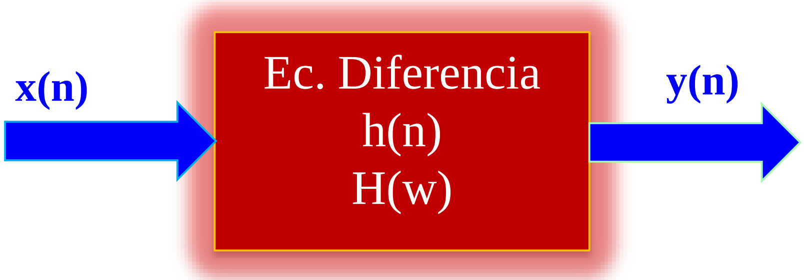
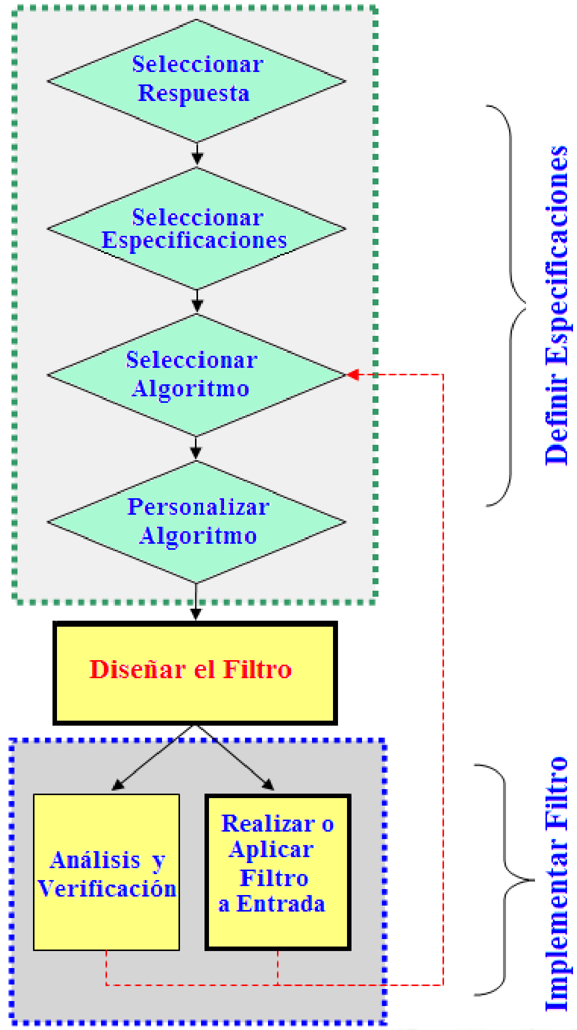
# Realización de Filtros



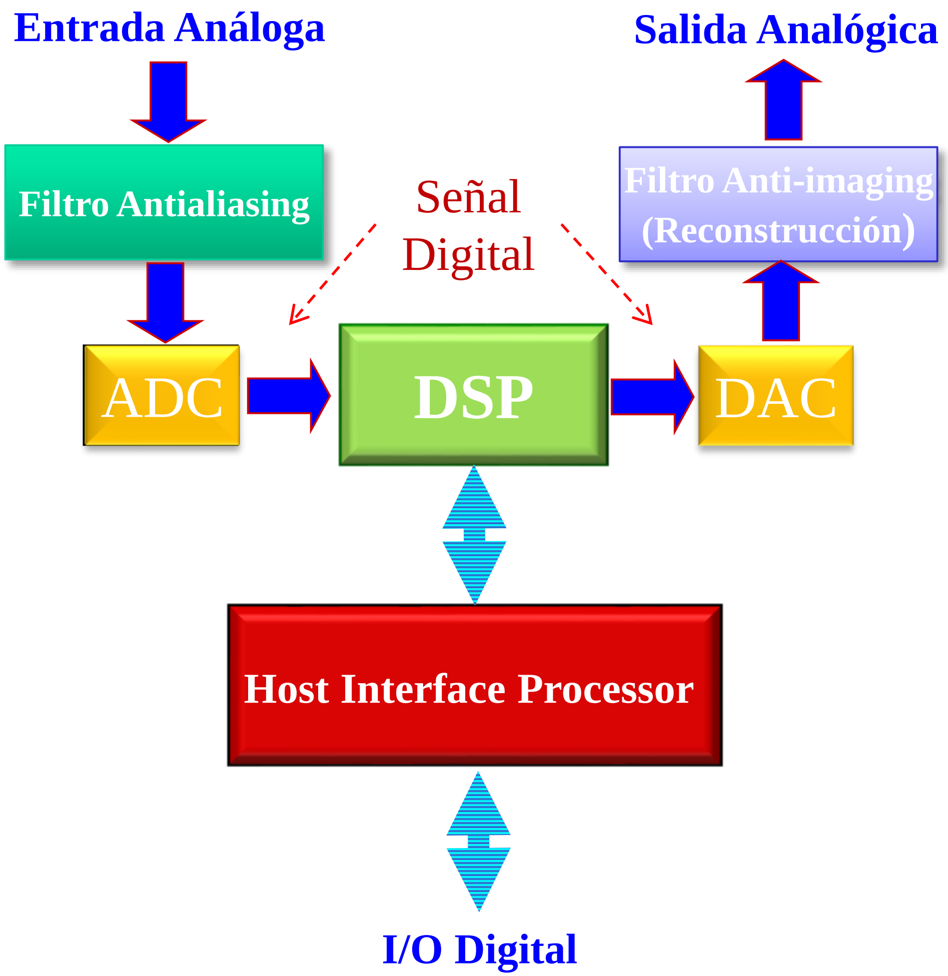
## ■ Introducción

- La **realización** de filtros corresponde al **cálculo de la salida** del filtro en **respuesta a cualquier entrada**.



## Introducción…



## ■ Introducción…

- En el **Dominio Temporal** la **relación entrada-salida** está dada por la convolución,

$$y(n) = h(n) * x(n) = \sum_{k=N_1}^{N_2} h(k)x(n-k) \qquad [ec.1]$$

donde $N_1$ y $N_2$ son los índices de la primera y última muestras diferentes de cero de ***h*(*n*).**



humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

## Introducción…

- En el **Dominio Frecuencial** la convolución corresponde al producto de las transformadas,

$$Y(w) = H(w)\,X(w) \qquad [ec.2]$$

  - Puesto que la **T.F es continua** en $w$, se recurre a la **transformada discreta de Fourier** DFT,

$$Y(w_k) = H(w_k)\,X(w_k) \qquad [ec.3]$$

$$\text{Donde: } w_k = (2\pi k / N_{DFT}), \quad k = 0,1,\ldots,N_{DFT}$$

# Realización de Filtros



- **Introducción …**
  - Observaciones
    - NDFT es el tamaño de la DFT y corresponde al número de muestras en el periodo $2\pi$.
    - $NDFT \geq máx\{longitud\ de\ x(n) + longitud\ de\ h(n) - 1\}$ para realizar la multiplicación punto a punto.
    - La DFT puede calcularse muy eficientemente usando el algoritmo FFT.


humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

## Realización de Filtros FIR

### Introducción

- **Dominio Temporal**: el requerimiento de almacenamiento depende sólo de la longitud de $h(n)$.

- **Dominio frecuencial:** la capacidad de almacenamiento varía con el tamaño de la señal de entrada.


humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

## Realización de Filtros FIR

- **Dominio Temporal**:


- **Convolución:** $$y(n) = h(n) * x(n) = \sum_{k=N_1}^{N_2} h(k)x(n-k)$$

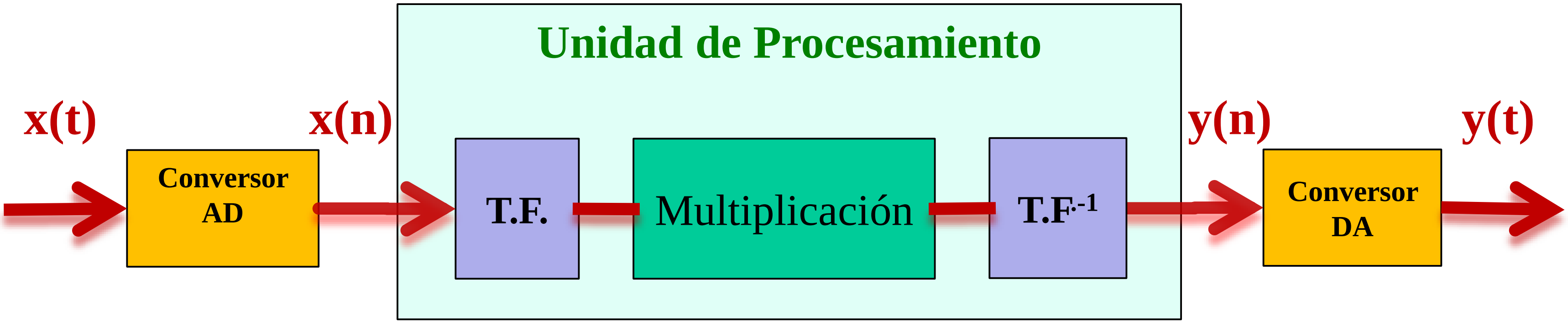
- **Ecuaciones de Diferencia:** $$y(n) = \sum_{k=0}^{M} b_k \; x(n-k)$$

# Realización de Filtros FIR



## Realización de Filtros FIR ..

- Dominio frecuencial




- Multiplicación:

$$Y(w) = H(w)\, X(w)$$

$$Y(w) = e^{-j w N_0} \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k \; e^{-j w k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k \; e^{-j w k}} X(w)$$


humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

## Realización de Filtros IIR

### ▸Introducción

- La **convolución** **no** **puede utilizarse** por la longitud de $h(n)$
- Se recurre a la **Transformada de Fourier** o a las **ecuaciones de diferencia**.

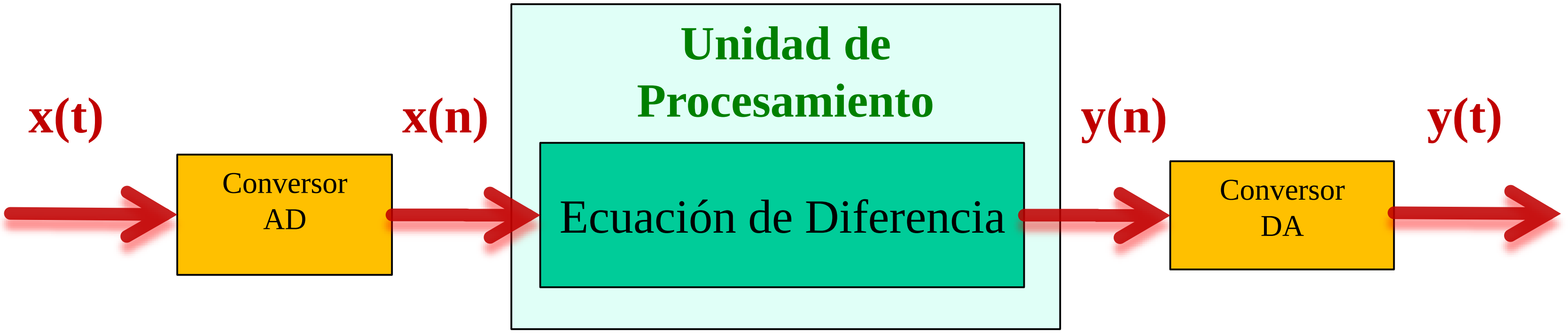

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

# Realización de Filtros FIR



## Realización de Filtros IIR ..

- **Dominio Temporal**:




- **Ecuaciones de Diferencia:**

$$y(n)=\sum_{k=0}^{M}\frac{b_k}{a_0}\,x(n-k)-\sum_{k=1}^{N}\frac{a_k}{a_0}\,y(n-k) \quad \text{para } n\geq n_0$$

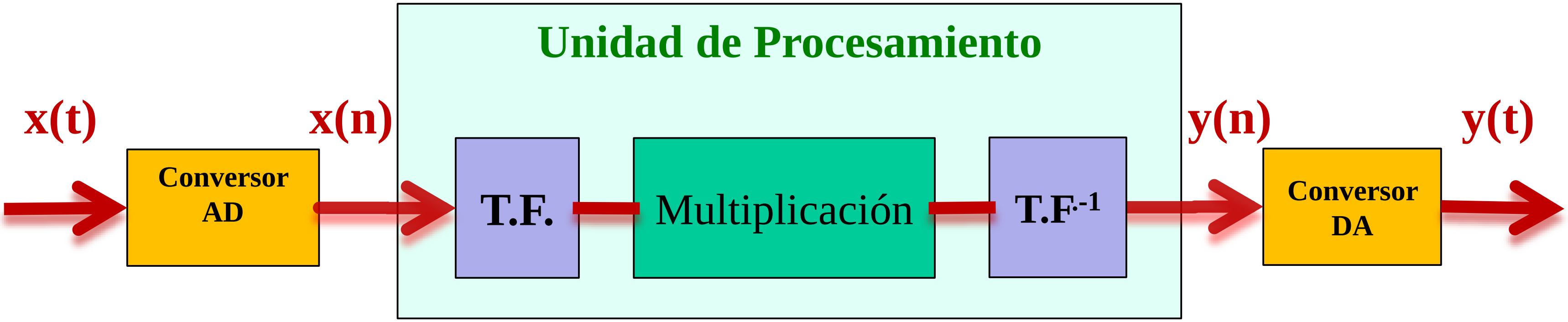
Requiere N condiciones *iniciales*: $y(n_0 -1),\ldots, y(n_0 -N)$.


humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

PSI Percepción y Sistemas Inteligentes

## Realización de Filtros IIR ..

- **Dominio frecuencial:**



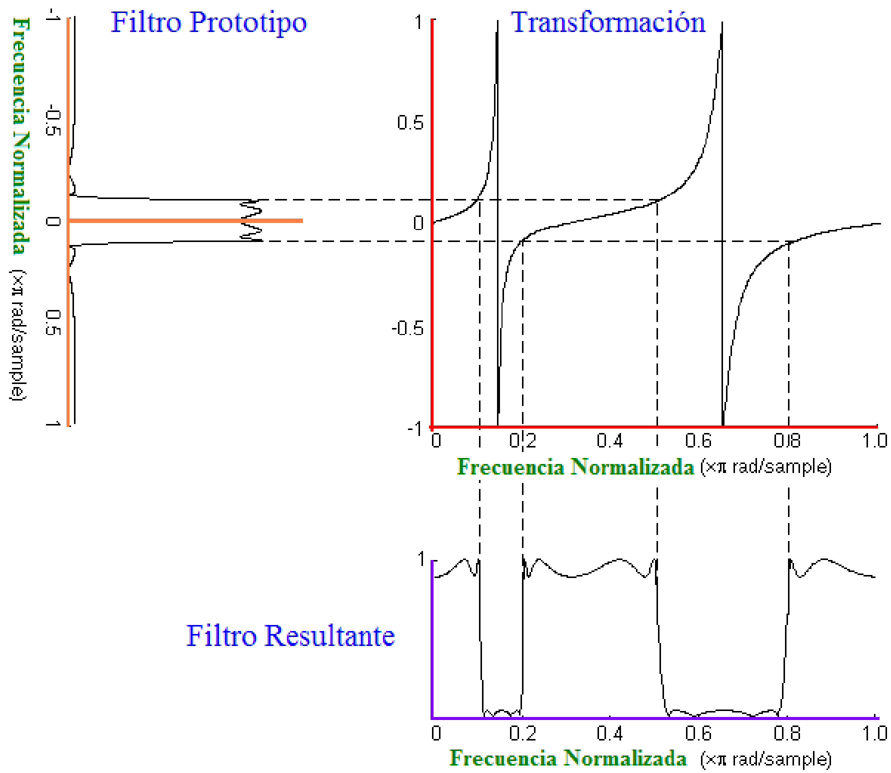

- **Multiplicación:**

$$Y(w) = H(w)\, X(w) \qquad Y(w) = e^{-jwN_0} \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k\ e^{-jwk}}{\sum_{k=0}^{N} a_k\ e^{-jwk}}\, X(w)$$

# Transformaciones de Frecuencia



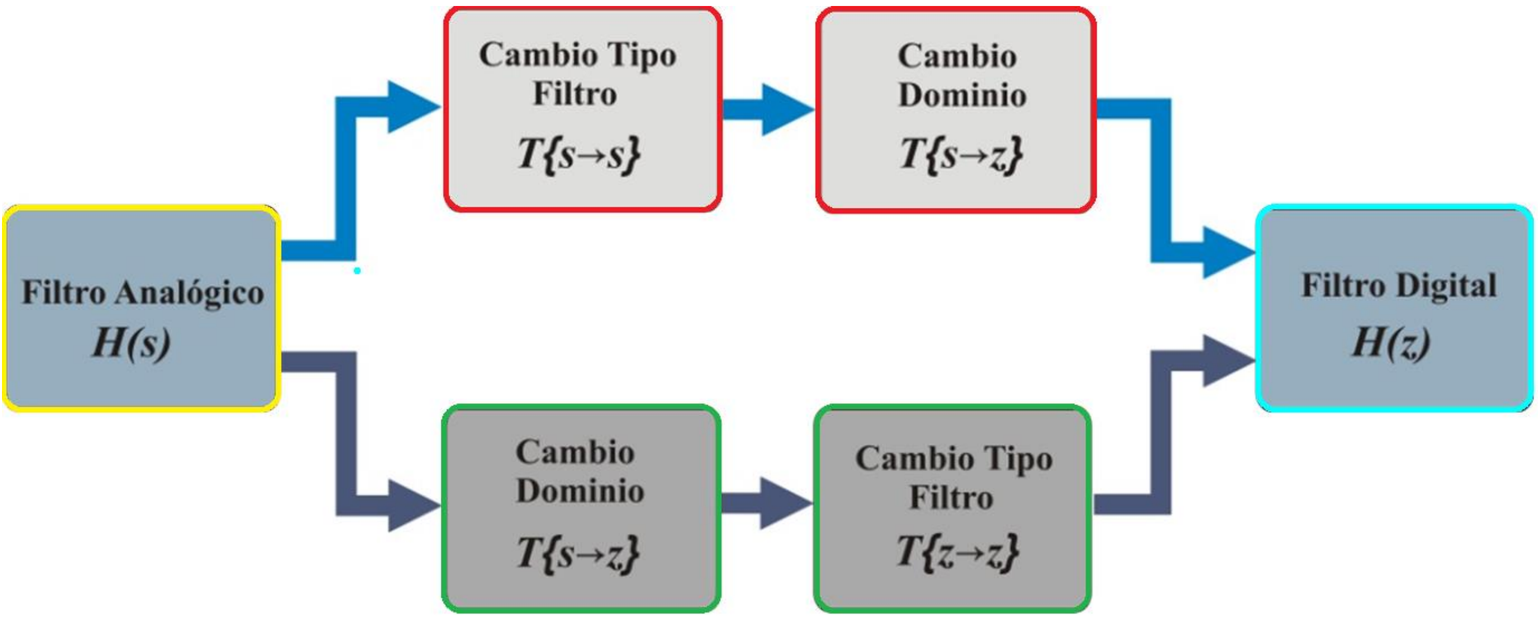
- **Introducción**
  - El estudio de filtros IIR se centra en el diseño de filtros paso-bajo.
  - La obtención de un filtro PA, PB, BR se realiza fácilmente aplicando una transformación de frecuencia a un prototipo PB.
  - Existen transformaciones de frecuencia en el dominio analógico y digital



# Transformaciones de Frecuencia



- **Introducción…**



## Transformaciones de Frecuencia en el Dominio Analógico

| Tipo de Transformación | Transformación | Frecuencias de Corte Filtro nuevo | Observaciones |
|---|---|---|---|
| **Paso Bajo** | $s \rightarrow \frac{\Omega_p}{\Omega'_p} s$ | $\Omega'_p$ | $\Omega_p$ Frecuencia de corte filtro prototipo |
| **Paso Alto** | $s \rightarrow \frac{\Omega_p \, \Omega'_p}{s}$ | $\Omega'_p$ | |
| **Paso Banda** | $s \rightarrow \Omega_p \frac{s^2 + \Omega_i \Omega_s}{s(\Omega_s - \Omega_i)}$ | $\Omega_i, \Omega_s$ | $\Omega_i$ Frecuencia de corte inferior<br>$\Omega_s$ Frecuencia de corte superior |
| **Rechaza Banda** | $s \rightarrow \Omega_p \frac{s(\Omega_s - \Omega_i)}{s^2 + \Omega_i \Omega_s}$ | $\Omega_i, \Omega_s$ | $\Omega_i$ Frecuencia de corte inferior<br>$\Omega_s$ Frecuencia de corte superior |


humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

## Transformaciones de Frecuencia en el Dominio Digital

| Tipo de Transformación | Transformación | Frecuencias de Corte Filtro nuevo | Observaciones |
|---|---|---|---|
| **Paso Bajo** | $z^{-1} \rightarrow \frac{z^{-1}-\beta}{1-\beta z^{-1}}$ | $\omega'_c$ | $\beta = \frac{\operatorname{sen}[(\omega_c-\omega'_c)/2]}{\operatorname{sen}[(\omega_c+\omega'_c)/2]}$ |
| **Paso Alto** | $z^{-1} \rightarrow -\frac{z^{-1}+\beta}{1+\beta z^{-1}}$ | $\omega'_c$ | $\beta = \frac{-\cos[(\omega_c+\omega'_c)/2]}{\cos[(\omega_c-\omega'_c)/2]}$ |
| **Paso Banda** | $z^{-1} \rightarrow -\frac{z^{-2}-\beta_1 z^{-1}+\beta_2}{\beta_2 z^{-2}-\beta_1 z^{-1}+1}$ | $\omega_i, \omega_s$ | $\omega_i$ Frecuencia de corte inferior<br>$\omega_s$ Frecuencia de corte superior<br>$\beta_1 = -2\gamma K/(K+1)$<br>$\beta_2 = (K-1)/(K+1)$<br>$\gamma = \frac{\cos[(\omega_s+\omega_i)/2]}{\cos[(\omega_s-\omega_i)/2]}$<br>$K = \cot\frac{(\omega_s-\omega_i)}{2}\tan\frac{\omega_c}{2}$ |
| **Rechaza Banda** | $z^{-1} \rightarrow \frac{z^{-2}-\beta_1 z^{-1}+\beta_2}{\beta_2 z^{-2}-\beta_1 z^{-1}+1}$ | $\omega_i, \omega_s$ | $\omega_i$ Frecuencia de corte inferior<br>$\omega_s$ Frecuencia de corte superior<br>$\beta_1 = -2\gamma/(K+1)$<br>$\beta_2 = (1-K)/(1+K)$<br>$\gamma = \frac{\cos[(\omega_s+\omega_i)/2]}{\cos[(\omega_s-\omega_i)/2]}$<br>$K = \tan\frac{(\omega_s-\omega_i)}{2}\tan\frac{\omega_c}{2}$ |


humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

# Transformaciones de Frecuencia



- **Observaciones**
  - El diseñador puede ***elegir*** transformaciones en frecuencia en el dominio analógico o digital.
  - Las ***transformaciones*** en el dominio ***digital*** son apropiadas para filtros IIR, pues si se aplican a filtros FIR se obtendrá un filtro IIR.
    - ***Método Invarianza al Impulso y Aproximación de Derivadas***
      - Transformación ***final*** en el dominio digital para evitar el problema de aliasing en filtros paso alto y filtros paso banda.
    - ***Método de Transformación Bilineal***
      - No presenta inconveniente el orden de aplicación.


humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

# Transformaciones de Frecuencia

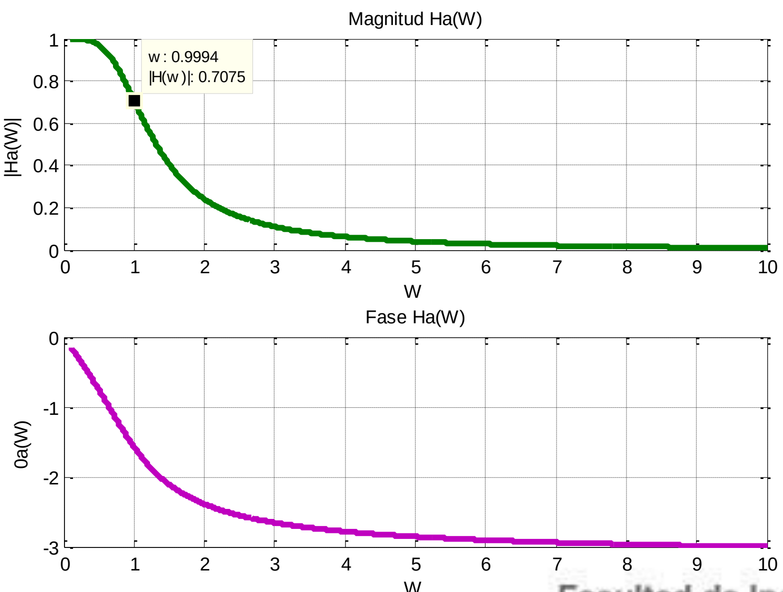


## Ejemplo

- Diseñar mediante la T. Bilineal un filtro paso-banda digital a partir de un filtro prototipo paso-bajo Butterworth analógico de **orden dos** y punto de potencia mitad en $\Omega_p = 1$, definido como:

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}\, s + 1}$$

```
% Función de Transferencia del Filtro H(s)
K_a=1;
num_a=K_a*[0  0  1];
den_a=[1 sqrt(2) 1];

% Respuesta en Frecuencia H(W)
[Ha,W]=freqs(num_a,den_a, 4*1024);
Hmaga=abs(Ha);
Hanga=angle(Ha);

% Graficación
subplot(2,1,1);
plot(W,Hmaga);
grid on; xlabel('W'); ylabel('|Ha(W)|');
title('Magnitud Ha(W)')
subplot(2,1,2);
plot(W,Hanga); grid on; xlabel('W');
ylabel('0a(W)'); title('Fase Ha(W)')
```



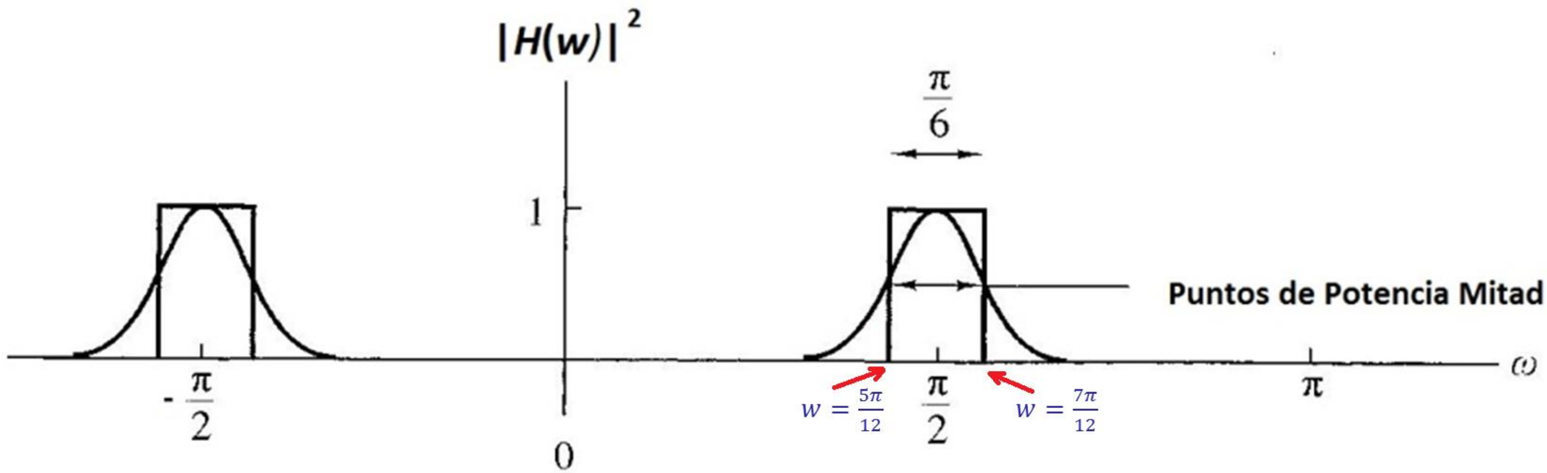


humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

# Transformaciones de Frecuencia



- **Ejemplo …**
  - Las frecuencias de corte (medidas en los puntos de potencia mitad) para el filtro digital deben estar en $w = \frac{5\pi}{12}$ y $w = \frac{7\pi}{12}$.
  - El sistema digital tiene una frecuencia de muestreo $f_s = 0{,}5$ y las especificaciones del filtro digital se ilustran en la siguiente figura.



# Transformaciones de Frecuencia



- **Solución**
  - Mediante la ecuación de frecuencias de la T. Bilineal se obtienen las especificaciones frecuenciales del filtro analógico paso-banda:

$$\Omega = \frac{2}{T}\tan\left(\frac{w}{2}\right)$$

$$\Omega_L = \frac{2}{2}\tan\left(\frac{5\pi/12}{2}\right) = 0.7673 \quad y \quad \Omega_U = \frac{2}{2}\tan\left(\frac{7\pi/12}{2}\right) = 1.3032$$

  - La conversión de paso-bajo a paso-banda está dado por:

$$s = \Omega_p \frac{s^2 + \Omega_L\Omega_U}{s(\Omega_U - \Omega_L)} = \frac{s^2 + 1}{0.5359\ s}$$



humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

## Solución …

- Reemplazando la T. Bilineal $s = \frac{2}{T}\,\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$ en la ecuación de conversión analógica, con $T = 2$, se obtiene:

$$s = \frac{(1-\ z^{-1})^2 +\ \Omega_u\Omega_L(1+z^{-1})^2}{(1-z^{-2})(\Omega_u - \Omega_L)} = 3.7321\frac{(1+z^{-2})}{(1-z^{-2})}$$

- El filtro digital se obtiene reemplazando la ecuación anterior en el filtro prototipo paso-bajo analógico:

$$H(z) = H(s)_{|\, s=3.7321\frac{(1+z^{-2})}{(1-z^{-2})}}$$

- **Solución …**
  - De donde,

$$H(z) = \frac{1}{20{,}2065} \quad \frac{(1 - z^{-2})^2}{1 + 1{,}2796\, z^{-2} + 0{,}4776\, z^{-4}}$$

  - Filtro de cuarto orden estable y con polos en:

- $z_1 = -0.1601 + 0.8157j$
- $z_2 = -0.1601 - 0.8157j$
- $z_3 = 0.1601 + 0.8157j$
- $z_4 = 0.1601 - 0.8157j$

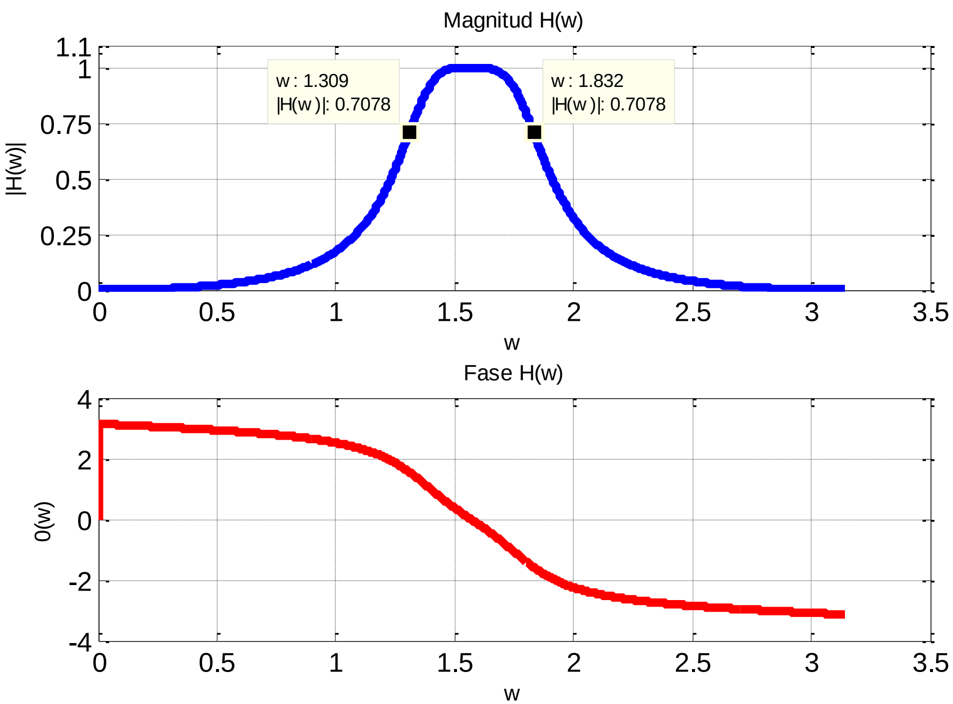
# Transformaciones de Frecuencia



- **Solución …**
  - La respuesta en Frecuencia se obtiene como:

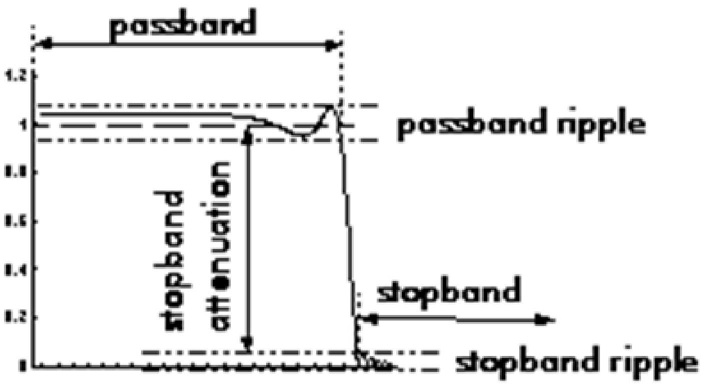
$$H(w) = H(z)_{|z=e^{jw}}$$

```
% Función de Transferencia del Filtro
H(z)
K=1/20.2065;
num= K* [1  0  -2   0   1 ];
den=[1 0  1.2796  0   0.4776];

% Respuesta en Frecuencia  H(w)
[H,w]=freqz(num,den, 4*1024);
Hmag=abs(H);
Hang=angle(H);

% Graficación
subplot(2,1,1);
plot(w,Hmag); grid on; xlabel('w');
ylabel('|H(w)|'); title('Magnitud H(w)')
subplot(2,1,2);
plot(w,Hang); grid on;xlabel('w');
ylabel('0(w)'); title('Fase H(w)')
```

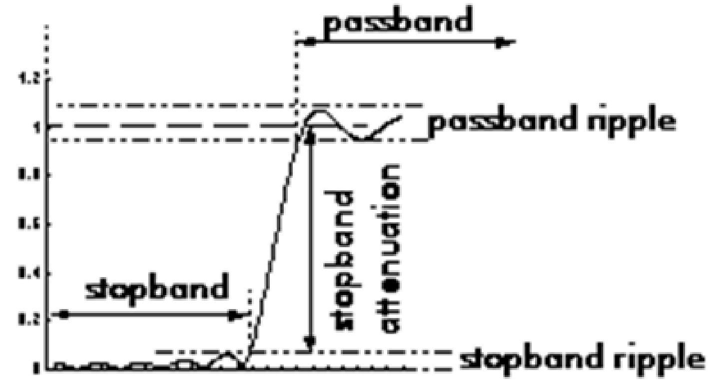


# Fin Asignatura

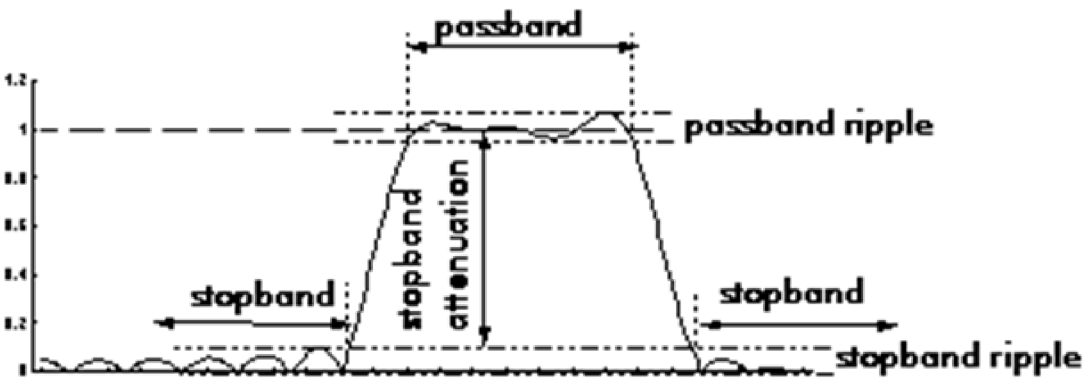

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co




low pass filter




high pass filter




band pass filter