- **Introducción**

  - La **función de transferencia** $H(z)$ se emplea para obtener la **respuesta de un sistema** a una entrada, **con y sin** condiciones iniciales.
  - Se estudia la **estabilidad** de los sistemas LTI y se describe un **test** para determinar la estabilidad en función de los coeficientes del polinomio de $H(z)$.
  - Se analizan detalladamente los **sistemas de segundo orden**, que constituyen los bloques elementales para la implementación de sistemas de orden mayor.

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Introducción…

- Un sistema LTI se describe por una ecuación de diferencias de coeficientes constantes por,

$$y(n) = -\sum_{k=1}^{N} a_k \, y(n-k) + \sum_{k=0}^{M} b_k \, x(n-k)$$

- Su **función de transferencia** se obtiene directamente calculando la transformada z a ambos lados,

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k \, z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_k \, z^{-k}}$$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Introducción …

- Los sistemas descritos por e.d.c.c. presentan una función de transferencia racional:

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$$

  - $B(z)$ contiene los ceros de $H(z)$ y $A(z)$ los polos de $H(z)$

- La mayoría de señales de interés práctico también tienen transformadas z racionales:

$$X(z) = \frac{N(z)}{Q(z)}$$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Respuesta del Sistema en Reposo

- **Condiciones Iniciales**:
  - Reposo implica que las condiciones iniciales sean cero, es decir:

$$y(-1) = y(-2) = \cdots y(-N) = 0$$

- **Forma de la transformada z de y($\boldsymbol{n}$)**:

$$Y(z) = H(z)X(z) = \frac{B(z)}{A(z)}\frac{N(z)}{Q(z)}$$

- **Origen de los Polos en la respuesta** $Y(z)$
  - Por el sistema $H(z)$: $p_1, p_2, \ldots, p_N$
  - Por la señal de entrada X(z) : $q_1, q_2, \ldots, q_L$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Respuesta del Sistema en Reposo con Polos Simples

- **Supuesto**: no hay cancelación de polos y ceros
- La expansión en fracciones de $Y(z)$ es de la forma,

$$Y(z)=\sum_{k=1}^{N}\frac{A_k}{1-p_k z^{-1}}+\sum_{k=1}^{L}\frac{Q_k}{1-q_k z^{-1}}$$

- Y la forma de la señal $y(n)$ por Transformada z inversa es,

$$y(n)=\sum_{k=1}^{N}A_k (p_k)^n u(n)+\sum_{k=1}^{L}Q_k (q_k)^n u(n)$$

Respuesta del Sistema en Reposo con Polos Simples …

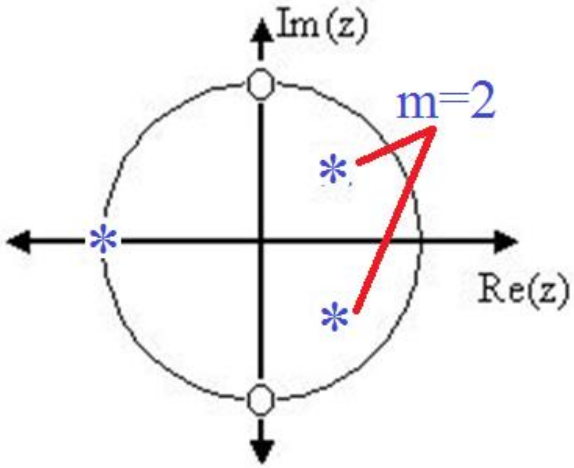
- La señal $y(n) = \sum_{k=1}^{N} A_k (p_k)^n \, u(n) + \sum_{k=1}^{L} Q_k (q_k)^n \, u(n)$ consta de dos partes: $y(n) = y_{nat}(n) + y_{forz}(n)$

  - **Respuesta natural, $y_{nat}(n)$**
    - función de los polos del sistema $H(z)$.
    - $X(z)$ influye en la salida a través de los coeficientes $\{A_k\}$
  - **Respuesta forzada, $y_{forz}(n)$**
    - función de los polos de la señal $X(z)$.
    - $H(z)$ influye en la salida a través de los coeficientes $\{Q_k\}$
  - Los factores $\{A_k\}$ y $\{Qk\}$ son función de $\{p_k\}$ y $\{qk\}$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Respuesta del Sistema en Reposo con Polos Múltiples

- Polos con multiplicidad se presentan cuando:
  - $X(z)$ o $H(z)$ tienen polos en común
  - $X(z)$ y/o $H(z)$ tienen polos de orden múltiple



- La salida $Y(z)$tendrá polos de orden múltiples.
- Supuesto: no hay cancelación de polos y ceros

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Sistema en Reposo con Polos Múltiples …

- La expansión en fracciones parciales de $Y(z)$ contendrá factores de la forma:

$$\frac{1}{\left(1 - p_l \; z^{-1}\right)^k} \qquad k = 1, 2, \ldots, m$$

  donde m es la multiplicidad del polo.

- La TZ inversa de estos factores producirá en la salida $y(n)$ términos de la forma:

$$n^{k-1} \; p_l^n$$

Sistema en Reposo con Polos Múltiples …

- **Ejemplo**: calcular la respuesta del sistema caracterizado por

$$H(z) = \frac{7}{1 + 0{,}3z^{-1} - 0{,}1z^{-2}}$$

cuando está en reposo y se excita con la entrada $x(n) = (0{,}2)^n u(n)$

- **Solución:** para el sistema en reposo, la salida está dada por,

$$Y(z) = H(z)X(z), \quad \text{con} \quad X(z) = \frac{1}{1-0{,}2\,z^{-1}}$$

Sistema en Reposo con Polos Múltiples …

Solución …

- Por lo tanto,

$$Y(z) = \frac{7}{(1+0{,}3z^{-1}-0{,}1z^{-2})}\,\frac{1}{(1-0{,}2\,z^{-1})}$$

- La expansión está dada por,

$$Y(z) = \frac{25/7}{(1+0{,}5z^{-1})} + \frac{10/7}{(1-0{,}2z^{-1})} + \frac{2}{(1-0{,}2z^{-1})^2}$$

- Por linealidad

$$Y(z) = Y_1(z) + Y_2(z) + Y_3(z)$$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Sistema en Reposo con Polos Múltiples …

Solución …

- Para $Y_1(z) = \frac{25/7}{(1+0,5z^{-1})}$
  - $y_1(n) = [(25/7)\ (-0,5)^n]\ u(n)$
- Para $Y_2(z) = \frac{10/7}{(1-0,2z^{-1})}$
  - $y_2(n) = [(10/7)\ (0,2)^n]\ u(n)$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

- **Solución …**
  - Para $Y_3(z) = \frac{2}{(1-0{,}2z^{-1})^2} = 10\ \frac{0.2}{(1-0.2z^{-1})^2}$
  - $y_3(n)$ se obtiene considerando de tablas que:

$$n\, a^n\ u(n) \overset{z}{\longleftrightarrow} \frac{a\, z^{-1}}{(1 - a\, z^{-1})^2}$$

y por la propiedad $x(n-k) \overset{z}{\longleftrightarrow} z^{-k}\, X(z)$

  - Se llega a $(n+1)\, a^{n+1}\ u(n+1) \overset{z}{\longleftrightarrow} \frac{a}{(1-a\, z^{-1})^2}$
  - Luego: $y_3(n) = [10(n+1)(0{,}2)^{n+1}]u(n+1)$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Solución …

- Finalmente:

$$y(n) = \left[\left(25/7\right)\left(-0{,}5\right)^{n} + \left(10/7\right)\left(0{,}2\right)^{n}\right]u(n) + \left[10(n+1)(0{,}2)^{n+1}\right]u(n+1)$$

- **Respuesta del Sistema NO en reposo**
  - **Consideraciones**
    - La entrada al sistema se aplica en el instante $n = 0$
    - Se supone que la señal de entrada $x(n)$ es causal.
    - Los efectos en el sistema de las señales de entradas anteriores se reflejan en las condiciones iniciales.
    - Se busca obtener $y(n)$ para $n \geq 0$ ante una entrada $x(n)$ causal y condiciones iniciales distintas de cero.
    - Se utiliza la transformada z *unilateral*.

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Respuesta de Sistemas Racionales

- **Sistema No en Reposo …**

  - La ecuación de diferencia del sistema es:

$$y(n) = -\sum_{k=1}^{N} a_k\, y(n-k) + \sum_{k=0}^{M} b_k\, x(n-k)$$

  - La TZ *unilateral* del sistema LTI queda:

$$Y^+(z) = -\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}\left[Y^+(z) + \sum_{n=1}^{k} y(-n) z^{n}\right] + \sum_{k=0}^{M} b_k\, z^{-k}\, X^+(z)$$

Respuesta de Sistemas Racionales

Sistema No en Reposo …

- Dado que $x(n)$ es causal, entonces $X^{+}(z) = X(z)$. Luego:

$$Y^{+}(z)=\frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1+\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}} X(z) - \frac{\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k} \sum_{n=1}^{k} y(-n) z^{n}}{1+\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}$$

$$Y^{+}(z)=H(z)X(z)+\frac{N_0(z)}{A(z)} \qquad \text{donde} \qquad N_0(z)=-\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k} \sum_{n=1}^{k} y(-n) z^{n}$$

Sistema No en Reposo…

- $Y^+(z)$ puede descomponerse en dos partes,

$$Y^+(z) = Y_{zs}(z) + Y_{zi}(z)$$

  - $Y_{zs}(z) = H(z)X(z)$: respuesta del sistema en estado nulo.
  - $Y_{zi}(z) = N_o(z)/A(z)$: respuesta a las condiciones iniciales no nulas.

- La respuesta total en el tiempo $y(n)$, se obtiene como la suma de las transformadas inversas individuales de $Y_{zs}(z)$ y $Y_{zi}(z)$:

$$y(n) = y_{zs}(n) + y_{zi}(n)$$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Respuesta de Sistemas Racionales

PSI Percepción y Sistemas Inteligentes

- **Sistema No en Reposo…**
  - Como el denominador de $Y_{zi}^{+}(z)$ es A(z), sus polos son p_1, p_2,….p_N. Por lo tanto, $y_{zi}(n)$ tiene la forma,

$$y_{zi}(n) = \sum_{K=1}^{N} D_K (p_K)^n u(n)$$

  - $Y_{zi}(n)$ puede sumarse a la respuesta y(n) obtenida para el caso del sistema en reposo, y los términos en que aparecen los polos $\{p_K\}$ pueden combinarse para generar la respuesta total,

$$y(n) = \sum_{K=1}^{N} (A_K + D_K)(p_K)^n u(n) + \sum_{K=1}^{L} Q_K (q_K)^n u(n)$$

Universidad del Valle
Facultad de Ingeniería
Escuela de Ingeniería Eléctrica y Electrónica
humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Sistema no en Reposo…

- **Observaciones:**
  - Las condiciones iniciales alteraran la respuesta natural del sistema modificando los factores de escala $\{A_K\}$.
  - Las c.i. no introducen polos nuevos en el sistema.
  - Las c.i. no tienen efecto sobre la respuesta forzada del sistema.

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Respuesta de Sistemas Racionales

- **Ejemplo:** Encuentre para el sistema dado

$$y(n) = 0.9y(n-1) - 0.81y(n-2) + x(n)$$

  - a) La función de transferencia
  - b) La respuesta $y(n)$ del sistema para
    - $x(n) = u(n)$ con $y(-1) = y(-2) = 0$
  - c) La respuesta $y(n)$ del sistema para
    - $x(n) = u(n)$ con $y(-1) = y(-2) = 1$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

- **Solución**
  - a) La función de trasferencia es:

$$\mathrm{H}(z) = \frac{1}{(1-0{,}9z^{-1}+0{,}81\, z^{-2})}$$

  - b) Con C.I= 0, la respuesta está dada por :

$$Y(z) = Y_{zs}(z) = H(z)X(z)$$

    - Para $X(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}$

$$Y(z) = \frac{1}{(1-0{,}9z^{-1}+0{,}81\, z^{-2})\ (1-z^{-1})}$$

- **Solución …**
  - Por expansión en fracciones parciales se obtiene:

$$Y(z) = \frac{-0{,}0989 + 0{,}8901\ z^{-1}}{1 - 0{,}9z^{-1} + 0{,}81\ z^{-2}} + \frac{1{,}0989}{1 - z^{-1}}$$

$$Y(z) = Y_1(z) + Y_2(z)$$

  - Descomponiendo el término $Y_1(z)$:
    - $Y_1(z) = \dfrac{-0.0494-0.5424j}{(1-\ [0.4500 + 0.7794j\ ]\ z^{-1})} + \dfrac{-0.0494+0.5424j}{(1-\ [0.4500 - 0.7794j]\ z^{-1})}$

Solución …

- $Y_1(z)$ puede reescribirse como:
  - $Y_1(z) = \frac{|A|\ e^{j\theta}}{\left(1-r\, e^{j\varphi}\, z^{-1}\right)} + \frac{|A|\ e^{-j\theta}}{\left(1-r\, e^{-j\varphi}\, z^{-1}\right)}$
  - Donde
    - $|A| = 0.5447, \quad \theta = -95.209°$
    - $r = 0.90, \quad \varphi = 1.0472 = \frac{\pi}{3}$
- Por T.z inversa
  - $y_1(n) = |A\,|\, r^n \left[e^{j(\varphi\, n+\theta)} + e^{-j(\varphi\, n+\theta)}\right] u(n)$
  - $y_1(n) = 2\ |A\,|\ r^n\ \ cos(\varphi\, n + \theta)\, u(n)$

- **Solución …**
  - Reemplazando los valores tenemos que:

$$y_1(n) = 1.0894(0.9)^n \cos\left(\frac{\pi}{3}n - 95.2087°\right)$$

  - Para $Y_2(z) = \frac{1.0989}{1-z^{-1}}$ se tiene:

$$y_2(n) = 1.0989\, u(n)$$

  - Finalmente: $y(n) = y_1(n) + y_2(n)$
    - $y(n) = \left[1.0894(0.9)^n \cos\left(\frac{\pi}{3}n - 95.2087°\right) + 1.0989\right] u(n)$

Respuesta de Sistemas Racionales

- **Solución**
  - c) Con C.I=1, la respuesta está dada por:

$$Y(z) = Y_{zs}(z) + Y_{zi}(z)$$

Con,

$$Y_{zi}(z) = \frac{N_0(z)}{A(z)} = \frac{0.09 - 0.81z^{-1}}{1 - 0.9z^{-1} + 0.81z^{-2}}$$

$$y_{zi}(n) = \left[0.988\,(0.9)^n \cos\left(\frac{\pi}{3} n + 87° \right) \right] u(n)$$

Se llega a:

$$y(n) = \left[1.099 + 1.44\,(0.9)^n \cos\left(\frac{\pi}{3} n + 38° \right) \right] u(n)$$

Respuesta Natural y Forzada

- La respuesta de un sistema a una entrada determinada puede descomponerse en respuesta natural y forzada

$$y(n) = y_{nat}(n) + y_{for}(n)$$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Respuesta Natural

- Para un sistema causal, $y_{nat}(n)$ está dado por:

$$y_{nat}(n) = \sum_{k=1}^{N} A_k \ (p_k)^n u(n)$$

- Donde,
  - p_k , $\forall \ \ k = 1, 2, \ldots, N$: polos de $H(z)$
  - A_k, dependen de las condiciones iniciales y de $X(z)$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

- **Respuesta Forzada**
  - Para un sistema causal, $y_{for}(n)$ está dado por:

$$y_{for}(n) = \sum_{k=1}^{L} Q_k \ (q_k)^n u(n)$$

  - Donde,
    - q_k , $\forall \ \ k = 1, 2, \dots, L$: polos de $X(z)$
    - Q_k, dependen de las condiciones iniciales y de $H(z)$

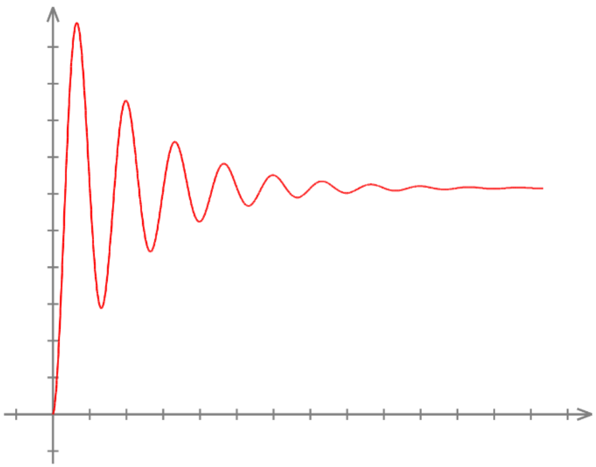
Respuesta Transitoria y Estacionaria

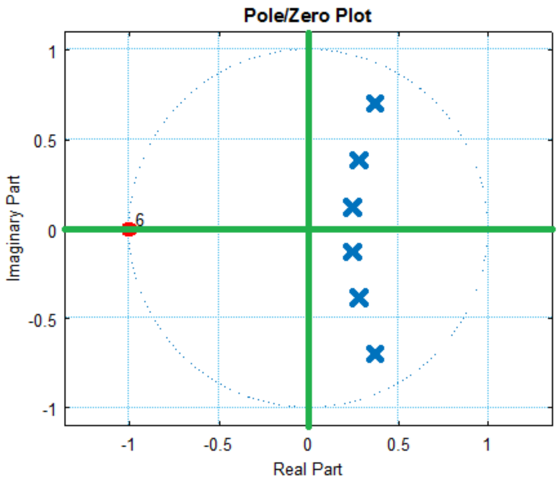
- La respuesta de un sistema a una entrada determinada puede descomponerse en respuesta transitoria y estacionaria

$$y(n) = y_{tra}(n) + y_{est}(n)$$

Respuesta Transitoria: $y_{tra}(n)$

- Se presenta cuando alguno o todos los componentes de $y_{nat}(n)$ y/o $y_{for}(n)$ decaen a cero cuando n aumenta.
- La tasa de decaimiento de la respuesta transitoria es inversamente proporcional a la magnitud de los polos.





Respuesta de Sistemas Racionales

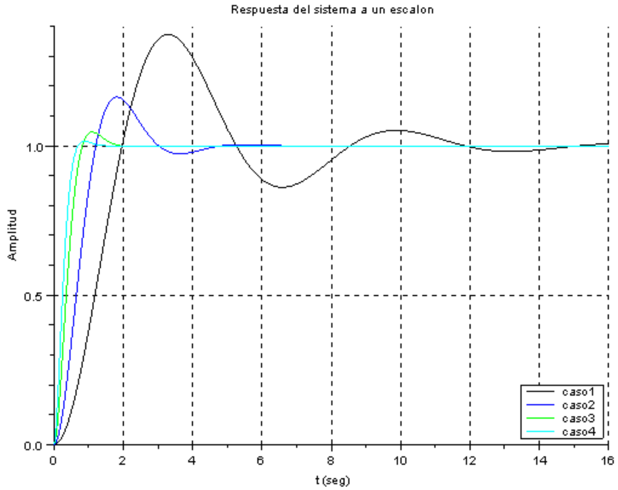
- **Respuesta Transitoria:** $y_{tra}(n)$…

  - $y_{tra}(n)$ aparece cuando:
    - Los polos de $H(z)$ $|p_k| < 1$
      - Términos exponenciales de $y_{nat}(n)$ decrecen hacia cero.
    - Los polos de la señal de entrada $|q_k| < 1$
      - Términos exponenciales de $y_{for}(n)$ decrecen hacia cero.

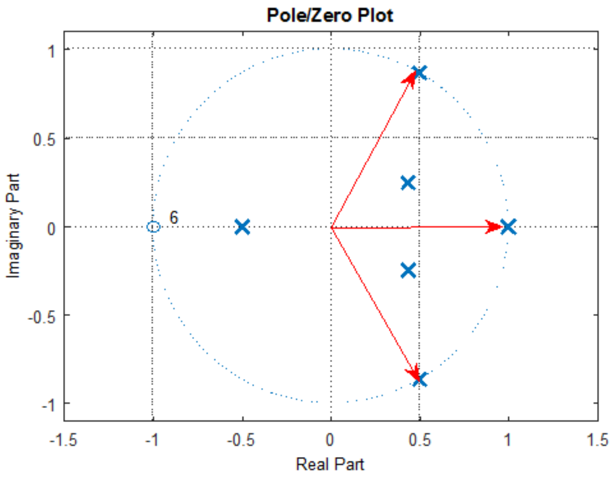
humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Respuesta de Sistemas Racionales

- **Respuesta Estacionaria:** $y_{est}(n)$
  - Es la respuesta en condición de equilibrio que prevalece después de desaparecer el transitorio.



- **Respuesta Estacionaria:** $y_{est}(n)$…
  - Se presenta por los componentes de $y_{for}(n)$ que tienen un polo de la señal de entrada situado sobre el *círculo unitario* del plano z.
  - En sistemas estables, la respuesta estacionaria se debe a los componentes *acotados* y *estacionarios* de la entrada $X(z)$.



Respuesta de Sistemas Racionales

- **Ejercicio:** Determine las respuestas transitoria y en régimen del sistema caracterizado por:

$$y(n) = 0.5y(n-1) + x(n), \quad y(-1) = 0 \quad ; \qquad x(n) = 10\cos\left(\pi\, n/4\right)u(n)$$

- **Solución:**
  - Función de Transferencia $H(z)$ y $X(z)$:

$$H(z) = \frac{1}{1-0.5\,z^{-1}} \qquad\qquad X(z) = \frac{10\left[1-\left(1/\sqrt{2}\right)z^{-1}\right]}{1-\sqrt{2}\,z^{-1}+z^{-2}}$$

  - Por lo tanto,

$$Y(z) = \frac{-1.9074}{1-0.5\,z^{-1}} + \frac{11.9074 - 3.8149z^{-1}}{1-\sqrt{2}z^{-1}+z^{-2}}$$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Solución…

- Respuesta total

$$y(n) = \left[-1.9074\ (0.5)^n + 11.9074\ cos\left(\frac{\pi}{4}n - 28.7^o\right)\right]\ u(n)$$

- Respuesta transitoria (coincide con la natural)

$$y_{trans}(n) = -1.9074\ (0.5)^n\ u(n)$$

- Respuesta de estado estacionario (coincide con la forzada)

$$y_{esta}(n) = 11.9074\ cos\left(\frac{\pi}{4}n - 28.7^o\right)u(n)$$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Causalidad

- **En el dominio del tiempo discreto**
  - Un sistema LTI causal si satisface la condición: $h(n) = 0, \quad n < 0$
- **En el dominio transformado Z:**
  - La ROC de una secuencia causal es el exterior de un círculo.
  - Un sistema LTI es causal *si y sólo si*:
    - La ROC de $H(z)$ es el exterior de un círculo de radio $r < \infty$, *incluyendo* el punto $z = \infty$.
    - Siendo $H(z)$ una función racional de polinomios en z, el orden del numerador debe ser menor o igual al orden del denominador.

Causalidad en el Dominio Z

- **Ejemplo 1.** Determine si el sistema $H_1(z)$ es causal

$$H_1(z) = \frac{1 - 0.1z^{-1} - 0.2z^{-2}}{z^{-1} - 1.1z^{-2} + 0.3\,z^{-3}}$$

- **Solución**
  - Manipulando $H_1(z)$

$$H_1(z) = \frac{z^3 - 0.1z^2 - 0.2z}{z^2 - 1.1\,z + 0.3}$$

  - Sin conocer su ROC,
    - Se concluye que el sistema es **no-causal** debido a que es un sistema donde el orden del numerador es **mayor** al del denominador.

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Causalidad en el Dominio Z

- **Solución …**
  - Manipulando

$$H_1(z) = \frac{1-0.1z^{-1}-0.2z^{-2}}{z^{-1}(1-1.1z^{-1}+0.3\,z^{-2})} = z\,\frac{1-0.1z^{-1}-0.2z^{-2}}{1-1.1z^{-1}+0.3\,z^{-2}}$$

  - Por fracciones parciales

$$H_1(z) = z\left(-\frac{2}{3} + \frac{\frac{11}{3}}{1-0.6z^{-1}} - \frac{2}{1-0.5\,z^{-1}}\right)$$

  - Antitransformando,
    - $h_1(n) = -\frac{2}{3}\delta(n+1) + \frac{11}{3}(0.6)^{n+1}u(n+1) - 2(0.5)^{n+1}u(n+1)$
    - Sistema es **no-causal**

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

- **Ejemplo 2:** Determine si el sistema $H_2(z)$ es causal

$$H_2(z) = \frac{1 - 0.7z^{-1} - 0.14\, z^{-2} - 0.12\, z^{-3}}{1 + 0.7z^{-1} + 0.12\, z^{-2}}$$

- **Solución**
  - Por expansión en fracciones parciales :

```
num=[1 -0.7  -0.14  -0.12]
den=[1 0.7 0.12];
[Resi,Polos, TDirec]=residuez(num,den)
```

- $\text{Resi} = 15\ ,\ -\frac{56}{3}$ $\text{Polos} = -0.4\ , -0.3$ $\text{TDirec} = \frac{14}{3}\ ,\ -1$

- **Solución …**
  - Por expansión en fracciones parciales :

$$H_2(z) = \frac{14}{3}\, z - 1 + \frac{15}{1+0.4z^{-1}} - \frac{56/3}{1+0.3z^{-1}}$$

  - Antitransformando,

$$h_2(n) = \frac{14}{3}\delta(n+1) - \delta(n) + 15(-0.4)^n u(n) - \frac{56}{3}(-0.3)^n u(n)$$

  - Causalidad?
    - Sistema No-Causal

Estabilidad en el Dominio Z

Estabilidad

- Condición necesaria y suficiente para que un sistema LTI sea estable BIBO es,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$$

- Puesto que

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) z^{-n}$$

se deduce que:

$$|H(z)| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n) z^{-n}| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)|\ |z^{-n}|$$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Estabilidad en el Dominio Z

Percepción y Sistemas Inteligentes

Estabilidad …

- Si se evalúa $\left|H(z)\right| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|h(n)\right| \left|z^{-n}\right|$ en |z| = 1,
- se obtiene

$$\left|H(z)\right| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|h(n)\right|$$

- Esto implica que H(z) debe contener a la circunferencia unidad dentro de su ROC.
  - **Un sistema LTI es estable BIBO si y sólo si la ROC de H(z) incluye a la circunferencia unidad.**

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Discusión Estabilidad y Causalidad

- La ROC es el exterior a un circunferencia de $r > r_0$

Sistema Causal

- La ROC es el exterior de una circunferencia de $r < 1$
- La ROC **no puede** contener ningún polo.

Sistema Causal y Estable

- La ROC contiene la circunferencia de $r = 1$

Sistema Estable

- Un sistema LTI es **causal** y **estable** BIBO si y sólo si todos los polos de H(z) están dentro de la circunferencia unidad.

Sistema Causal y Estable

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Estabilidad para un Sistema Causal

- **Ejemplo 1.** Para el sistema

$$H(z)=\frac{3-4z^{-1}}{1-3.5z^{-1}+1.5z^{-2}}=\frac{1}{1-0.5z^{-1}}+\frac{2}{1-3\,z^{-1}}$$

especifique la ROC de $H(z)$ y determine $h(n)$ para que el sistema opere en las siguientes condiciones:

- a) estable
- b) causal
- c) anticausal unilateral
- d) anticausal bilateral

Estabilidad para un Sistema Causal

- **Solución.**
  - Estabilidad Absoluta
    - El sistema tiene polos en: $p_1 = 0{,}5,\ p_2 = 3.$
    - Sistema absolutamente inestable:
  - **a) Operación estable:**

    La ROC debe incluir el círculo unidad: $0.5 < |z| < 3$

    El sistema es no causal $\Rightarrow$ $h(n) = (0.5)^n u(n) - 2(3)^n u(-n-1)$
  - **b) Operación causal:**

    La ROC es $|z| > 3$.

    El sistema es inestable $\Rightarrow$ $h(n) = (0.5)^n u(n) + 2(3)^n u(n)$

Estabilidad para un Sistema Causal

- **Solución ...**

  - **c) Operación anticausal unilateral:**

    La ROC es |z| < 0.5

    El sistema es inestable: $h(n) = -\left\lfloor (0.5)^n + 2\,(3)^n \right\rfloor u(-n-1)$

  - **d) Operación anticausal bilateral:**

    La ROC es 0.5 < |z| <3

    El sistema es estable: $h(n) = (0.5)^n\, u(n) - 2(3)^n\, u(-n-1)$

Estabilidad para un Sistema Causal.

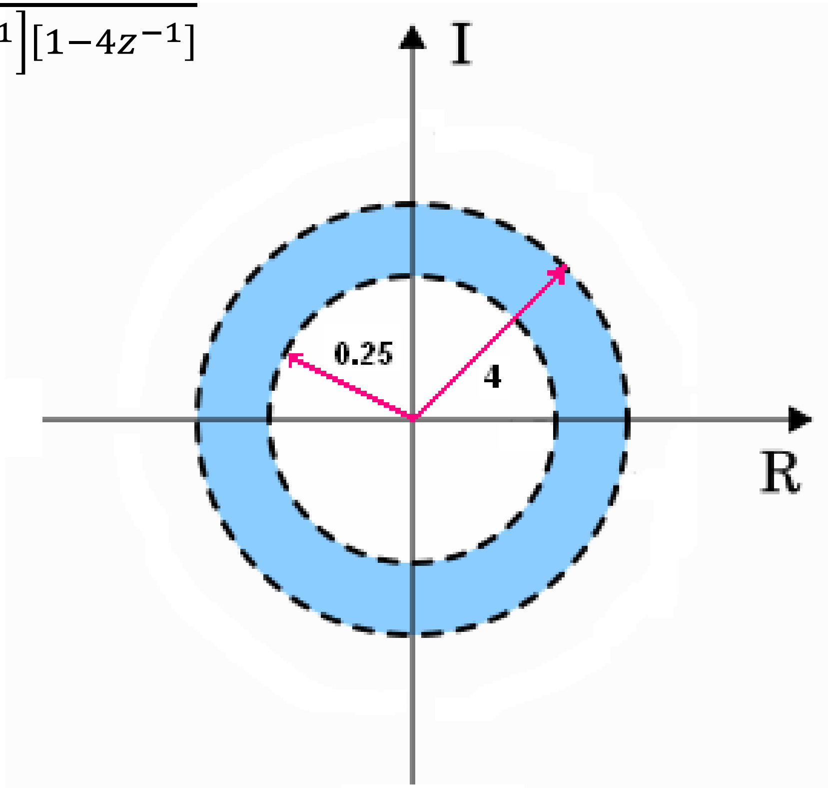
- **Ejemplo 2:** Especifique H(z) y la ROC para el sistema:

$$h(n) = (0.25)^{|n|} \quad -\infty < n < \infty$$

- **Solución**
  - Función de Transferencia:
    - $H(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} (0,25)^{|n|} z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} (0,25)^{|n|} z^{-n}$
      - $\sum_{n=1}^{\infty} (0,25)^{n} z^{n} = \sum_{n=1}^{\infty} (0,25\, z)^{n} = \frac{0,25\, z}{1-0,25\, z} = \frac{-1}{1-4z^{-1}}$
      - $\sum_{n=0}^{\infty} (0,25)^{n} z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (0,25\, z^{-1})^{n} = \frac{1}{1-(1/4)z^{-1}}$
      - $H(z) = \frac{15\, z^{-1}}{-4+17\, z^{-1}-4\, z^{-2}} = \frac{-\left(\frac{15}{4}\right)z^{-1}}{1-\left(\frac{17}{4}\right)z^{-1}+z^{-2}}$

Estabilidad para un Sistema Causal.

- **Solución…**
  - Función de Transferencia:
    - $H(z) = \frac{-\left(\frac{15}{4}\right)z^{-1}}{1-\left(\frac{17}{4}\right)z^{-1}+z^{-2}} = \frac{-\left(\frac{15}{4}\right)z^{-1}}{\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)z^{-1}\right]\left[1-4z^{-1}\right]}$
  - Polos:
    - $p_1 = \frac{1}{4}, p_2 = 4$
  - ROC:
    - $\frac{1}{4} < |z| < 4$



- **Ejemplo 3.** Para un sistema con entrada

$$x(n) = u(n)$$

y salida

$$y(n) = a^n u(n+1)$$

determine:

a) La respuesta impulsional $h(n)$
b) Las condiciones de a para que $h(n)$ sea estable.
c) La causabilidad del sistema y la ROC.

Solución

Solución a)

- La Transformada z de $x(n)$ es:

$$X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

- $y(n)$ puede reescribirse como:

$$y(n) = \frac{1}{a}\,\delta(n+1) + a^n\,u(n)$$

- La T.z de $y(n)$ es:

$$Y(z) = \frac{1}{a}\,z + \frac{1}{1 - a\,z^{-1}} = \frac{\frac{1}{a}z}{1 - a\,z^{-1}}$$

- Como $H(z) = Y(z)/X(z)$, se obtiene:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{a^{-1}z\,(1 - z^{-1})}{1 - a\,z^{-1}}$$

  - Reorganizando ,

$$H(z) = a^{-1}\left[\frac{z}{1 - a\ \ z^{-1}} - \frac{1}{1 - a\ \ z^{-1}}\right]$$

  - Aplicando transformada inversa y la propiedad de desplazamiento:

$$h(n) = a^{-1}\,[a^{n+1}\ u(n+1) - \ a^{n}\,u(n)]$$
$$h(n) = a^{n}\ u(n+1) - \ a^{n-1}\,u(n)$$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

- **Solución**
  - **Solución b)**
    - La respuesta impulsional

$$h(n) = a^{n}\ u(n+1) - \ a^{n-1}\, u(n)$$

    - Puede manipularse para obtener

$$h(n) = a^{-1}\, \delta(n+1) + \ a^{n}\, (1 - a^{-1})\, u(n)$$

    - De donde se aprecia que el sistema es estable BIBO para:

$$0 < |a| < 1$$

Solución

Solución c)

- Al reescribir la función racional en potencias positivas de z:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{a^{-1}z\,(1 - z^{-1})}{1 - a\,z^{-1}} = \frac{a^{-1}\,z^2 - z}{z - a}$$

  - El numerador es mayor que el denominador: Anticausal.

- Lo anterior se verifica, al obtener la Tz inversa de

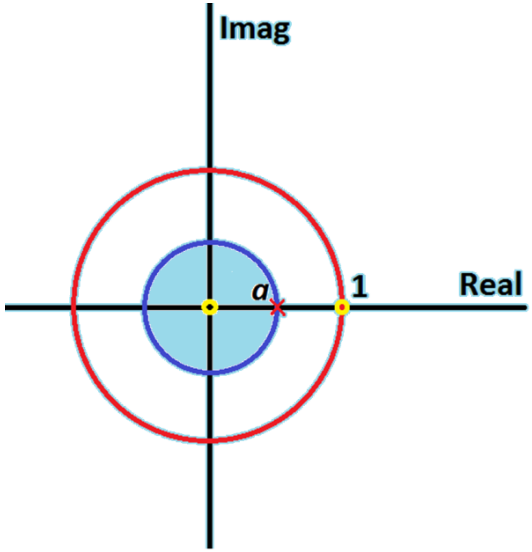
$$H(z) = \frac{a^{-1}z}{1 - a\,z^{-1}} - \frac{a^{-1}}{1 - a\,z^{-1}}$$

$$h(n) = a^{n}\ u(n+1) - \ a^{n-1}\,u(n)$$

- Se aprecia que $h(n)$ **no cumple** la condición $\boldsymbol{h(n) = 0 \ \ \forall\, n < 0}$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

- **Solución**
  - **Solución c)…**
    - La ROC se obtiene considerando que $h(n)$ es una secuencia *derecha* y que $H(z)$ tiene un polo en $z = a$.
    - La ROC es el interior de un círculo $|z| = a$ sin *incluir* $|z| = a$.

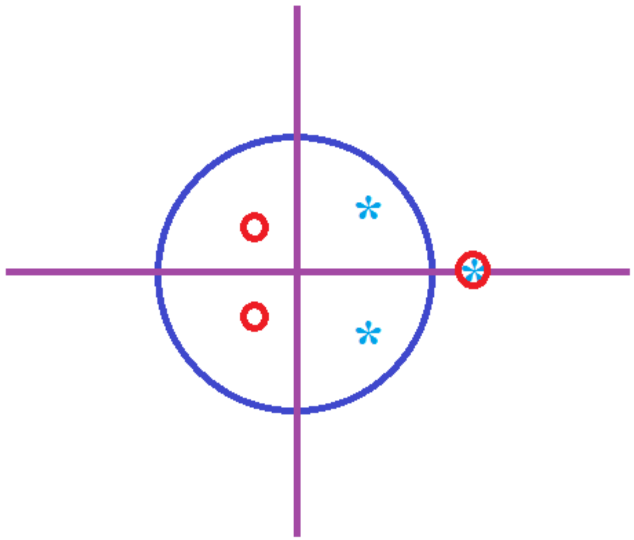


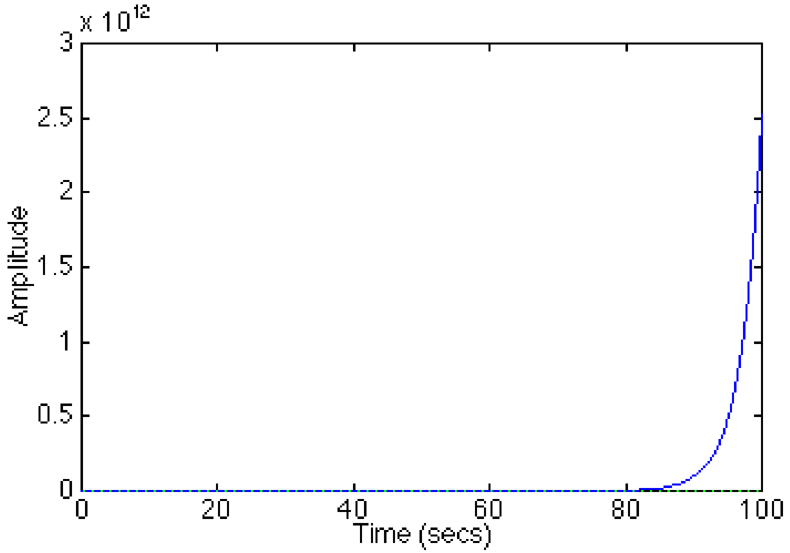
Cancelaciones polo-cero

Introducción

- La cancelación de polos y ceros es importante en el análisis y diseño de sistemas discretos.
  - Permite modificar el comportamiento de $H(z)$ y el efecto de la señal de entrada $X(z)$.
- Se presenta cuando una TZ contiene polos y ceros en la misma posición, bien sea en $H(z)$ o en $H(z)X(z)$.
- Si el zero y el polo no coinciden exactamente, el término de la respuesta tiene una amplitud muy pequeña.

- **Introducción …**
  - Estabilizar un sistema inherentemente inestable cancelando ceros y polos puede presentar problemas debidos a falta de precisión numérica.





Cancelaciones polo-cero

- **Ejemplo:** Determine $h(n)$ para el sistema:

$$y(n) = 2.5\,y(n-1) - y(n-2) + x(n) - 5x(n-1) + 6x(n-2)$$

- **Solución:**
  - Transformando:

$$H(z) = \frac{1 - 5\,z^{-1} + 6\,z^{-2}}{1 - 2.5\,z^{-1} + z^{-2}} = \frac{(1-2z^{-1})\,(1-3z^{-1})}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)(1-2z^{-1})}$$

  - Cancelando cero/polo y fracciones parciales:

$$H(z) = \frac{(1-3z^{-1})}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)} = 6 - \frac{5}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)}$$

Cancelaciones polo-cero

- **Solución…**
  - Se tiene:

$$H(z) = 6 - \frac{5}{\left(1 - \frac{1}{2} z^{-1}\right)}$$

  - Respuesta impulsional:

$$h(n) = 6\,\delta(n) - 5\left(\frac{1}{2}\right)^{n} u(n)$$

  - Ecuación de orden reducido:

$$y(n) = \frac{1}{2}\, y(n-1) + x(n) - 3x(n-1)$$

  - Causal? Estable?

Polos múltiples y estabilidad

- **Implicación:**
  - Si $\boldsymbol{H(z)}$ **es estable** y $X(z)$ contiene uno o más polos que **coinciden** con los del sistema, la salida $Y(z)$ contendrá polos de **orden múltiple *m***, que dan origen a **términos** de la forma,

$$A_k\, n^b\, (p_k)^n\, u(n) \qquad 0 \leq b \leq m-1$$

  - **Observaciones:**
    - Si $|p_k| < 1$, los términos tienden a cero porque el factor exponencial $(p_k)^n$ domina al término n^b.

Polos múltiples y estabilidad

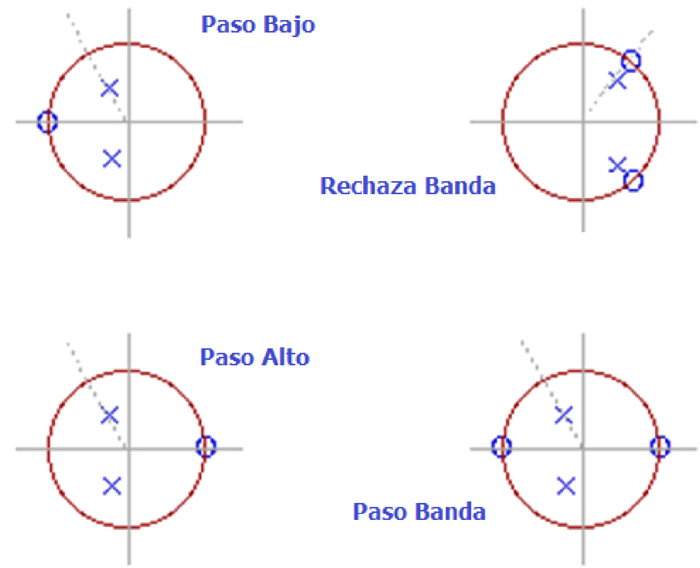
- **Observaciones…**
  - No existe ninguna entrada acotada que pueda producir una salida no acotada, cuando todos los polos del *sistema* están dentro del círculo unidad.
  - La estabilidad BIBO $\rightarrow$ polos del sistema estrictamente dentro del círculo unidad.
  - Los únicos sistemas útiles con polos $p = 1$ (marginalmente estables) son los osciladores digitales.

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Test de Estabilidad de Schür-Cohn

Introducción

- La estabilidad de un sistema está determinada por la posición de los polos de $H(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$.
- Un sistema es causal y estable si todas las raíces de $A(z)$ están dentro del círculo unidad.
- Los polos del sistema son las raíces del polinomio $A(z)$ de $H(z)$.

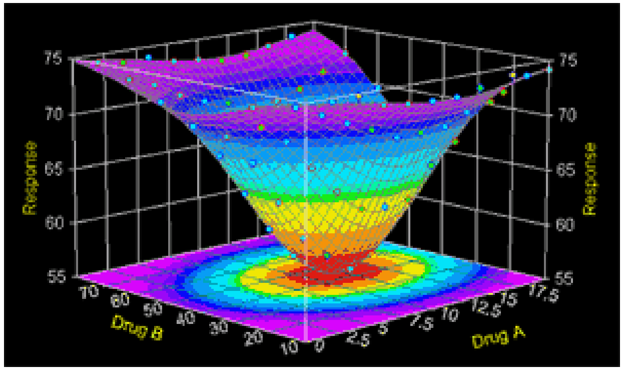


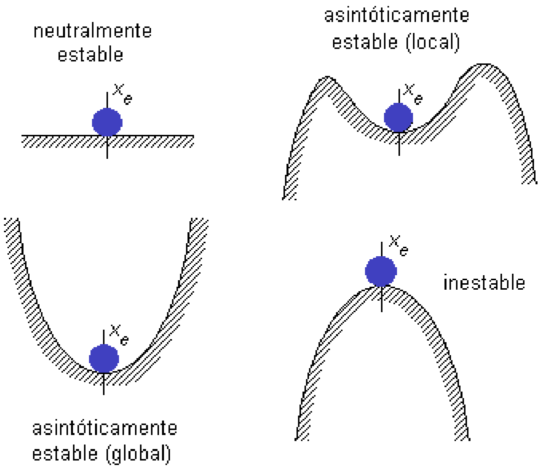
$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)}, \qquad donde \;\; A(z) = 1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \ldots + a_N z^{-N}$$

Test de Estabilidad de Schür-Cohn

Introducción…

- Determinar la estabilidad de $H(z)$ implica encontrar las raíces de un polinomio de orden N.
- El Test de **Schür-Cohn** es un algoritmo para determinar estabilidad mediante el cálculo de *coeficientes de reflexión* K_m.
    - Recursivo y fácil de implementar.
    - Los valores K_m tienen aplicación en procesado de voz y síntesis de filtros.





humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Test de Estabilidad de Schür-Cohn

- **Notación**

  - Polinomio de grado m: $A_m(z) = \sum_{k=0}^{m} a_m(k) z^{-k} \qquad a_m(0) = 1$
  - Polinomio inverso: $B_m(z) = z^{-m} \, A_m\left(z^{-1}\right) = \sum_{k=0}^{m} a_m(m-k) z^{-k}$
  - Datos iniciales $A_N(z) = A(z) \quad y \quad K_N = a_N(N)$

- **Procedimiento para el cálculo de K_m**
  - **1. Calcular**, a partir del polinomio $A_m(z)$ los polinomios de grado menor:

$$A_m(z)\ para\ m = N, N-1, N-2, \dots, 1.$$

de acuerdo con la ecuación recursiva:

$$A_{m-1}(z) = \frac{A_m(z) - K_m\, B_m(z)}{1 - {K_m}^2}, \qquad K_m = a_m(m)$$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Test de Estabilidad de Schür-Cohn

- **Procedimiento para el cálculo de K_m …**
  - **2. Evaluar** si los coeficientes K_m satisfacen la condición $|K_m| < 1$ para $m = 1, 2, \ldots, N$.
  - **3. Criterio de Estabilidad**
    - Si se cumple que $|K_m| < 1, \forall\, m$ entonces $A(z)$ tiene todas sus raíces **dentro** de la circunferencia unidad → **estable**.

Test de estabilidad de Schür-Cohn…

PSI Percepción y Sistemas Inteligentes

- **Ejemplo:** Determinar la estabilidad del sistema $H(z)=\dfrac{1}{1-\frac{7}{4}z^{-1}-\frac{1}{2}z^{-2}}$
- **Solución**
  - Calcular $A_2(z)$ y K_2,
    - $A_2(z) = 1 - \frac{7}{4}\, z^{-1} - \frac{1}{2}\, z^{-2}$, luego $K_2 = -\frac{1}{2}$
  - Calcular $B_2(z)$,
    - $B_2(z) = -\frac{1}{2} - \frac{7}{4}\, z^{-1} + z^{-2}$
  - Calcular $A_1(z)\ y\ K_1$,
    - $A_1(z) = \frac{A_2(z)-K_2B_2(z)}{1-{K_2}^2} = 1 - \frac{7}{2}\, z^{-1}$, luego $K_1 = -\frac{7}{2}$
  - **Estabilidad?**
    - $|K_1| > 1$, Sistema Inestable

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

- **Ejemplo:** Implementar en Matlab el test de Schür-Cohn y probarlo con los siguientes sistemas:
  - $H_1(z) = \frac{1-z^{-1}+0,6z^{-2}}{1+0,8z^{-1}+0,6z^{-2}-2,5z^{-3}+z^{-4}}$
  - $H_2(z) = \frac{1+0,5z^{-1}+0,8z^{-2}-0,9z^{-3}}{1+0,7z^{-1}+1,9z^{-2}-4,5z^{-3}+2z^{-4}-3z^{-5}+2,9z^{-6}}$

- **Solución**
  - El cálculo de los coeficientes K_m se realiza con la ecuación:

$$A_{m-1}(z) = \frac{A_m(z) - K_m\, B_m(z)}{1 - {K_m}^2}, \qquad K_m = a_m(m)$$

Solución

```
function  [K, ESTADO] = s_test_estabilidad (DEN)
% TEST DE SCHUR-COHN
% Salida:   K Vector de coeficientes de reflexión,  ESTADO texto condición
%           de estabilidad.
% Entrada:  DEN polinomio numerador de la forma
%           1 + a1 z^(-1)+ a2 z^(2)+...+aN z^(-N)
    if DEN(1)==1  %Verificación primer coeficiente igual a 1
        %Cálculo de constantes de reflexión
        N=length(DEN)-1;
        A{N}=DEN;
        B{N}=fliplr(DEN);    %tempo
        K(N)=DEN(N+1);

        g=(N-1);
       while  ( g>=1 && all(K~=1))
            Aux=(A{g+1}-K(g+1).*B{g+1} )./(1- K(g+1)^2) ;
            A{g}=Aux(1:g+1);
            B{g}=fliplr(Aux(1:g+1));
            K(g)=A{g}(g+1);
            g=g-1;
       end
        %Determinar estabilidad
        if all (K<1)
            ESTADO='Sistema Estable';
        else
            ESTADO='Sistema Inestable';
        end
    else
        display('Primer coeficiente del polinomio diferente de 1')
        K=NaN;
        ESTADO='Indefinido';
        return
    end
end
```

- **Solución**
  - a) El sistema $H_1(z)$ tiene como polinomio denominador:

$$den = 1 + 0{,}8z^{-1} + 0{,}6z^{-2} - 2{,}5z^{-3} + z^{-4}$$

  - Ejecución en MATLAB

```
den=[1   0.8   0.6   -2.5   1];
[K, ESTADO]=s_test_estabilidad(den) ;
```

  - El programa arroja el siguiente resultado:
    - K =   0   0   0   1
    - ESTADO = Sistema Inestable

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Solución

- b) El sistema $H_2(z)$ tiene como polinomio denominador:

$$den = 1 + 0{,}7z^{-1} + 1{,}9z^{-2} - 4{,}5z^{-3} + 2z^{-4} - 3z^{-5} + 2{,}9z^{-6}$$

- Ejecución en MATLAB

```
den=[ 1   0.7   1.9   -4.5   2   -3   2.9];
[K, ESTADO]=s_test_estabilidad(den) ;
```

- El programa arroja el siguiente resultado:

```
K =    -0.6666     0.0721    -0.8771    2.4754    0.6788    2.9000
ESTADO = Sistema Inestable
```


humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Introducción

- Los sistemas con dos polos constituyen el bloque de construcción básico para la realización de sistemas de orden mayor.
- Sistema causal de segundo orden bajo estudio:

$$y(n) = -a_1 y(n-1) - a_2 y(n-2) + b_0 x(n)$$

  - con función de transferencia,

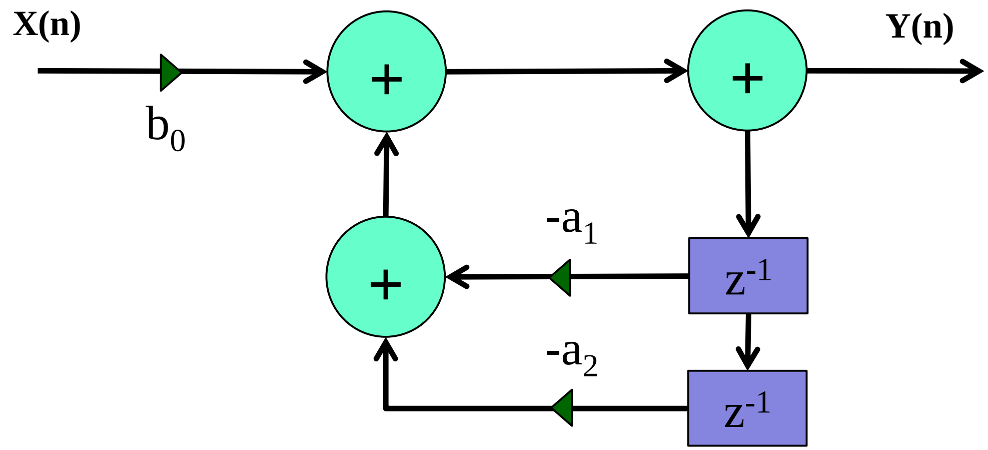
$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} = \frac{b_0 z^2}{z^2 + a_1 z + a_2}$$

- Configuración de polos y ceros:
  - Dos ceros en el origen
  - Dos polos

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

- **Relación polos-coeficientes**
  - Los polos del sistema de segundo orden están por:

$$p_1, p_2 = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2}$$



  - Se verifica que son función de las ganancias del sistema,

$$y(n) = -a_1 y(n-1) - a_2 y(n-2) + b_0 x(n)$$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

- **Relación polos-coeficientes …**
  - Manipulando matemáticamente, se puede llegar a,

$$a_1 = -(p_1 + p_2) \qquad a_2 = p_1\, p_2$$

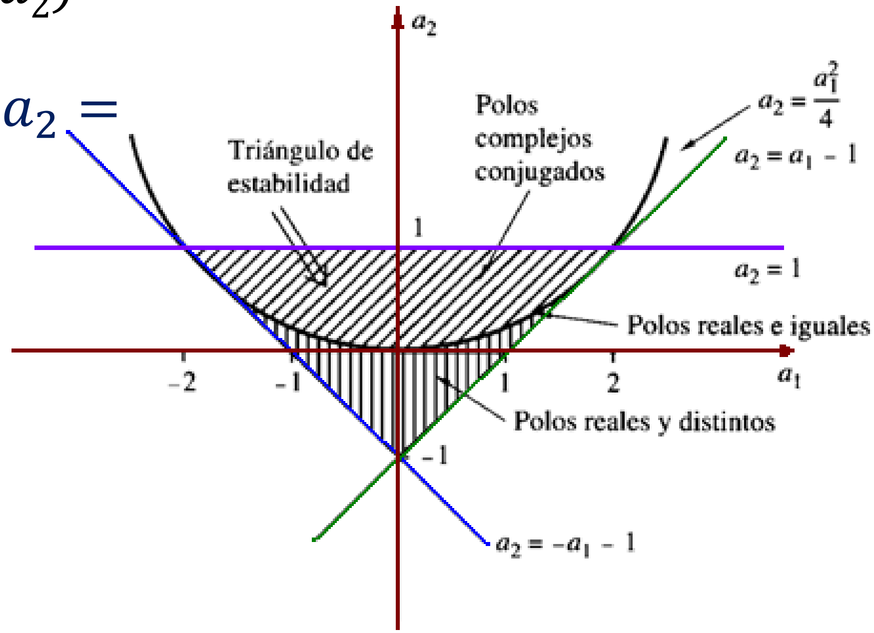
  - Se sabe que el sistema es **estable** si $|p_1| < 1$ y $|p_2| < 1$.
  - Las **condiciones** de $p_{1,2}$ se relacionan con los valores de los coeficientes a_1 y a_2 de acuerdo con:

$$|\mathrm{a}_2| = |p_1\, p_2| = |\mathrm{p}_1||\mathrm{p}_2| < 1$$

$$|\mathrm{a}_1| < 1 + \mathrm{a}_2$$

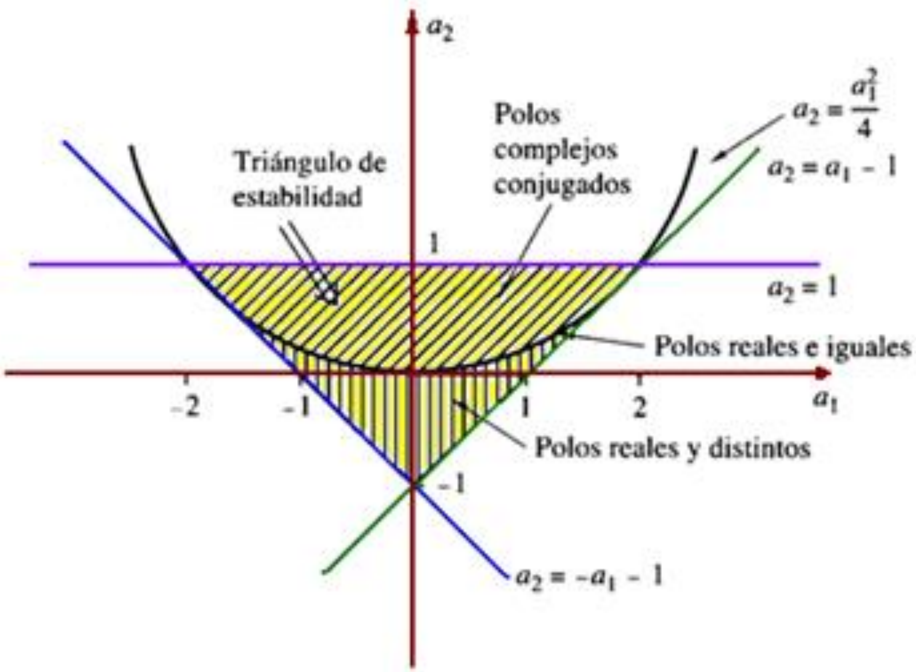
humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

- **Relación polos-coeficientes …**
  - Estas ecuaciones definen un triángulo en el plano de los coeficientes (a_1, a_2)
  - La ubicación relativa a la parábola $a_2 = \frac{{a_1}^2}{4}$ caracteriza los polos:
    - **Debajo**: $({a_1}^2 > 4\, a_2)$
      - Polos reales y diferentes
    - **Sobre**: $({a_1}^2 = 4\, a_2)$
      - Polos reales e iguales
    - **Encima**: $({a_1}^2 < 4\, a_2)$
      - Polos complejos conjugados



Condición de Estabilidad

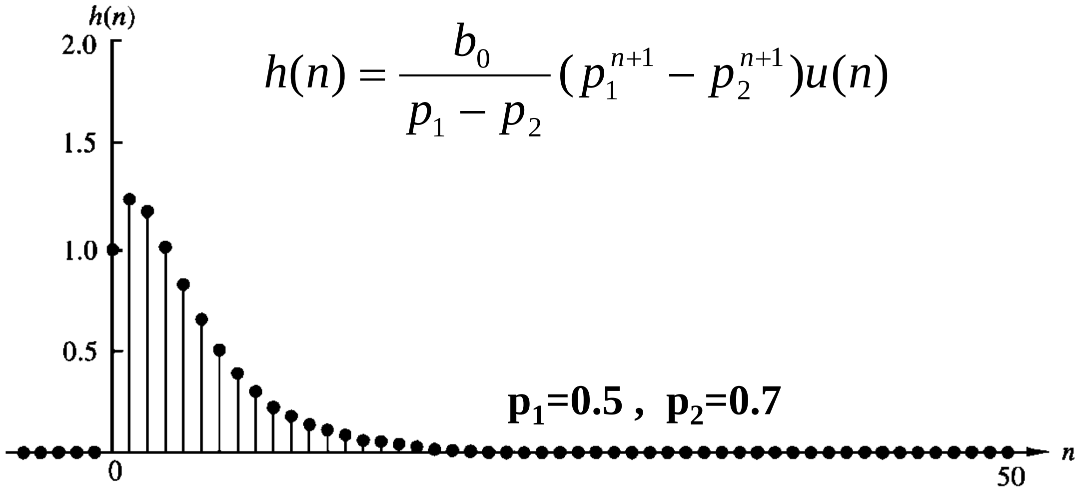
- **Sistema estable**: si y sólo si el punto (a_1, a_2) se encuentra dentro del triángulo de estabilidad.
- El triángulo de estabilidad permite:
  - Seleccionar parámetros del sistema
  - Determinar estabilidad



Respuesta de Sistemas de 2° Orden

- **Respuesta con Polos reales y distintos:** $\boldsymbol{p_1 \neq p_2}$
  - Se tiene: $H(z) = \dfrac{A_1}{1 - p_1 z^{-1}} + \dfrac{A_2}{1 - p_2 z^{-1}}$ $\quad$ donde $A_1 = \dfrac{b_0 p_1}{p_1 - p_2}$ $\quad A_2 = \dfrac{-b_0 p_2}{p_1 - p_2}$
  - La respuesta al impulso unitario está dada por la diferencia entre dos exponenciales:

$$h(n) = \frac{b_0}{p_1 - p_2}\left(p_1^{n+1} - p_2^{n+1}\right)u(n)$$



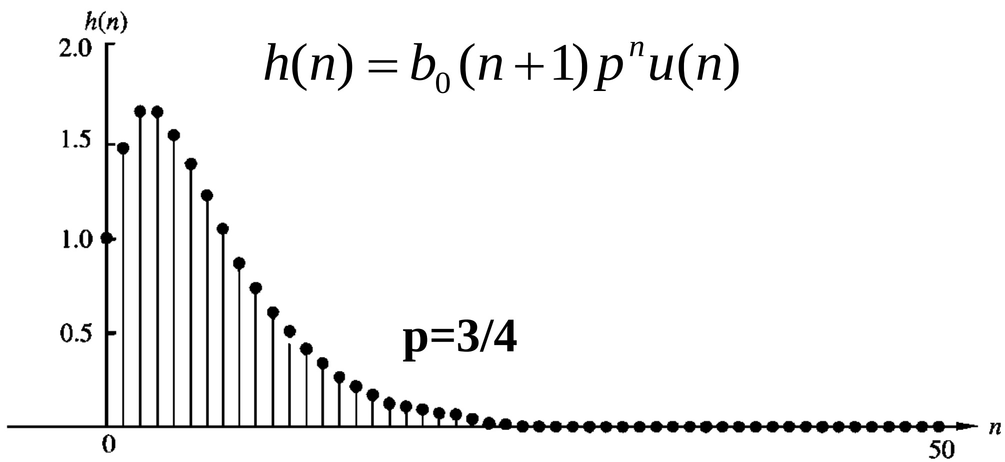
Respuesta de Sistemas de 2° Orden

- **Respuesta con Polos reales e iguales:** $\boldsymbol{p_1 = p_2 = p = -\frac{a_1}{2}}$

  - Se tiene: $$H(z) = \frac{b_0}{(1 - pz^{-1})^2}$$

  - La respuesta al impulso unitario está dada por el producto de una rampa y una exponencial (decreciente $si\ |p| < 1$),

$$h(n) = b_0 (n+1) p^n u(n)$$



humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

- **Respuesta con Polos complejos:** $\boldsymbol{p_1 = r\, e^{j\, w_0}, p_2 = r\, e^{-j\, w_0}}$

  - Se tiene:

$$H(z) = \frac{A}{1 - p_1 z^{-1}} + \frac{A^*}{1 - p^* z^{-1}}$$

$$= \frac{A}{1 - re^{jw_0} z^{-1}} + \frac{A^*}{1 - re^{-jw_0} z^{-1}}$$

  - Donde,
    - $0 < w_0 < \pi$
    - $a_1 = -2\, r\, cos(w_0),\, a_2 = r^2$
    - $w_0 \rightarrow$ frecuencia de oscilación
    - $r \rightarrow$ rapidez de envolvente
    - 0

Respuesta de Sistemas de 2° Orden

- **Respuesta con Polos complejos…:** $p_1 = r\, e^{j\, w_0}, p_2 = r\, e^{-j\, w_0}$

  - La respuesta al impulso unitario está dada por una señal sinusoidal multiplicada por una exponencial.

$$h(n) = \frac{b_0 r^n}{sen w_0} sen\left[(n+1)w_0\right]u(n)$$