Transformada de Fourier Discreta

PSI Percepción y Sistemas Inteligentes

- **Dualidades Tiempo Frecuencia**

  - **Series/Transformada de Fourier**
    - Series $\rightarrow$ señales periódicas
    - Transformada $\rightarrow$ señales aperiódicas

  - **Señales en *tiempo continuo* tienen espectros aperiódicos**
    - La falta de periodicidad se debe a que la función exponencial $e^{(j\,2\,\pi\,F\,t)}$ es una función de la variable continua *t*, y por lo tanto no periódica en F.
    - El rango de frecuencias se extiende desde F=0 hasta $F=\pm\infty$.

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Transformada de Fourier Discreta

- **Dualidades Tiempo Frecuencia…**
  - **Señales en *tiempo discreto* tienen espectros periódicos**
    - Las series y transformadas de Fourier de señales en tiempo discreto son periódicas de periodo $w=2\pi$.
    - El rango de frecuencias es finito y se extiende desde $w=-\pi$ hasta $w=\pi$, donde $w=\pi$ corresponde a la mayor oscilación posible.

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Transformada de Fourier Discreta

- **Dualidades Tiempo Frecuencia…**
  - **Señales *periódicas* tienen espectros discretos**
    - Los coeficientes de la serie de Fourier representan las “líneas” del espectro discreto.
  - **Relación Tiempo-Frecuencia en series de F.**
    - **Señales periódicas en tiempo continuo**: el espaciado entre líneas ΔF del espectro es igual al inverso del periodo Tp en el tiempo.
      - $\Delta F = 1/Tp$
    - **Señales períodicas en tiempo discreto**: El espaciado entre líneas Δf del espectro es igual al inverso del periodo N en el tiempo.
      - $\Delta f = 1/N$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

- **Dualidades Tiempo Frecuencia…**

  - **Señales *aperiódicas* (de energía finita) tienen espectros continuos**

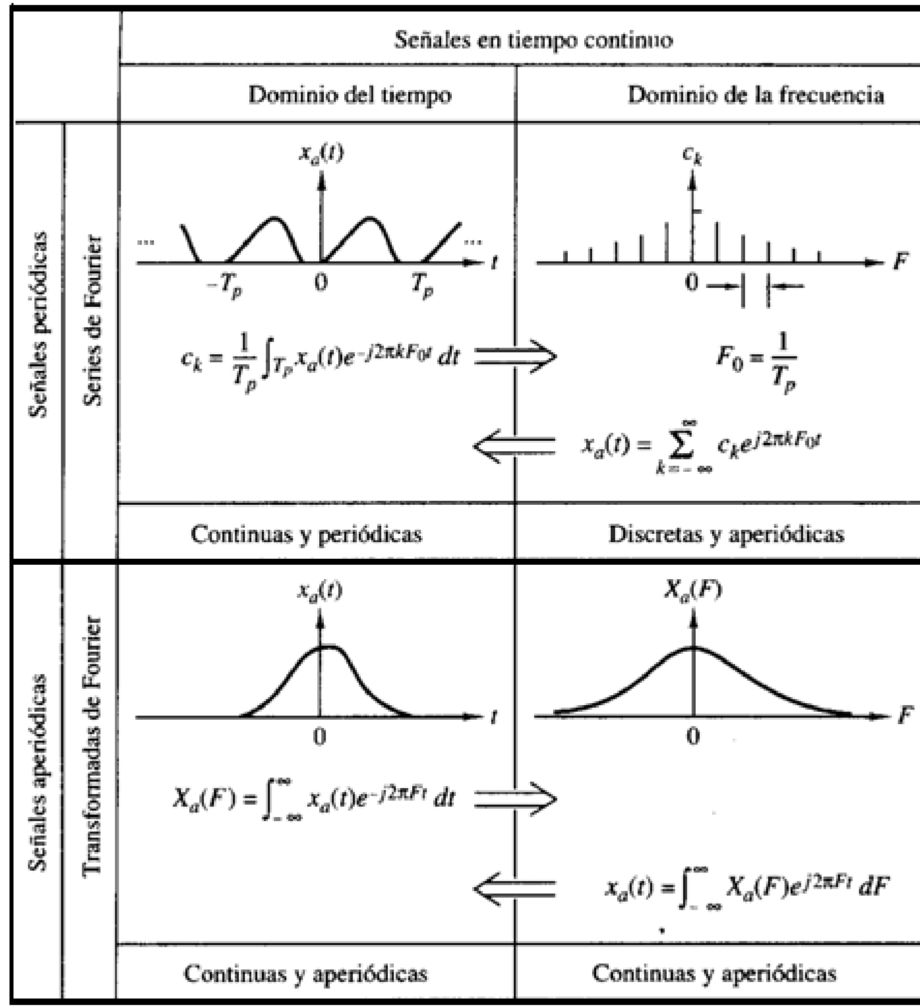
    - Debido a que $X(F)$ es función de $\mathbf{e}^{(j\,2\,\pi\,F\,t)}$, la cual es una función continua de la variable F.

    - Debido a que $X(w)$ es función de $\mathbf{e}^{(j\,w\,n)}$, la cual es una función continua de la variable w.

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

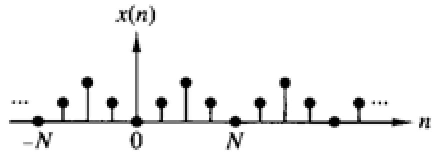
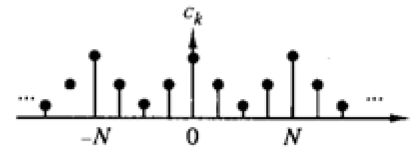
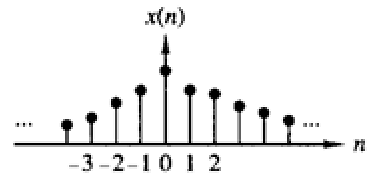
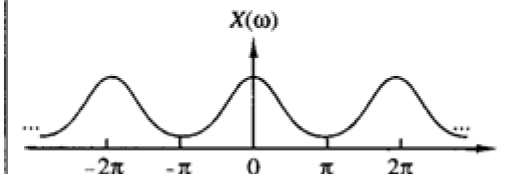
Transformada de Fourier Discreta

- **Resumen de Fórmulas de Análisis y Diseño**
  - **Tiempo Continuo**



Transformada de Fourier Discreta

- **Resumen de Fórmulas de Análisis y Diseño**
  - **Tiempo Discreto**

Señales en tiempo discreto		
Dominio del tiempo		Dominio de la frecuencia
		
$c_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j(2\pi/N)kn}$	$\Longrightarrow$	
	$\Longleftarrow$	$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j(2\pi/N)kn}$
Discretas y periódicas		Discretas y periódicas
		
$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$	$\Longrightarrow$	
	$\Longleftarrow$	$x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(\omega)e^{j\omega n}d\omega$
Discretas y aperiódicas		Continuas y periódicas

Propiedades de la Transformada de Fourier de Señales en Tiempo Discreto

Definiciones

- Por definición las transformadas directa e inversa de Fourier están dadas por,

$$X(w) \equiv F\{x(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-jwn} \qquad x(n) \equiv F^{-1}\{X(w)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(w) e^{jwn}\, dw$$

- Generalmente la señal x(n) y su transformada X(w) son funciones complejas,

$$x(n) = x_R(n) + j\, x_I(n) \quad \Leftrightarrow \quad X(w) = X_R(w) + j\, X_I(w)$$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Transformada de Fourier Discreta

Definiciones…

- Reemplazando en la definición de las transformadas directa e inversa, y utilizando la identidad $e^{-jw}=\cos(w) - j\,\mathrm{sen}(w)$,

- **Forma Alterna de la T. Directa**

$$X_R(w)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[x_R(n)\cos wn + x_I(n)\,\mathrm{sen}\, wn\right]$$

$$X_I(w)=-\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[x_R(n)\,\mathrm{sen}\, wn - x_I(n)\cos wn\right]$$

- **Forma Alterna de la T. Inversa**

$$x_R(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}\left[X_R(w)\cos wn - X_I(w)\,\mathrm{sen}\, wn\right]dw$$

$$x_I(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}\left[X_R(w)\,\mathrm{sen}\, wn + X_I(w)\cos wn\right]dw$$

- **Propiedades de Simetría de *Señales Reales:***
  - ***$x(n)=x_R(n)$***

Transformada directa

$$X_R(w)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[x(n)\cos wn\right]$$

$$X_I(w)=-\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[x(n)\operatorname{sen} wn\right]$$

Transformada inversa

$$x(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}\left[X_R(w)\cos wn-X_I(w)\operatorname{sen} wn\right]dw$$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Transformada de Fourier Discreta

- **Propiedades de Simetría de *Señales Reales y Pares*:**
  - $x(-n)=x(n)$
  - $x(n)$ cos(wn) es par y $x(n)$ sen(wn) es impar

Transformada directa

$$X_R(w)=x(0)+2\sum_{n=1}^{\infty}\left[x(n)\cos wn\right] \quad \rightarrow \text{s. par}$$

$$X_I(w)=0$$

Transformada inversa

$$x(n)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[X_R(w)\cos wn\right]dw$$

Transformada de Fourier Discreta

- **Propiedades de Simetría de *Señales Reales e Impares***
  - *x(-n)=-x(n)*
  - *x*(n) cos(*wn)* es impar y *x*(n) sen(*wn)* es par

Transformada directa

$$X_R(w) = 0$$

$$X_I(w) = -2\sum_{n=1}^{\infty}\left[x(n)\operatorname{sen} wn\right] \quad \rightarrow \text{s.impar}$$

Transformada inversa

$$x(n) = -\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[X_I(w)\operatorname{sen} wn\right]dw$$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

- **Propiedades de Simetría de Señales *Imaginarias* puras:**
  - **$x(n)=j\,x_I(n)$**

Transformada directa

$$X_R(w)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[x_I(n)\operatorname{sen} wn\right]$$

$$X_I(w)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[x_I(n)\cos wn\right]$$

Transformada inversa

$$x(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}\left[X_R(w)\operatorname{sen} wn+X_I(w)\cos wn\right]dw$$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

- **Propiedades de Simetría de *Señales Imaginarias pares*:**
  - $\mathbf{x_I(-n) = x_I(n)}$
  - x(n) cos (wn) es par y x(n) sen (wn) es impar

Transformada directa

$$X_R(w) = 0$$

$$X_I(w) = x_I(0) + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left[x_I(n)\cos wn\right] \quad \rightarrow \text{s. par}$$

Transformada inversa

$$x(n) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[X_I(w)\cos wn\right]dw$$

PSI Percepción y Sistemas Inteligentes

- **Propiedades de Simetría de *Señales Imaginarias Impares*:**
  - $\mathbf{x_I(-n) = -x_I(n)}$
  - $x(\text{n})\cos(wn)$ es impar y $x(\text{n})\,\text{sen}(wn)$ es par

Transformada directa

$$X_R(w) = 2\sum_{n=1}^{\infty}\left[x_I(n)\,\text{sen}\,wn\right] \rightarrow \text{s. impar}$$

$$X_I(w) = 0$$

Transformada inversa

$$x(n) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} X_R(w)\,\text{sen}\,wn\;dw$$

Propiedades de Simetría de la T.F.

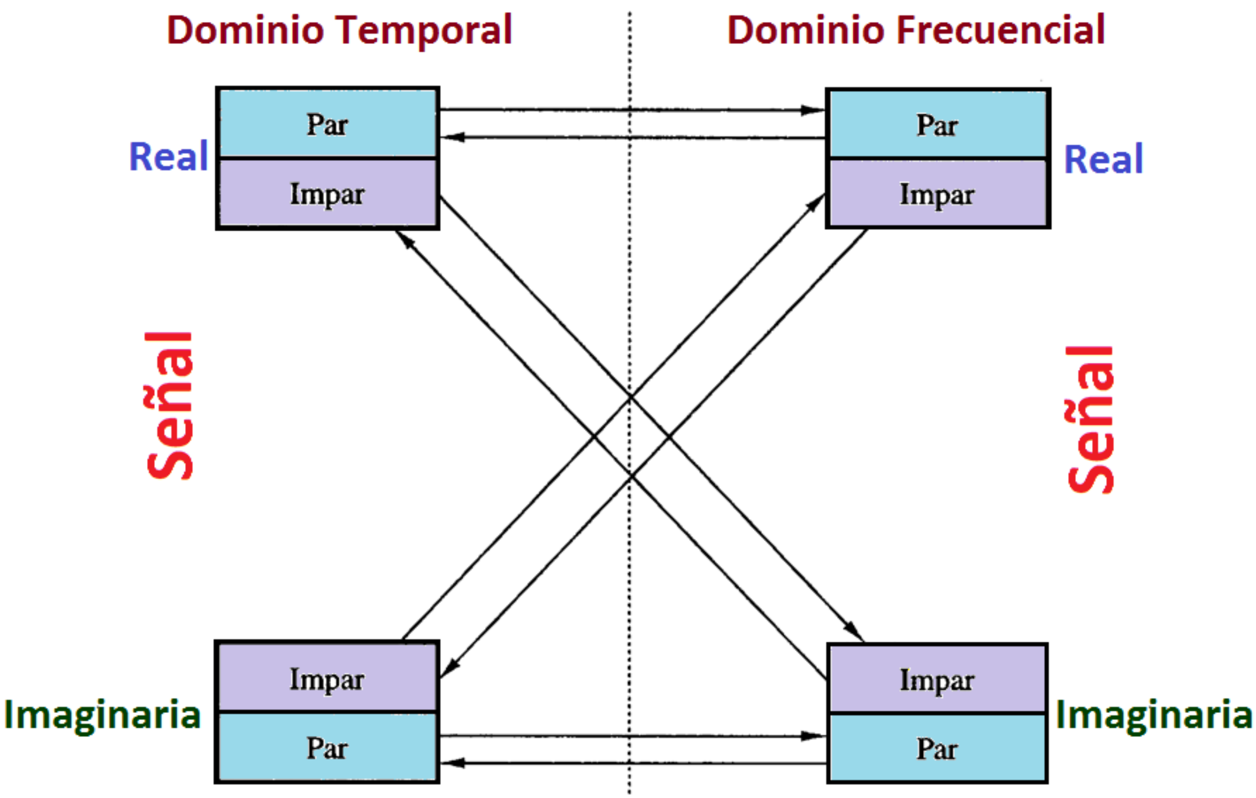
Secuencia	T. Fourier
$x(n)$	$X(\omega)$
$x^*(n)$	$X^*(-\omega)$
$x^*(-n)$	$X^*(\omega)$
$x_R(n)$	$X_e(\omega) = \frac{1}{2}[X(\omega) + X^*(-\omega)]$
$jx_I(n)$	$X_o(\omega) = \frac{1}{2}[X(\omega) - X^*(-\omega)]$
$x_e(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x^*(-n)]$	$X_R(\omega)$
$x_o(n) = \frac{1}{2}[x(n) - x^*(-n)]$	$jX_I(\omega)$
Señales Reales	
Cualquier señal real $x(n)$	$X(\omega) = X^*(-\omega)$ $X_R(\omega) = X_R(-\omega)$ $X_I(\omega) = -X_I(-\omega)$ $\lvert X(\omega)\rvert = \lvert X(-\omega)\rvert$ $\angle X(\omega) = -\angle X(-\omega)$
$x_e(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x(-n)]$ (real y par)	$X_R(\omega)$ (real y par)
$x_o(n) = \frac{1}{2}[x(n) - x(-n)]$ (real e impar)	$jX_I(\omega)$ (imaginaria e impar)

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Propiedades de Simetría de la T.F.

PSI Percepción y Sistemas Inteligentes

■ Resumen



humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Propiedades de la T.F.

- **Linealidad**

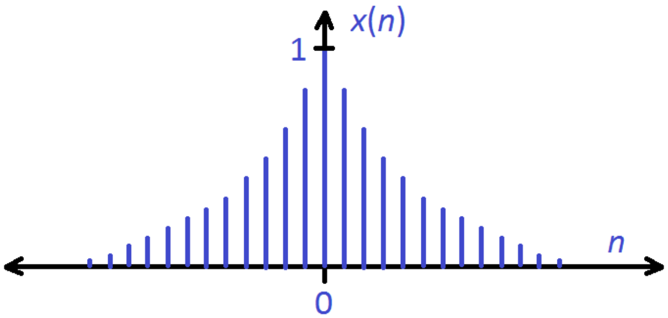
$$x_1(n) \xleftrightarrow{F} X_1(w) \qquad\qquad x_2(n) \xleftrightarrow{F} X_2(w)$$

$$a_1 x_1(n) + a_2\, x_2(n) \xleftrightarrow{F} a_1\, X_1(w) + a_2\, X_2(w)$$

- Se verifica el cumplimiento del teorema de superposición

- **Ejemplo**: Determinar la Transformada de Fourier de la siguiente señal

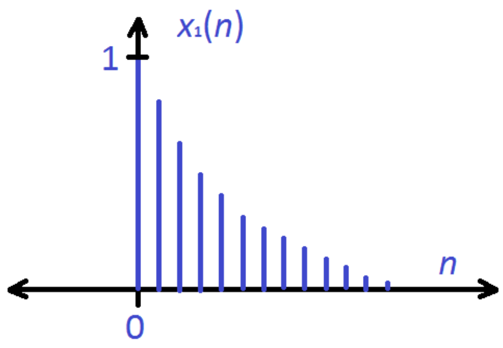
$$x(n) = a^{|n|} \qquad -1 < a < 1$$

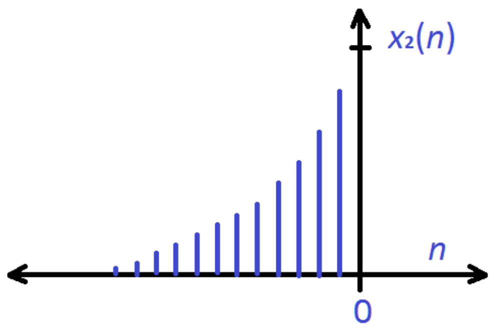


- **Solución.**
  - La señal puede reescribirse como,

$$x(n) = x_1(n) + x_2(n) \qquad -1 < a < 1$$

$$x_1(n) = \begin{cases} a^n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases} \qquad x_2(n) = \begin{cases} a^{-n} & n < 0 \\ 0 & n \geq 0 \end{cases}$$





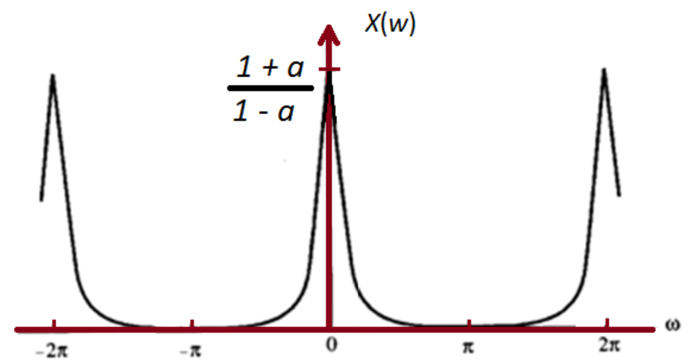
- **Solución ...**
  - Aplicando la T.F.

$$X_1(w)=\sum_{n=0}^{\infty} a^n\ e^{-jwn}=\frac{1}{1-a\,e^{-jw}} \qquad X_2(w)=\sum_{n=-\infty}^{-1} a^{-n}\ e^{-jwn}=\frac{a\,e^{jw}}{1-a\,e^{jw}}$$

  - Se llega a:

$$X(w)=X_1(w)+X_2(w)$$

$$X(w)=\frac{1-a^2}{1-2a\cos w+a^2}$$



$a=0.8$

Propiedades de la T.F.

- **Desplazamiento Temporal**

$$x(n) \xleftrightarrow{F} X(w)$$

$$x(n-k) \xleftrightarrow{F} e^{-jwk}\,X(w)$$

  - El contenido frecuencial de una señal sólo depende de su forma.
  - La magnitud del espectro no cambia, sólo se afecta su fase en una cantidad igual a ***-wk***.

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Propiedades de la T.F.

- **Reflexión Temporal**

$$x(n) \xleftrightarrow{F} X(w)$$
$$x(-n) \xleftrightarrow{F} X(-w)$$

- La magnitud del espectro no cambia y su fase sólo experimenta un cambio de signo.

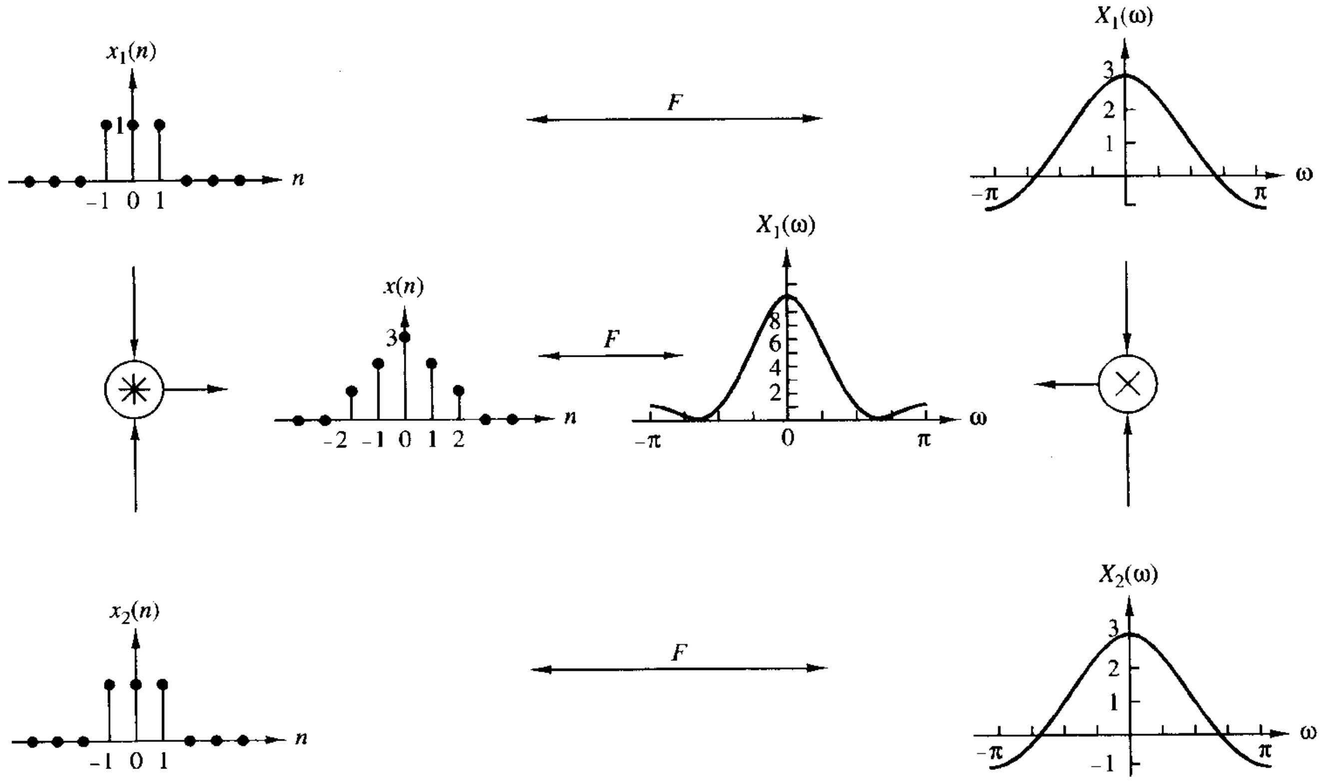
■ Teorema de Convolución

$$x_1(n) \xleftrightarrow{F} X_1(w) \qquad\qquad x_2(n) \xleftrightarrow{F} X_2(w)$$

$$x(n) = x_1(n) * x_2(n) \xleftrightarrow{F} X(w) = X_1(w)X_2(w)$$

- La convolución en el dominio temporal implica una multiplicación de los espectros frecuenciales.

Representación Gráfica de la Convolución



Propiedades de la T.F.

PSI Percepción y Sistemas Inteligentes

- **Teorema de Convolución…**
  - **Ejemplo**

    Determinar la convolución entre las secuencias

$$x_1(n) = x_2(n) = \{\, 1 \;\; \underline{1} \;\; 1 \,\}$$

  - **Solución**

    Las señales son anticausales, reales y pares.

$$X_1(w) = X_2(w) = 1 + 2\cos w$$

$$X(w) = X_1(w)\, X_2(w) = (1 + 2\cos w)^2$$

$$= 3 + 4\cos w + 2\cos 2w = 3 + 2\left(e^{jw} + e^{-jw}\right) + \left(e^{j2w} + e^{-j2w}\right)$$

Antitransformando: $x(n) = x_1(n) * x_2(n) = \{1, 2, \underline{3}, 2, 1\}$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Teorema de la Correlación

$$x_1(n) \xleftrightarrow{F} X_1(w) \qquad\qquad x_2(n) \xleftrightarrow{F} X_2(w)$$

$$r_{x_1 x_2}(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k) x_2(k-n) \xleftrightarrow{F} S_{x_1 x_2}(w) = X_1(w) X_2(-w)$$

- La función $S_{x1x2}(w)$ se denomina *cross-densidad espectral de energía* de las señales $x_1(n)$ y $x_2(n)$.

Propiedades de la T.F.

- **Teorema de la Correlación…**
  - **Teorema de Wiener-Khintchine**
    - Sea *x(n)* una señal real, entonces:

$$r_{xx}(l) \xleftrightarrow{F} S_{xx}(w)$$

    - La **densidad espectral de energía** de una señal de energía es la **transformada de Fourier** de su función de **autocorrelación**.
    - La función de **autocorrelación** de una señal y su **densidad espectral de energía** contienen la **misma información** sobre la señal.

Propiedades de la T.F.

- **Ejemplo**

  Determinar la densidad espectral de energía de la señal

$$x(n) = a^n \quad u(n) \qquad -1 < a < 1$$

- **Solución**

$$r_{xx}(l) = \frac{1}{1-a^2} a^{|l|} \qquad -\infty < l < \infty$$

$$S_{xx}(w) = F\{r_{xx}(l)\} = \frac{1}{1-a^2} F\{a^{|l|}\} = \frac{1}{1-2a\cos w + a^2}$$

Desplazamiento Frecuencial

$$x(n) \xleftrightarrow{F} X(w)$$
$$e^{jw_0 n}\, x(n) \xleftrightarrow{F} X(w - w_0)$$

- La multiplicación de una secuencia $x(n)$ por e $^{(j\, wo\, n)}$ equivale a un desplazamiento w_0 del espectro $X(w)$.

Propiedades de la T.F.

- **Teorema de la Modulación**

$$x(n) \xleftrightarrow{F} X(w)$$

$$x(n)\ \cos(w_0 n) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2}\left[X(w+w_0)+X(w-w_0)\right]$$

- Esta propiedad puede verse como un desplazamiento

$$\cos w_0 n = (e^{jwo\ n}+e^{-jwo\ n})/2$$

pero se prefiere la modulación ya que $\boldsymbol{x(n)\cos(w_0 n)}$ es real.

Teorema de Parseval

$$x_1(n) \overset{F}{\longleftrightarrow} X_1(w) \qquad\qquad x_2(n) \overset{F}{\longleftrightarrow} X_2(w)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n) x_2^*(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_1(w) X_2^*(w) dw$$

- En el caso especial de $x_1(n) = x_2(n) = x(n)$ la relación de Parseval se reduce a,

$$E_x = r_{xx}(0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(w)|^2 dw = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_{xx}(w) dw$$

Propiedades de la T.F.

Multiplicación de dos Secuencias (Teorema del Enventanado)

$$x_1(n) \xleftrightarrow{F} X_1(w) \qquad\qquad x_2(n) \xleftrightarrow{F} X_2(w)$$

$$x_3(n) = x_1(n)x_2(n) \xleftrightarrow{F} X_3(w) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_1(\lambda)\, X_2(w-\lambda)\,d\lambda$$

- La **multiplicación** de dos señales en el dominio del **tiempo** equivale a la **convolución** de sus transformadas de Fourier en el dominio **frecuencial**.

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Diferenciación en el Dominio Frecuencial

$$x(n) \xleftrightarrow{F} X(w)$$

$$n\ x(n) \xleftrightarrow{F} j\frac{d\ X(w)}{dw}$$

- Se obtiene al derivar la definición de la T.F.:

$$\frac{dX(w)}{dw} = \frac{d}{dw}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-jwn}\right] \qquad \frac{dX(w)}{dw} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\frac{d}{dw}e^{-jwn} = -j\sum_{n=-\infty}^{\infty} n\,x(n)e^{-jwn}$$

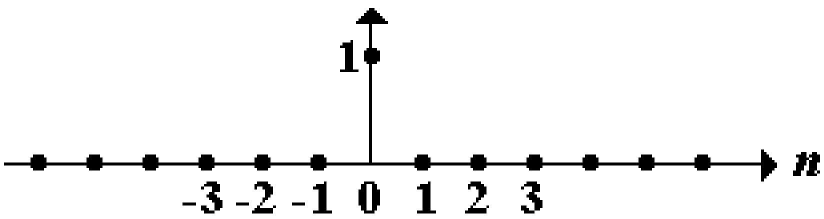
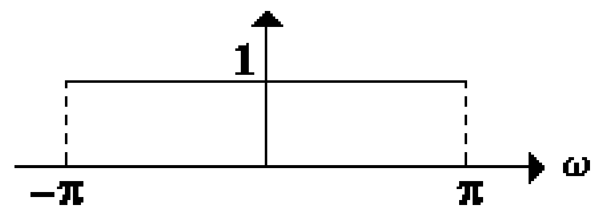
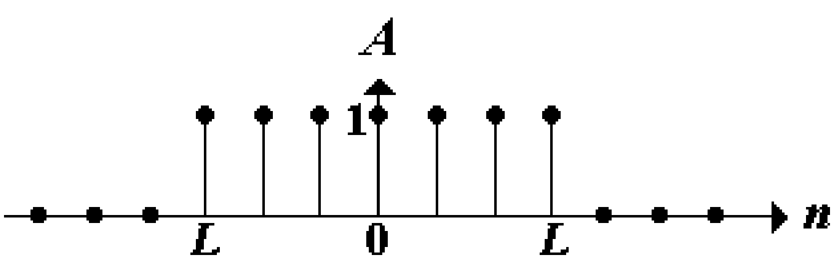
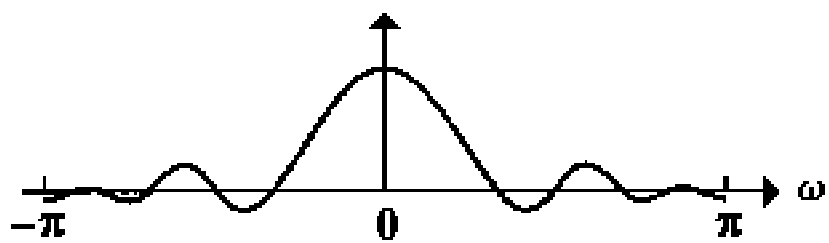
$$j\frac{dX(w)}{dw} = F\{\ n\,x(n)\}$$

Propiedades de la T.F.

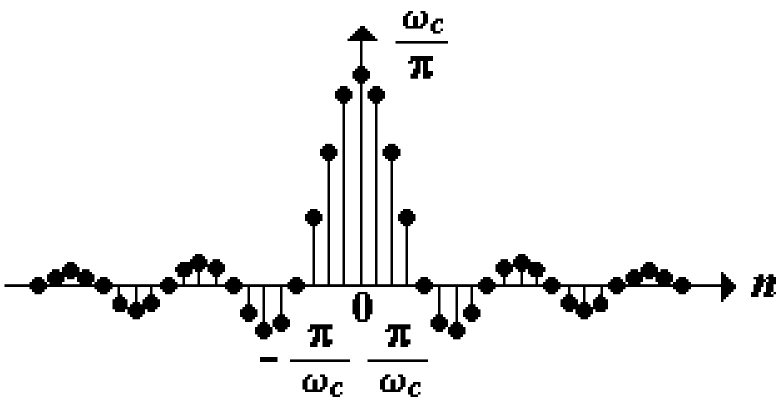
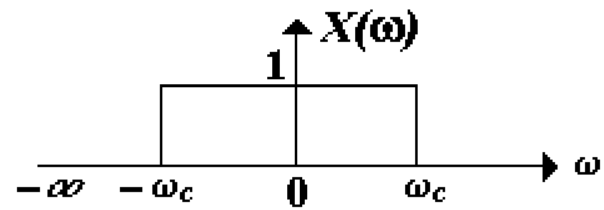
Propiedad	Dominio del tiempo	Dominio de la frecuencia
Notación	$x(n)$	$X(\omega)$
	$x_1(n)$	$X_1(\omega)$
	$x_2(n)$	$X_2(\omega)$
Linealidad	$a_1x_1(n) + a_2x_2(n)$	$a_1X_1(\omega) + a_2X_2(\omega)$
Desplazamiento temporal	$x(n-k)$	$e^{-j\omega k}X(\omega)$
Reflexión temporal	$x(-n)$	$X(-\omega)$
Convolución	$x_1(n) * x_2(n)$	$X_1(\omega)X_2(\omega)$
Correlación	$r_{x_1x_2}(l) = x_1(l) * x_2(-l)$	$S_{x_1x_2}(\omega) = X_1(\omega)X_2(-\omega)$ $= X_1(\omega)X_2^*(\omega)$ [si $x_2(n)$ es real]
Teorema de Wiener–Khintchine	$r_{xx}(l)$	$S_{xx}(\omega)$
Desplazamiento frecuencial	$e^{j\omega_0 n}x(n)$	$X(\omega - \omega_0)$
Modulación	$x(n)\cos\omega_0 n$	$\frac{1}{2}X(\omega+\omega_0) + \frac{1}{2}X(\omega-\omega_0)$
Multiplicación	$x_1(n)x_2(n)$	$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_1(\lambda)X_2(\omega-\lambda)d\lambda$
Diferenciación en el dominio de la frecuencia	$nx(n)$	$j\frac{dX(\omega)}{d\omega}$
Conjugación	$x^*(n)$	$X^*(-\omega)$
Teorema de Parseval	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n)x_2^*(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_1(\omega)X_2^*(\omega)d\omega$	

Pares Comunes de T.F. en T.D.

PSI Percepción y Sistemas Inteligentes

Señal $x(n)$	Espectro $X(\omega)$
 $x(n) = \delta(n)$	 $X(\omega) = 1$
 $x(n) = \begin{cases} A, & \lvert n\rvert \le L \\ 0, & \lvert n\rvert > L \end{cases}$	 $X(\omega) = A\,\dfrac{\mathrm{sen}\,(L + \frac{1}{2})\,\omega}{\mathrm{sen}\,\frac{\omega}{2}}$

Pares Comunes de T.F. en T.D.

Señal $x(n)$	Espectro $X(\omega)$
 $x(n) = \begin{cases} \frac{\omega_c}{\pi} & n = 0 \\ \frac{\text{sen } \omega_c n}{\pi n} & n \neq 0 \end{cases}$	 $X(\omega) = \begin{cases} 1, & \lvert\omega\rvert < \omega_c \\ 0, & \omega_c \leq \lvert\omega\rvert \leq \omega \end{cases}$
$x(n) = \begin{cases} a^n, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$	$X(\omega) = \frac{1}{1 - a e^{-jw}}$

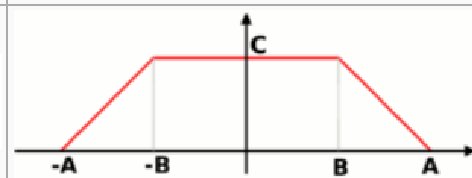
Pares Comunes de T.F. en T.D.

Time domain $x[n]$	Frequency domain $X(\omega)$	Remarks
$\delta[n]$	1	
$\delta[n-M]$	$e^{-i\omega M}$	integer M
$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta[n-Mm]$	$\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-i\omega Mm} = \frac{1}{M}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\frac{\omega}{2\pi}-\frac{k}{M}\right)$	integer M
$u[n]$	$\frac{1}{1-e^{-i\omega}}$	
e^{-ian}	$2\pi\delta(\omega+a)$	real number a
$\cos(an)$	$\pi\left[\delta(\omega-a)+\delta(\omega+a)\right]$	real number a
$\sin(an)$	$\frac{\pi}{i}\left[\delta(\omega-a)-\delta(\omega+a)\right]$	real number a
$\mathrm{rect}\left[\frac{(n-M/2)}{M}\right]$	$\frac{\sin[\omega(M+1)/2]}{\sin(\omega/2)}\, e^{-i\omega M/2}$	integer M
$\mathrm{sinc}[(a+n)]$	$e^{ia\omega}$	real number a
$W\cdot\mathrm{sinc}^2(Wn)$	$\mathrm{tri}\left(\frac{\omega}{2\pi W}\right)$	real number W $0 < W \leq 0.5$
$W\cdot\mathrm{sinc}[W(n+a)]$	$\mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{2\pi W}\right)\cdot e^{ja\omega}$	real numbers W, a $0 < W \leq 1$
$\begin{cases} 0 & n=0 \\ \frac{(-1)^n}{n} & \text{elsewhere} \end{cases}$	$j\omega$	it works as a differentiator filter

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Pares Comunes de T.F. en T.D.

PSI Percepción y Sistemas Inteligentes

Time domain $x[n]$	Frequency domain $X(\omega)$	Remarks
$\frac{W}{(n+a)}\{\cos[\pi W(n+a)] - \operatorname{sinc}[W(n+a)]\}$	$j\omega \cdot \operatorname{rect}\left(\frac{\omega}{\pi W}\right) e^{ja\omega}$	real numbers *W*, *a* $0 < W \le 1$
$\frac{1}{\pi n^2}[(-1)^n - 1]$	$\|\omega\|$	
$\begin{cases} 0; & n \text{ odd} \\ \frac{2}{\pi n}; & n \text{ even} \end{cases}$	$\begin{cases} j & \omega < 0 \\ 0 & \omega = 0 \\ -j & \omega > 0 \end{cases}$	Hilbert transform
$\frac{C(A+B)}{2\pi} \cdot \operatorname{sinc}\left[\frac{A-B}{2\pi} n\right] \cdot \operatorname{sinc}\left[\frac{A+B}{2\pi} n\right]$		real numbers *A*, *B* complex *C*

$$\operatorname{rect}(t) = \sqcap(t) = \begin{cases} 0 & \text{if } |t| > \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \text{if } |t| = \frac{1}{2} \\ 1 & \text{if } |t| < \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\operatorname{tri}(t) = \wedge(t) = \begin{cases} 1+t; & -1 \le t \le 0 \\ 1-t; & 0 < t \le 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co