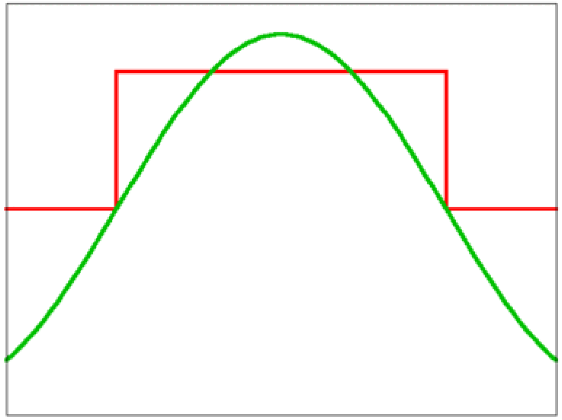
Series Fourier - Señales Continuas

- **Señales Continuas y Periódicas**
  - Las S.F. son una representación matemática de las señales periódicas.
  - Constituyen una suma ponderada de exponenciales complejas relacionadas armónicamente.



http://users.aber.ac.uk/ruw/teach/260/fseries.php

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

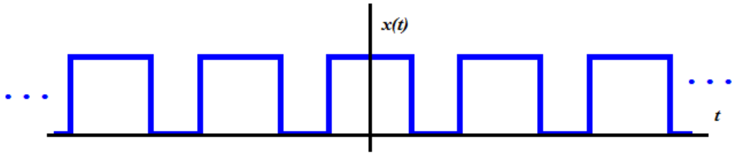
Series Fourier - Señales Continuas

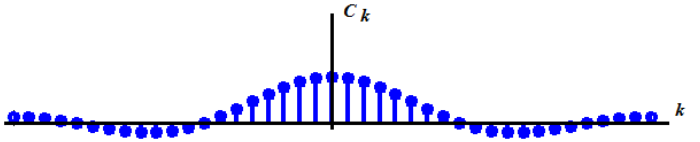
Señales Continuas y Periódicas …

- **Definición**

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi\, k F_0 t} \qquad c_k = \frac{1}{T_p}\int_{T_p} x(t) e^{-j2\pi F_0\, k\, t}\, dt$$

  - $F_0 = {}^{1}/_{T_p}$ periodo fundamental
  - $\{c_k\}$ coeficientes de Fourier





- Exponenciales: bloques "básicos" de reconstrucción de la señal.
- Coeficientes de Fourier: especifican la forma de onda.

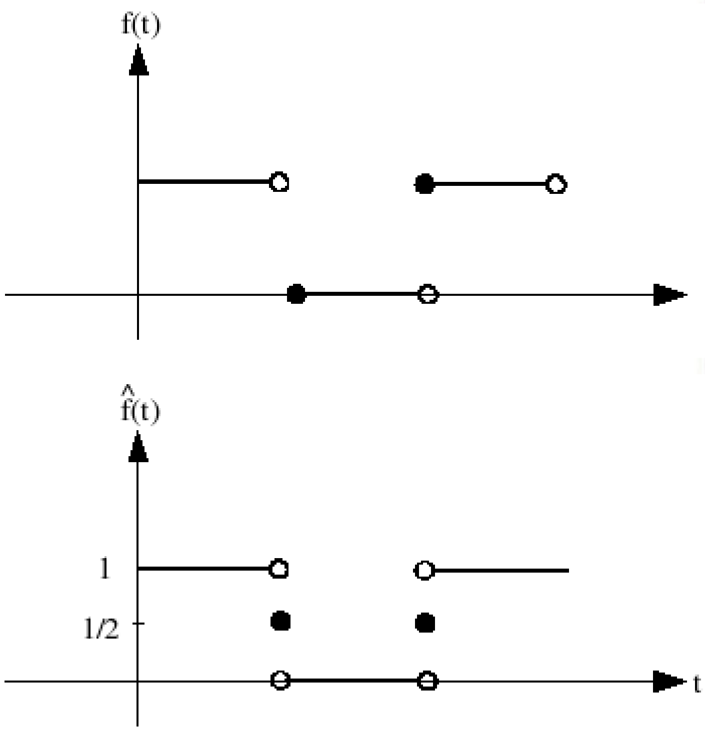
humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Señales Continuas y Periódicas…

Existencia de la Serie de Fourier

Condiciones de Dirichlet

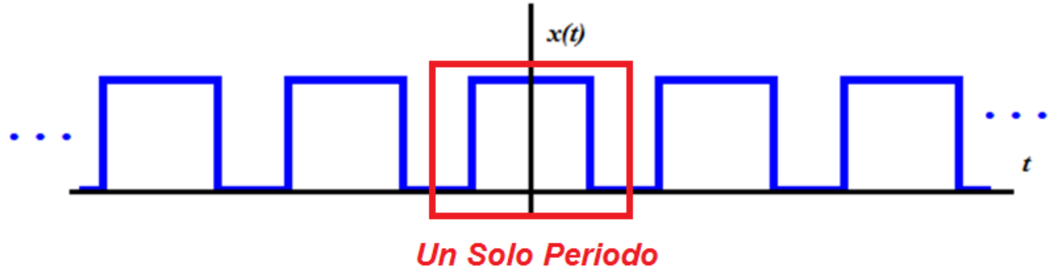
- Suficientes, pero no necesarias, que garantizan que la serie de Fourier de x(t) sea igual a la señal x(t),
- Excepto en los valores de t en los que x(t) es discontinua.
  - La serie converge al valor medio de la discontinuidad.



Señales Continuas y Periódicas…

Condiciones de Dirichlet

- $x(t)$ tiene un número finito de discontinuidades en un periodo.
- $x(t)$ contiene un número finito de máximos y mínimos en un periodo.
- $x(t)$ es absolutamente integrable en un periodo.



Señales Continuas y Periódicas…

Formas Alternas de la Serie de Fourier

- Forma Coseno
$$x(t) = c_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} |c_k| \cos(2\pi kF_0 t + \theta_k)$$

- Forma Seno-Coseno
$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(2\pi kF_0 t) - b_k sen(2\pi kF_0 t)]$$
$$a_0 = c_0 \qquad a_k = 2|c_k|\cos\theta_k \qquad b_k = 2|c_k| sen\theta_k$$

- Los coeficientes de la serie de Fourier son complejos:
$$c_k = |c_k| e^{j\theta_k} \quad donde \quad \theta_k = \angle c_k$$

- Representación independiente: el **módulo** del espectro de ***tensión*** $\{|c_k|\}$ y del espectro de ***fase*** $\{\theta_k\}$ en función de la frecuencia.

Potencia de Señales Periódicas

- Una señal periódica tiene *energía infinita* y *potencia media* finita dada por:

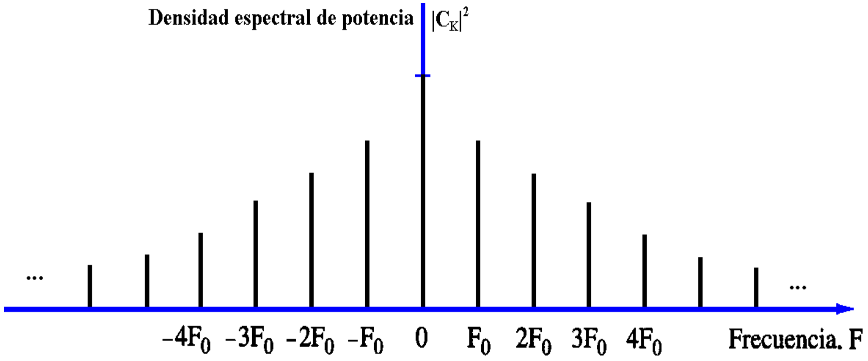
$$P_x = \frac{1}{T_p}\int_{T_p} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{T_p}\int_{T_p} x(t)x^*(t)dt = \frac{1}{T_p}\int_{T_p} x(t)\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^* e^{-j2\pi k F_0 t} dt$$

$$P_x = \frac{1}{T_p}\int_{T_p} |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2$$

- La expresión anterior relaciona los coeficientes de Fourier con la potencia y se conoce como **Relación de Parseval** para *señales de potencia*.

Densidad Espectral de Potencia de Señales Periódicas

- $|C_k|^2$ representa la potencia del k-ésimo armónico de la señal.
- La gráfica de $S_x = |C_k|^2$ en función de kF_0 ilustra la distribución de la potencia de la señal $x(t)$ en los componentes frecuenciales.



- La potencia media total de la señal es la suma de la potencia de todos los armónicos.

Series Fourier - Señales Continuas

- **Ejemplo 1:** Obtener el diagrama de la densidad espectral de potencia de la señal exponencial

$$x(t) = 5\, e^{j\,2\pi\,F_0\,t}, \text{ siendo } F_0 = 1/8$$

- **Solución:**
  - Por definición se tiene:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi\ k F_0 t} \qquad\qquad c_k = \frac{1}{T_p}\int_{T_p} x(t) e^{-j2\pi F_0\, k\, t}\ dt$$

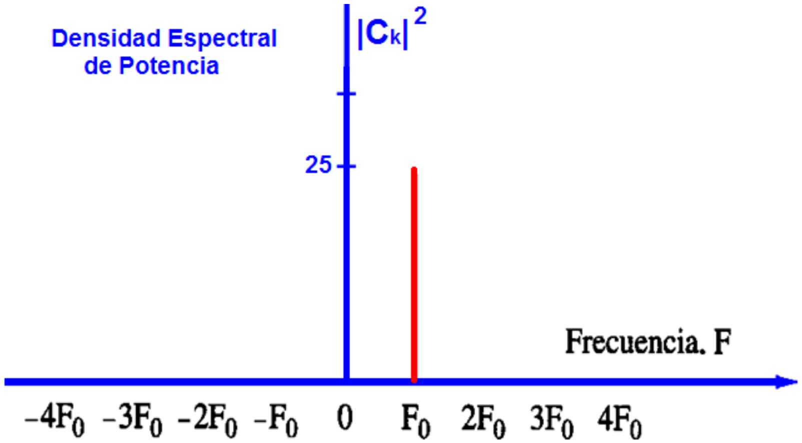
  - La señal $x(t)$ ya está descompuesta !!
  - $x(t)$ solo tiene un coeficiente $c_{k=1}$:

$$c_1 = 5$$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Series Fourier - Señales Continuas

- **Solución …**
  - $x(t)$ solo tiene un coeficiente: $c_1 = 5$
  - La potencia de cada coeficiente es: $P_k = |c_k|^2$
  - El diagrama se obtiene al dibujar $|c_k|^2$ en función de las frecuencias kF_0 para $k \in \mathbb{Z}$



- **Ejemplo 2:** Obtener el diagrama de la densidad espectral de potencia de la señal exponencial

$$x(t) = 3 + 5\, e^{j\,2\pi\,F_0\,t} - 4e^{j\,6\pi\,F_0\,t},\ \text{siendo } F_0 = 1/8$$

- **Solución:**
  - Por definición se tiene:

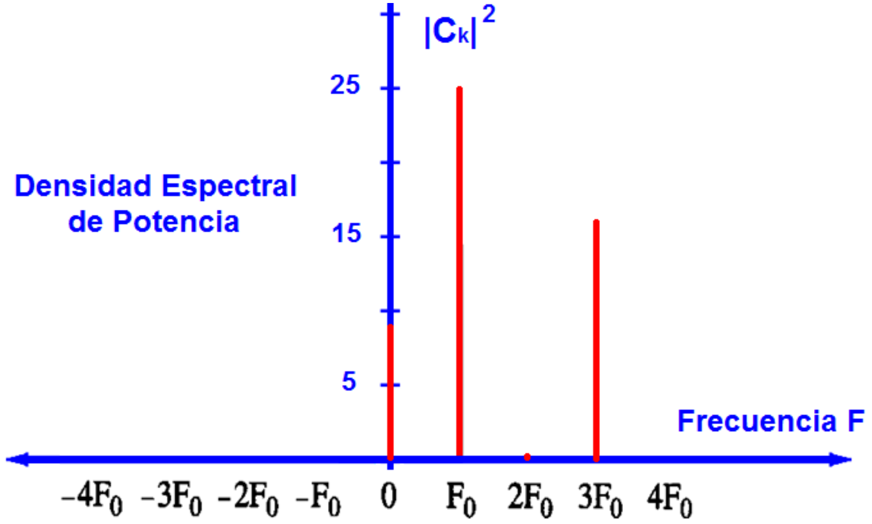
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi\,k F_0 t} \qquad\qquad c_k = \frac{1}{T_p}\int_{T_p} x(t) e^{-j2\pi F_0\,k\,t}\,dt$$

  - La señal $x(t)$ ya está descompuesta !!
  - $x(t)$ tiene cuatro coeficientes: $c_0 = 3,\, c_1 = 5,\, c_2 = 0,\, c_3 = -4$:

- **Solución …**
  - La potencia de cada coeficiente es:

$$P_0 = |3|^2, P_1 = |5|^2, P_2 = |0|^2, P_3 = |-4|^2$$

  - El diagrama se obtiene al dibujar $|c_k|^2$ en función de las frecuencias kF_0 para $k \in \mathbb{Z}$

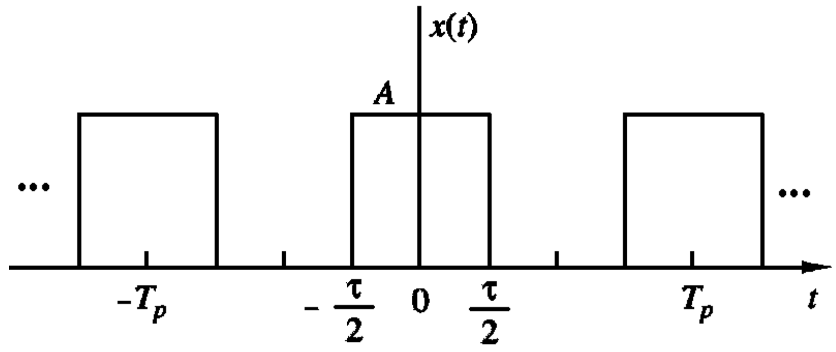


CASO ESPECIAL: Señales periódicas reales

- Constituye toda las señales prácticas
- Si la señal es real, $c_k = |c_k|\, e^{j\,\Theta_k}$ satisface las siguientes condiciones:
  - $c_{-k} = {c_k}^*$
  - $\left|{c_k}^*\right| = |c_k|$: Simetría par
  - $\Theta_k = -\Theta_k$: Simetría impar
  - $S_x = |C_k|^2$: Simetría par
  - Por la simetría, es suficiente especificar el espectro de señales reales para *valores positivos de la frecuencia.*

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

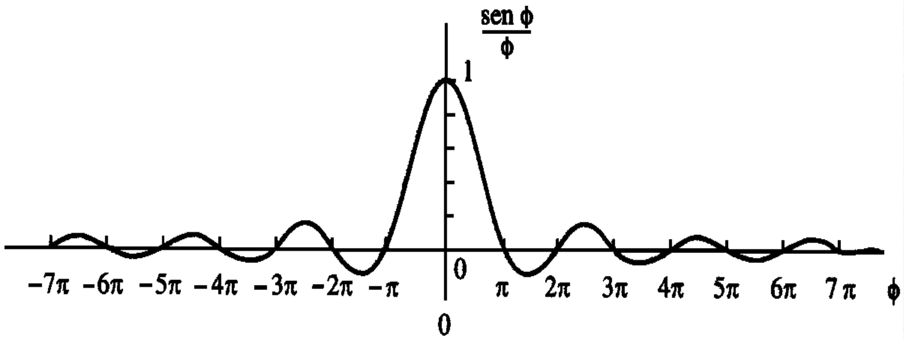
- **Ejemplo.** para un tren de pulsos rectangulares determine:
  - La serie de Fourier
  - La densidad espectral de potencia.



- **Solución.**
  - Periodo fundamental T_p,
  - Cumple las condiciones de Dirichlet?.
  - Por definición:

$$c_0 = \frac{A\tau}{T_p} \qquad c_k = \frac{A\tau}{T_p}\frac{sen(\pi kF_0\tau)}{(k\pi F_0\tau)} \qquad k = \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

■ Solución…

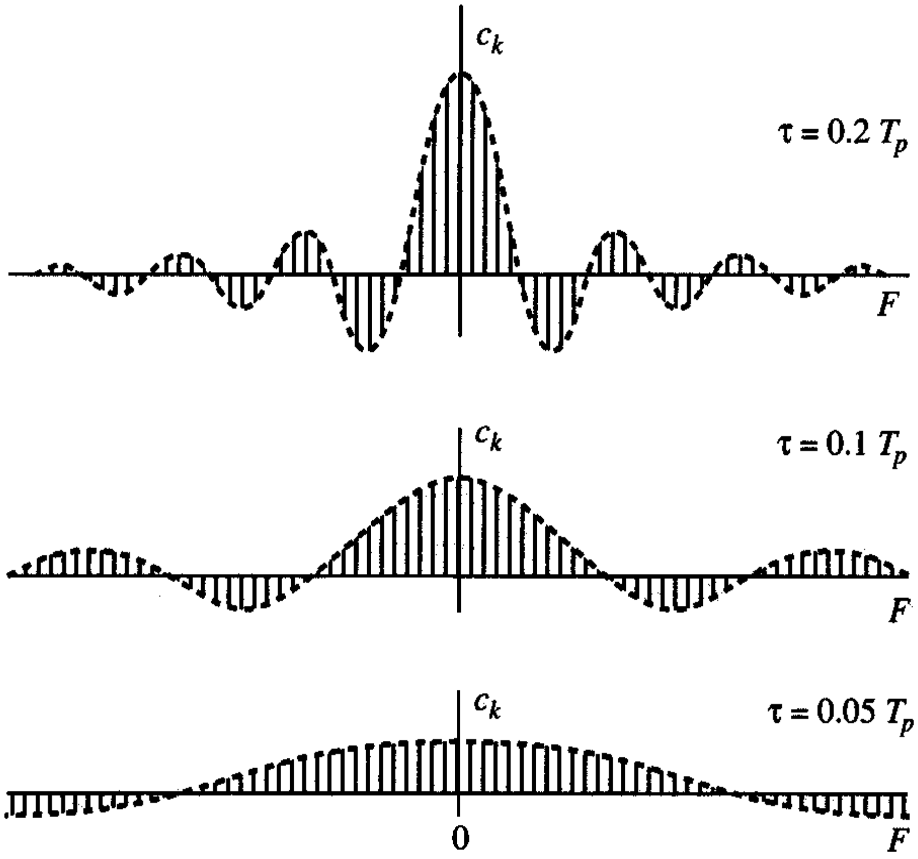


- Los coeficientes de Fourier son **muestras** de la función **sinc** para **$\phi = \pi k F_0 \tau$ escalados** en amplitud por **$A\,\tau\,/T_p$**.

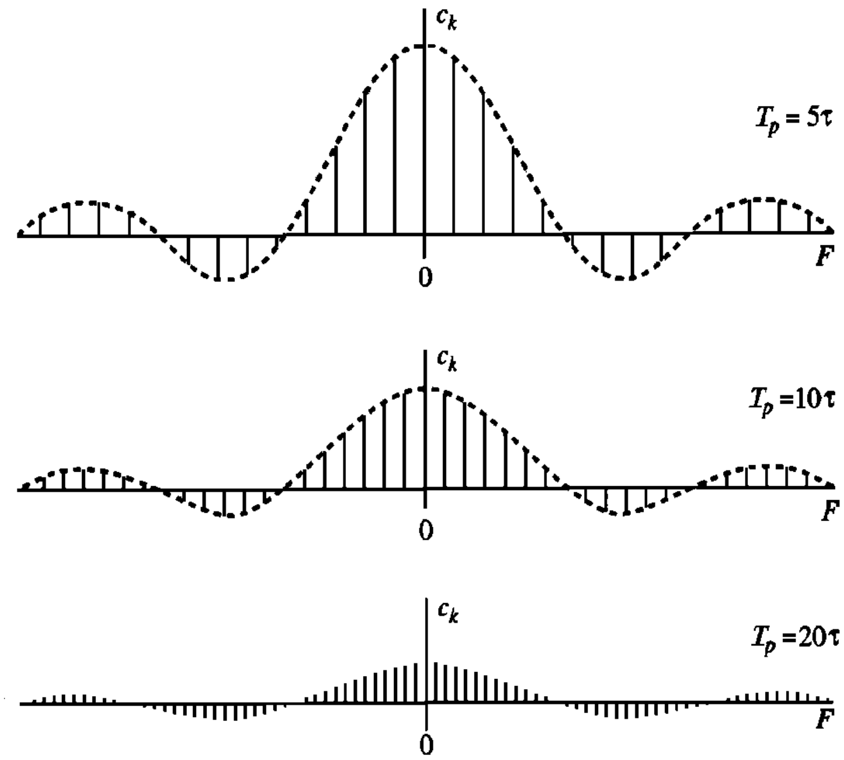
- La densidad espectral es:

$$|c_k|^2 = \begin{cases} \left(\dfrac{A\tau}{T_p}\right)^2 & k = 0 \\ \left(\dfrac{A\tau}{T_p}\right)^2 \left[\dfrac{sen\ (\pi k F_0 \tau)}{(\pi k F_0 \tau)}\right]^2 & k = \pm 1, \pm 2, \ldots \end{cases}$$

- **Comportamiento de los coeficientes de Fourier**
  - Disminución del ancho del pulso τ de la señal
  - Conservando fijo el periodo T_p.



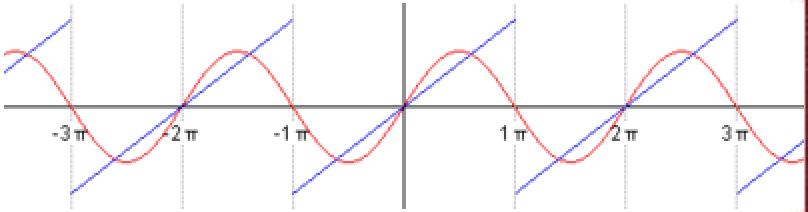
- **Comportamiento de los coeficientes de Fourier**
  - Aumento del periodo T_p de la señal
  - Conservando fijo el ancho del pulso τ.



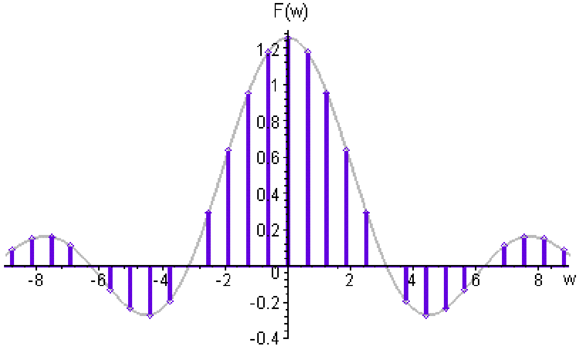
Introducción

Antecedentes: Serie de Fourier

- Señales periódicas se representan como combinación lineal de exponenciales complejas armónicamente relacionadas.
- Por ser periódicas, poseen un espectro de líneas equidistantes, separadas por una cantidad igual a su frecuencia fundamental.



http://en.wikipedia.org/wiki/Fourier_series

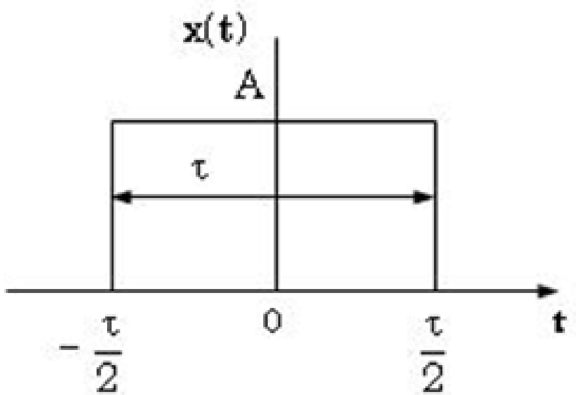


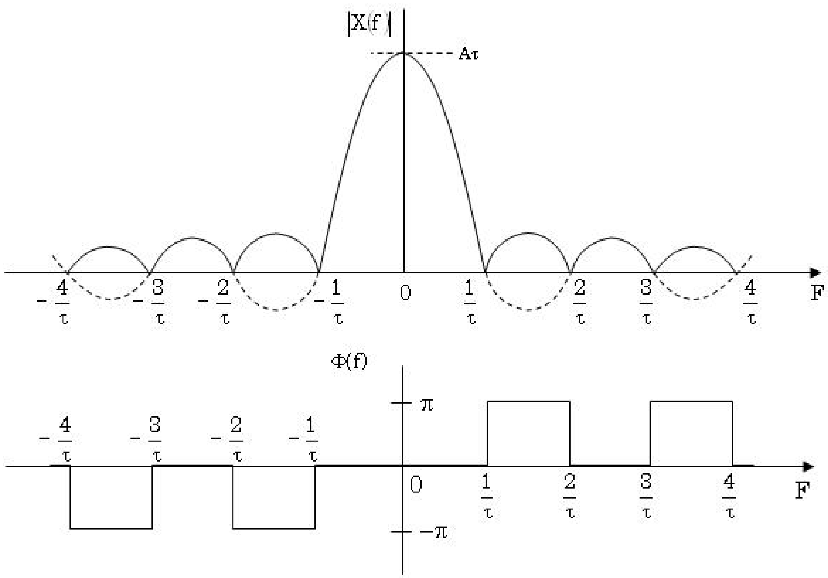
Transf. de Fourier - Señales *Continuas*

Introducción…

Transformada de Fourier

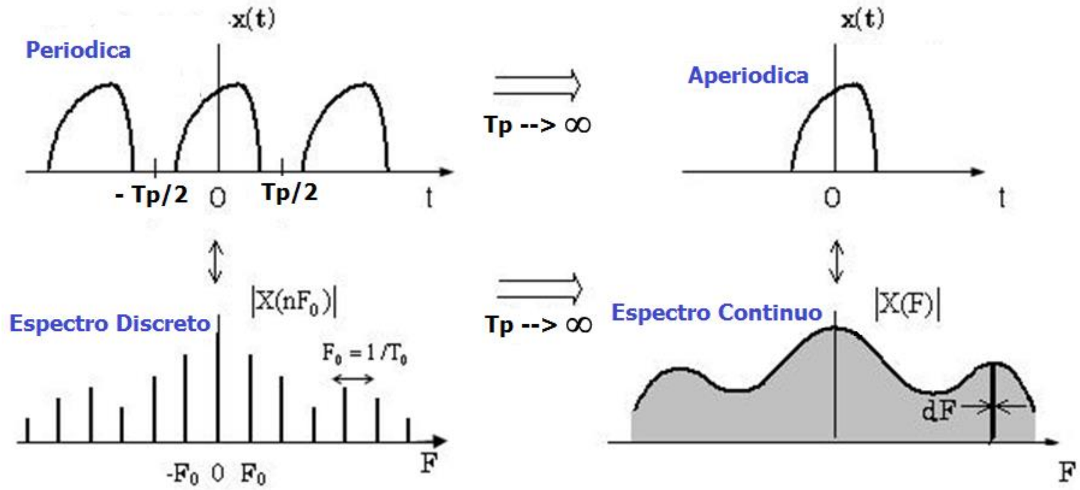
- Se aplica a señales aperiódicas.
- Genera un espectro continuo.





Introducción …

- Si el periodo de una señal periódica aumenta sin límite, el espaciado del espectro tiende a cero.
- Cuando el periodo se hace infinito, la señal se hace aperiódica y su espectro continuo.



- El espectro de una señal aperiódica es la envolvente del espectro de una señal periódica obtenida al repetir la señal aperiódica con periodo T_p.

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Definición

- **Transformada de Fourier *Directa*:** Para una señal continua y aperiódica $x(t)$, está dada por:

$$X(F) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi F t} \, dt$$

- **Transformada Inversa de Fourier:** $x(t)$ se obtiene a partir de $X(F)$ como:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(F) e^{j2\pi F t} \, dF$$

- **Definición …**
  - Representaciones Alternas
    - En términos de la frecuencia $\Omega = 2\pi F$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega)e^{j\Omega t}\ d\Omega \qquad\qquad X(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\Omega t}\ dt$$

    - En términos de magnitud y fase

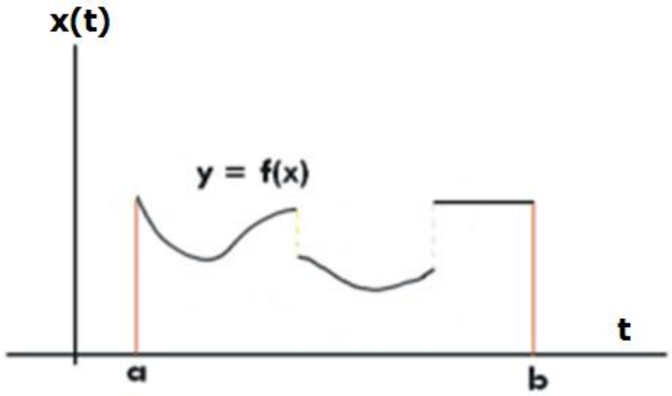
$$X(F) = |X(F)|e^{j\,\Theta(F)}$$

donde $|X(F)|$ es el módulo del espectro y $\Theta(F)$ es la fase.

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Condiciones de Dirichlet

- Condiciones suficientes y no necesarias para garantizar la existencia de la T.F. para señales aperiódicas.
  - $x(t)$ tiene un número finito de discontinuidades.
  - $x(t)$ contiene un número finito de máximos y mínimos.
  - $x(t)$ es absolutamente integrable.



Energía de Señales Aperiódicas

- Para una señal x(t) de energía finita con trasformada de Fourier X(F), su energía está dada por:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) x^*(t)\, dt$$

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, dt \left[\int_{-\infty}^{\infty} X^*(F) e^{-j2\pi F t}\, dF \right] = \int_{-\infty}^{\infty} X^*(F)\, dF \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi F t}\, dt \right]$$

$$Luego: E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(F)|^2\, dF$$

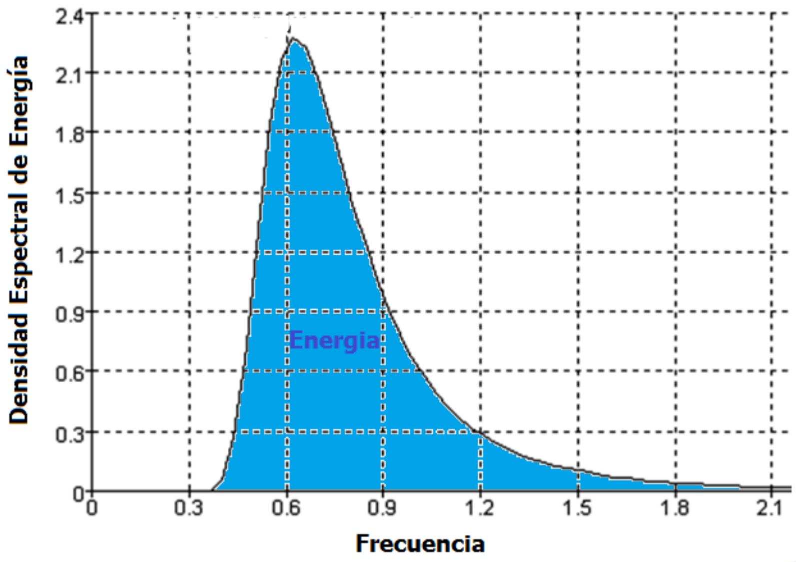
- ***Relación de Parseval*** para señales aperiódicas de energía finita
  - Expresa el principio de ***conservación de energía*** en los dominios del tiempo y la frecuencia.

Densidad espectral de energía $S_{xx}(F)$

- Representa la distribución de energía de la señal $x(t)$ en función de la frecuencia.

$$S_{xx}(F) = |X(F)|^2$$

- $S_{xx}(F)$ es real y positivo.
  - no contiene información sobre la fase
  - No permite reconstruir el espectro



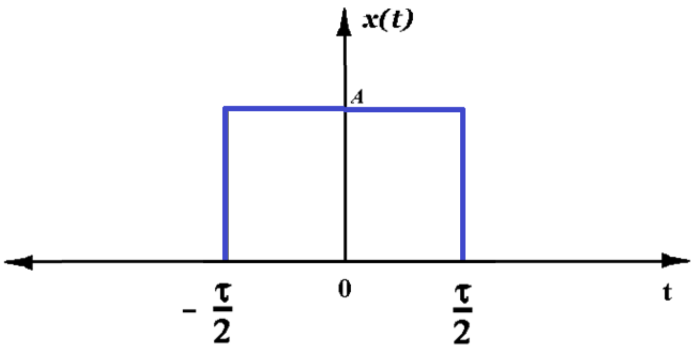
humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

- **CASO ESPECIAL: Señales aperiódicas reales**
  - Constituye toda las señales prácticas
  - Si la señal es real, $X(F) = |X(F)|e^{j\,\Theta(F)}$ satisface las siguientes condiciones:
    - $|X(-F)| = |X(F)|$: Simetría par
    - $\Theta(F) = -\Theta(F)$: Simetría impar
    - $S_{XX}(-F) = S_{XX}(F)$: Simetría par
    - Por la simetría, es suficiente especificar el espectro de señales reales para *valores positivos de la frecuencia*.

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

- **Ejemplo.** Determinar la T.F. y la densidad espectral de energía S_{xx} del pulso rectangular definido por,

$$x(t) = \begin{cases} A, & |t| \leq \tau/2 \\ 0, & |t| > \tau/2 \end{cases}$$



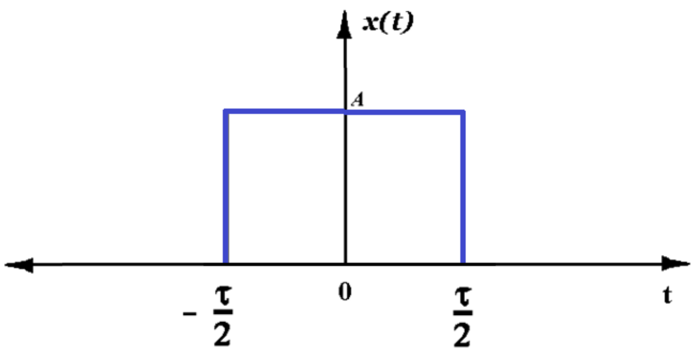
- **Solución**
  - La señal x(t) es aperiódica
  - Cumple las condiciones de Dirichlet?
  - Aplicando la definición,

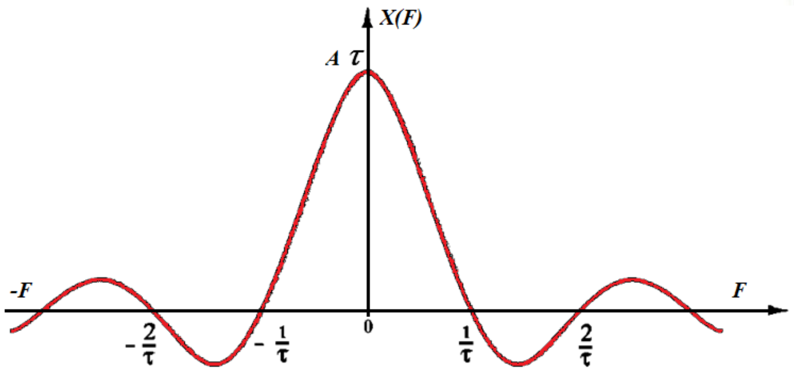
$$X(F) = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} A e^{-j2\pi F t}\, dt$$

  - Se obtiene,

$$X(F) = \frac{A}{j2\,\pi\, F}\left(e^{j2\pi F\tau/2} - e^{-j2\pi F\tau/2}\right)$$

$$X(F) = A\tau\ \frac{sen(\pi F\tau)}{(\pi F\tau)}$$



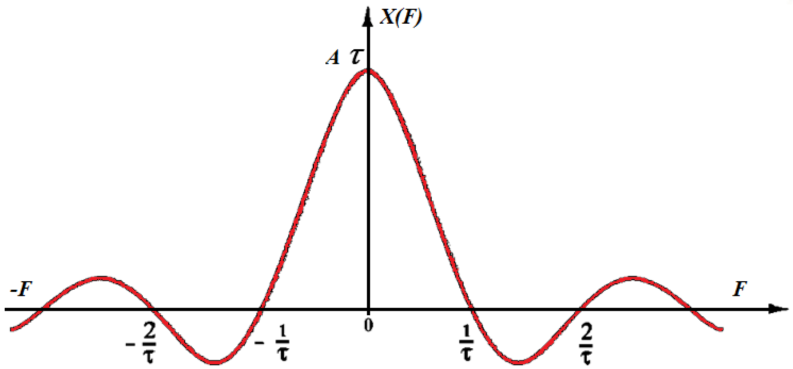


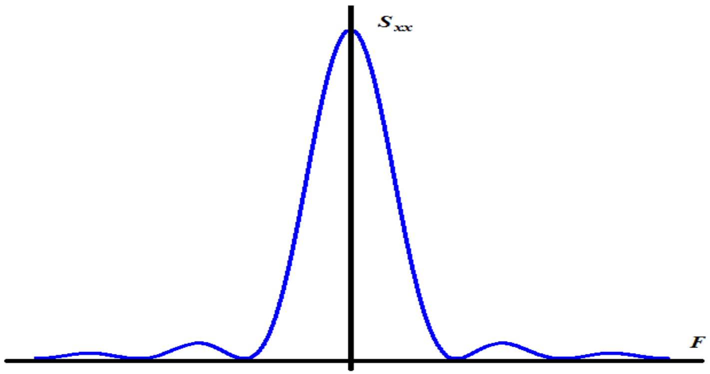
Transf. de Fourier - Señales *Continuas*

Observaciones al ejemplo

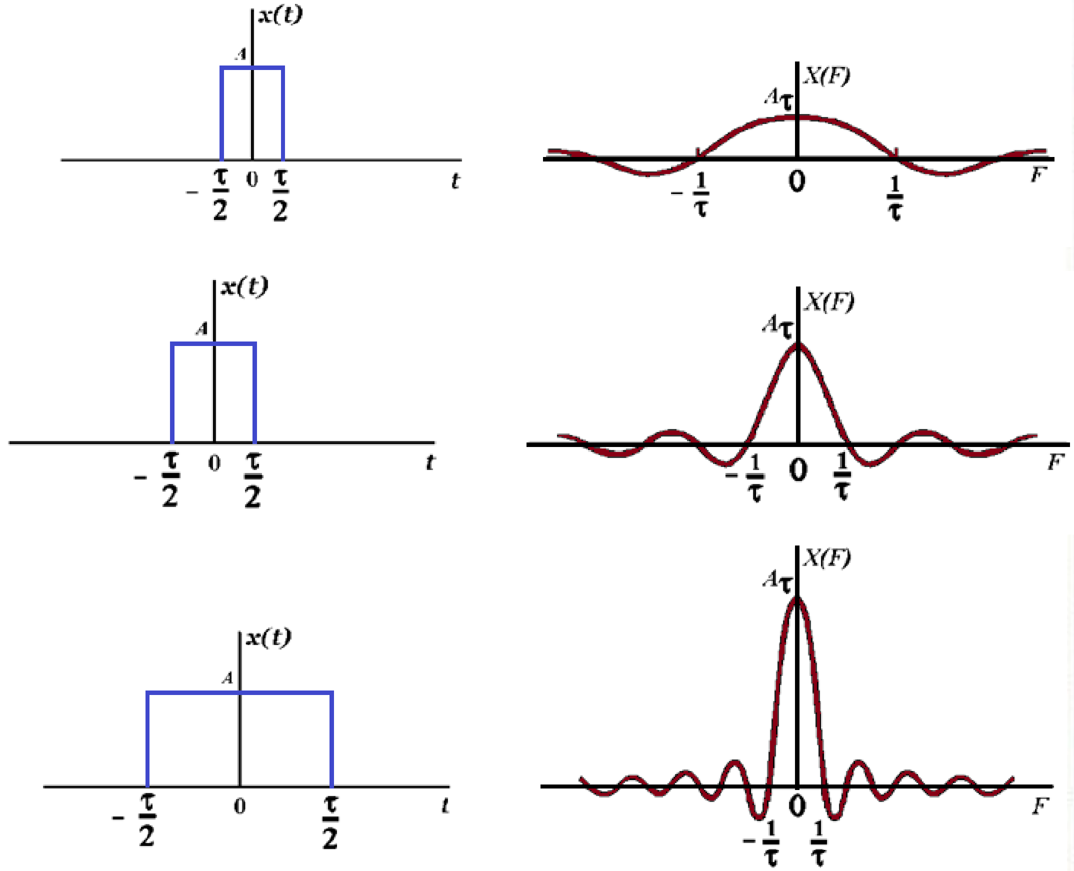
- Los cruces por cero de $X(F)$ ocurren para múltiplos de $1/\tau$.
- $X(F)$ es real, y puede representarse por un único diagrama.
- La **Densidad Espectral** está dada por:

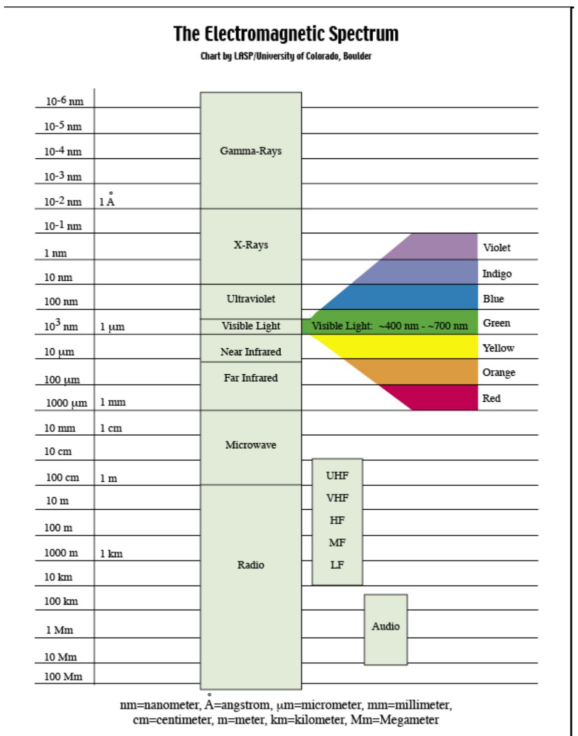
$$S_{xx}(F) = (A\tau)^2 \left[\frac{sen(\pi F \tau)}{(\pi F \tau)} \right]^2$$

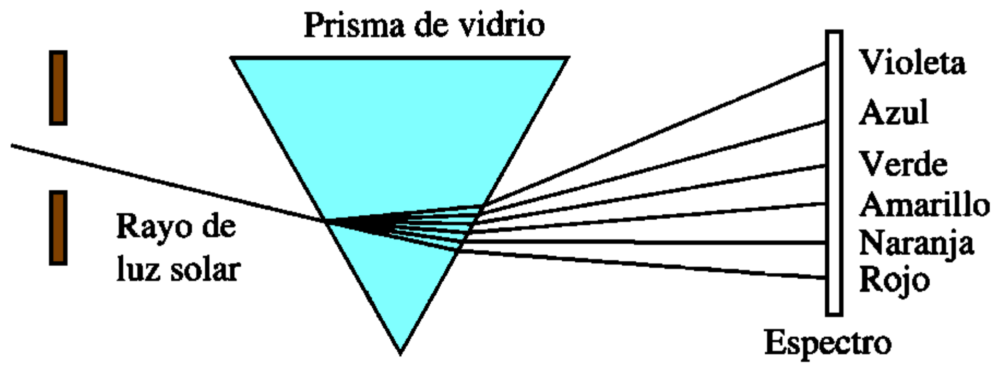


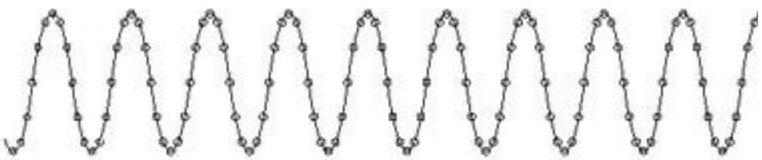


- **Comportamiento de la Transformada de Fourier**
  - Cuando el pulso en el tiempo se ensancha (estrecha), su T.F. se comprime (ensancha) en frecuencia.
  - Forma del principio de incertidumbre.



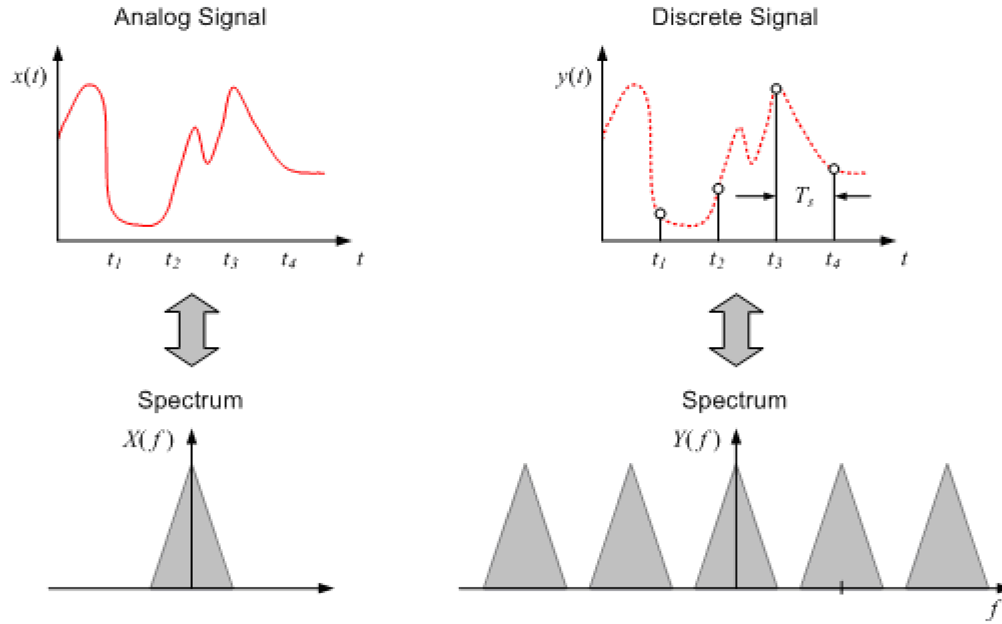

The Electromagnetic Spectrum
Chart by LASP/University of Colorado, Boulder
10-6 nm
10-5 nm
10-4 nm
10-3 nm
10-2 nm
1 Å
10-1 nm
1 nm
10 nm
100 nm
10³ nm
1 µm
10 µm
100 µm
1000 µm
1 mm
10 mm
1 cm
10 cm
100 cm
1 m
10 m
100 m
1000 m
1 km
10 km
100 km
1 Mm
10 Mm
100 Mm
Gamma-Rays
X-Rays
Ultraviolet
Visible Light
Near Infrared
Far Infrared
Microwave
Radio
UHF
VHF
HF
MF
LF
Audio
Visible Light: ~400 nm - ~700 nm
Violet
Indigo
Blue
Green
Yellow
Orange
Red
nm=nanometer, Å=angstrom, µm=micrometer, mm=millimeter,
cm=centimeter, m=meter, km=kilometer, Mm=Megameter

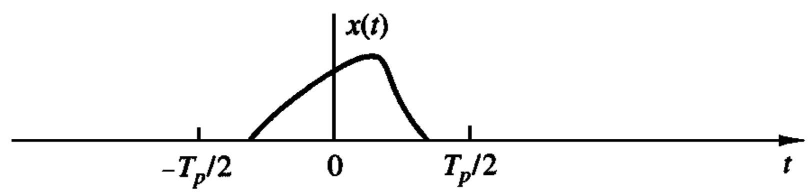

Prisma de vidrio
Rayo de
luz solar
Violeta
Azul
Verde
Amarillo
Naranja
Rojo
Espectro



Adequately sampled signal

Aliased signal due to undersampling





(a)