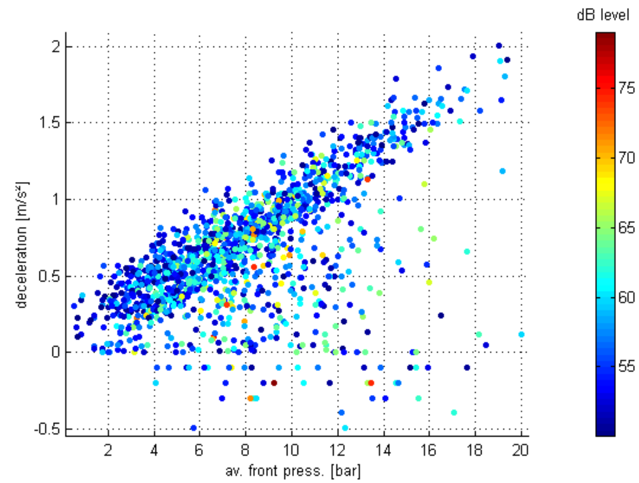
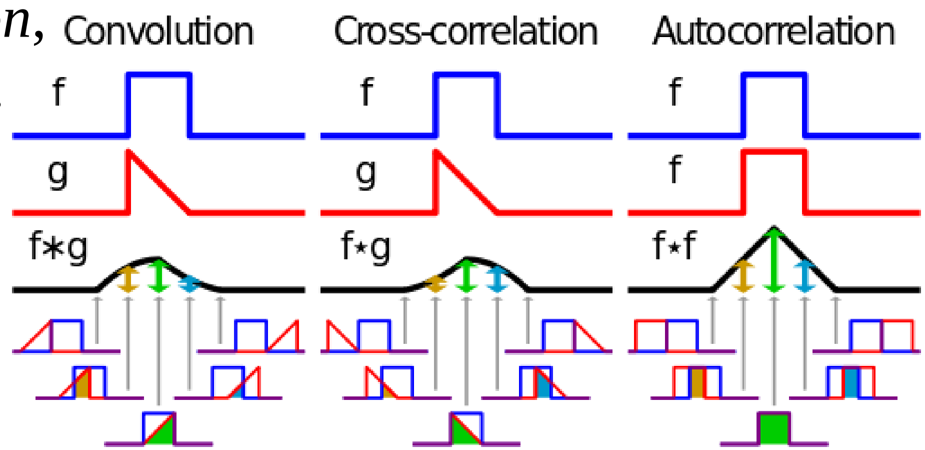
Correlación de Señales Discretas

Introducción

- Mide el **parecido** que existe entre dos señales, como una función del **retardo de tiempo** aplicada a una de ellas.
- **Operación matemática**, muy parecida a la *convolución*, realizada entre dos secuencias.
- Tipos:
  - Cross Correlación
  - Auto Correlación





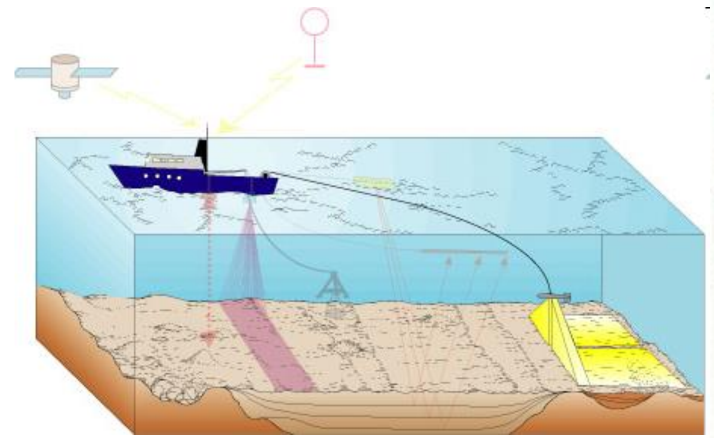
http://en.wikipedia.org/wiki/File:Comparison_convolution_correlation.svg

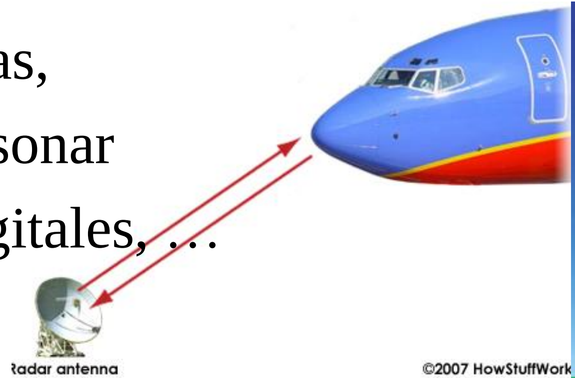
humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

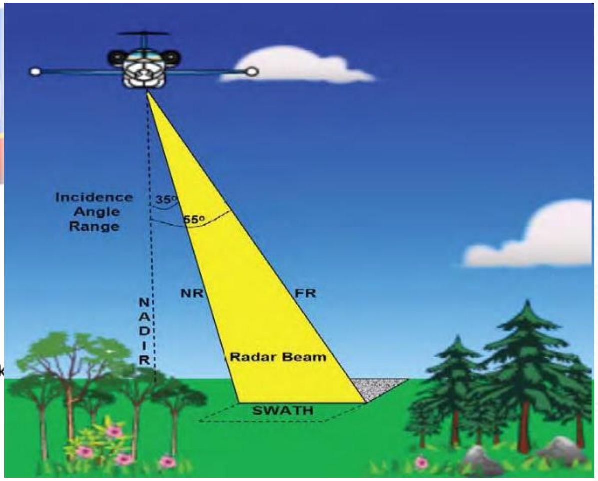
Correlación de Señales Discretas

Introducción ….

- Se aplica en **distintas áreas** de la **ingeniería** y la **ciencia**:
  - Reconocimiento de patrones,
  - Criptoanálisis,
  - Geología,
  - Análisis de partículas,
  - Aplicaciones radar/sonar
  - Comunicaciones digitales, …







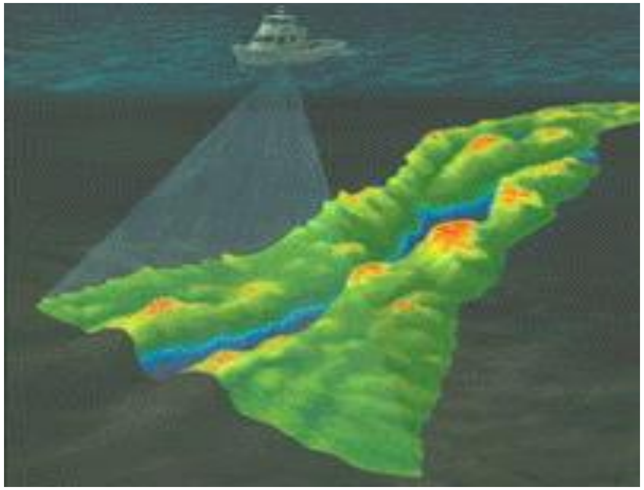
Correlación de Señales Discretas

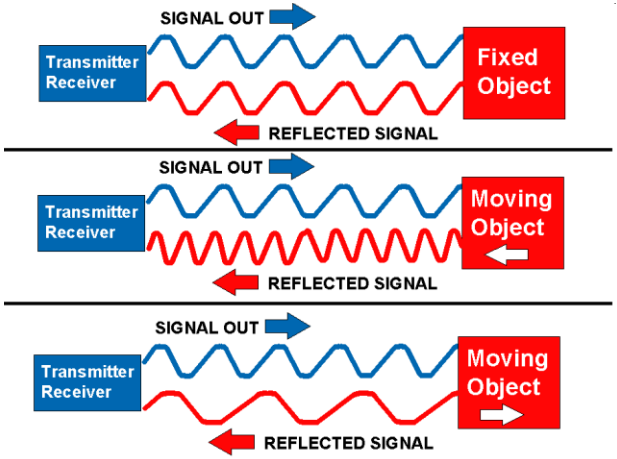
- **Ejemplo Ilustrativo 1: Aplicación radar/ sonar**
  - Sea *x(n)* las muestras de una señal emitida y *y(n)* las muestras de la señal recibida.
  - **Si existe** un blanco en el espacio explorado por el radar/sonar:
    - *y(n)* es una versión retardada de *x(n)*, atenuada y con ruido aditivo *w(n)*

$$y(n) = \alpha\, x(n-D) + w(n)$$

donde: α es el factor de atenuación

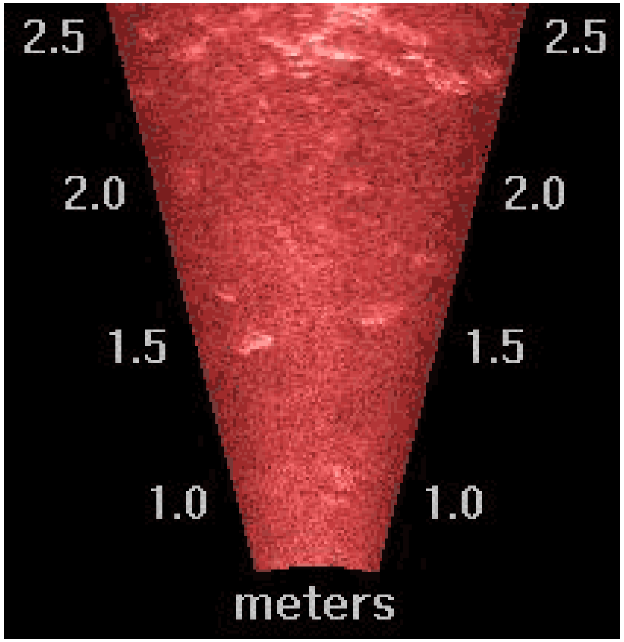
D es el retardo de ida y vuelta.





Ejemplo 1 …..

- **Problema:** determinar a partir de las secuencias x(n), y(n):
  - a) Si existe un blanco.
  - b) El retardo de tiempo D
  - c) La distancia al blanco.
- **Solución:**
  - Comparación visual prácticamente imposible debido al ruido.
  - La correlación es un método para extraer la información solicitada.



Ejemplo Ilustrativo 2. Comunicaciones Digitales

- Sea $x_0(n) \equiv$ "0" lógico y $x_1(n) \equiv$ "1" lógico dos secuencias para $0 \leq n \leq L-1$.

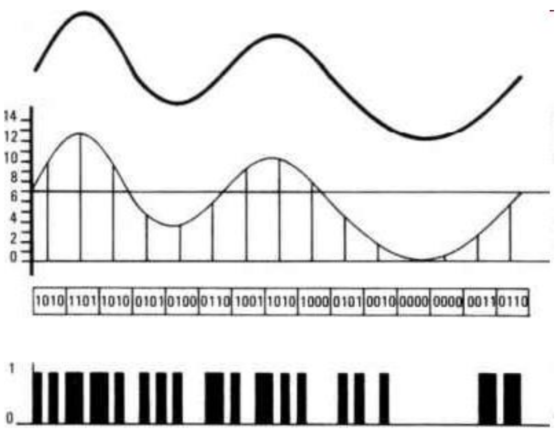
  L, indica el número de muestras en cada secuencia.

- La señal recibida por el receptor puede representarse como:

$$y(n) = x_i(n) + w(n)$$

$$i = 0,1 \qquad 0 \leq n \leq L-1$$

donde, $w(n)$ es el ruido aditivo y otras interferencias propias de los sistemas de comunicación.



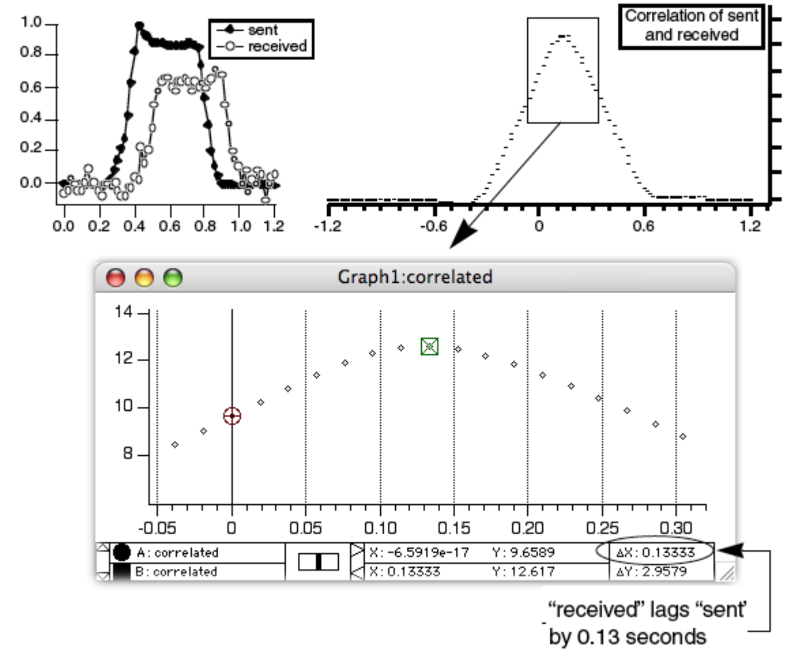
Correlación de Señales Discretas

PSI Percepción y Sistemas Inteligentes

■ Ejemplo Ilustrativo 2.

Comunicaciones Digitales

- **Problema**: determinar si la señal contenida en $y(n)$ es $x_0(n)$ ó $x_1(n)$.
- **Solución:**
  - El receptor conoce las secuencias para el "0" y para el "1"
  - Compara con la señal recibida para determinar a cuál de las dos se asemeja más.
  - La comparación puede realizarse mediante la correlación.



Correlación Cruzada

- **Definición:**
  - La **correlación cruzada** de dos secuencias reales de energías finitas *x(n)* e *y(n)* se **define** como la secuencia :

$$r_{xy}(l) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y(n-l) \qquad ó \qquad r_{xy}(l) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n+l)y(n) \quad l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Donde:

l parámetro de desplazamiento en el tiempo,

xy subíndices que indican las señales que han sido correlacionadas.

El orden indica cual secuencia ha sido retardada con respecto a la otra.

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

- **Definición …**
  - Al invertir los papeles de *x(n)* e *y(n)*, se invierte el orden de los subíndices en la definición de la correlación:

$$r_{yx}(l) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n)x(n-l) \qquad ó \qquad r_{yx}(l) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n+l)x(n) \qquad l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

  - **Ejemplo**
    - Código de Matlab (CrossCorrelation.m)
    - Visualización http://www.youtube.com/watch?v=Ma0YONjMZLI

Correlación Cruzada

■ Definición …

- Comparando $r_{xy}(l)$ y $r_{yx}(l)$ se concluye que,

$$r_{xy}(l) = r_{yx}(-l)$$

por lo tanto, $r_{xy}(l)$ es simplemente la **versión reflejada** de $r_{yx}(l)$ respecto a $l=0$.

- Lo anterior significa que $r_{xy}(l)$ y $r_{yx}(l)$ proporcionan la **misma información** con respecto a la similitud entre *x(n) e y(n)*.

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

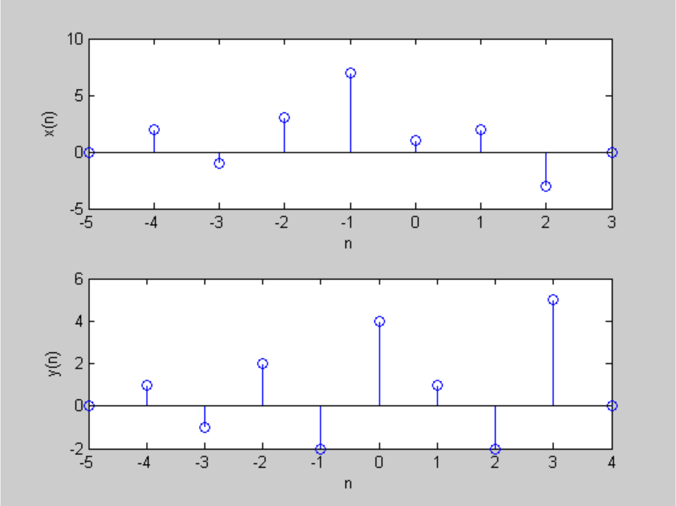
Correlación Cruzada

- **Ejemplo 1.**

Determine la correlación cruzada entre:

$$x(n) = \{0, 2, -1, 3, 7, \underline{1}, 2, -3, 0\}$$

$$y(n) = \{0, 1, -1, 2, -2, \underline{4}, 1, -2, 5, 0\}$$

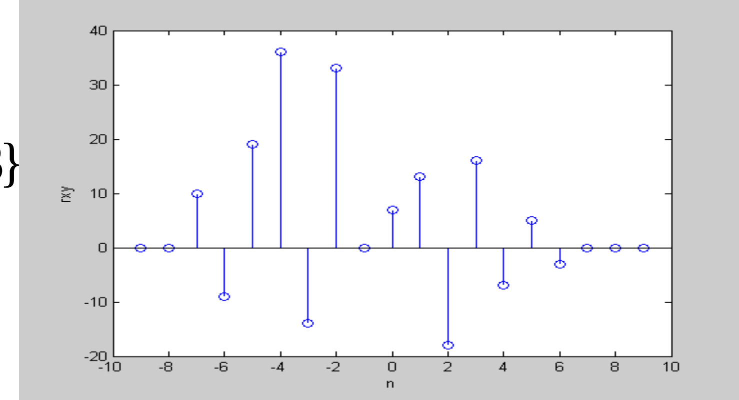


- **Solución**. Aplicando la definición,

$$r_{xy}(l) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y(n-l) \qquad l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Se tiene:

$$r_{xy}(l) = \{10, -9, 19, 36, -14, 33, 0, \underline{7}, 13, -18, 16, -7, 5, -3\}$$



Qué indica el valor máximo, el mínimo y el cero?

Correlación Cruzada

- **Ejemplo 2.**

  Encontrar la cross-correlación $r_{xy}(l)$ entre:

$$x(n) = u(n) \text{ y } y(n) = 2^n u(-n)$$

- **Solución**
  - Utilizando la definición $r_{xy}(l) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\, y(n-l)$

$$r_{xy}(l) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u(n)\ 2^{n-l} u(-(n-l))$$

  - Debido a que $u(n) = 0\ \ \forall\, n < 0$ y $u(n) = 1\ \ \forall\, n \geq 0$

$$r_{xy}(l) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n-l} u(-(n-l))$$

Correlación Cruzada

- **Solución …**

$$r_{xy}(l) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n-l}\, u(-(n-l))$$

- Reemplazando variable $m = -(n-l)$
  - $n = 0 \;\; \rightarrow m = l$
  - $n = \infty \;\; \rightarrow m = -\infty$
  - $n = l - m$
- Se obtiene:

$$r_{xy}(l) = \sum_{m=l}^{-\infty} 2^{-m}\; u(m)$$

- **Solución …**
  - Se realiza la evaluación de $r_{xy}(l)$ para $l < 0$ y $l \geq 0$
  - Para $l < 0$
    - Se tiene que $m < 0$
    - el escalón siempre es cero $u(m) = 0$
    - Por lo tanto,

$$r_{xy}(l)_{l<0} = \sum_{m=l}^{-\infty} 2^{-m}\, u(m) = 0$$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Correlación Cruzada

- **Solución …**
  - Para $l \geq 0$

$$r_{xy}(l)_{l\geq 0} = \sum_{m=l}^{-\infty} 2^{-m}\ u(m)$$

- Se descompone la sumatoria en dos:

$$r_{xy}(l)_{l\geq 0} = \sum_{m=-1}^{-\infty} 2^{-m}\ u(m) + \sum_{m=0}^{l} 2^{-m}\ u(m)$$

- En la primera parte, dado que $u(m) = 0$

$$\sum_{m=-1}^{-\infty} 2^{-m}\ u(m) = 0$$

Correlación Cruzada

- **Solución …**
  - Para $l \geq 0$ ….

$$r_{xy}(l)_{l\geq 0} = 0 + \sum_{m=0}^{l} 2^{-m}\ u(m)$$

  - Dado que $u(m) = 1$ para los valores de l, se llega a:

$$r_{xy}(l)_{l\geq 0} = \sum_{m=0}^{l} \left(\frac{1}{2}\right)^{m}$$

  - De la serie $\sum_{k=0}^{L} a^k = \frac{1-a^{L+1}}{1-a} \quad \forall\, a \neq 1$

$$r_{xy}(l)_{l\geq 0} = \frac{1-(1/2)^{l+1}}{1-1/2} = (1/2)^{-1} - (1/2)^{l}$$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

- **Solución …**
  - Finalmente,

$$r_{xy}(l) = \begin{cases} 2-(2)^{-l} & l \geq 0 \\ 0 & l < 0 \end{cases}$$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Correlación Cruzada

- **Ejemplo 3.**

  Encontrar la cross-correlación $r_{xy}(l)$ entre:

$$x(n) = u(n) \text{ y } y(n) = 2^n u(-n)$$

  - Pero utilizando la definición

$$r_{xy}(l) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n+l)\, y(n)$$

- **Solución**

$$r_{xy}(l) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u(n+l)\ 2^n u(-n)$$

Correlación Cruzada

- **Solución…**

$$r_{xy}(l) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u(n+l)\ 2^n u(-n)$$

  - Descomponiendo la suma, se llega a:

$$r_{xy}(l) = \sum_{n=-1}^{-\infty} u(n+l)\ 2^n u(-n) + \sum_{n=0}^{0} u(n+l)\ 2^n u(-n) + \sum_{n=1}^{\infty} u(n+l)\ 2^n u(-n)$$

$$r_{xy}(l) = r_{xy}(l)_{n<0} + r_{xy}(l)_{n=0} + r_{xy}(l)_{n>0}$$

Correlación Cruzada

- **Solución…**
  - El *tercer* sumando es cero debido a que siempre $u(-n) = 0$

$$r_{xy}(l)_{n>0} = \sum_{n=1}^{\infty} u(n+l)\ 2^n\, u(-n) = 0$$

  - El *segundo* sumando, solo incluye un término,

$$r_{xy}(l)_{n=0} = \sum_{n=0}^{0} u(n+l)\ 2^n u(-n) = u(0+l)\ 2^0 u(-0) = u(l)$$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

- **Solución…**
  - El *primer* sumando

$$r_{xy}(l)_{n<0} = \sum_{n=-1}^{-\infty} u(n+l)\ 2^n\, u(-n)$$

  - Se reduce debido a que $u(-n) = 1$ para $n < 0$,

$$r_{xy}(l) = \sum_{n=-1}^{-\infty} u(n+l)\ 2^n$$

  - Haciendo $m = 1 + n + l$,
    - $n = m - 1 - l \quad , \quad n + l = m - 1$
    - $n = -1 \ \Rightarrow m = l$
    - $n = -\infty \ \Rightarrow m = -\infty$

- **Solución…**
  - Haciendo cambio de índice

$$r_{xy}(l)_{n<0} = \sum_{m=l}^{-\infty} u(m-1)\ 2^{m-1-l}$$

  - Reorganizando,

$$r_{xy}(l)_{n<0} = 2^{-(l+1)} \sum_{m=l}^{-\infty} 2^{m}\ u(m-1)$$

  - Al evaluar para $l < 0$, se tiene que $u(m-1) = 0$, luego:

$$r_{xy}(l)_{n<0,\, l<0} = 2^{-(l+1)} \sum_{m=l}^{-\infty} 2^{m}\ u(m-1) = 0$$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Correlación Cruzada

- **Solución…**
  - Al evaluar para $l \geq 0$,

$$r_{xy}(l)_{n<0\,,l\geq 0} = 2^{-(l+1)} \sum_{m=l}^{-\infty} 2^{m}\ u(m-1)$$

  - Se obtiene,

$$r_{xy}(l)_{n<0\,,l\geq 0} = 2^{-(l+1)} \left[\sum_{m=0}^{-\infty} 2^{m}\ u(m-1) + \sum_{m=1}^{l} 2^{m}\ u(m-1) \right]$$

  - Puesto que la primera sumatoria es cero debido a que $u(m-1) = 0$, se obtiene,

$$r_{xy}(l)_{n<0\,,l\geq 0} = 2^{-(l+1)} \sum_{m=1}^{l} 2^{m}$$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

- **Solución…**

$$r_{xy}(l)_{n<0\,,l\geq 0} = 2^{-(l+1)} \sum_{m=1}^{l} 2^{m}$$

  - Con base en la serie de potencia

$$\sum_{k=1}^{L} a^{k} = \frac{a - a^{L+1}}{1-a} \quad \forall\, a \neq 1$$

  - Se llega a:

$$r_{xy}(l)_{n<0\,,l\geq 0} = 2^{-(l+1)} \quad \frac{2 - 2^{l+1}}{1-2} = 1 - 2^{-l}$$

Solución…

- La respuesta final se obtiene sumando los componentes

$$r_{xy}(l) = r_{xy}(l)_{n<0} + r_{xy}(l)_{n=0} + r_{xy}(l)_{n>0}$$

- De donde se obtiene:

$$r_{xy}(l) = \begin{cases} 1-(2)^{-l} + u(l) + 0 & l \geq 0 \\ 0 & l < 0 \end{cases}$$

- La cual es equivalente a la del ejercicio anterior:

$$r_{xy}(l) = \begin{cases} 2-(2)^{-l} & l \geq 0 \\ 0 & l < 0 \end{cases}$$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Definición

- La **Auto Correlación** se define como la secuencia obtenida al aplicar la correlación cruzada a una misma secuencia *x(n):*

$$r_{xx}(l) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\, x(n-l)\,, \qquad l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

ó

$$r_{xx}(l) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n+l)\, x(n)\,, \qquad l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

- Donde

  l es el parámetro de desplazamiento en el tiempo,

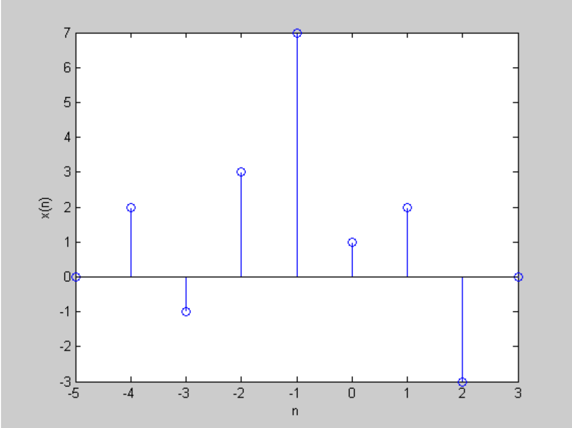
  xx subíndices de las señales a correlacionar

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Auto Correlación

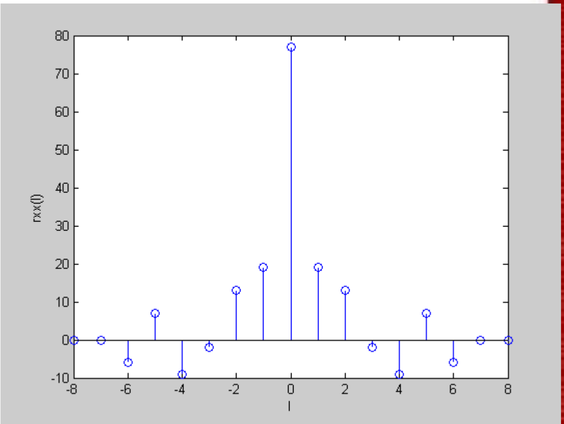
- **Ejemplo 1.** Determine la autocorrelación de la secuencia,

$$x(n)=\{\,0,\;2\,,-1,\,3,\;7,\;\underline{1}\,,\,2,\,-3,\,0\}$$



  - **Solución.** Aplicando la definición,

$$r_{xx}(l)=\{0,-6,\,7,\,-9,\,-2,\,13,\,19,\;\underline{77},\,19,\;13,-2,\,-9,\,7,\,-6,\,0$$



- **Propiedades**
  - Algunas se obtienen analizando la **combinación lineal** de **dos secuencias** de energía finita $x(n)$ e $y(n)$:

$$s(n) = a\,x(n) + b\,y(n-l)$$

    - Donde: a y b constantes y l desplazamiento temporal.

  - La energía de la señal combinada está dada por:
    - $E_s = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s^2(n) \quad = \sum_{n=\infty}^{-\infty} [a\,x(n) + b\,y(n-l)]^2$
    - $E_s = a^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2(n) + 2ab \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y(n-l) + b^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} y^2(n-l)$
    - Recordando que $r_{xx}(0) = E_x$ y $r_{yy}(0) = E_y$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Correlación

- Suponiendo que $b \neq 0$ y dividiendo por b^2, se llega a:

$$r_{xx}(0)\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 2\left(\frac{a}{b}\right) r_{xy}(l) + r_{yy}(0) \geq 0$$

- Considerando esta expresión una ecuación cuadrática de coeficientes r (l) de la forma:

$$Az^2 + Bz + C = 0; \;\; con\ A = r_{xx}(0), \qquad B = 2r_{xy}(l);\ C = r_{yy}(0)$$

- Con discriminante de la solución no positivo:

$$B^2 - 4AC \leq 0 \;\rightarrow\; 4\left[r_{xy}(l)\right]^2 - 4\, r_{xx}(0) r_{yy}(0) \leq 0$$

- de donde, se establece el límite: $r_{xy}(l) \leq \sqrt{r_{xx}(0)\, r_{yy}(0)}$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Correlación

- **Por lo tanto:**
  - **Cross-relación:**
    - Límite de los valores: $\left|r_{xy}(l)\right| \leq \sqrt{r_{xx}(0)r_{yy}(0)} = \sqrt{E_x E_y}$
    - Las energías de las señales constituyen la cota superior.
  - Para la **autocorrelación**:
    - Límite de los valores: $\left|r_{xx}(l)\right| \leq r_{xx}(0) = E_x$
    - Alcanza su máximo para el retardo cero.

Conclusiones

- El **escalado** carece de importancia en la correlación.
- La ***normalización*** genera secuencias en el rango [-1 , 1]:

$$\rho r_{xx}(l) = \frac{r_{xx}(l)}{r_{xx}(0)} \qquad \rho r_{xy}(l) = \frac{r_{xy}(l)}{\sqrt{r_{xx}(0) r_{yy}(0)}}$$

- La correlación satisface la propiedad:

$$r_{xy}(l) = r_{yx}(-l) \quad y \quad r_{xx}(l) = r_{xx}(-l)$$

es decir, es una **función par**, y es **suficiente** calcular r(*l*) para $l \geq 0$.

Ejemplo

- **Problema:** Calcular la autocorrelación de la señal:

$$x(n) = a^n u(n), \qquad 0 < a < 1$$

- **Solución**. Dado que $x(n)$ es de duración infinita, su autocorrelación también es de duración infinita. **Se distinguen dos casos**:
  - ***l* ≥ *0***

$$r_{xx}(l) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)x(n-l) = \sum_{n=l}^{\infty} a^n a^{n-l} = a^{-l} \sum_{n=l}^{\infty} (a^2)^n \Rightarrow r_{xx}(l) = \frac{1}{1-a^2} a^l$$

$$\text{Recordar que: } \sum_{k=l}^{\infty} A^k = \sum_{k=0}^{\infty} A^k - \sum_{k=0}^{l-1} A^k$$

$$\text{donde, } \sum_{k=0}^{l-1} A^k = \frac{1-A^l}{1-A} \quad , \quad \sum_{k=0}^{\infty} A^k = \frac{1}{1-A} \quad \forall \ |A| < 1$$

- **Solución. …**
  - ***l ≤ 0***

$$r_{xx}(l)=\sum_{n=0}^{\infty}x(n)x(n-l)=a^{-l}\sum_{n=0}^{\infty}(a^{2})^{n} \quad \Rightarrow \quad r_{xx}(l)=\frac{1}{1-a^{2}}a^{-l}$$

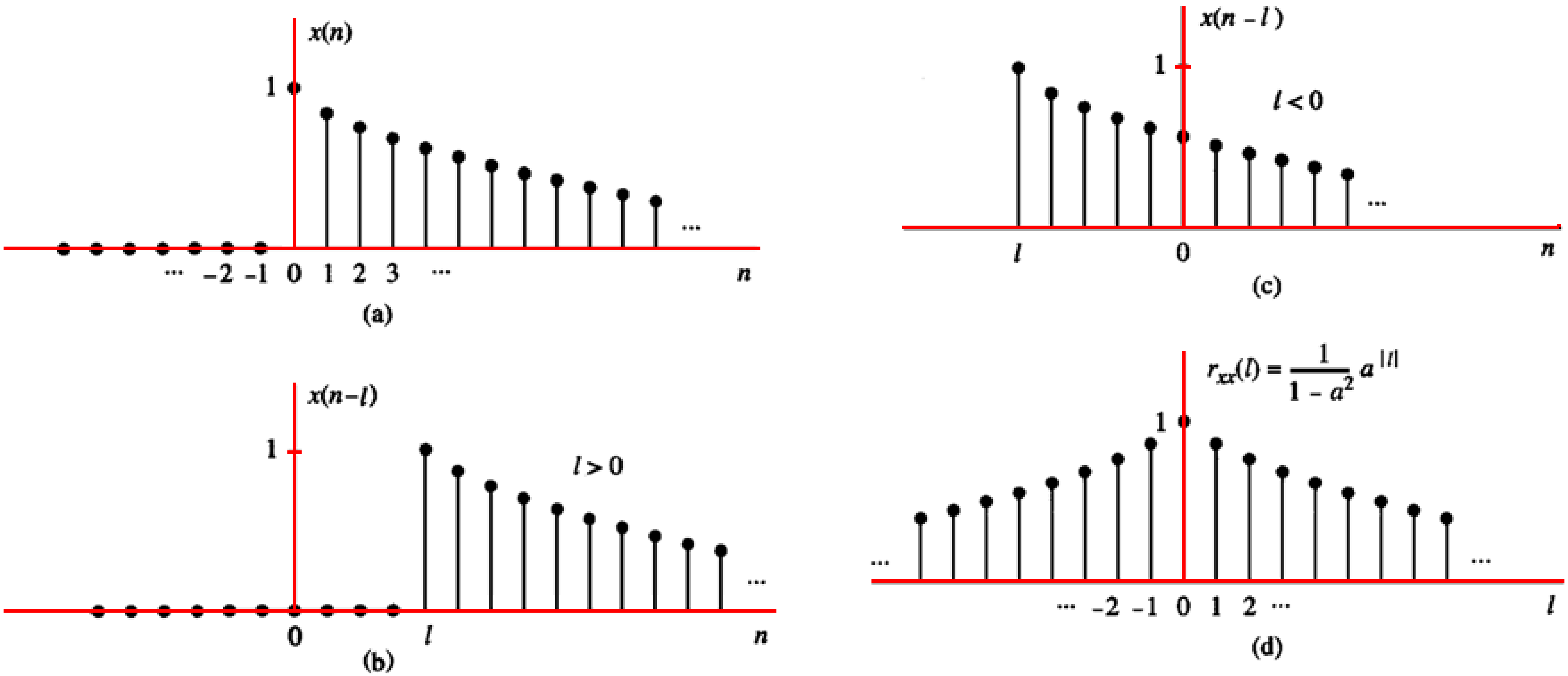
  - **Correlación Total**: Puesto que *l* es negativo, $a^{-l} = a^{|l|}$, las dos expresiones obtenidas se pueden combinar en una sola:

$$r_{xx}(l)=\frac{1}{1-a^{2}}a^{|l|} \quad , \quad \rho_{xx}(l)=\frac{r_{xx}(l)}{r_{xx}(0)}=a^{|l|} \quad , \quad -\infty<l<\infty$$

Ejemplo…

Solución. …

- *Gráficamente*



Cálculo de la autocorrelación de x(n)=a^2

Correlación V.S. Convolución

Observación

- Las **similitudes** entre el cálculo de la ***cross-correlación*** y la ***convolución*** de dos secuencias **son evidentes**.
- La **convolución** de *x*(n) con *y*(-n) es igual a la **correlación** cruzada r_{xy} (*l*); esto es,

$$r_{xy}(l) = x(l) * y(-l)$$

- Cuando **y(n)=x(n),** se obtiene la ***auto-correlación*** como,

$$r_{xx}(l) = x(l) * x(-l)$$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

- **Ejemplo**
  - Realizar un programa en Matlab para calcular y graficar la correlación entre dos señales.
  - Probar el programa para los siguientes casos:
    - $x(n)=\{\underline{1}\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ \ 5\ \ 4\ \ 3\ \ 2\ \ 1\}$, $y(n)=\{\underline{-1}\ \ -2\ \ -3\ \ -4\ \ -5\ \ -$

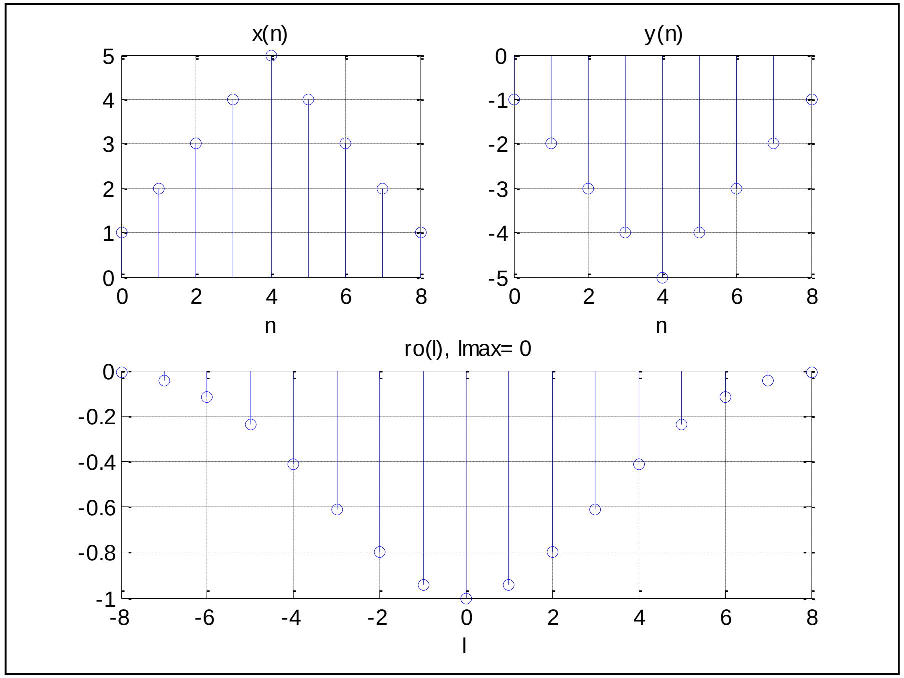
Solución a,b

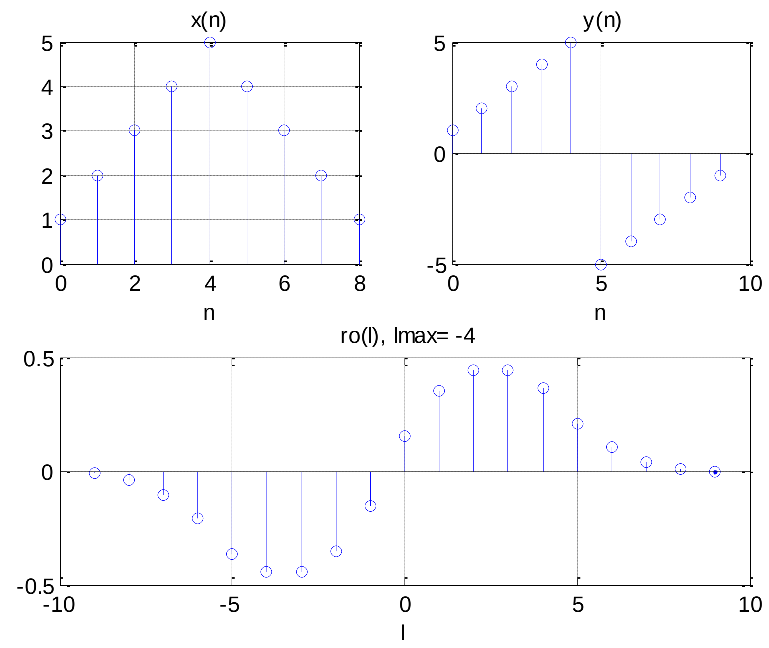
- (Prueba1correlacion.m)

```
clc; clear all; close all;
% Señales a correlacionar
x=[1 2 3 4 5 4  3  2 1];
nx=0:length(x)-1;
Ex=sum(x.^2); %Energía de x(n)=rxx(0)
y=-1*[1 2 3 4 5 4  3  2 1];
%y=[1 2 3 4 5 -5 -4 -3 -2 -1];
ny=0:length(y)-1;
Ey=sum(y.^2); %Energía de y(n)=ryy(0)

% Calcular Correlación
N=max(length(x),length(y));
r = xcorr(x,y);
l=(-N+1):(N-1); % rango de valores de l
ro=r/sqrt(Ex*Ey); %Normalizar la correlación
% Graficación
subplot(2,2,1); stem(nx,x);title('x(n)'); xlabel('n');grid on;
subplot(2,2,2); stem(ny,y);title('y(n)'); xlabel('n');grid on;
[rmax,lmax]=max(ro);
subplot(2,2,3:4); stem(l,ro);title(['ro(l), lmax= ' num2str(lmax-N)]);
xlabel('l');grid on;
```

- **Solución a,b**
  - (Prueba1correlacion.m)





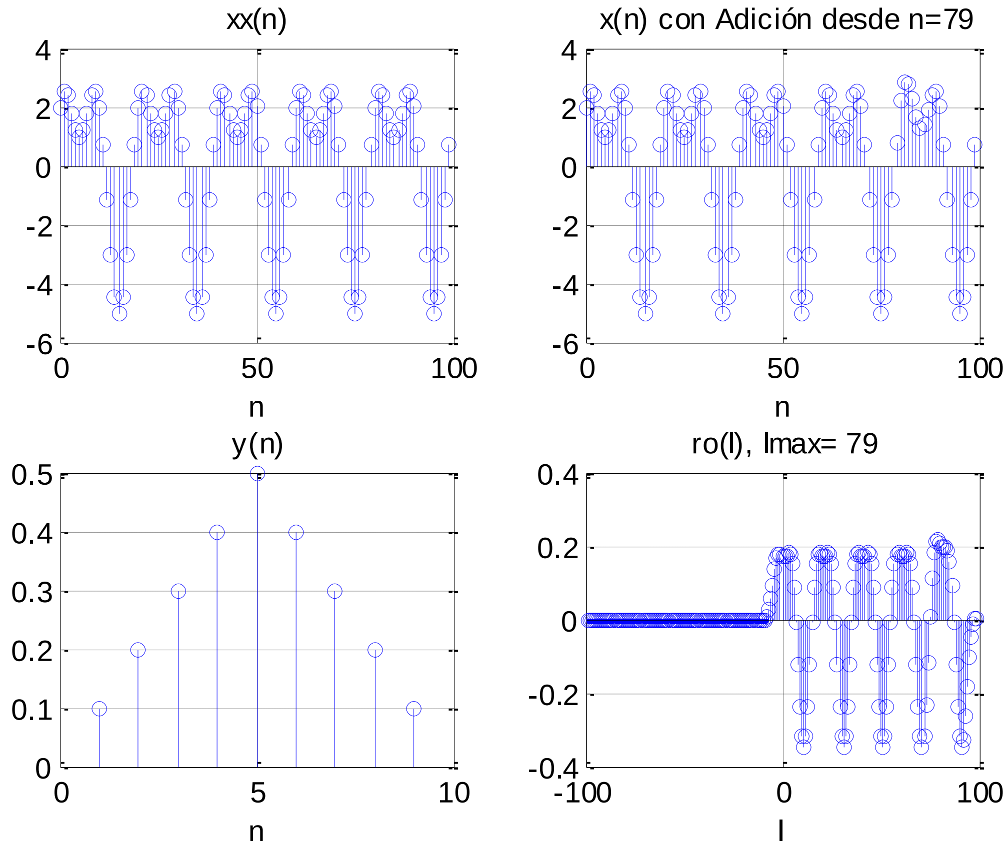
Solución c

- (Prueba2correlacion.m)

```
clc; clear all; close all;
% Señal y(n)
y=0.1*[1 2 3 4 5 4  3  2 1];
Ly=length(y);
Ey=sum(y.^2); %Energía de y(n)=ryy(0)
% Generación de señal x(n)
A1=3.0; A2=2.0; % Amplitudes de las cosenoidales
F1=30; F2=60; % Frecuencias de las cosenoidales
Fs=600; % Frecuencia de muestreo
NT=Fs/min(F1,F2); %Periodo de la señal seno
n=0:5*NT-1; %Instantes de tiempo a calcular
xx=A1*sin(2*pi*F1*n/Fs)+A2*cos((2*pi*F2*n/Fs));
Lx=length(xx);
%Ubicación aleatoria
ind = randi(Lx,1,1);
while (ind<Ly || ind> (Lx-Ly))
    ind = randi(Lx,1,1);
end
```

- **Solución c**
  - (Prueba2correlacion.m)

```
x=xx; %copiar señal
%Adicionar señal
x(ind: ind+Ly-1)=x(ind: ind+Ly-1)+y;
Ex=sum(x.^2); %Energía de x(n)=rxx(0)
% Calcular Correlación
N=max(length(x),length(y));
l=(-N+1):(N-1); % Intervalo de l
r = xcorr(x,y);
ro=r/sqrt(Ex*Ey); % Normalizar correlación
subplot(2,2,1); stem(n,xx);title('xx(n)' ); xlabel('n');grid on;
subplot(2,2,2); stem(n,x);title(['x(n) con Adición desde n=' num2str(ind-1)] );
xlabel('n');grid on;
subplot(2,2,3); stem(y);title('y(n)'); xlabel('n');grid on;
[rmax,lmax]=max(ro);
subplot(2,2,4); stem(l, ro);title(['ro(l), lmax= ' num2str(lmax-N)]);
xlabel('l');grid on;
```


xx(n)
x(n) con Adición desde n=79
y(n)
ro(l), lmax= 79
n
n
n
l
4
2
0
-2
-4
-6
0
50
100
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
5
10
0.4
0.2
-0.2
-0.4
-100

Correlación de Señales Periódicas

Definición:

- Sean $x(n)$ e $y(n)$ dos **señales de potencia.** Su correlación cruzada y autocorrelación se definen como:

$$r_{xy}(l) = \lim_{M\to\infty} \frac{1}{2M+1} \sum_{n=-M}^{M} x(n)y(n-l) \quad y \quad r_{xx}(l) = \lim_{M\to\infty} \frac{1}{2M+1} \sum_{n=-M}^{M} x(n)x(n-l)$$

- Si $x(n)$ e $y(n)$ son dos secuencias **periódicas** de periodo **N**:
  - los promedios sobre un **intervalo infinito** son iguales a los promedios sobre **un periodo.**

Definición…

- Las expresiones anteriores se reducen a:

$$r_{xy}(l) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)y(n-l) \quad y \quad r_{xx}(l) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)x(n-l)$$

donde, el factor 1/N puede considerarse un factor de escala.

  - Lo que permite calcular la correlación con un solo periodo.
  - Esta característica es de gran utilidad práctica.

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

- **Aplicación Práctica**
  - La correlación se emplea para determinar periodicidades en señales físicas afectadas por interferencias aleatorias.
  - Considérese la secuencia $y(n) = x(n) + w(n)$, donde :
    - $x(n)$ secuencia periódica de periodo desconocido N
    - $w(n)$ interferencia aditiva aleatoria
  - Supóngase que se observan M muestras de $y(n)$,
    - donde $0 \leq n \leq M - 1$ y $M >> N$.
  - Por razones prácticas se supone que $y(n) = 0$ para $n < 0$ y $n \geq M$.

- **Aplicación Práctica…**
  - Con las condiciones anteriores, la autocorrelación de $y(n)$, normalizada en $1/M$, queda determinada por:

$$r_{yy}(l) = \frac{1}{M}\sum_{n=0}^{M-1} y(n)y(n-l) = \frac{1}{M}\sum_{n=0}^{M-1}[x(n)+w(n)][x(n-l)+w(n-l)]$$

$$r_{yy}(l) = \frac{1}{M}\sum_{n=0}^{M-1} x(n)x(n-l) + \frac{1}{M}\sum_{n=0}^{M-1}[x(n)w(n-l)+w(n)x(n-l)] + \frac{1}{M}\sum_{n=0}^{M-1} w(n)w(n-l)$$

$$r_{yy}(l) = r_{xx}(l) + r_{xw}(l) + r_{wx}(l) + r_{ww}(l)$$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Correlación de Señales Periódicas

$$r_{yy}(l) = \boxed{r_{xx}(l)} + \boxed{r_{xw}(l)} + \boxed{r_{wx}(l)} + r_{ww}(l)$$

- **$\mathbf{r_{x\,x}}$ (*l*)**
  - La **autocorrelación** de x(n) es **periódica** puesto que x(n) es periódica, y presentará picos en *l*=0, N, 2N,…
  - La **amplitud** de los picos de la autocorrelación **disminuye** a medida que *l* tiende a M. Por lo tanto hay que evitar calcular $r_{x\,x}$ (*l*) para valores *l* > M/2.

- **$\mathbf{r_{xw}}$ (*l*) y $\mathbf{r_{wx}}$ (*l*)**
  - La **correlación** entre x(n) y w(n) debe ser **muy pequeña** puesto que las dos señales **no están relacionadas** en absoluto.

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Correlación de Señales Periódicas

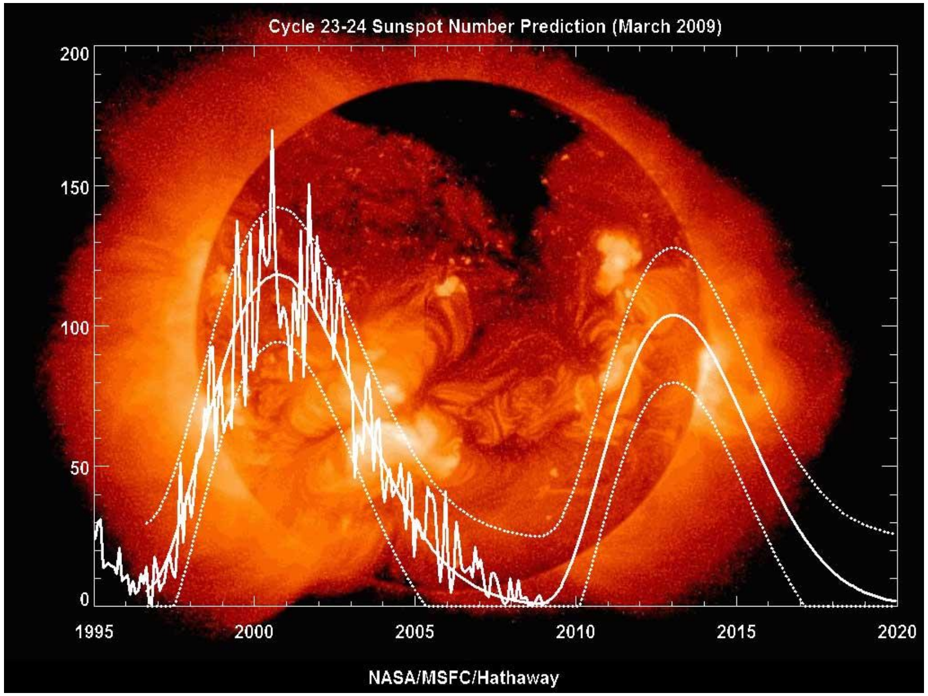
$$r_{yy}(l) = \boxed{r_{xx}(l)} + \boxed{r_{xw}(l)} + \boxed{r_{wx}(l)} + \boxed{r_{ww}(l)}$$

- **r_{ww} (*l*)**
  - La **autocorrelación** de w(n) presentará un pico en *l*=0, pero dada su naturaleza aleatoria se supone que **r_{ww} (*l*)** tenderá rápidamente **hacia cero**.
- **Conclusión:**
  - Se espera que **sólo r_{xx} (*l*)** presente picos considerables para ***l* > *0***.
  - Es posible detectar señales periódicas *x*(n) inmersas en la interferencia *w*(n) e identificar su periodo.

Ejemplo

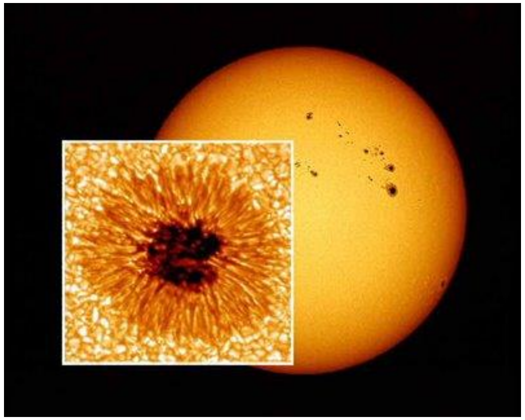
- **Problema:**

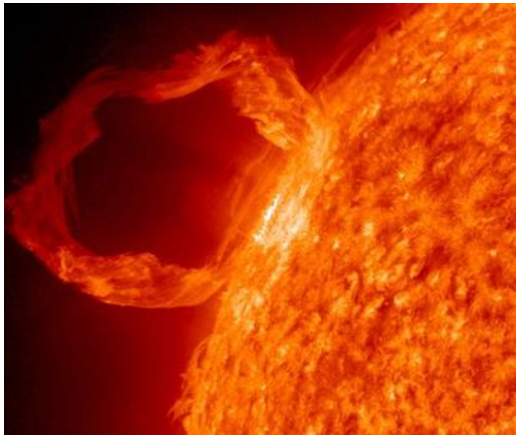
  Determinar la **periodicidad** de las **manchas solares** (**sunspots**) a partir de la **tabla de** Wölfer.



- **Introducción**
  - En 1825 el farmacéutico alemán Heinrich Samuel Schwabe, descubrió las manchas solares.

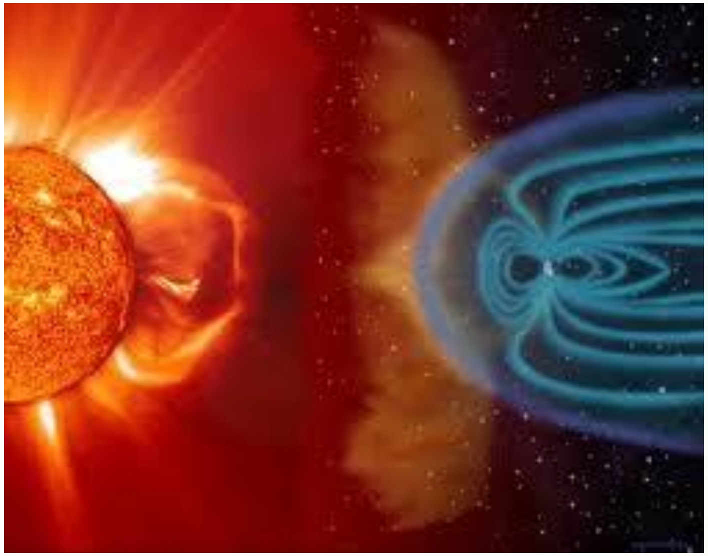
- **Introducción…**
  - Las manchas solares son causadas por disturbios en el campo magnético del Sol que emana hacia la fotosfera (parte visible de la ´superficie´). Video_Sol.mpg
    (http://sohowww.nascom.nasa.gov/gallery/Movies/sunspots.html)
  - Los potentes campos magnéticos cerca de las manchas solares producen regiones activas que frecuentemente generan destellos solares y eyecciones de masa coronal conocidas como,"tormentas solares".





Introducción…

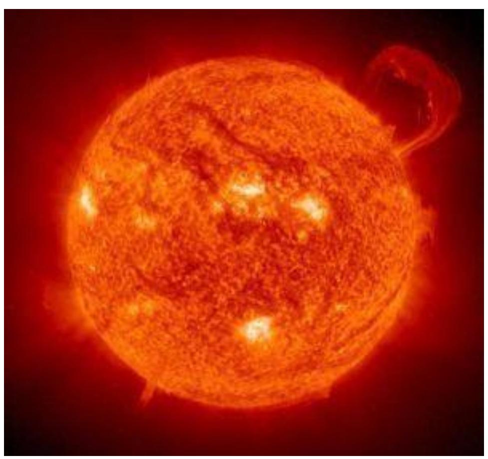
- Las tormentas solares pueden dirigirse a la Tierra. Estas emiten grandes nubes cargadas de partículas. reconsm.mpg
  (http://sohowww.nascom.nasa.gov/gallery/Movies/animations.html)
  - Las partículas interactúan con el campo magnético terrestre y crean tormentas geomagnéticas
  - Representan riesgos para astronautas y naves espaciales en órbita, así como interferencia en las redes eléctricas y de telecomunicaciones en el tierra.



Ejemplo

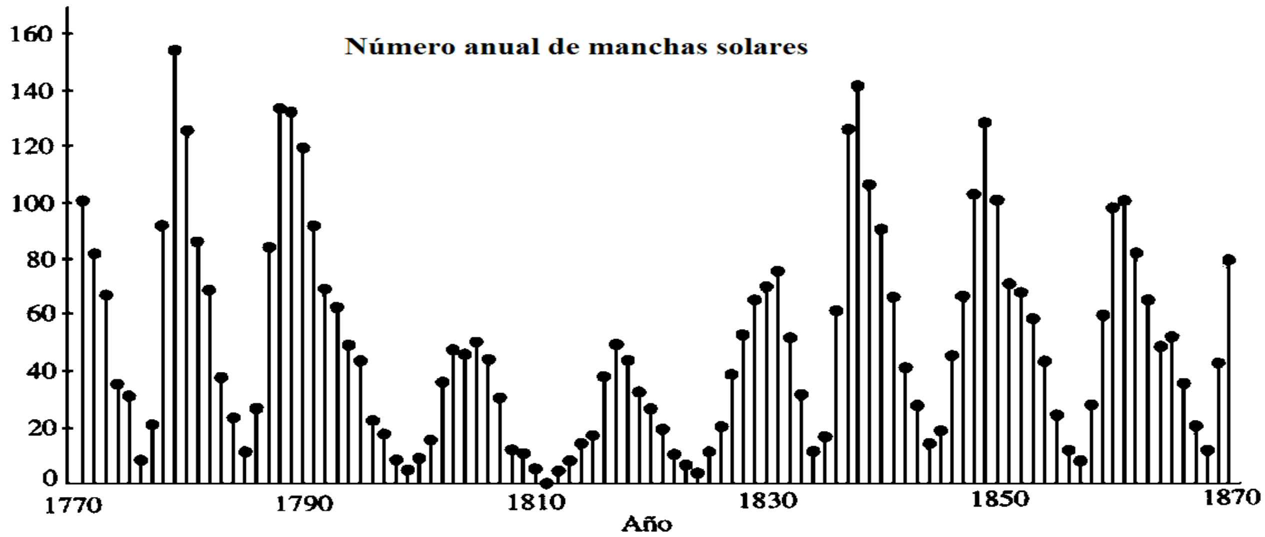
Solución

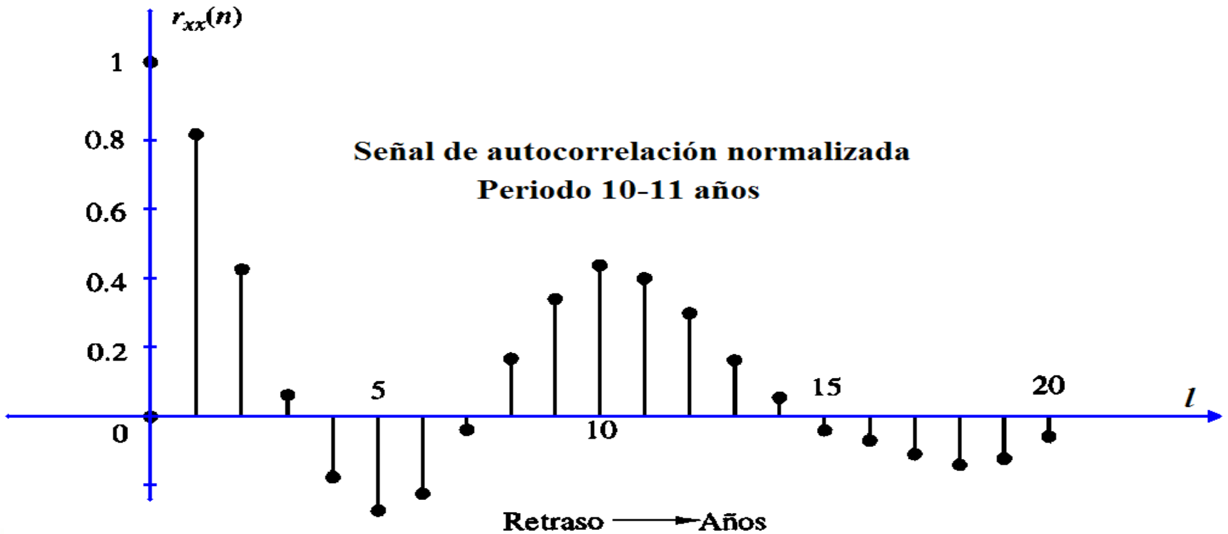
- Usar la tabla de Wölfer elaborada para 100 años entre 1770 y 1869.
- Seleccionar $0 \leq l \leq 20$, donde cada valor de l corresponde a un año.



Año	Manchas	Año	Manchas	Año	Manchas	Año	Manchas
1770	101	1795	21	1820	16	1845	40
1771	82	1796	16	1821	7	1846	62
1772	66	1797	6	1822	4	1847	98
1773	35	1798	4	1823	2	1848	124
1774	31	1799	7	1824	8	1849	96
1775	7	1800	14	1825	17	1850	66
1776	20	1801	34	1826	36	1851	64
1777	92	1802	45	1827	50	1852	54
1778	154	1803	43	1828	62	1853	39
1779	125	1804	48	1829	67	1854	21
1780	85	1805	42	1830	71	1855	7
1781	68	1806	28	1831	48	1856	4
1782	38	1807	10	1832	28	1857	23
1783	23	1808	8	1833	8	1858	55
1784	10	1809	2	1834	13	1859	94
1785	24	1810	0	1835	57	1860	96
1786	83	1811	1	1836	122	1861	77
1787	132	1812	5	1837	138	1862	59
1788	131	1813	12	1838	103	1863	44
1789	118	1814	14	1839	86	1864	47
1790	90	1815	35	1840	63	1865	30
1791	67	1816	46	1841	37	1866	16
1792	60	1817	41	1842	24	1867	7
1793	47	1818	30	1843	11	1868	37
1794	41	1819	24	1844	15	1869	74

Ejemplo …


Número anual de manchas solares
160
140
120
100
80
60
40
20
0
1770
1790
1810
1830
1850
1870
Año


$r_{xx}(n)$
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
Señal de autocorrelación normalizada
Periodo 10-11 años
5
10
15
20
l
Retraso → Años

- **Ejemplo Matlab**
  - Realizar un programa que realice las siguientes actividades:
    - Genere una señal senoidal afectada con ruido gaussiano aleatorio
    - El nivel de ruido debe expresarse como SNR
    - Calcular el periodo de la señal inmersa en ruido mediante la detección de dos picos consecutivos en la correlación.
    - Visualizar la señal sin ruido, con ruido y la autocorrelación.

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Solución (PeriodicidadCorrelacion.m)

```
clc; clear all; close all;
% Generación de señal x(n) con ruido
A=3.0;  F=30; % Amplitud y Frecuencia de la señal
Fs=600; % Frecuencia de muestreo
NT=Fs/F; %Periodo de la señal seno
n=0:5*NT-1; %Instantes de tiempo a calcular
x1=A*sin(2*pi*F*n/Fs);

RSN=rand(1);%Relación señal ruido en dB
x= awgn(x1,RSN,'measured'); %adicionar ruido blanco
Ex=sum(x.^2); % Energía de x(n)
% Calcular AutoCorrelación
N=length(x); l=(-N+1):(N-1); % Intervalo de l
r=xcorr(x,x);
ro=r/Ex; % Normalizar correlación
% Obtener media señal de correlación y suprimir valores negativos
y=ro(N:2*N-1);
[pks,locs1] = find(y<0);
y(locs1)=0; y=[zeros(1,3) y]; %Inclusión de ceros para detectar primer pico
% Encontrar picos y determinar periodo
[pks,locs]= findpeaks(y,'SortStr','descend');
Nest=locs(2)-locs(1);
```

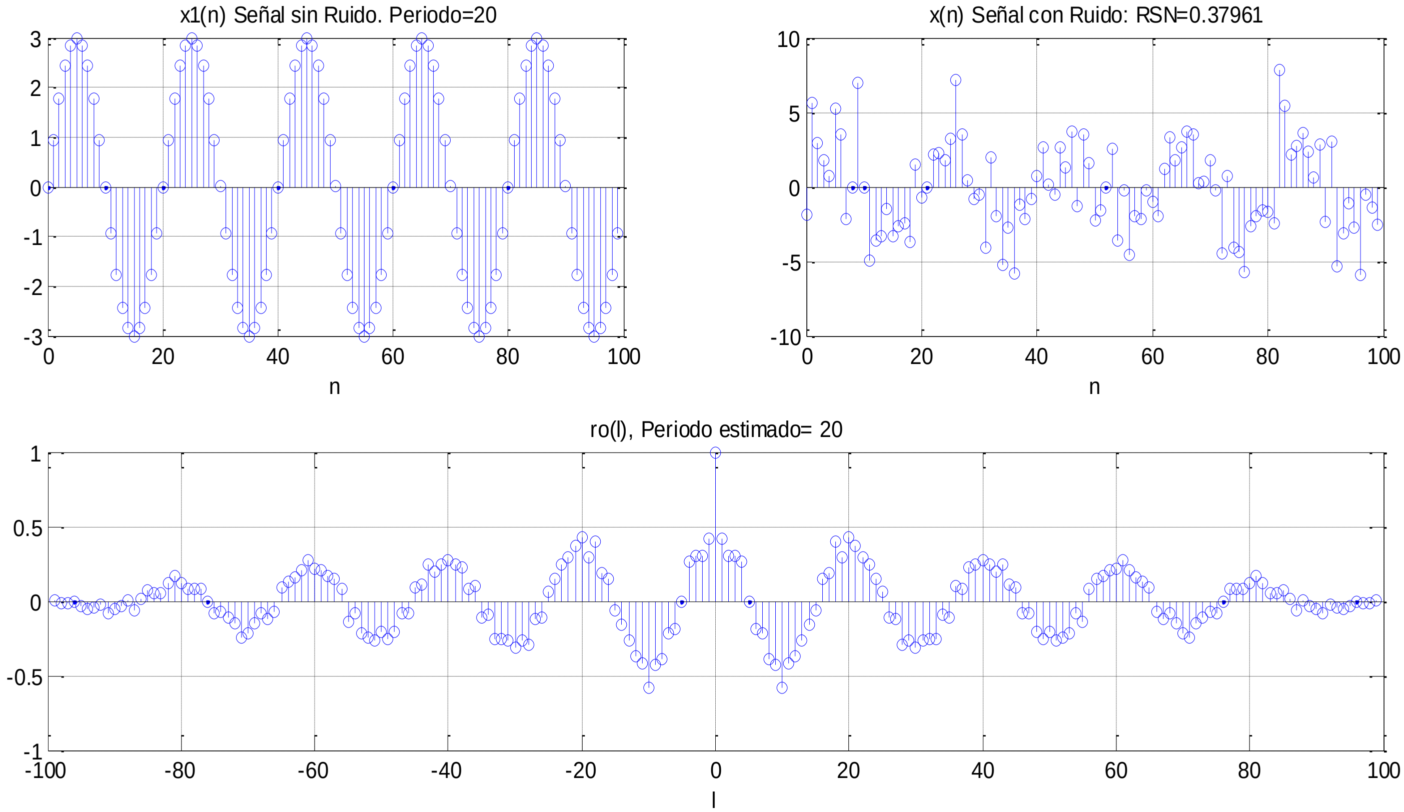
Solución (PeriodicidadCorrelacion.m) …

```
% Visualizar
stem([0:N-1],y(4:N+3)); figure;

subplot(2,2,1); stem(n,x1);title(['x1(n) Señal sin Ruido. Periodo=' num2str(NT)]);
xlabel('n');grid on;
subplot(2,2,2); stem(n,x);title(['x(n) Señal con Ruido: RSN=' num2str(RSN)] );
xlabel('n');grid on;
subplot(2,2,3:4); stem(l, ro);title(['ro(l), Periodo estimado= ' num2str(Nest)]);
xlabel('l');grid on;
```

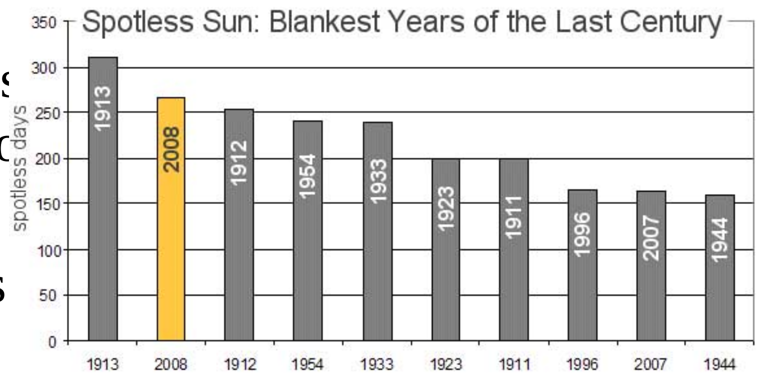

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Solución


x1(n) Señal sin Ruido. Periodo=20
3
2
1
0
-1
-2
-3
0 20 40 60 80 100
n
x(n) Señal con Ruido: RSN=0.37961
10
5
0
-5
-10
0 20 40 60 80 100
n
ro(l), Periodo estimado= 20
1
0.5
0
-0.5
-1
-100 -80 -60 -40 -20 0 20 40 60 80 100
l

Ejemplo

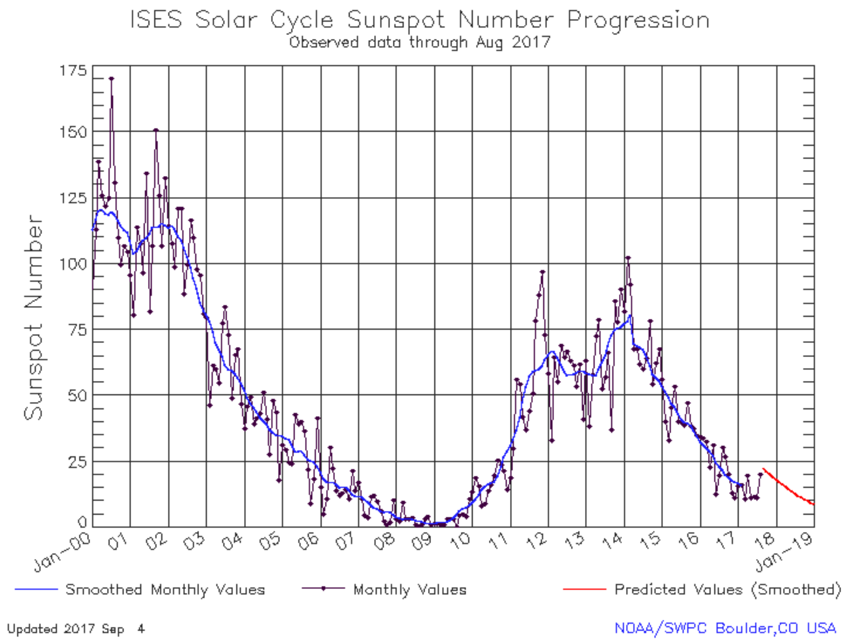
- **Observaciones**
  - En el 2008 no se observaron manchas solares en 266 de los 366 días del año (73 por ciento).
  - Sólo en 1913, se presentaron menos 311 días sin manchas solares.
  - En 2009 han caído aún más: Al 31 de marzo no ha habido manchas solares en 78 de los 90 días del año (87 por ciento).



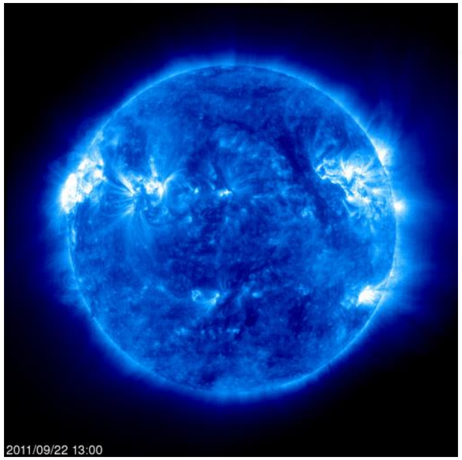
Observaciones

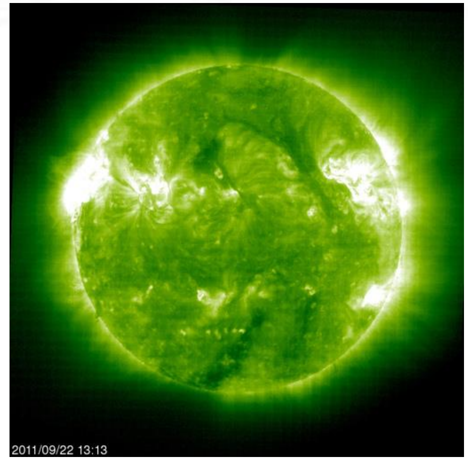
- En 2001 ocurrió el último máximo solar y el mínimo en el 2006.
- Se esperaba un máximo de manchas entre el 2012 y 2013.

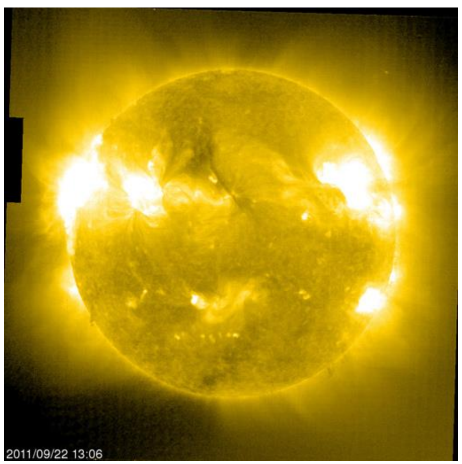
Sunspot Number Progression

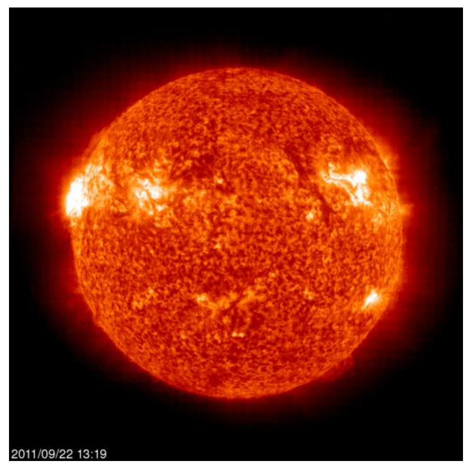


Ejemplo …







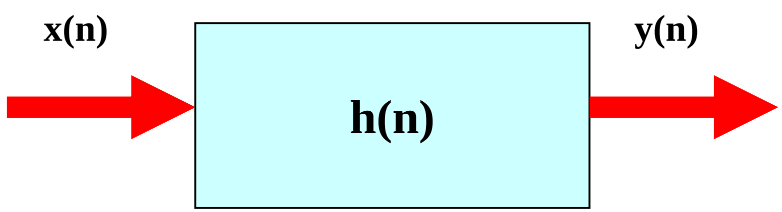


http://sohowww.nascom.nasa.gov/data/realtime-images.html

Correlación entre Entrada-Salida

Introducción:

Al **aplicar** la señal *x(n)*, con autocorrelación $r_{xx}(l)$ conocida, a la entrada de un **sistema** con respuesta impulsional *h*(n), se obtiene:



$$y(n) = h(n) * x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(n)x(n-k)$$

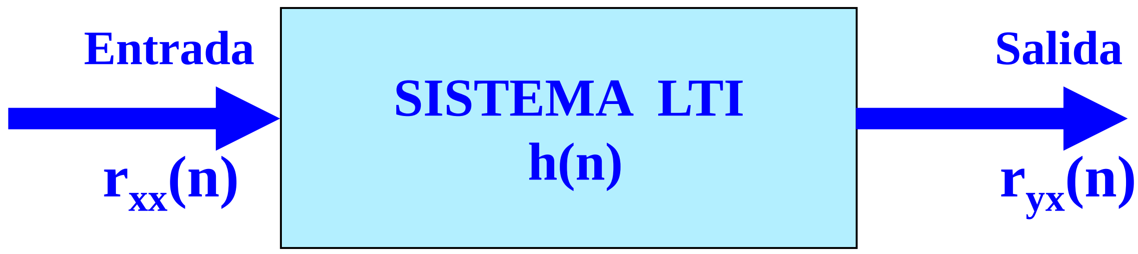
- Se encuentran relaciones entre las correlaciones de x(n), y(n) y h(n) así como con la energía,
- Estas relaciones son de utilidad en el análisis de sistemas LTI.

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Correlación entre Entrada-Salida

- La **cross-correlación** r_{yx} *(l)* entre la señal de entrada y salida es:

$$r_{yx}(l) = y(l) * x(-l) = h(l) * \left[x(l) * x(-l)\right] = h(l) * r_{xx}(l)$$

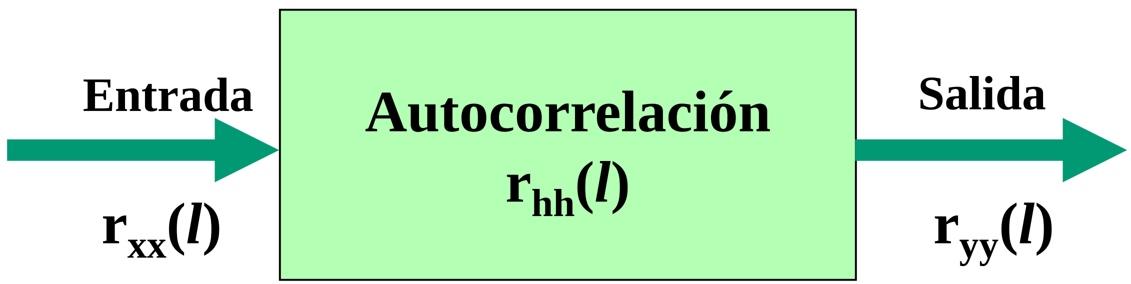


- Lo que indica que se puede considerar a $\boldsymbol{r_{yx}}$ **(*l*)** como la **salida** del sistema LTI cuando la **entrada** es $\boldsymbol{r_{xx}}$ **(*l***).

Correlación entre Entrada-Salida

- La **Auto-correlación** r_{yy} *(l)* de la señal de **salida** es:

$$r_{yy}(l) = y(l) * y(-l) = \left[h(l) * x(l)\right] * \left[h(-l) * x(-l)\right] = r_{hh}(l) * r_{xx}(l)$$



- La **auto-correlación** $r_{hh}(l)$ de la repuesta impulsional $h(n)$ **existe si** el sistema es **estable**.

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Correlación entre Entrada-Salida

Correlación – Energía/Potencia

- La **estabilidad** asegura que si la **entrada** es una señal de **energía** (potencia) la **salida** también es una señal de **energía** (potencia).

- Evaluando la expresión de **auto-correlación r $_{yy}$(*l*)** en ***l*=*0***, se tiene:

$$r_{yy}(0) = E_y = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r_{hh}(k)\; r_{xx}(k)$$

la **energía** (potencia) de la **señal de salida** en términos de las **autocorrelaciones** de $h(n)$ y $x(n)$.

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co