Solución

a) La función de transferencia es:  $H(z) = \frac{1}{1 - 0.9z^{-1} + 0.81z^{-2}}$

b) Con C.I= 0, la respuesta está dada por :

$$Y(z) = Y_{zs}(z) = H(z).X(z)$$

Por lo tanto,

$$Y(z) = \frac{1}{(1 - 0.9z^{-1} + 0.81z^{-2})(1 - z^{-1})} \quad \therefore \quad X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

Antitransformando,

$$y(n) = \left[ 1.099 + 1.088 (0.9)^n \cos\left(\frac{\pi}{3}n - 5.2^\circ\right) \right] u(n)$$

## ■ Solución

c) Con C.I=1, la respuesta está dada por:

$$Y(z) = Y_{zs}(z) + Y_{zi}(z)$$

Con,

$$Y_{zi}(z) = \frac{N_0(z)}{A(z)} = \frac{0.09 - 0.81z^{-1}}{1 - 0.9z^{-1} + 0.81z^{-2}}$$

$$y_{zi}(n) = \left[ 0.988 (0.9)^n \cos\left(\frac{\pi}{3}n + 87^\circ\right) \right] u(n)$$

Se llega a:

$$y(n) = \left[ 1.099 + 1.44 (0.9)^n \cos\left(\frac{\pi}{3}n + 38^\circ\right) \right] u(n)$$



## ■ Respuesta Transitoria y en Régimen Permanente

- La respuesta de un sistema a una entrada determinada puede descomponerse en respuesta natural y forzada.

$$y(n) = y_{nat}(n) + y_{for}(n)$$

- Para un Sistema Causal:

$$y_{nat}(n) = \sum_{k=1}^N A_k (p_k)^n u(n)$$

$$y_{for}(n) = \sum_{k=1}^L Q_k (q_k)^n u(n)$$

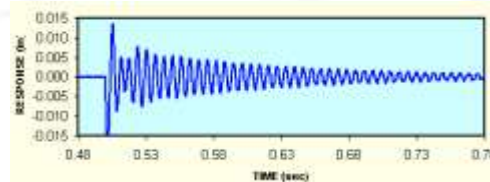
- Donde:

- $p_k$ ,  $k=1, 2, \dots, N$  : polos de  $H(z)$
- $A_k$ , dependen de las condiciones iniciales y de  $X(z)$

- Donde:

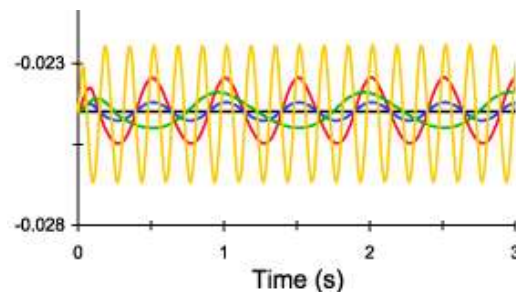
- $q_k$ ,  $k=1, 2, \dots, L$  : polos de  $X(z)$
- $Q_k$ , dependen de las condiciones iniciales y de  $H(z)$

## ■ Respuesta Transitoria



- Se presenta cuando alguno o todos los componentes de  $y_{\text{nat}}(n)$  y/o  $y_{\text{for}}(n)$  decaen a cero cuando  $n$  aumenta.
  - La tasa de decaimiento de la respuesta transitoria es inversamente proporcional a la magnitud de los polos.
- Lo anterior se ocasiona cuando:
  - Los polos de  $H(z)$  son  $|p_k| < 1$ : Términos exponenciales de  $y_{\text{nat}}(n)$  decrecen hacia cero.
  - Los polos de la señal de entrada  $|q_k| < 1$ : Términos exponenciales de  $y_{\text{for}}(n)$  decrecen hacia cero.

## ■ Respuesta Estacionaria



- Es la respuesta en condición de equilibrio que prevalece después de desaparecer el transitorio.
- Se presenta por los componentes de  $y_{\text{for}}(n)$  que tienen un polo de la señal de entrada situado sobre el círculo unitario del plano  $z$ .
- La respuesta estacionaria es debida a los componentes acotados y estacionarios de la entrada  $X(z)$ .

- **Ejercicio:** Determine las respuestas transitoria y en régimen del sistema caracterizado por:

$$y(n) = 0.5y(n-1) + x(n), \quad y(-1) = 0 \quad ; \quad x(n) = 10 \cos\left(\frac{\pi n}{4}\right)u(n)$$

- **Solución:**

- Función de Transferencia  $H(z)$  y  $X(z)$ :

$$H(z) = \frac{1}{1 - 0.5z^{-1}} \quad X(z) = \frac{10[1 - (1/\sqrt{2})z^{-1}]}{1 - \sqrt{2}z^{-1} + z^{-2}}$$

- Por lo tanto,

$$Y(z) = \frac{-1.9074}{1 - 0.5z^{-1}} + \frac{11.9074 - 3.8149z^{-1}}{1 - \sqrt{2}z^{-1} + z^{-2}}$$

## ■ Solución...

### ■ Respuesta total

$$y(n) = \left[ -1.9074 (0.5)^n + 11.9074 \cos \left( \frac{\pi}{4} n - 28.7^\circ \right) \right] u(n)$$

### ■ Respuesta transitoria (coincide con la natural)

$$y(n) = -1.9074 (0.5)^n u(n)$$

### ■ Respuesta de estado estacionario (coincide con la forzada)

$$y(n) = 11.9074 \cos \left( \frac{\pi}{4} n - 28.7^\circ \right) u(n)$$



## ■ Causalidad

### ■ En el dominio del tiempo discreto

- Un sistema LTI causal si satisface la condición:  $h(n) = 0, n < 0$

### ■ En el dominio transformado Z:

- La ROC de una secuencia causal es el exterior de un círculo.
- Un sistema LTI es causal si y sólo si:
  - La ROC de  $H(z)$  es el exterior de un círculo de radio  $r < \infty$ , incluyendo el punto  $z = \infty$ .
  - Siendo  $H(z)$  una función racional de polinomios en  $z$ , el orden del numerador **debe ser menor o igual al orden** del denominador.

- **Ejemplo 1.** Determine si el sistema  $H_1(z)$  es causal

$$H_1(z) = \frac{1 - 0.1z^{-1} - 0.2z^{-2}}{z^{-1} - 1.1z^{-2} + 0.3z^{-3}}$$

- **Solución**

- Manipulando  $H_1(z)$

$$H_1(z) = \frac{z^3 - 0.1z^2 - 0.2z}{z^2 - 1.1z + 0.3}$$

- Sin conocer su ROC,
  - Se concluye que el sistema es **no-causal** debido a que es un sistema donde **el orden del numerador** es **mayor** al del denominador.

## ■ Solución ...

### ■ Manipulando

$$H_1(z) = \frac{1-0.1z^{-1}-0.2z^{-2}}{z^{-1}(1-1.1z^{-1}+0.3z^{-2})} = z \frac{1-0.1z^{-1}-0.2z^{-2}}{1-1.1z^{-1}+0.3z^{-2}}$$

### ■ Por fracciones parciales

$$H_1(z) = z \left( -\frac{2}{3} + \frac{\frac{11}{3}}{1-0.6z^{-1}} - \frac{2}{1-0.5z^{-1}} \right)$$

### ■ Antitransformando,

- $h_1(n) = -\frac{2}{3}\delta(n+1) + \frac{11}{3}(0.6)^{n+1}u(n+1) - 2(0.5)^{n+1}u(n+1)$

- Sistema es **no-causal**



**PSI** Percepción y Sistemas Inteligentes



**Universidad del Valle**

Facultad de Ingeniería  
Escuela de Ingeniería Eléctrica y Electrónica

[humberto.loaiza@correounivalle.edu.co](mailto:humberto.loaiza@correounivalle.edu.co)

- **Ejemplo 2:** Determine si el sistema  $H_2(z)$  es causal

$$H_2(z) = \frac{1 - 0.7z^{-1} - 0.14z^{-2} - 0.12z^{-3}}{1 + 0.7z^{-1} + 0.12z^{-2}}$$

## ■ Solución

- Por expansión en fracciones parciales :

```
num=[1 -0.7 -0.14 -0.12]
```

```
den=[1 0.7 0.12];
```

```
[Resi,Polos, TDirec]=residuez(num,den)
```

- $\text{Resi} = 15, -\frac{56}{3}$      $\text{Polos} = -0.4, -0.3$      $\text{TDirec} = \frac{14}{3}, -1$



## ■ Solución ...

- Por expansión en fracciones parciales :

$$H_2(z) = \frac{14}{3} z - 1 + \frac{15}{1+0.4z^{-1}} - \frac{56/3}{1+0.3z^{-1}}$$

- Antitransformando,

$$h_2(n) = \frac{14}{3} \delta(n+1) - \delta(n) + 15(-0.4)^n u(n) - \frac{56}{3} (-0.3)^n u(n)$$

- Causalidad?
  - Sistema No-Causal

## ■ Estabilidad

- Condición necesaria y suficiente para que un sistema LTI sea estable BIBO es,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$$

- Puesto que

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) z^{-n}$$

se deduce que:

$$|H(z)| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n) z^{-n}| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| |z^{-n}|$$

## ■ Estabilidad ...

► Si se evalúa  $|H(z)| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| |z^{-n}|$  en  $|z| = 1$ ,

► se obtiene

$$|H(z)| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)|$$

► Esto implica que  $H(z)$  debe contener a la circunferencia unidad dentro de su ROC.

► **Un sistema LTI es estable BIBO si y sólo si la ROC de  $H(z)$  incluye a la circunferencia unidad.**

# Discusión Estabilidad y Causalidad

- La ROC es el exterior a un circunferencia de  $r > r_0$

Sistema Causal

- La ROC es el exterior de una circunferencia de  $r < 1$
- La ROC **no puede** contener ningún polo.

Sistema Causal y Estable

- La ROC contiene la circunferencia de  $r = 1$

Sistema Estable

- Un sistema LTI es **causal** y **estable** BIBO si y sólo si todos los polos de  $H(z)$  están dentro de la circunferencia unidad.

Sistema Causal y Estable



■ **Ejemplo 1.** Para el sistema

$$H(z) = \frac{3 - 4z^{-1}}{1 - 3.5z^{-1} + 1.5z^{-2}} = \frac{1}{1 - 0.5z^{-1}} + \frac{2}{1 - 3z^{-1}}$$

especifique la ROC de  $H(z)$  y determine  $h(n)$  para que el sistema opere en las siguientes condiciones:

- a) estable
- b) causal
- c) anticausal unilateral
- d) anticausal bilateral



## ■ Solución.

### ■ Estabilidad Absoluta

- El sistema absolutamente inestable:  $p_1 = 0,5$ ,  $p_2 = 3$ .

### ■ a) Operación estable:

La ROC debe incluir el círculo unidad:  $0.5 < |z| < 3$

El sistema es no causal  $\Rightarrow h(n) = (0.5)^n u(n) - 2(3)^n u(-n-1)$

### ■ b) Operación causal:

La ROC es  $|z| > 3$ .

El sistema es inestable  $\Rightarrow h(n) = (0.5)^n u(n) + 2(3)^n u(n)$

## ■ Solución ...

### ■ c) Operación anticausal unilateral:

La ROC es  $|z| < 0.5$

El sistema es inestable: 
$$h(n) = -\left[(0.5)^n + 2(3)^n\right] u(-n-1)$$

### ■ d) Operación anticausal bilateral:

La ROC es  $0.5 < |z| < 3$

El sistema es estable: 
$$h(n) = (0.5)^n u(n) - 2(3)^n u(-n-1)$$

# Estabilidad para un Sistema Causal.



- **Ejemplo 2:** Especifique  $H(z)$  y la ROC para el sistema:

$$h(n) = (0.25)^{|n|} \quad -\infty < n < \infty$$

- **Solución**

- Función de Transferencia:

- $$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} (0.25)^{|n|} z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} (0.25)^{|n|} z^{-n}$$
  - $$\sum_{n=1}^{\infty} (0.25)^n z^n = \sum_{n=1}^{\infty} (0.25 z)^n = \frac{0.25 z}{1 - 0.25 z} = \frac{-1}{1 - 4z^{-1}}$$
  - $$\sum_{n=0}^{\infty} (0.25)^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (0.25 z^{-1})^n = \frac{1}{1 - (1/4)z^{-1}}$$
  - $$H(z) = \frac{15 z^{-1}}{-4 + 17 z^{-1} - 4 z^{-2}} = \frac{-\left(\frac{15}{4}\right)z^{-1}}{1 - \left(\frac{17}{4}\right)z^{-1} + z^{-2}}$$



# Estabilidad para un Sistema Causal.

## ■ Solución

### ■ Función de Transferencia:

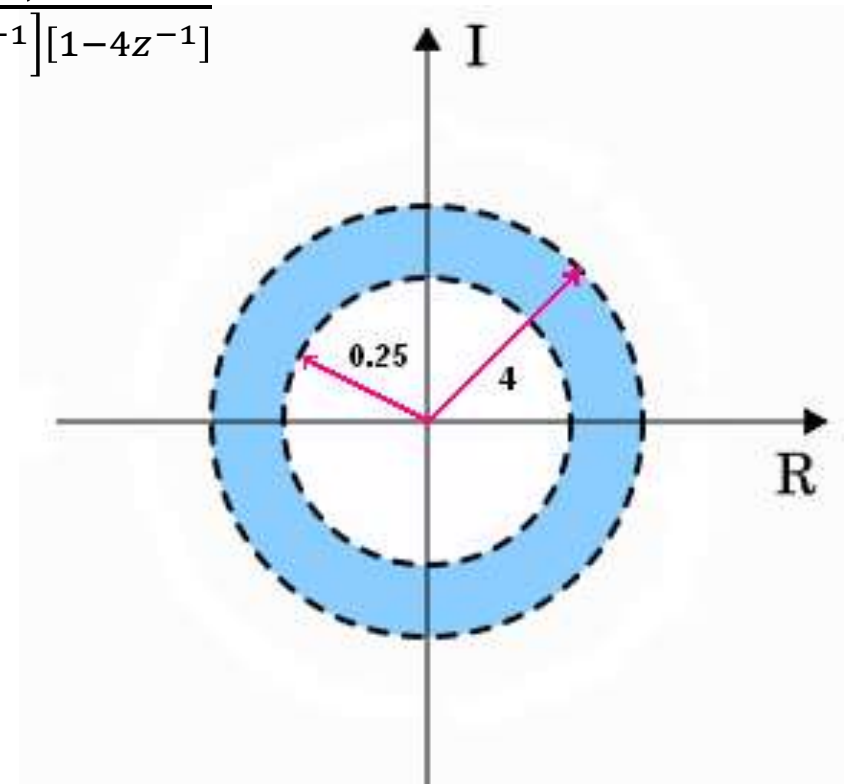
$$■ \quad H(z) = \frac{-\left(\frac{15}{4}\right)z^{-1}}{1-\left(\frac{17}{4}\right)z^{-1}+z^{-2}} = \frac{-\left(\frac{15}{4}\right)z^{-1}}{\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)z^{-1}\right][1-4z^{-1}]}$$

### ■ Polos:

$$■ \quad p_1 = \frac{1}{4}, p_2 = 4$$

### ■ ROC:

$$■ \quad \frac{1}{4} < |z| < 4$$



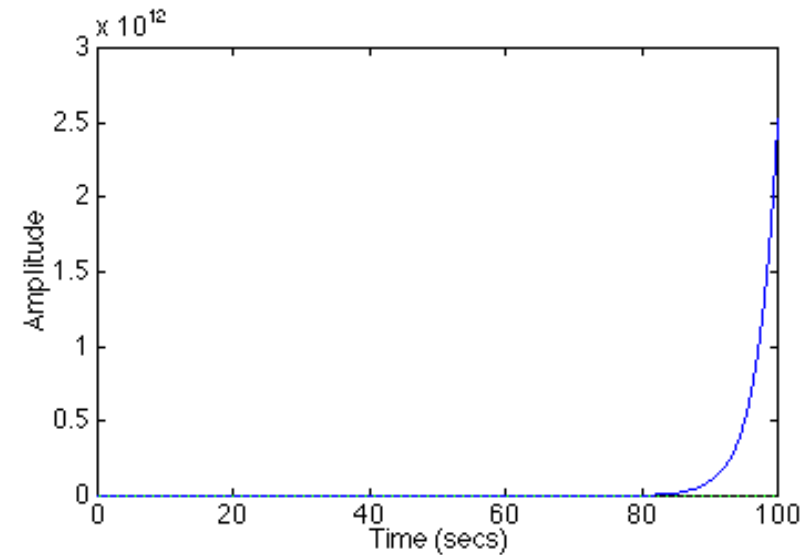
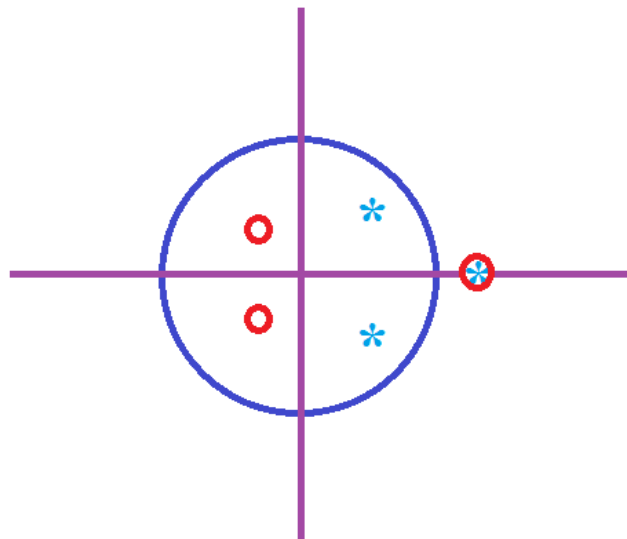
## ■ Introducción

- La cancelación de polos y ceros es importante en el análisis y diseño de sistemas discretos.
  - Permite modificar el comportamiento de  $H(z)$  y el efecto de la señal de entrada  $X(z)$ .
- Se presenta cuando una TZ contiene polos y ceros en la misma posición, bien sea en  $H(z)$  o en  $H(z)X(z)$ .
- Si el zero y el polo no coinciden exactamente en la misma posición, el término de la respuesta tiene una amplitud muy pequeña.



## ■ Introducción ...

- Estabilizar un sistema inherentemente inestable cancelando ceros y polos puede presentar problemas debidos a falta de precisión numérica.



- **Ejemplo:** Determine  $h(n)$  para el sistema:

$$y(n) = 2.5y(n-1) - y(n-2) + x(n) - 5x(n-1) + 6x(n-2)$$

- **Solución:**

- Transformando: 
$$H(z) = \frac{1 - 5z^{-1} + 6z^{-2}}{1 - 2.5z^{-1} + z^{-2}} = \frac{(1 - 2z^{-1})(1 - 3z^{-1})}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)(1 - 2z^{-1})}$$

- Factorizando: 
$$H(z) = \frac{(1 - 3z^{-1})}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)} = 1 - \frac{2.5z^{-1}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}$$

- Respuesta impulsional: 
$$h(n) = \delta(n) - 2.5\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u(n-1)$$

- Ecuación de orden reducido: 
$$y(n) = \frac{1}{2}y(n-1) + x(n) - 3x(n-1)$$

- Causal? Estable?

## ■ Implicación:

- Si  $H(z)$  es estable y  $X(z)$  contiene uno o más polos que **coinciden** con los del sistema, la salida  $Y(z)$  contendrá polos de **orden múltiple  $m$** , que dan origen a **términos** de la forma,

$$A_k n^b (p_k)^n u(n) \quad 0 \leq b \leq m-1$$

## ■ Observaciones:

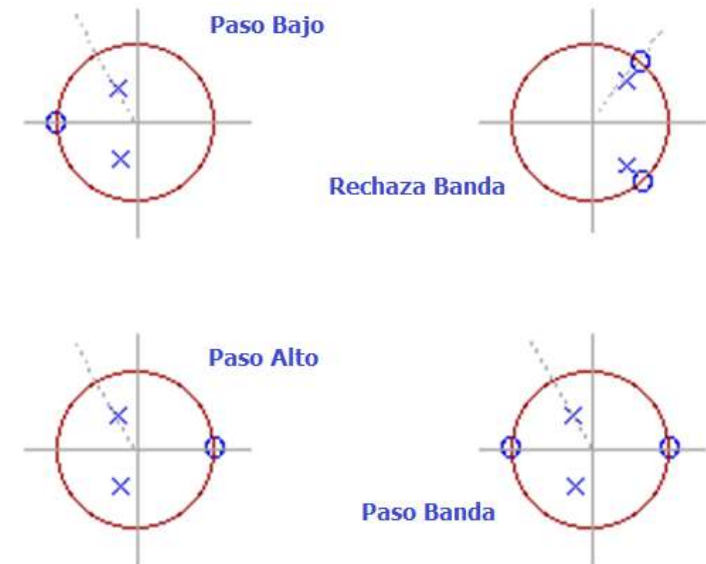
- Si  $|p_k| < 1$ , los términos tienden a cero porque el factor exponencial  $(p_k)^n$  domina al término  $n^b$ .

## ■ Observaciones...

- No existe ninguna entrada acotada que pueda producir una salida no acotada, cuando todos los polos del *sistema* están dentro del círculo unidad.
- La estabilidad BIBO  $\rightarrow$  polos del sistema estrictamente dentro del círculo unidad.
- Los únicos sistemas útiles con polos  $p = 1$  (marginamente estables) son los osciladores digitales.

## ■ Introducción

- La estabilidad de un sistema está determinada por la posición de los polos de  $H(z)$ .
- Un sistema es causal y estable si todas las raíces de  $A(z)$  están dentro del círculo unidad.
- Los polos del sistema son las raíces del polinomio  $A(z)$  de  $H(z)$ .

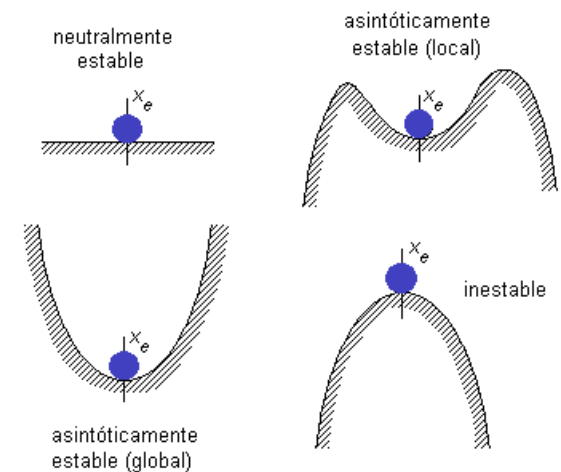
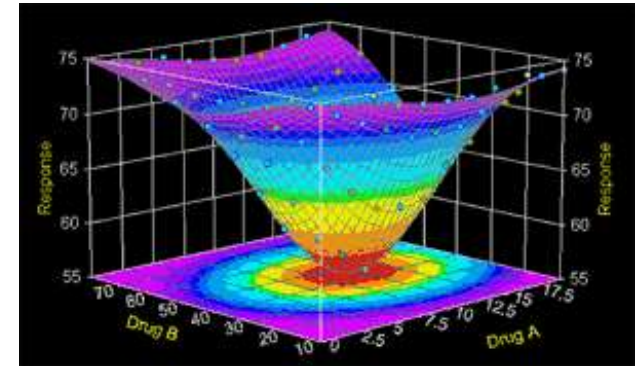


$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)}, \quad \text{donde } A(z) = 1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_N z^{-N}$$



## ■ Introducción...

- Determinar la estabilidad de  $H(z)$  implica encontrar las raíces de un polinomio de orden  $N$ .
- El Test de **Schür-Cohn** es un algoritmo para determinar estabilidad mediante el cálculo de *coeficientes de reflexión*  $K_m$ .
  - Recursivo y fácil de implementar.
  - Los valores  $K_m$  tienen aplicación en procesamiento de voz y síntesis de filtros.



## ■ Notación

■ Polinomio de grado  $m$ : 
$$A_m(z) = \sum_{k=0}^m a_m(k) z^{-k} \quad a_m(0) = 1$$

■ Polinomio inverso: 
$$B_m(z) = z^{-m} A_m(z^{-1}) = \sum_{k=0}^m a_m(m-k) z^{-k}$$

■ Datos iniciales 
$$A_N(z) = A(z) \quad y \quad K_N = a_N(N)$$

## ■ Procedimiento para el cálculo de $K_m$

- 1. **Calcular**, a partir del polinomio  $A_m(z)$  los polinomios de grado menor:

$$A_m(z) \text{ para } m = N, N - 1, N - 2, \dots, 1.$$

de acuerdo con la ecuación recursiva:

$$A_{m-1}(z) = \frac{A_m(z) - K_m B_m(z)}{1 - K_m^2}, \quad K_m = a_m(m)$$

## ■ Procedimiento para el cálculo de $K_m$ ...

- **2. Evaluar** si los coeficientes  $K_m$  satisfacen la condición  $|K_m| < 1$  para  $m = 1, 2, \dots, N$ .
- **3. Criterio de Estabilidad**
  - Si se cumple que  $|K_m| < 1, \forall m$  entonces  $A(z)$  tiene todas sus raíces **dentro** de la circunferencia unidad  $\rightarrow$  **estable**.

# Test de estabilidad de Schür-Cohn...



■ **Ejemplo:** Determinar la estabilidad del sistema  $H(z) = \frac{1}{1 - \frac{7}{4}z^{-1} - \frac{1}{2}z^{-2}}$

■ **Solución**

■ Calcular  $A_2(z)$  y  $K_2$ ,

■  $A_2(z) = 1 - \frac{7}{4}z^{-1} - \frac{1}{2}z^{-2}$ , luego  $K_2 = -\frac{1}{2}$

■ Calcular  $B_2(z)$ ,

■  $B_2(z) = -\frac{1}{2} - \frac{7}{4}z^{-1} + z^{-2}$

■ Calcular  $A_1(z)$  y  $K_1$ ,

■  $A_1(z) = \frac{A_2(z) - K_2 B_2(z)}{1 - K_2^2} = 1 - \frac{7}{2}z^{-1}$ , luego  $K_1 = -\frac{7}{2}$

■ **Estabilidad?**

■  $|K_1| > 1$ , Sistema Inestable





## ■ Introducción

- Los sistemas con dos polos constituyen el bloque de construcción básico para la realización de sistemas de orden mayor.
- Sistema causal de segundo orden bajo estudio:

$$y(n) = -a_1 y(n-1) - a_2 y(n-2) + b_0 x(n)$$

- con función de transferencia,

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} = \frac{b_0 z^2}{z^2 + a_1 z + a_2}$$

- Configuración de polos y ceros:
  - Dos ceros en el origen
  - Dos polos

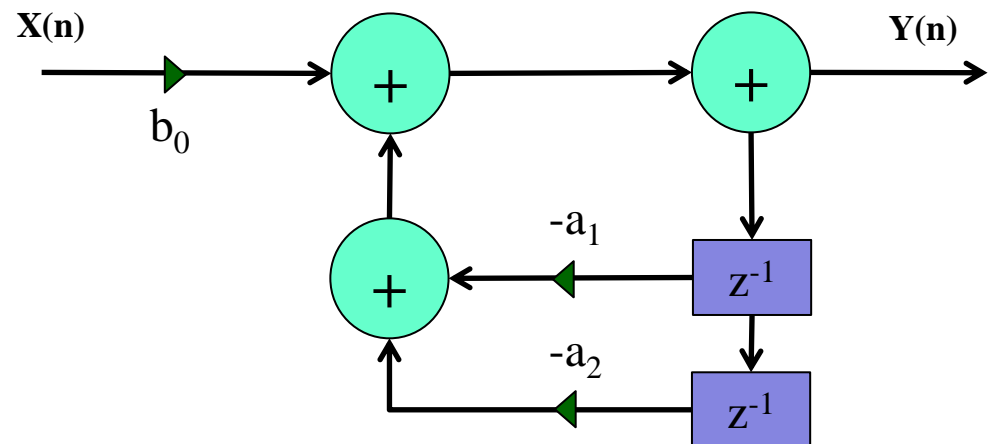
## ■ Relación polos-coeficientes

- Los polos del sistema de segundo orden están por:

$$p_1, p_2 = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2}$$

- Se verifica que son función de las ganancias del sistema,

$$y(n) = -a_1 y(n-1) - a_2 y(n-2) + b_0 x(n)$$



## ■ Relación polos-coeficientes ...

- Manipulando matemáticamente, se puede llegar a,

$$a_1 = -(p_1 + p_2) \quad a_2 = p_1 p_2$$

- Se sabe que el sistema es **estable** si  $|p_1| < 1$  y  $|p_2| < 1$ .
- Las **condiciones** de  $p_{1,2}$  se relacionan con los valores de los coeficientes  $a_1$  y  $a_2$  de acuerdo con:

$$|a_2| = |p_1 p_2| = |p_1| |p_2| < 1$$
$$|a_1| < 1 + a_2$$

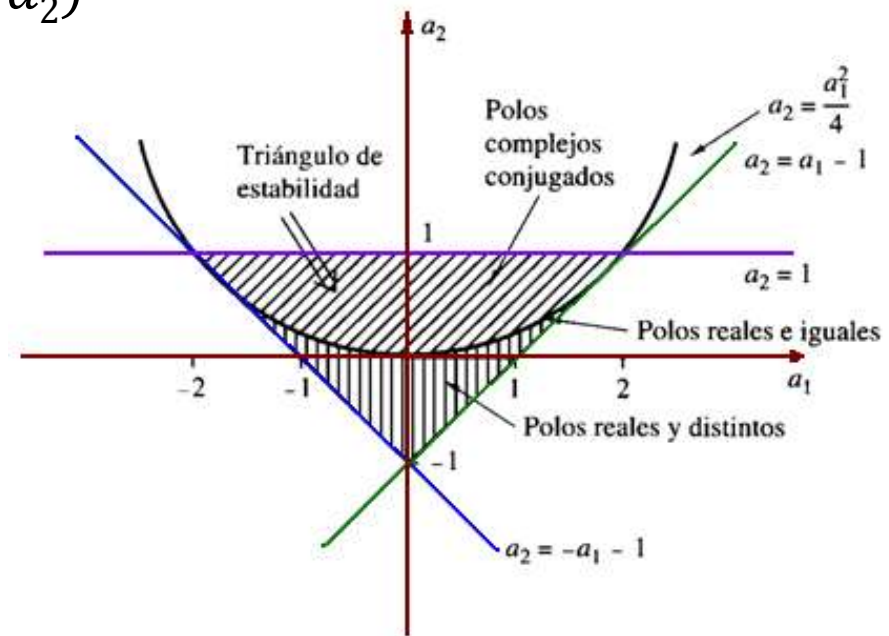
## ■ Relación polos-coeficientes ...

- Estas ecuaciones definen un triángulo en el plano de los coeficientes ( $a_1, a_2$ )

- La ubicación relativa a la parábola

$$a_2 = \frac{a_1^2}{4} \text{ caracteriza los polos:}$$

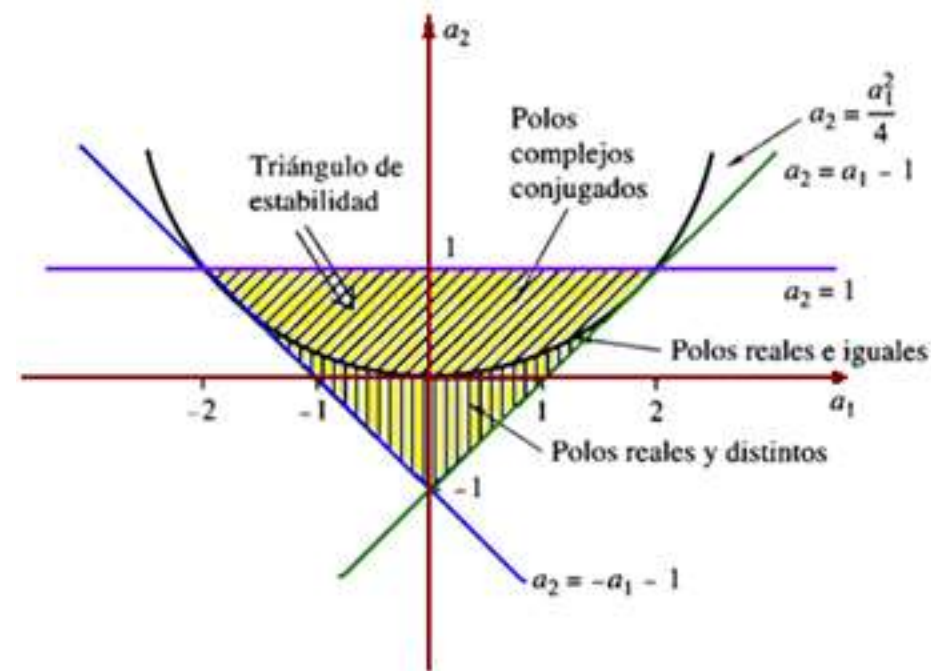
- **Debajo:** ( $a_1^2 > 4 a_2$ )
  - Polos reales y diferentes
- **Sobre:** ( $a_1^2 = 4 a_2$ )
  - Polos reales e iguales
- **Encima:** ( $a_1^2 < 4 a_2$ )
  - Polos complejos conjugados





## ■ Condición de Estabilidad

- **Sistema estable:** si y sólo si el punto  $(a_1, a_2)$  se encuentra dentro del triángulo de estabilidad.
- El triángulo de estabilidad permite:
  - Seleccionar parámetros del sistema
  - Determinar estabilidad

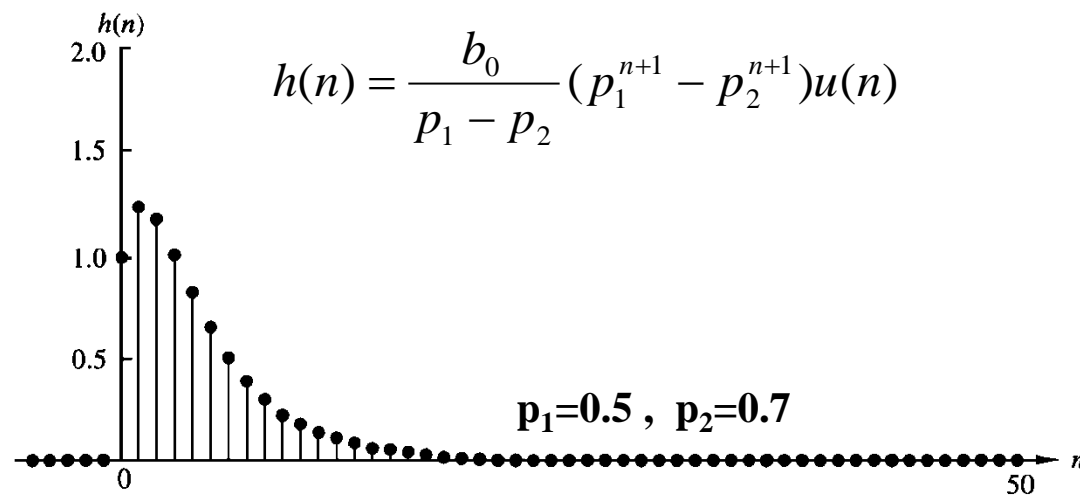




## ■ Respuesta con Polos reales y distintos: $p_1 \neq p_2$

■ Se tiene:  $H(z) = \frac{A_1}{1 - p_1 z^{-1}} + \frac{A_2}{1 - p_2 z^{-1}}$  donde  $A_1 = \frac{b_0 p_1}{p_1 - p_2}$   $A_2 = \frac{-b_0 p_2}{p_1 - p_2}$

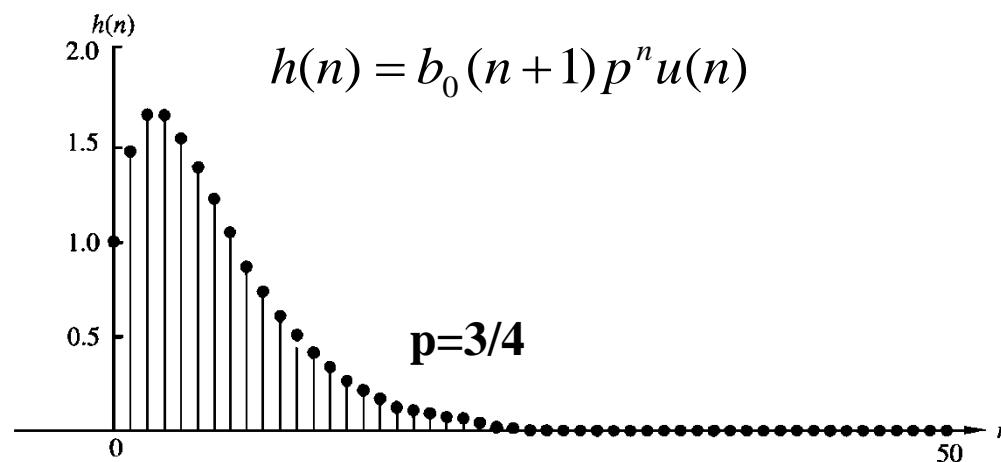
- La respuesta al impulso unitario está dada por la diferencia entre dos exponenciales:



## ■ Respuesta con Polos reales e iguales: $p_1 = p_2 = p = -\frac{a_1}{2}$

■ Se tiene: 
$$H(z) = \frac{b_0}{(1 - pz^{-1})^2}$$

- La respuesta al impulso unitario está dada por el producto de una rampa y una exponencial (decreciente si  $|p| < 1$ ),



## ■ Respuesta con Polos complejos: $p_1 = r e^{j w_0}$ , $p_2 = r e^{-j w_0}$

■ Se tiene:

$$H(z) = \frac{A}{1 - p_1 z^{-1}} + \frac{A^*}{1 - p_1^* z^{-1}}$$
$$= \frac{A}{1 - r e^{j w_0} z^{-1}} + \frac{A^*}{1 - r e^{-j w_0} z^{-1}}$$

■ Donde,

- $0 < w_0 < \pi$
- $a_1 = -2 r \cos(w_0)$ ,  $a_2 = r^2$
- $w_0 \rightarrow$  frecuencia de oscilación
- $r \rightarrow$  rapidez de envolvente

■ La respuesta al impulso unitario está dada por una señal sinusoidal multiplicada por una exponencial.

