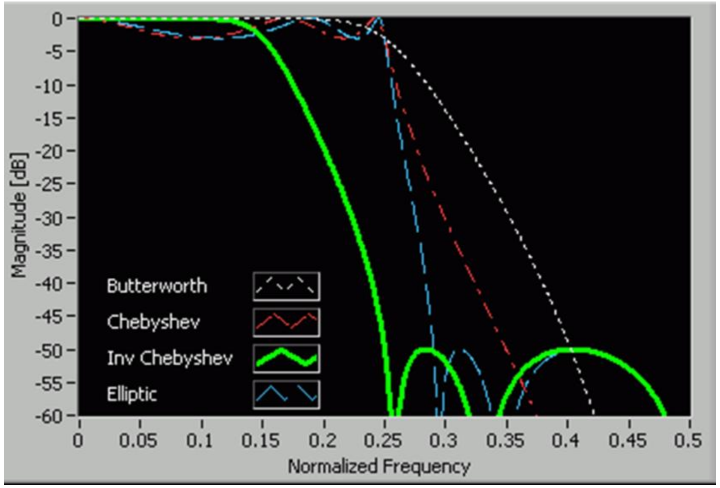
Diseño de Filtros IIR

Introducción

- La **respuesta en frecuencia** $H(\omega)$ de un filtro IIR es una *función racional*, es decir, la razón entre dos polinomios de grado finito en $e^{j\omega}$ de la forma,

$$H(\omega) = e^{-j\omega N_0} \; \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k \; e^{-j\omega k}}{\sum_{1}^{N} a_k \, e^{-j\omega k}}$$



- donde:

  N_0 unidades de desplazamiento de $h(n)$

  a_k y b_k coeficientes del filtro

  N es el orden del filtro y generalmente $N \geq M$.

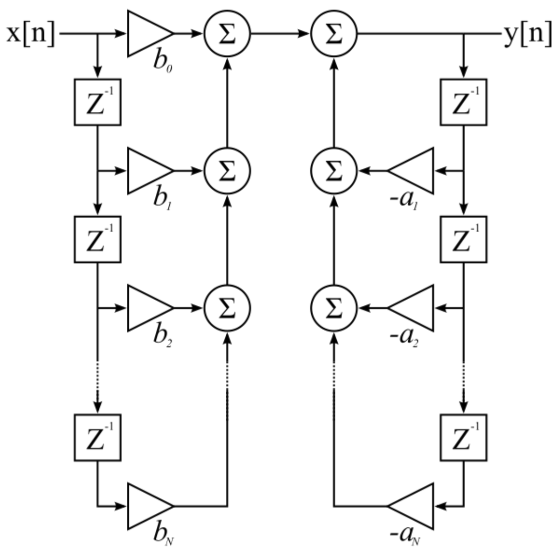
  $h(n) \neq 0$ para $N_0 \leq n \leq \infty$.

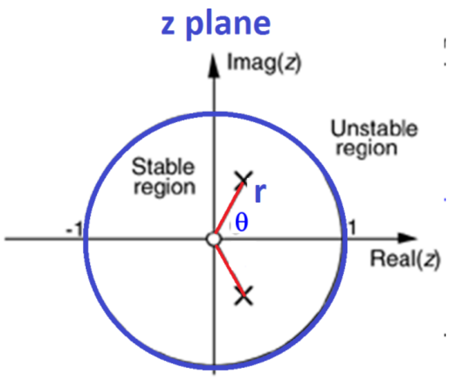
- **Introducción…**

  - La **función de transferencia** $H(z)$ de un filtro IIR es racional y está dada por:

$$H(z) = H(w)|_{e^{jw}=z} = z^{-N_0} \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k \ z^{-k}}{\sum_{1}^{N} a_k \ z^{-k}}$$

  - Los filtros IIR, a diferencia de los FIR, pueden ser inestables por la existencia de polos.





Diseño de Filtros IIR

- **Introducción…**

  - El diseño de un filtro IIR busca determinar la función $h(n)$, $H(z)$, $H(w)$ o la **ecuación de diferencia** que mejor se aproxime a las especificaciones de diseño.

    - Se logra calculando los coeficientes a_k y b_k óptimos según un criterio establecido.

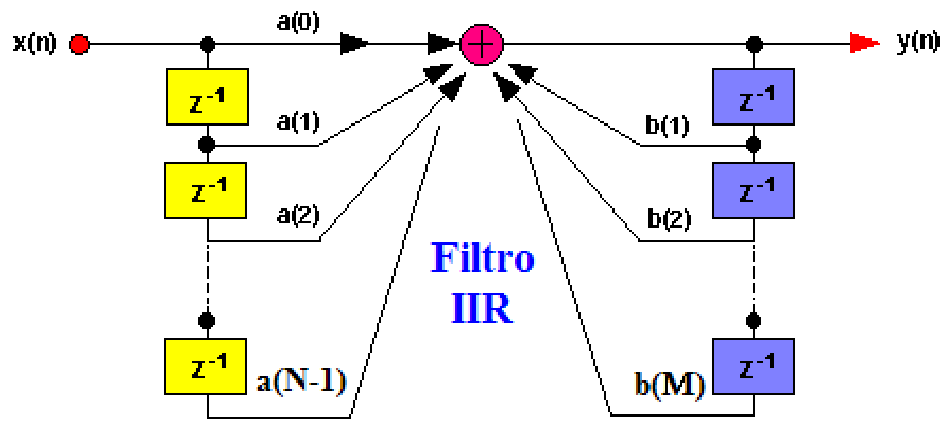
    - El orden del filtro N generalmente se fija desde un principio, pero también puede considerarse como un parámetro.

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Diseño de Filtros IIR

Características de Filtros IIR

- No puede utilizarse la convolución para implementar filtros IIR
  - Se recurre a las ecuaciones de diferencia.
- Los filtros IIR emplean realimentación
  - Necesitan almacenar muestras de la salida para calcular un nuevo valor.

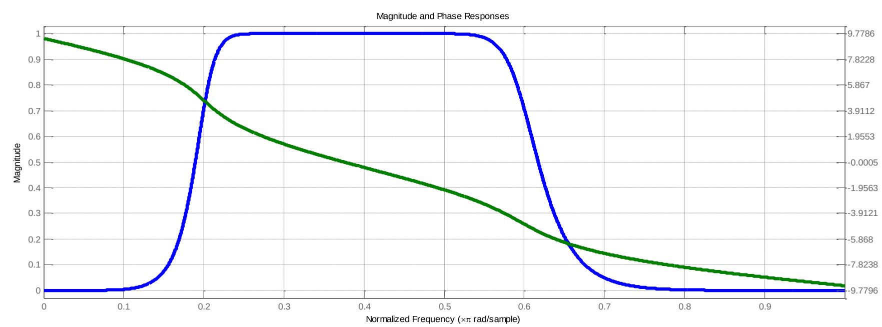


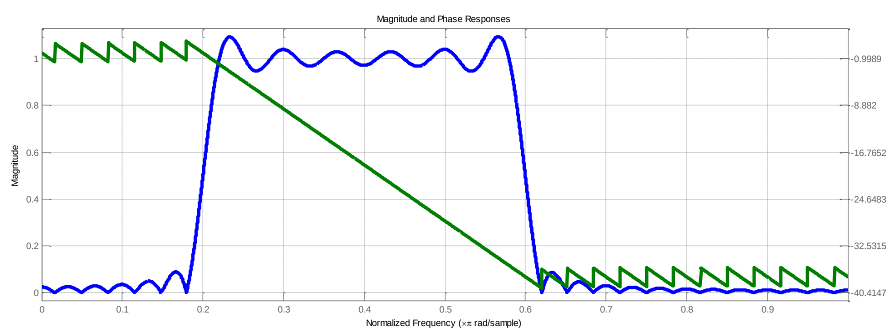
$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} a(k)\,x(n-k) + \sum_{k=1}^{M} b(k)\,y(n-k)$$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Diseño de Filtros IIR

- **Características de Filtros IIR …**
  - **No es posible** diseñar filtros IIR causales de **fase lineal**.
    - Para aproximar una fase lineal se puede utilizar la técnica de filtrado *forward-backward*, para compensar la fase.

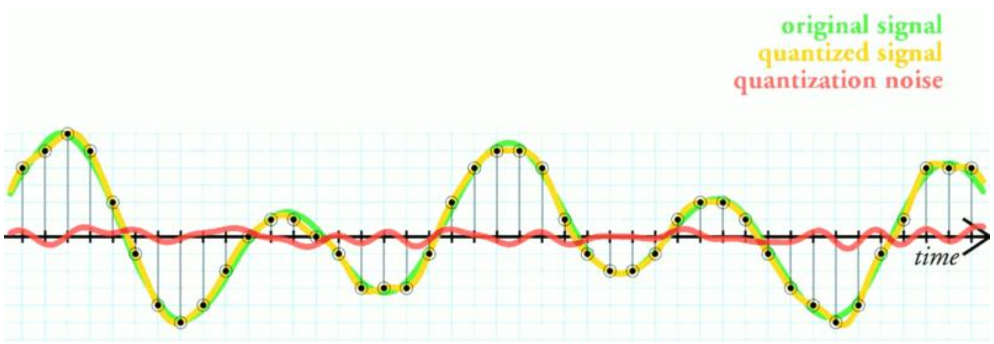


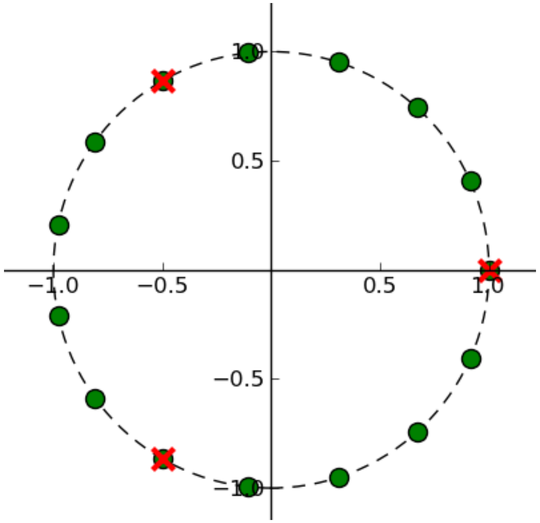


Diseño de Filtros IIR

Características de Filtros IIR …

- El **ruido de la cuantización** en los coeficientes puede afectar severamente la respuesta y estabilidad del filtro.
  - Puede *distorsionar la posición* de los polos y desplazarlos cerca o sobre el círculo unitario del plano z.





- **Características de Filtros IIR…**

  - Los filtros IIR pueden alcanzar las especificaciones de diseño con ordenes relativamente bajos (4 a 6 polos)
  - Los filtros IIR se obtienen comúnmente a partir de fórmulas de diseño en forma cerrada correspondientes a filtros clásicos.

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Diseño de Filtros IIR

- **Características de Filtros IIR…**

  - Las características de ruido de un filtro IIR deben tenerse muy presentes durante la implementación, especialmente en aritmética de punto fijo.

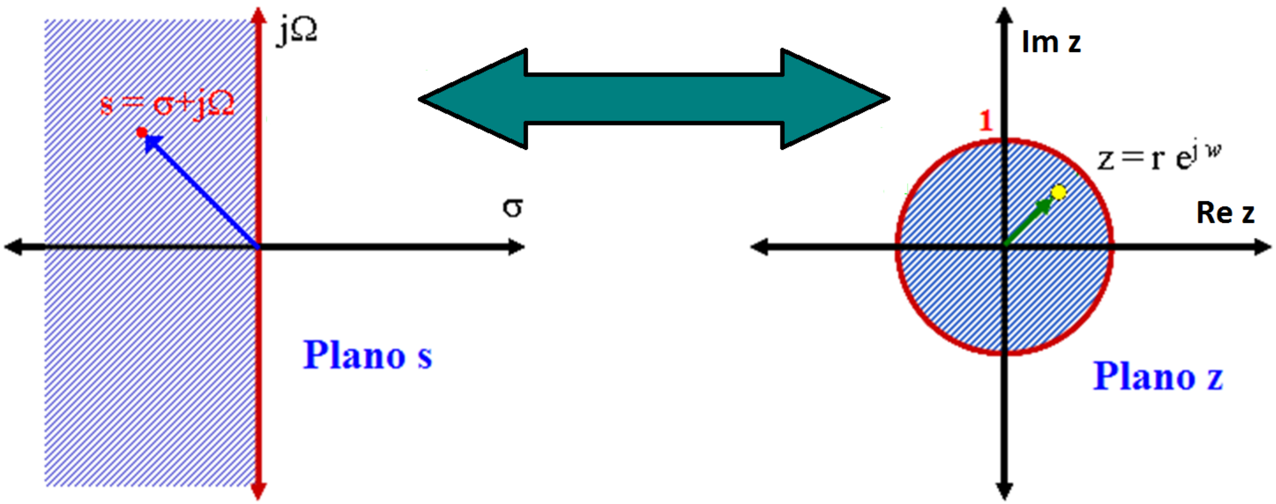
    - La cuantización de los coeficientes degrada la respuesta del filtro (se aleja de la calculada con software de alta precisión).

    - La sensibilidad al ruido de redondeo puede ser amplificada por las mallas de realimentación en el filtro.

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Introducción

- Técnica basada en convertir un filtro analógico $H(s)$ en un filtro digital $H(z)$.

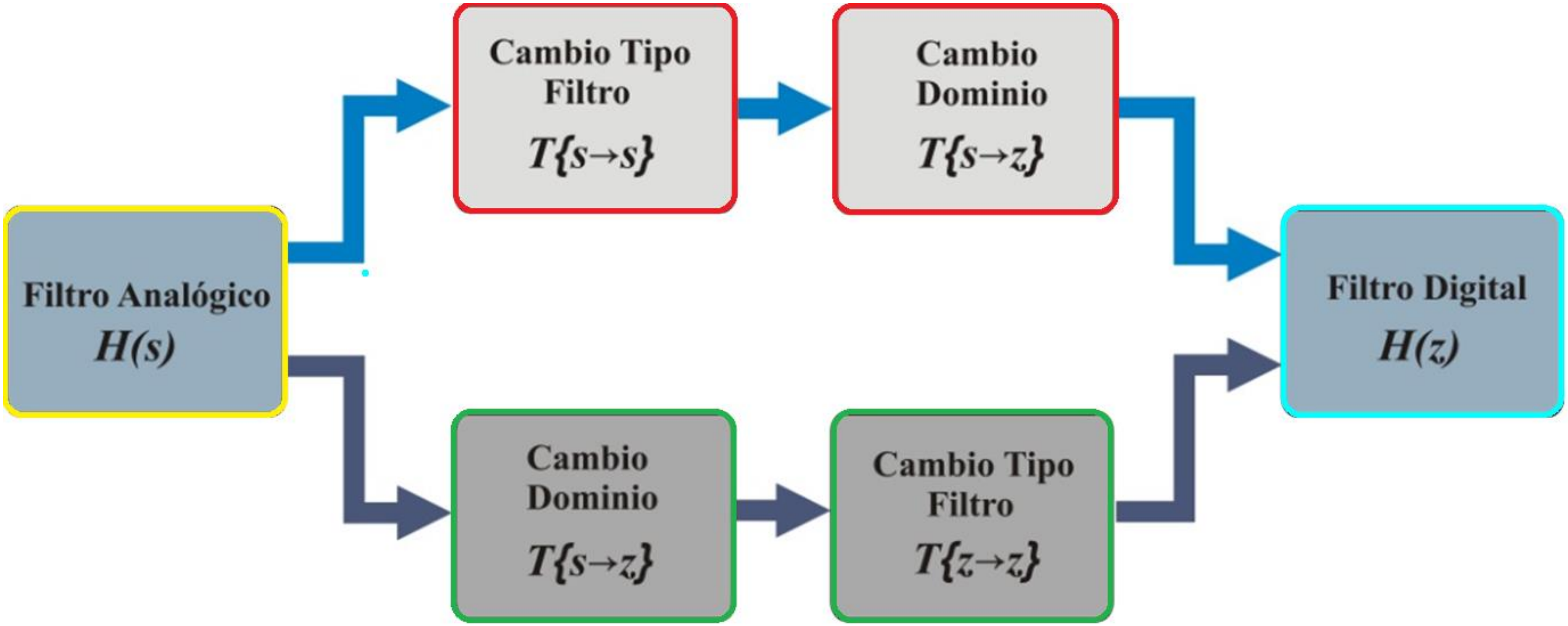


Introducción

- **Ventajas**:
  - Amplia literatura sobre diseño filtros analógicos con fórmulas cerradas.
  - Disponibilidad de tablas de transformaciones entre dominios analógicos y digital y tipos de filtros.
    - $T\{s \Rightarrow z\}$
    - $T\{s \Rightarrow s\}$
    - $T\{z \Rightarrow z\}$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

- **Introducción …**
  - Modalidades de diseño



- **Introducción …**
  - Técnica adecuada para obtener respuesta en frecuencia de amplitud casi constante en las bandas de paso y de rechazo.
  - Técnica no-adecuada para respuestas en frecuencia de formas arbitrarias.
    - Las técnicas de optimización numérica si son adecuadas.
  - Diseño con especificaciones de magnitud y fase arbitrarias es muy difícil.
    - No produce soluciones que cumplan todos los requerimientos de diseño.

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Introducción …

- Cada una de las representaciones de un filtro analógico conducen a métodos para convertirlo al dominio digital.
  - Respuesta Impulsional $h(t)$
  - Ecuación diferencial $y(t)$
  - Función de Transferencia $H(s)$
  - Respuesta en Frecuencia $H(\Omega)$

- **Representación de filtros analógicos**

  - Mediante la ***función de transferencia*** $H_a(s)$

$$H_a(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\ e^{-st}\,dt$$

  - ó

$$H_a(s) = \frac{\sum_{k=0}^{M} \beta_k\, s^k}{\sum_{k=0}^{N} \alpha_k\, s^k}$$

    - donde α_k y β_k son los coeficientes del filtro.

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

- **Representación de filtros analógicos…**

  - Mediante la ***Respuesta Impulsional*** $h(t)$

$$h(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} H_a(s) \; e^{st} \, dt$$

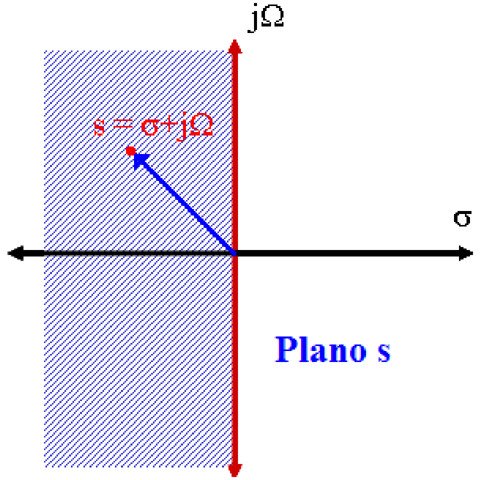
  - Mediante una ***Ecuación Diferencial*** Lineal con Coeficientes Constantes,

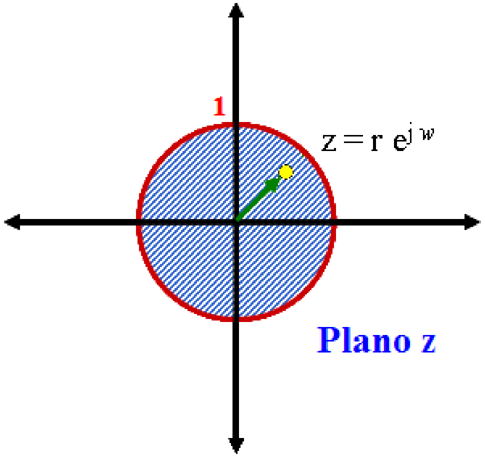
$$\sum_{k=0}^{N} \alpha_k \frac{\partial^k y(t)}{\partial t^k} = \sum_{k=0}^{M} \beta_k \frac{\partial^k x(t)}{\partial t^k}$$

donde $x(t)$ y $y(t)$ indican señal de entrada y de salida del filtro.

- **Procedimiento de Conversión Análogo-Digital**

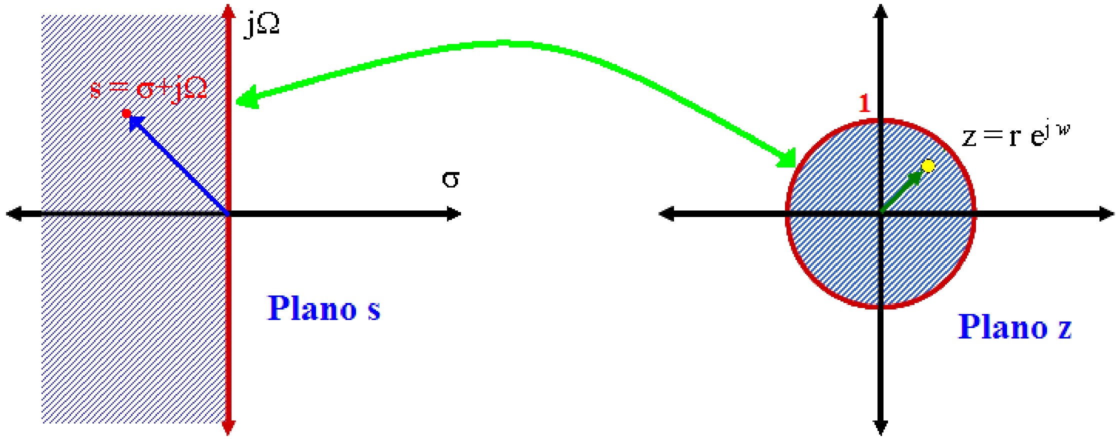
  - **Conceptos Claves**
    - Un sistema analógico $H(s)$ LTI es estable si todos sus polos yacen en la mitad izquierda del plano s.
    - Un sistema discreto $H(z)$ LTI es estable si todos sus polos yacen dentro del círculo unitario del plano z.





Procedimiento de Conversión…

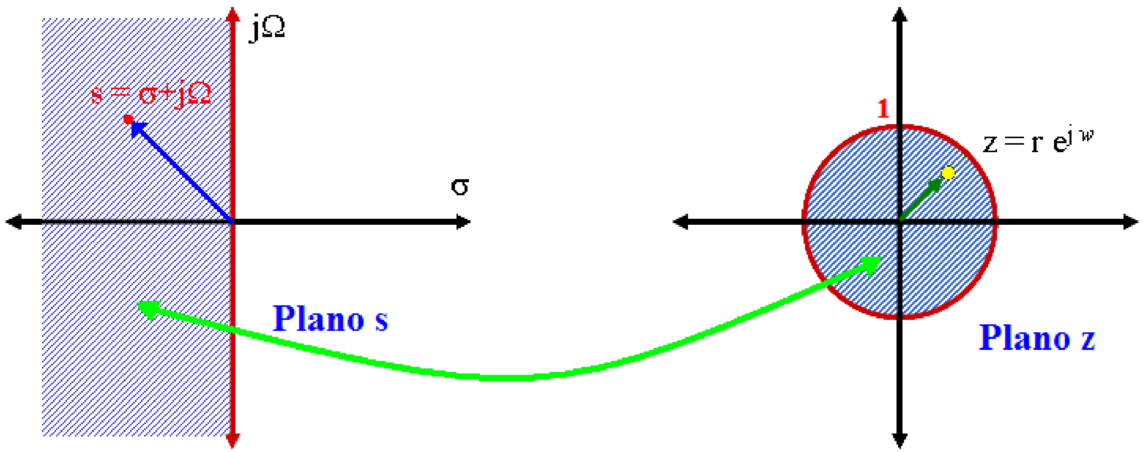
- La **técnica de conversión es efectiva** si:
  - El eje $j\Omega$ en el plano s se corresponde con la circunferencia unidad en el plano z.



  - Garantiza relación directa entre variables de frecuencia !!: $\Omega \Leftrightarrow \omega$.

■Procedimiento de Conversión…

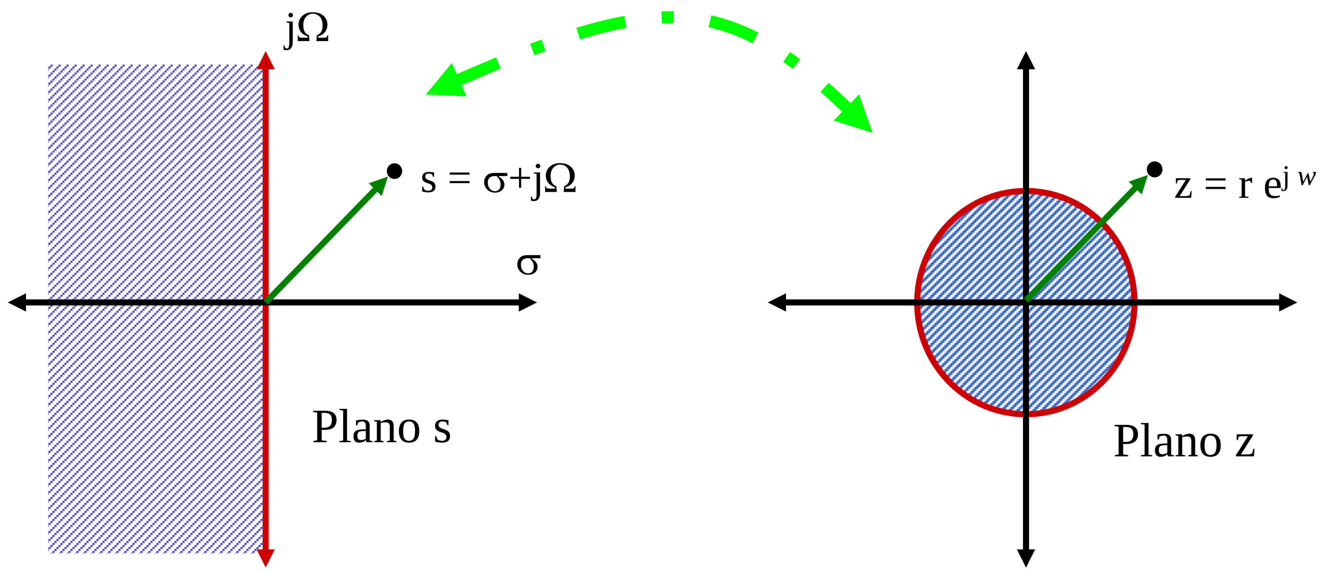
- La **técnica de conversión es efectiva** si:
  - El semiplano **izquierdo** del plano s se corresponde con el **interior** de la circunferencia en el plano z.



  - Garantiza la estabilidad del filtro digital obtenido!!

Procedimiento de Conversión…

- La **técnica de conversión es efectiva** si:
  - El semiplano **derecho** del plano s se corresponde con el **exterior** de la circunferencia en el plano z.

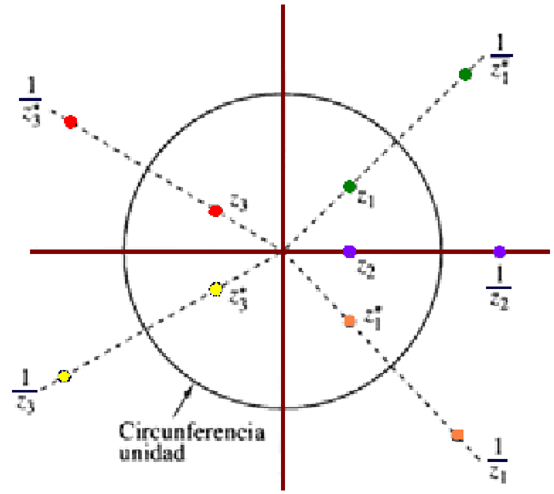


humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Procedimiento de Conversión…

- Los filtros IIR estables y físicamente realizables, no pueden tener fase lineal, puesto que la condición de fase lineal establece que:

$$H(z) = \pm z^{-N} H(z^{-1})$$

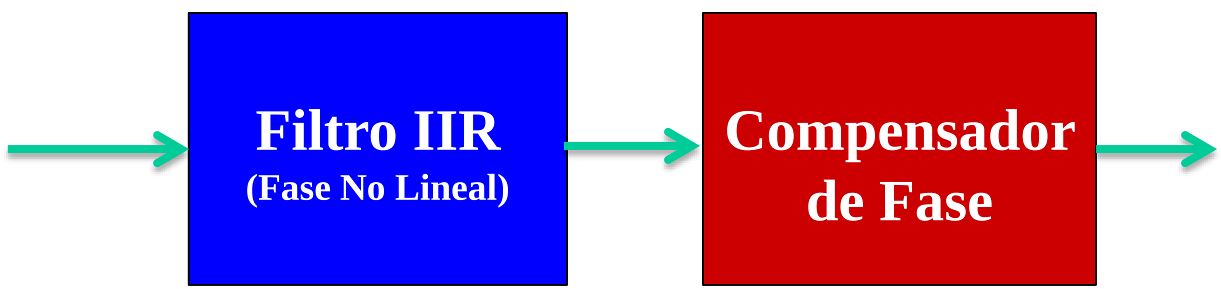


- **Implicación:** por cada polo dentro de la circunferencia hay un polo especular por fuera.

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Procedimiento de Conversión…

- Omitiendo la restricción de realizabilidad física, computacionalmente es posible, en principio, obtener un filtro IIR de fase lineal.
  - Este método presenta un costo de cómputo alto.
  - No proporciona ventajas sobre los filtros FIR de fase lineal.



■Observaciones

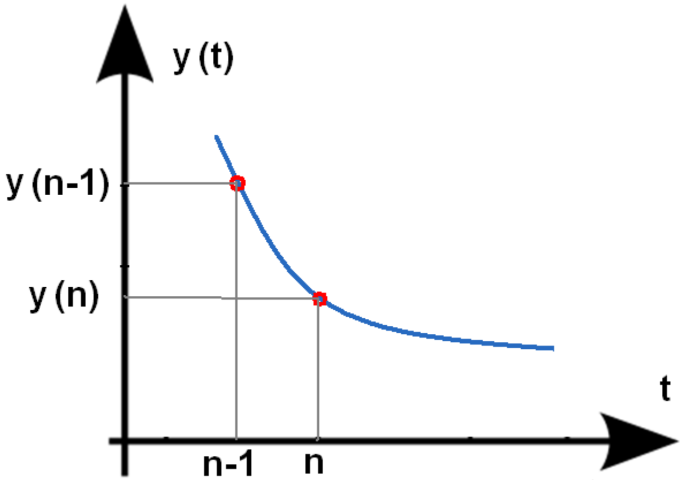
- En el diseño de filtros IIR se especifican las características del filtro sólo para $H(\omega)$, y se aceptan las características de $\varphi(\omega)$ obtenidas.
  - $H(\omega)$ y $\varphi(\omega)$ en un filtro causal son interdependientes y no se pueden especificar independientemente.
  - Dada $H(\omega)$ (parte real), su $\varphi(\omega)$ (parte imaginaria) se determina a través de la *transformada de Hilbert discreta*.

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Procedimiento

- Busca aproximar la ecuación diferencial por una ecuación en diferencias equivalente.

- La derivada en el tiempo $t = nT$, se sustituye por la *diferencia hacia atrás*:



$$\left.\frac{\partial y(t)}{\partial t}\right|_{t=nT} = \frac{y(nT) - y(nT-T)}{T} = \frac{y(n) - y(n-1)}{T}$$

Filtros IIR :Aproximación de Derivadas

- **Procedimiento…**
  - La parte analógica es un derivador:

$$y(t) \longrightarrow \boxed{H(s) = s} \longrightarrow \frac{\partial y(t)}{\partial t}$$

  - La parte discreta es un diferenciador:

$$y(n) \longrightarrow \boxed{H(z) = \frac{1 - z^{-1}}{T}} \longrightarrow \frac{y(n) - y(n-1)}{T}$$

  - Por lo tanto, la transformación queda determinada por:

$$\boldsymbol{s = \frac{1 - z^{-1}}{T}}$$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Filtros IIR :Aproximación de Derivadas

Procedimiento…

- Se deduce que para la $k-ésima$ derivada de $y(t)$ resulta la relación:

$$s^k = \left(\frac{1-z^{-1}}{T}\right)^k$$

- Para el filtro analógico con función de transferencia $H_a(s)$ caracterizado por la ecuación diferencial,

$$\sum_{k=0}^{N} \alpha_k \frac{\partial^k y(t)}{\partial t^k} = \sum_{k=0}^{M} \beta_k \frac{\partial^k x(t)}{\partial t^k}$$

La función H(z) del filtro IIR digital se obtiene al aplicar,

$$H(z) = H_a(s)\big|_{s=(1-z^{-1})/T}$$

■ Correspondencia plano *s* ↔ plano *z*

- La relación entre s y z obtenida anteriormente puede reescribirse como,

$$z = \frac{1}{1 - sT}$$

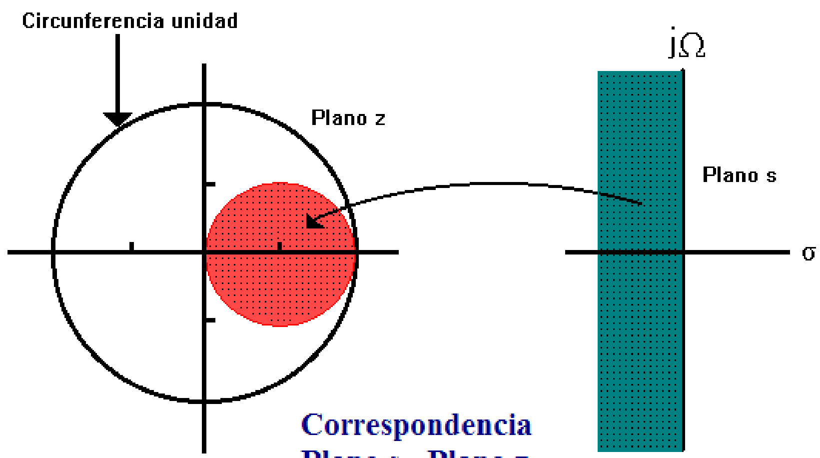
con $s = j\Omega$ se obtiene:

$$z = \frac{1}{1 + \Omega^2 T^2} + j\frac{\Omega T}{1 + \Omega^2 T^2}$$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

■Correspondencia plano *s* ↔ plano *z*….

- Cuando Ω varía desde −∞ hasta +∞,
  - z varía dentro de un círculo de radio ½ con centro en ½.



Correspondencia
Plano s - Plano z

- Correspondencia estable y restringida a filtros paso-bajo y paso-banda con frecuencias resonantes relativamente pequeñas.
  - No es posible convertir un paso-alto analógico en uno paso-alto digital.

Ejemplo

- Convertir el filtro **paso-banda** analógico con función de transferencia,

$$H_a(s) = \frac{1}{(s+0.1)^2 + 9}$$

a un filtro IIR digital usando la técnica de Aproximación de Derivadas.

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Solución

- Utilizando la sustitución $s^k = \left(\frac{1-z^{-1}}{T}\right)^k$ en $H(s)$ se obtiene,

$$H(z) = \frac{1}{\left(\frac{1-z^{-1}}{T} + 0.1\right)^2 + 9} = \frac{T^2/\left(1+0.2T+9.01T^2\right)}{1 - \frac{2(1+0.1T)}{1+0.2T+9.01T^2} z^{-1} + \frac{1}{1+0.2T+9.01T^2} z^{-2}}$$

- $H(z)$ tiene forma de un **resonador** si T se selecciona suficientemente pequeño $(T \le 0.1)$ → polos estén cerca de la circunferencia unidad.
  - Si $T = 0.1$, los polos son: $z_{p_{1,2}} = 0.91 \pm j0.27 = 0.95e^{\pm j16.54º}$
  - Si $T = 0.01$, los polos son: $z_{p_{1,2}} = 0.99 \pm j0.03 = 0.99e^{\pm j1.72º}$

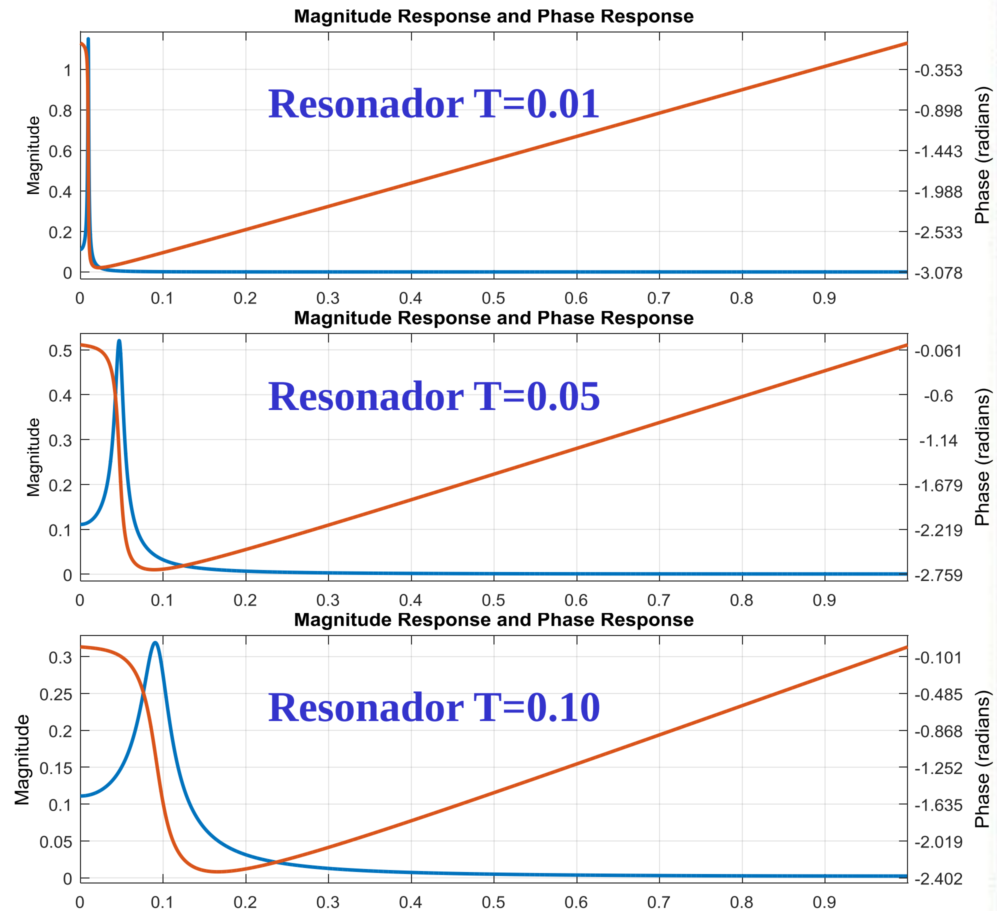
humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Filtros IIR: Aproximación de Derivadas

■ Solución …

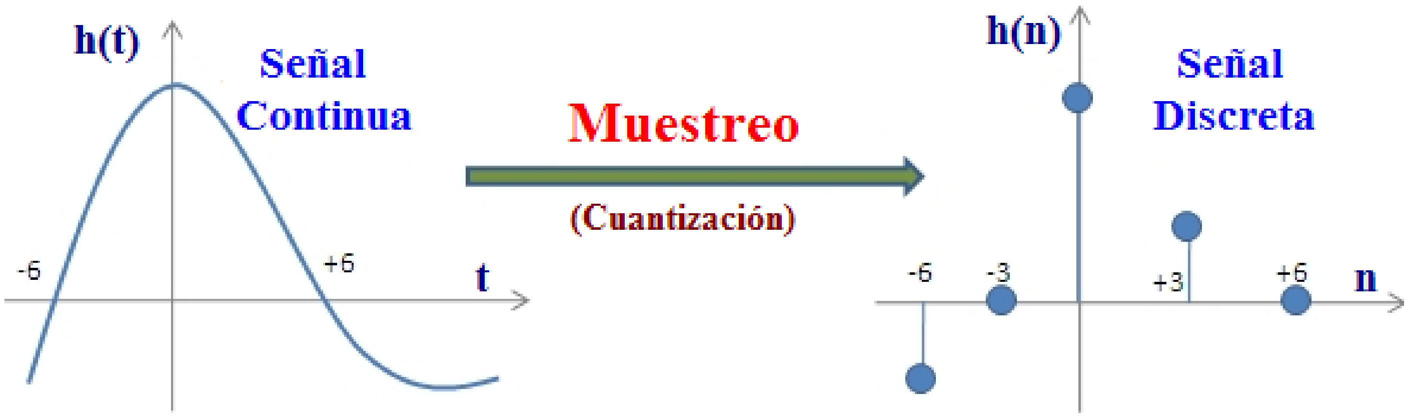
Aproximacion_Derivada_IIR.m

```
T= 0.01; T2=(T^2); D=(1+0.2*T+9.01*T2);
%Polinomio Numerador
b0= T2/D ; b1=0;  b2=0;
b= [b0  b1  b2];
%Polinomio Denominador
a0=1;  a1=-2*(1+0.1*T)/D;  a2=1/D;
a=[a0  a1  a2];
%Polos
AngPolos=angle(roots(a))*180/pi
MagPolos=abs(roots(a))
%Graficación
fvtool(b,a)
```



■Introducción

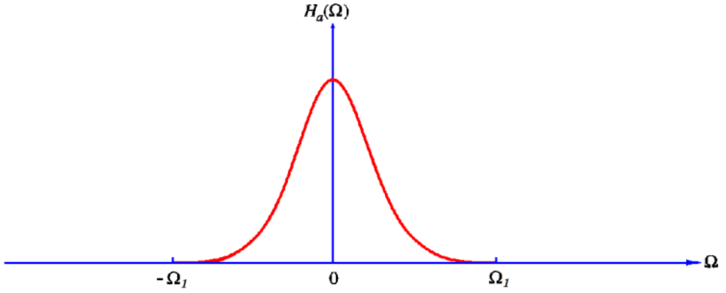
- Consiste en diseñar un filtro IIR digital con un $h(n)$ que sea la versión muestreada de $h_a(t)$ del filtro analógico.



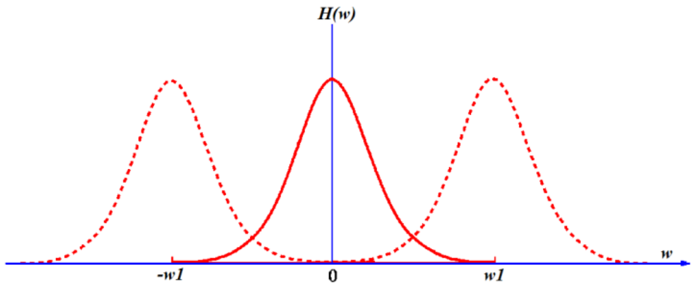
- Es decir, $h(n) = h_a(t = nT)$ donde T es el periodo de muestreo.

Introducción

- Cuando una señal análoga $h_a(t)$ con espectro $H_a(\Omega)$ se muestrea a $F_s = 1/T$:



- El espectro de la señal muestreada $h(n) = h_a(nT)$ es la **repetición** del espectro $H_a(\Omega)$ escalado por F_s y con periodo F_s:

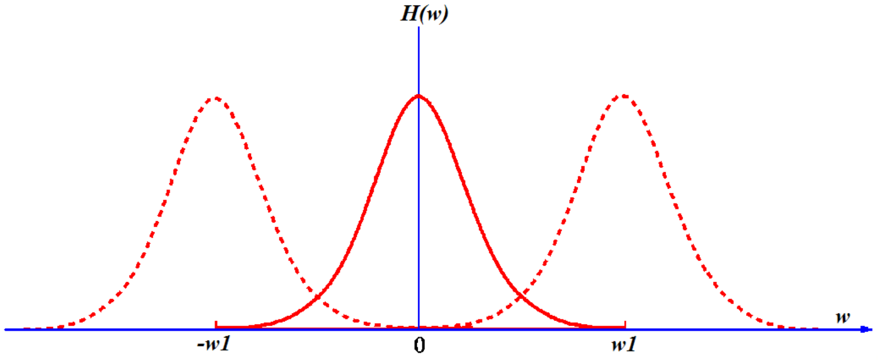


Introducción …

- El espectro $H(\omega)$ de la señal muestreada $h(n)$ queda determinado por:

$$H(w) = F_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_a\left[(w - 2\pi k)F_s\right] \quad ó$$

$$H(\Omega T) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_a\left(\Omega - \frac{2\pi k}{T}\right) \quad con \;\; \Omega = \frac{w}{T}$$



- **Introducción…**

  - $H(\omega)$ tendrá las características de respuesta en frecuencia del correspondiente filtro analógico si T es suficientemente pequeño para evitar al máximo el aliasing.

  - El aliasing ocurre si F_s es menor que dos veces la frecuencia más alta contenida en $X_a(F)$.

  - Método inapropiado para el diseño de filtros paso-bajo, por el traslape de las bandas en alta frecuencia.

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

■ Correspondencia plano *s* y plano *z*

- La correspondencia entre los planos s y z que *genera el proceso de muestreado* se obtiene a partir de la generalización de la relación entre la **T. z** de $h(n)$ y la **T. s** de $h_a(t)$, dada por $\boldsymbol{z = e^{sT}}$

$$H(z)\big|_{z=e^{sT}} = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} H_a\left(s - j\frac{2\pi k}{T}\right) \qquad donde:$$

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n) z^{-n} \qquad y \qquad H(z)\big|_{z=e^{sT}} = \sum_{n=0}^{\infty} h(n) e^{-sTn}$$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Correspondencia plano *s* ↔ plano *z*

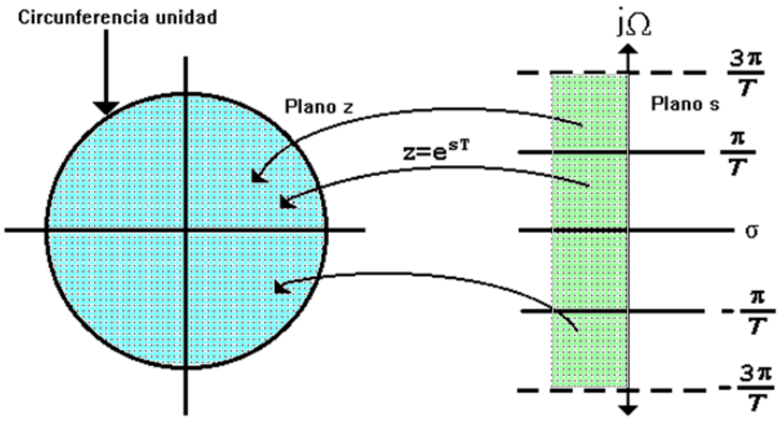
- Al sustituir $s = \sigma + j\Omega$ y $z = re^{jw}$ en $z = e^{sT}$ llega a:

$$re^{jw} = e^{\sigma T} e^{j\Omega T} \quad \text{donde} \quad r = e^{\sigma T} \quad \text{y} \quad w = \Omega T$$

- Para $\sigma < 0$ se tiene $0 < r < 1$
  - Semiplano izquierdo de s $\Rightarrow$ interior de la circunferencia unidad en el plano z.
- Para $\sigma > 0$ se tiene $r > 1$.
  - Semiplano derecho de s $\Rightarrow$ exterior de la circunferencia unidad en el plano z.
- Cuando $\sigma = 0$ se tiene $r = 1$.
  - Eje $j\Omega \Rightarrow$ circunferencia unidad en el plano z.

Correspondencia plano $s \leftrightarrow$ plano z…

- La correspondencia del eje $j\,\Omega$ con el círculo unitario **no es uno a uno**.



- Al intervalo $-\pi \leq w \leq \pi$ le corresponde $(2k-1)\,\pi\,/T \leq \Omega \leq (2k+1)\,\pi\,/T$ cuando k es un entero..
- La correspondencia entre frecuencias Ω y w no es inyectiva, lo que refleja el efecto de aliasing debido al muestreo.

■Método de Diseño

- De la expresión $z = e^{S\,T}$ se obtiene $s = (Ln\, z)/T$ la cual no es muy conveniente para obtener la función $H(z)$
- Considerando el caso en que todos los polos son **distintos**, por expansión en facciones parciales:

$$H_a(s) = \sum_{k=1}^{N} \frac{c_k}{s - p_k}$$

- Al aplicar la transformar inversa de Laplace, se llega a:

$$h_a(t) = \sum_{k=1}^{N} c_k\ e^{p_k\,t} \quad , \qquad t \geq 0$$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

PSI Percepción y Sistemas Inteligentes

■Método de Diseño…

- Al muestrear $h_a(t)$ periódicamente en $t = nT$, se llega a:

$$h(n) = h_a(t) = \sum_{k=1}^{N} c_k \; e^{p_k nT} , \qquad n \geq 0$$

- Aplicando Transformada z,

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n) z^{-n} = \sum_{k=1}^{N} c_k \sum_{n=0}^{\infty} \left(e^{p_k T} z^{-1} \right)^n$$

- Si $p_k < 0$, la sumatoria interna converge a,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(e^{p_k T} z^{-1} \right)^n = \frac{1}{1 - e^{p_k T} z^{-1}}$$

Método de diseño…

- Por lo tanto, el filtro digital es:

$$H(z) = \sum_{k=1}^{N} \frac{c_k}{1 - e^{p_k T} z^{-1}}$$

- **Observaciones:**
  - Los polos del filtro digital se localizan en $\boldsymbol{z_k = e^{p_k T}}$, $k = 1,2,\dots,N$ y se corresponden con los polos del plano s.
  - Los ceros del filtro no satisfacen esta relación.
  - El método **no se define** mediante la simple correspondencia de puntos dado por $\boldsymbol{z = e^{sT}}$.

- **Ejemplo.** Convierta el filtro analógico dado, en un filtro IIR digital por el método de Invarianza Impulsional.

$$H_a(s) = \frac{s + 0.1}{(s + 0.1)^2 + 9}$$

- **Solución**

  - El filtro $H_a(s)$ tiene :
    - Un cero real en $s = -0.1$
    - Dos polos complejos conjugados en $p_k = -0.1 \pm j3$.

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Solución…

- $H(z)$ se determina directamente a partir de la expansión en fracciones parciales de $H_a(s)$:

$$H_a(s) = \frac{1/2}{s + 0.1 - j3} + \frac{1/2}{s + 0.1 + j3}$$

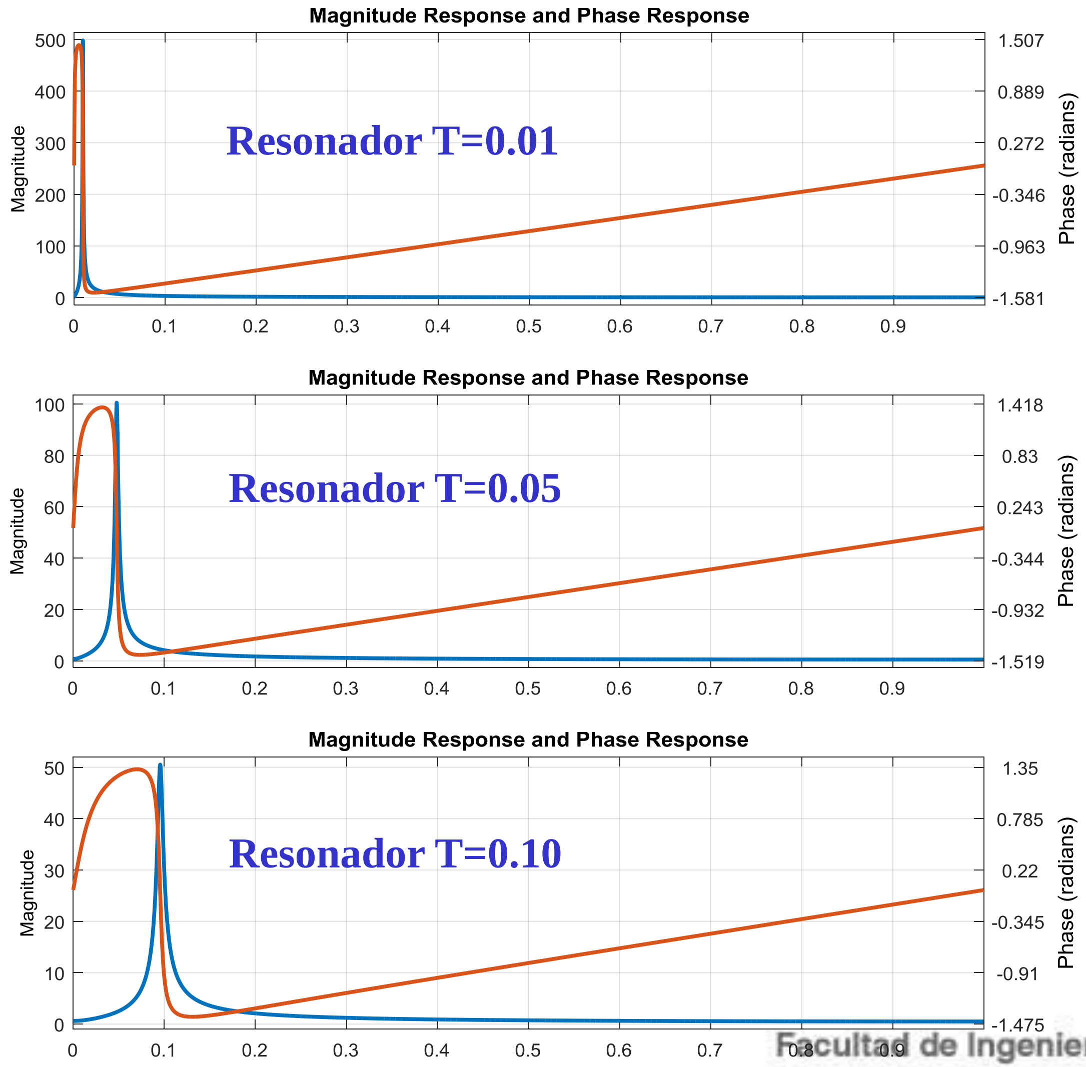
- Sustituyendo polos:

$$H(z) = \frac{1/2}{1 - e^{-0.1T} e^{j3T} z^{-1}} + \frac{1/2}{1 - e^{-0.1T} e^{-j3T} z^{-1}} = \frac{1 - \left(e^{-0.1T} \cos 3T\right) z^{-1}}{1 - \left(2e^{-0.1T} \cos 3T\right) z^{-1} + e^{-0.2T} z^{-1}}$$

■Solución…

ınvarianza_Impulso_IRR.m

```
T= 0.01; D= exp(-0.1*T )* cos(3*T);
%Polinomio Numerador
b0= 1 ; b1=-D;  b2=0;
b= [b0  b1  b2];
%Polinomio Denominador
a0=1;  a1=-2*D;  a2=exp(-0.2*T);
a=[a0  a1  a2];
%Polos
polos=roots(a)
AngPolos=angle(polos)*180/pi
MagPolos=abs(polos)
%freqz(b,a)
fvtool(b,a)
```



Solución…

- $H(z)$ tiene forma de un *resonador* si T se selecciona suficientemente pequeño $(T \leq 0.1)$ → polos estén cerca de la circunferencia unidad.
  - Si $T = 0.1$, los polos son: $z_{p_{1,2}} = 0.95 \pm j0.29 = 0.99e^{\pm j17.19º}$
  - Si $T = 0.01$, los polos son: $z_{p_{1,2}} = 0.99 \pm j0.03 = 0.99e^{\pm j1.72º}$

Observaciones

- Valores pequeños de T minimizan el efecto de aliasing.
- Debido al aliasing, el método de invarianza impulsional es apropiado para el diseño de filtros paso-bajo y paso-banda.

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

- **Introducción**
  - Método que hace corresponder los polos y los ceros de $H_a(s)$ directamente con polos y ceros de $H(z)$
  - La transformación hace corresponder a cada factor $(s-a)$ el factor $(1-e^{aT}\,z^{-1})$, es decir,

$$(s-a) = (1-e^{aT}\,z^{-1})$$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Introducción …

- Por consiguiente, para un filtro analógico con función de transferencia expresada en factores,

$$H_a(s) = \frac{\prod_{k=1}^{M}[s - c_k]}{\prod_{k=1}^{N}[s - p_k]}$$

- la función de transferencia del filtro digital se obtiene como,

$$H(z) = \frac{\prod_{k=1}^{M}[1 - e^{c_k T} z^{-1}]}{\prod_{k=1}^{N}[1 - e^{p_k T} z^{-1}]}$$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Observaciones

- Los **polos** obtenidos son **idénticos** a los **polos** obtenidos con el método de **invarianza impulsional**.
- Los **ceros** son **diferentes**
- T debe escogerse bastante **pequeño** para producir polos y ceros en posiciones equivalentes en el plano z (y evitar el aliasing).

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

- **Ejemplo**
  - Convierta el filtro analógico dado, en un filtro IIR digital por el método de **Transformación z adaptada**.

$$H_a(s) = \frac{s + 0.1}{(s + 0.1)^2 + 9}$$

- **Solución**
  - El filtro $H_a(s)$ tiene :
    - Un cero real en $s = -0.1$
    - Dos polos complejos conjugados en $p_k = -0.1 \pm j3$.

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

- **Solución …**
  - Reescribiendo $H_a(s)$ en factores

$$H_a(s) = \frac{s + 0.1}{(s + 0.1 - j3)(s + 0.1 + j3)}$$

  - $H(z)$ se obtiene al reemplazar cada factor por

$$(s - a) = (1 - e^{aT}\, z^{-1})$$

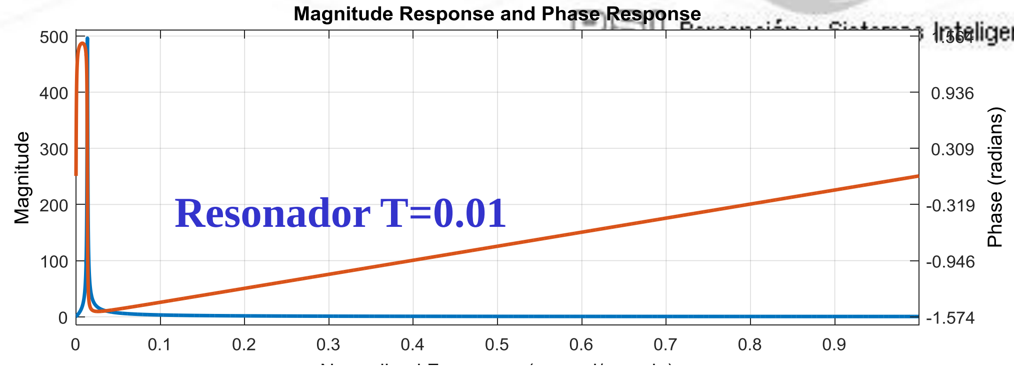
  - Por lo tanto,

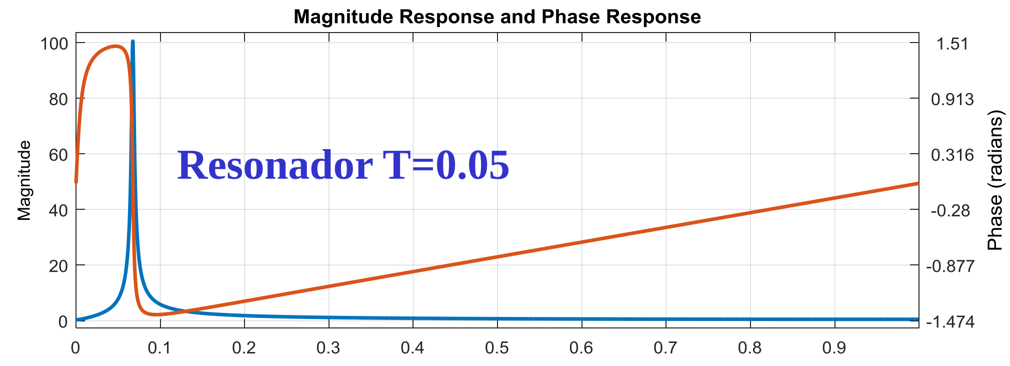
$$H(z) = \frac{(1 - \ e^{-0.1\,T} \ \ z^{-1})}{(1 - \ e^{(-0.1+3j)\,T} \ \ z^{-1})(1 - \ e^{(-0.1-3j)\,T} \ \ z^{-1})}$$

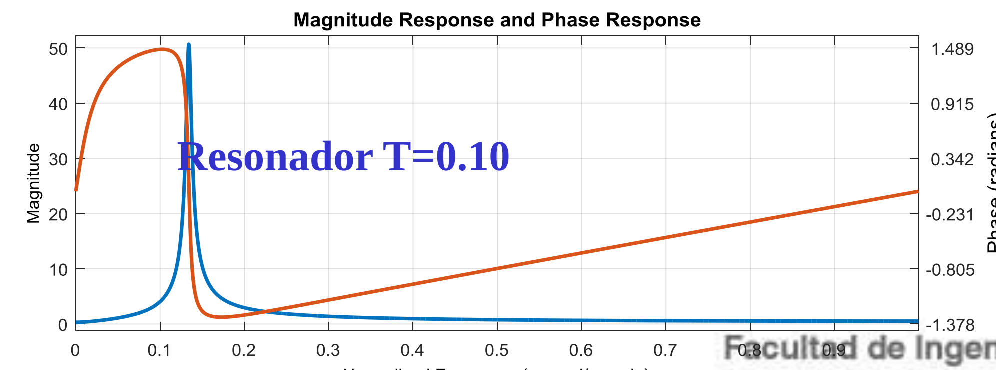
Solución

Transformacion_zAdaptada.m

```
T= 0.01; D= exp(-0.1*T )* cos(3*T);
%Polinomio Numerador
b0= 1 ; b1=-D;  b2=0;
b= [b0  b1  b2];
%Polinomio Denominador
a0=1;  a1=-2*D*cos(3*T);  a2=exp(-0.2*T);
a=[a0  a1  a2];
%Polos
polos=roots(a)
AngPolos=angle(polos)*180/pi
MagPolos=abs(polos)
fvtool(b,a)
```

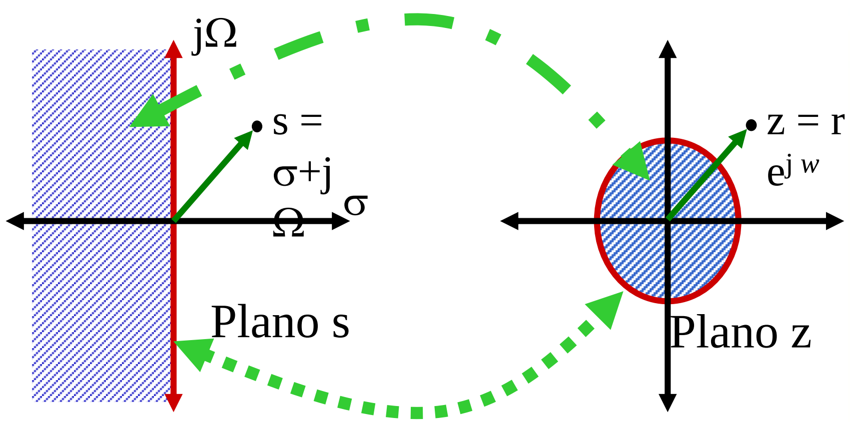






Introducción

- Transforma el eje $j\Omega$ en la circunferencia unidad **sin solapamientos** de frecuencias.
- Semiplano **izquierdo** → **interior** de la circunferencia unidad.
- Semiplano **derecho** → **exterior** de la circunferencia unidad.
- La transformación bilineal permite **diseñar todo** tipo de filtros.



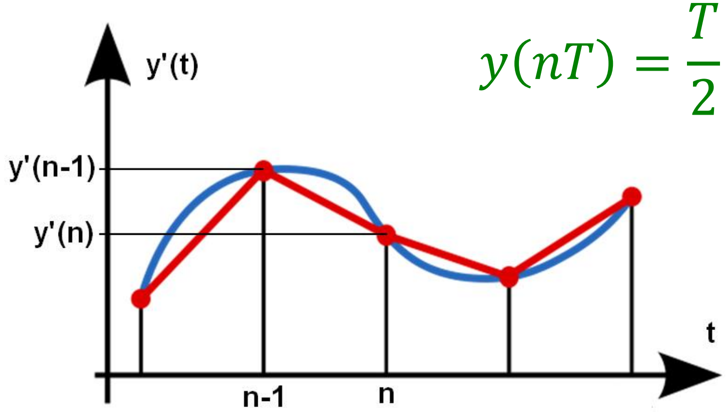
PSI Percepción y Sistemas Inteligentes

Deducción

- La transformación bilineal se puede ligar a la fórmula trapezoidal.
- Al integrar una derivada

$$y(t) = \int_{t_0}^{t} y'(\tau)d\tau + y(t_0)$$

- y aproximarla por la fórmula trapezoidal en $t = nT \ y \ t_0 = nT - T,$ se obtiene,



$$y(nT) = \frac{T}{2}[y'(nT) + y'(nT - T)] + y(nT - T)$$

Deducción…

- La función de transferencia del filtro lineal analógico de orden 1, está dada por:

$$H(s) = \frac{b}{s+a}$$

  - Tiene una ecuación diferencial

$$y'(t) + a\, y(t) = b\, x(t)$$

  - Al evaluarla en $t = nT$, se obtiene:

$$y'(nT) = -a\, y(nT) + b\, x(nT)$$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Deducción…

- Sustituyendo $y'(nT)$ en la **expresión de la derivada** se llega a:

$$\left(1+\frac{aT}{2}\right)y(n)-\left(1-\frac{aT}{2}\right)y(n-1)=\frac{bT}{2}[x(n)+x(n-1)]$$

cuya transformada z es:,

$$\left(1+\frac{aT}{2}\right)Y(z)-\left(1-\frac{aT}{2}\right)z^{-1}Y(z)=\frac{bT}{2}X(z)[1+z^{-1}]$$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Deducción…

- Y su función de transferencia discreta es,

$$H(z) = \frac{b}{\frac{2}{T}\left(\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}\right) + a}$$

- Si se compara con la del filtro analógico,

$$H(s) = \frac{b}{s + a}$$

- Se deduce la correspondencia denominada **transformación bilineal:**

$$s = \frac{2}{T}\left(\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}\right)$$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

■Correspondencia plano s ↔ plano z

- Con $z = r\,e^{jw}$ y $s = \sigma + j\Omega$, la transformación bilineal puede escribirse como:

$$s = \frac{2}{T}\left(\frac{z-1}{z+1}\right) = \frac{2}{T}\left(\frac{r^2-1}{1+r^2+2\,r\cos w} + j\,\frac{2\,r\,sen\,w}{1+r^2+2\,r\cos w}\right)$$

- De donde :

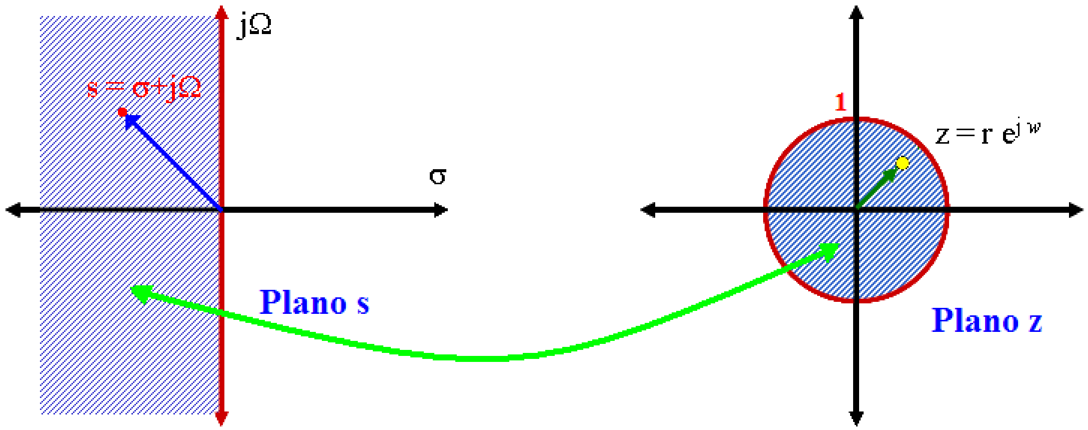
$$\sigma = \frac{2}{T}\left(\frac{r^2-1}{1+r^2+2\,r\cos w}\right)$$
$$\Omega = \frac{2}{T}\left(\frac{2\,r\,sen\,w}{1+r^2+2\,r\cos w}\right)$$

Correspondencia planos s ↔ z …

- $r < 1 \Rightarrow \sigma < 0$

$$\sigma = \frac{2}{T}\left(\frac{r^2 - 1}{1 + r^2 + 2\, r \cos w}\right)$$

  - semiplano **izquierdo** en s se corresponde con el **interior** de la circunferencia unitaria en z.

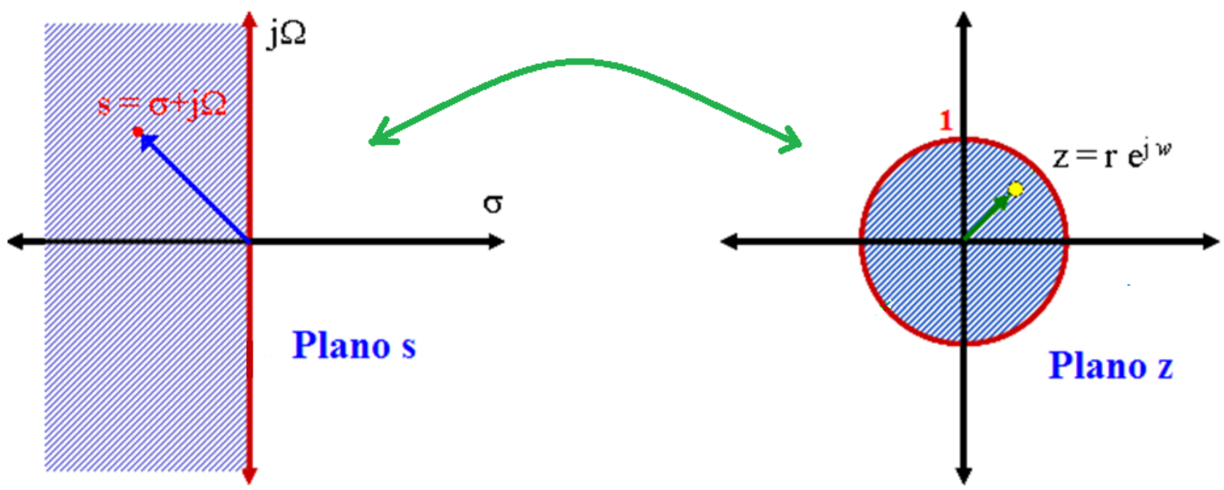


■Correspondencia plano s $\leftrightarrow$ plano z…

- $r > 1 \Rightarrow \sigma > 0$

$$\sigma = \frac{2}{T}\left(\frac{r^2 - 1}{1 + r^2 + 2\, r \cos w}\right)$$

- semiplano **derecho** en s se corresponde con el **exterior** de la circunferencia unitaria en z.



Filtros IIR: Transformación Bilineal

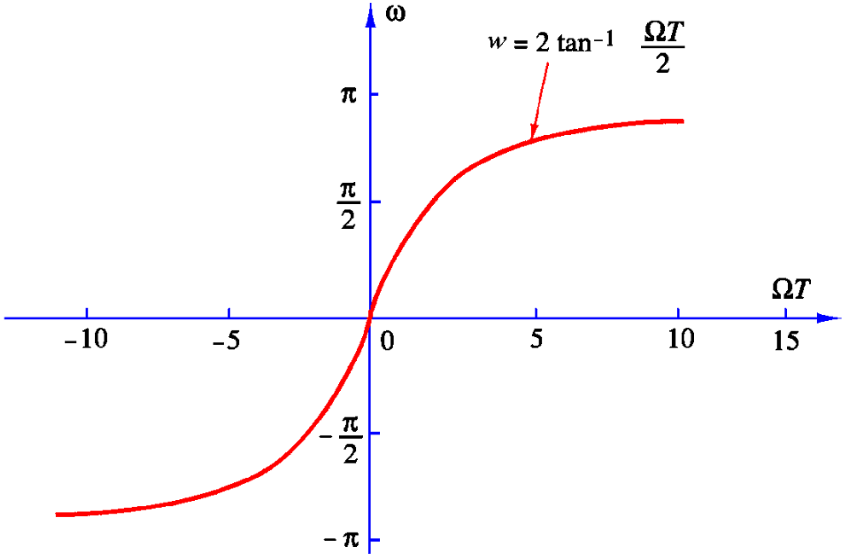
Correspondencia plano s ↔ z…

- r = 1 ⇒ σ = 0:

$$\sigma = \frac{2}{T}\left(\frac{r^2-1}{1+r^2+2\,r\cos\omega}\right)$$

Se tiene,

- $\Omega = \frac{2}{T}\tan\left(\frac{\omega}{2}\right)$
- $\omega = 2\,tan^{-1}\left(\frac{\Omega\,T}{2}\right)$
- **Relación** entre frecuencia análoga Ω y digital ω.



humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Correspondencia plano s $\leftrightarrow$ plano z…

- El rango de $-\infty \leq \Omega \leq \infty$ se corresponde unívocamente con el rango $-\pi \leq \omega \leq \pi$

  - Correspondencia no lineal $\Rightarrow$ compresión o *deformación de frecuencia.*

  - El punto $s = \infty$ corresponde con el punto $z = -1$
  - Un filtro analógico con un cero en $s = \infty$ resulta en un filtro digital con un cero en $z = -1$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

- **Ejemplo 1.** Convertir el filtro analógico dado en un filtro IIR digital por medio de la transformación **bilineal**.

  - El filtro digital debe presentar una frecuencia resonante $\omega_r = \pi/2$, que coincida con $\Omega_r = 4$.

$$H_a(s) = \frac{s+0.1}{(s+0.1)^2 + 16}$$

- **Solución**

  - De la relación entre frecuencias, se obtiene T.

$$\Omega_r = \frac{2}{T}\tan\frac{w_r}{2} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{1}{2}$$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Solución…

- Reemplazando el valor de T en la transformación bilineal se obtiene la correspondencia deseada,

$$s = \frac{2}{T}\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right) \quad \Rightarrow \quad s = 4\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)$$

- El filtro digital resultante tiene la función de transferencia,

$$H(z) = \frac{0.128 + 0.006z^{-1} - 0.122z^{-2}}{1 + 0.0006z^{-1} + 0.975z^{-2}}$$

- Los polos son: $z_{p_{1,2}} = 0.0003 \pm j0.87 = 0.987e^{\pm j90.02º}$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

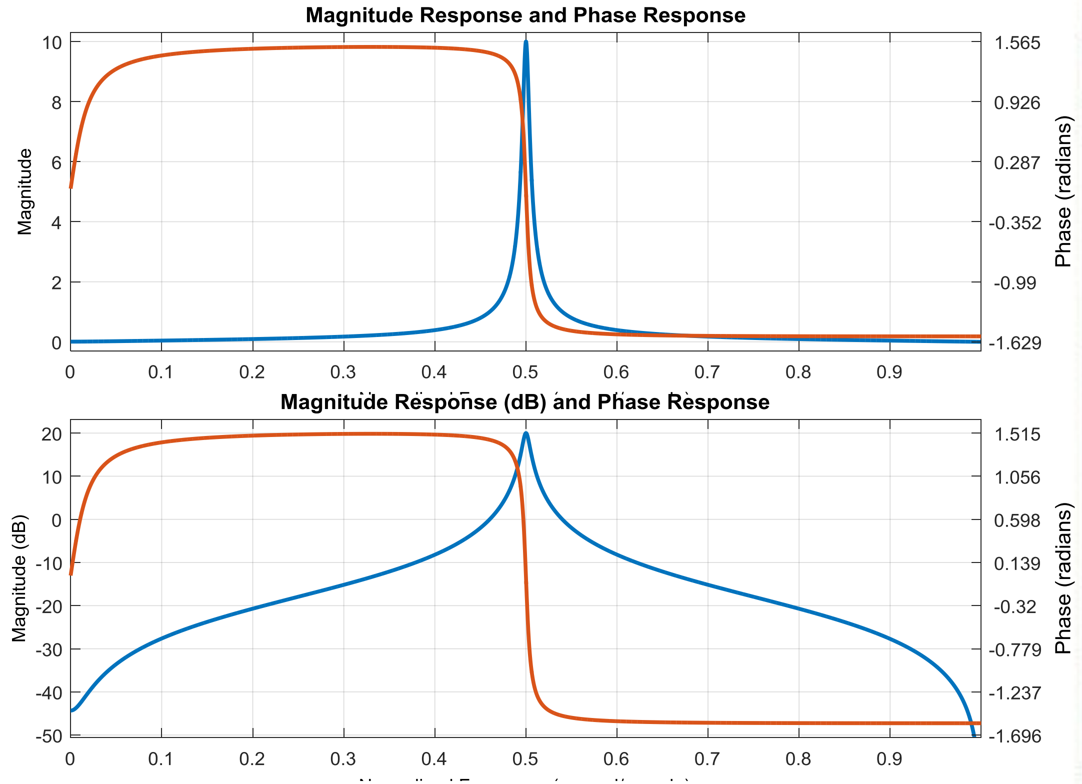
Filtros IIR: Transformación Bilineal

PSI Percepción y Sistemas Inteligentes

■Solución…

Transf_Bilineal_IIR.m

```
clc;clear all; close all;
%Polinomio Numerador
b0= 0.128 ; b1=0.006;  b2=-0.122;
b= [b0  b1  b2];
%Polinomio Denominador
a0=1;  a1=0.0006;  a2=0.975;
a=[a0  a1  a2];
%Polos
polos=roots(a)
AngPolos=angle(polos)*180/pi
MagPolos=abs(polos)
%freqz(b,a)
fvtool(b,a)
```



Ejemplo 2.

- Usando la transformación bilineal, diseñe un filtro digital paso bajo de un polo simple con ancho de banda de 3 dB en $w_c = 0.2\,\pi$.

$$H_a(s) = \frac{\Omega_c}{s + \Omega_c}$$

donde Ω_c es el ancho de banda de 3 dB del filtro analógico.

Solución

- En el dominio frecuencial, $w_c = 0.2\,\pi$ se corresponde con,

$$\Omega_c = \frac{2}{T}\tan(0.1\pi) = \frac{0.65}{T}$$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Filtros IIR: Transformación Bilineal

■Solución…

- Por lo que el filtro tiene la función de transferencia,

$$H(s) = \frac{0.65/T}{s + 0.65/T}$$

- Aplicando la transformación bilineal, se obtiene el filtro digital,

$$H(z) = \frac{0.245\left(1 + z^{-1}\right)}{1 - 0.509 z^{-1}}$$

- Verificando, la respuesta en frecuencia:

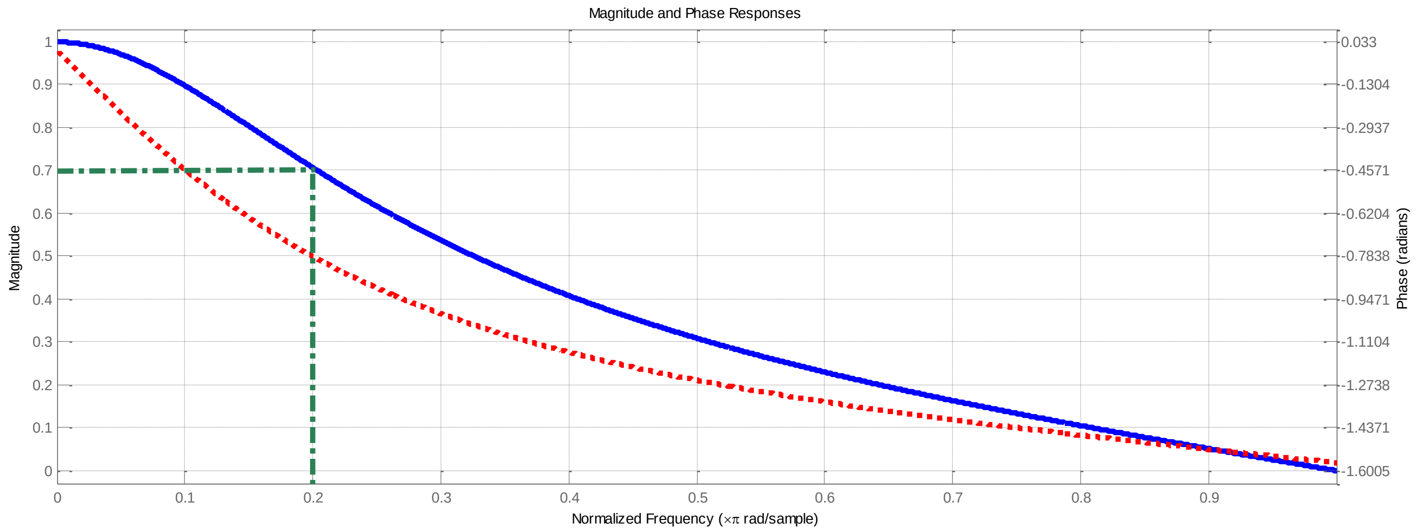
$$H(w) = \frac{0.245\left(1 + e^{-jw}\right)}{1 - 0.509 e^{-jw}} \quad \Rightarrow \quad H(w=0) = 1, \quad H(w = 0.2\pi) = 0.707$$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

■Solución…

- Verificando, la respuesta en frecuencia:

$$H(w)=\frac{0.245\left(1+e^{-jw}\right)}{1-0.509e^{-jw}} \Rightarrow H(w=0)=1,\ \ H(w=0.2\pi)=0.707$$



- **Observaciones Generales**
  - En las transformaciones de filtros el parámetro T puede asignársele cualquier valor …
    - Si las especificaciones del filtro analógico se calculan a partir de las especificaciones en el dominio digital.
    - En este caso, T se cancela en la conversión del filtro analógico a digital.
  - La fase de los filtros analógicos generalmente se distorsionan al transformarse al dominio discreto.
    - Ej: Los filtros Bessel analógicos tienen fase lineal pero el filtro discreto transformado no conserva esta linealidad en la fase.

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Introducción

- Algunas técnicas para el diseño de filtros IIR implican la **conversión** de un filtro **analógico** en **digital** mediante **correspondencias** del plano **s** al plano **z**.
- Los métodos de **mínimos cuadrados** permiten **diseñar** los filtros digitales directamente en los dominios **temporal y frecuencial**.

Aproximación de Padé

- El filtro que se va a diseñar presenta la función de transferencia,

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}} = \sum_{n=0}^{\infty} h(n) z^{-n}$$

- notar que:
  - $a_0 = 1$
  - $h(n)$ es la respuesta impulsional del filtro.

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Aproximación de Padé…

- **Criterio de error:**
  - Minimizar la suma ε de los errores al cuadrado entre $h(n)$ del filtro resultante y la respuesta deseada $h_d(n)$.

$$\varepsilon = \sum_{n=0}^{U} [h_d(n) - h(n)]^2$$

  - El filtro presenta $L = M + N + 1$ parámetros: $\{a_k\}\ y\ \{b_k\}$
  - Los coeficientes se seleccionan para satisfacer el criterio de optimización del error.

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Aproximación de Padé…

- En general $h(n)$ es una función ***no lineal*** de los parámetros del filtro.
  - La solución involucra ecuaciones ***no lineales*** para minimizar ε.
- Si se selecciona el límite superior como $U = L - 1$, es posible ajustar $h(n)$ **perfectamente** a $h_d(n)$ para $0 \le n \le M + N$.
- La ecuación en diferencias para el filtro deseado es,

$$y(n) = -a_1\, y(n-1) - a_2\, y(n-2) - \ldots - a_N\, y(n-N) + b_0\, x(n) + b_1\, x(n-1) + b_2\, x(n-2) +,,, + b_M\, x(n-M)$$

Aproximación de Padé…

- Con $x(n) = \delta(n)$, la respuesta del filtro es $y(n) = h(n)$, por lo que:

$$h(n) = -a_1\, h(n-1) - a_2\, h(n-2) - \cdots - a_N\, h(n-N) + b_0\, \delta(n) + b_1\, \delta(n-1) + \cdots + b_M\, \delta(n-M)$$

Recordardando que $\delta(n-k) = 0$ excepto para $k = n$,

- se tiene para $0 \le n \le M$

$$h(n) = -a_1\, h(n-1) - a_2\, h(n-2) - \cdots - a_N\, h(n-N) + b_n \quad [ec.1]$$

- y para $n > M$ se obtiene:

$$h(n) = -a_1\, h(n-1) - a_2\, h(n-2) - \cdots - a_N\, h(n-N) \; [ec.2]$$

Aproximación de Padé…

Procedimiento

Usando el conjunto de ecuaciones lineales [ec.1] y [ec.2] se puede hacer que $h(n) = h_d(n)$ para $0 \leq n \leq M + N$.

- **Paso 1:** Encontrar $\{a_k\}$ haciendo $h(n) = h_d(n)$ en [ec. 2] ($M < n \leq M + N$)

- **Paso 2:** Con los $\{a_k\}$ encontrados, determinar $\{b_k\}$ a partir de [ec. 1] ($0 \leq n \leq M$)

Aproximación de Padé…

Observaciones

El grado con que la técnica de Padé produce filtros aceptables depende del número de coeficientes del filtro seleccionado.

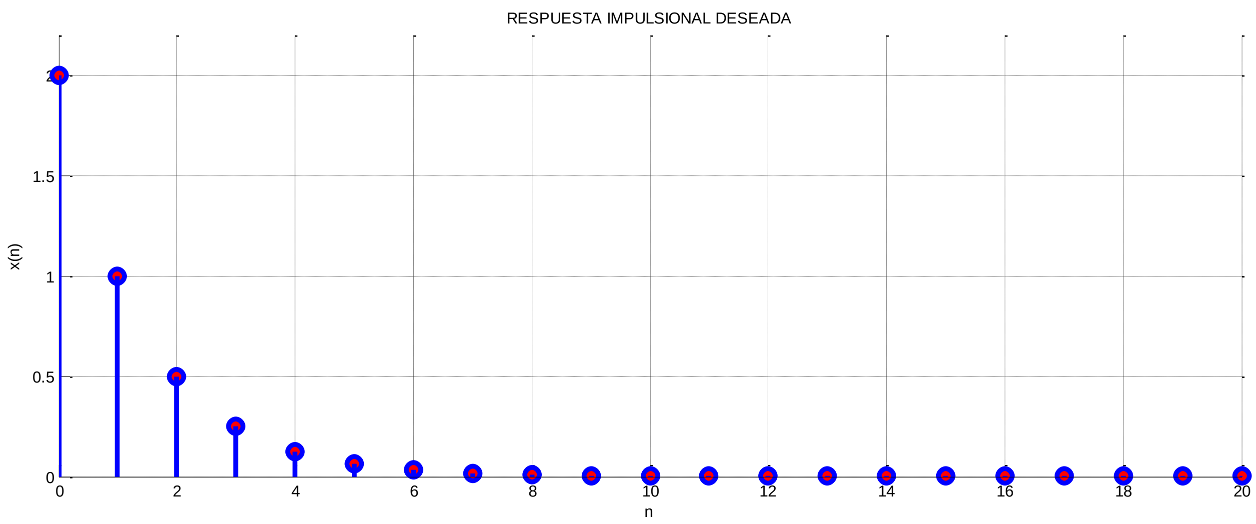
- $h_d(n)$ sólo se ajusta hasta el número de parámetros del filtro.
- Cuanto más complejo el filtro, mejor será la aproximación.
- Para mejorar la aproximación, el filtro debe poseer un gran número de polos y ceros.
- La técnica requiere ensayar varios valores de M y N para obtener un filtro que converja a la respuesta deseada.

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Ejemplo

- Use el método de aproximación de Padé para diseñar un filtro si se sabe que la respuesta impulsional deseada es:

$$h_d(n) = \{\underline{2}, 1, 1/2, 1/4, 1/8, 1/16, 1/32, 1/64, 1/128, \ldots\}$$



Solución

- Suponiendo $N = 1$ y $M = 1$, la función de Transferencia es:

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1\, z^{-1}}{1 + a_1\, z^{-1}} \quad , \qquad a_0 = 1$$

- Con $\delta(n)$ como entrada a $H(z)$, se obtiene la salida $y(n) = h(n)$

$$h(n) = -a_1 h(n-1) + b_0 \delta(n) + b_1 \delta(n-1)$$

Métodos de Mínimos Cuadrados

Solución…

- **Paso 1**: Para **n > M**,

$$n = 2 \;\Rightarrow\; h(2) = -a_1 h(1)$$

$$\text{con} \quad h_d(2) = 1/2, \;\; h_d(1) = 1 \quad \Rightarrow \quad a_1 = -1/2$$

- **Paso 2**: Para **0 ≤ n ≤ M**

$$n = 0 \;\Rightarrow\; h(0) = (1/2)\,h(-1) + b_0$$

$$\text{con} \quad h_d(0) = 2, \quad h_d(-1) = 0 \;\Rightarrow\; b_0 = 2$$

$$n = 1 \;\Rightarrow\; h(1) = (1/2)\; h(0) + b_1$$

$$\text{con} \quad h_d(0) = 2, \quad h_d(1) = 1 \;\Rightarrow\; b_1 = 0$$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

■ Solución…

- El filtro resultante es: $$H(z)=\frac{2}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

- Su respuesta impulsional es:

$$h(n)=2\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u(n) \qquad h(n)=\frac{1}{2}h(n-1)+2\,\delta(n)$$

- **Observación**: La secuencia deseada

$$h_d(n)=\{\underline{2},1,1/2,1/4\,,1/8,1/16,1/32,1/64,1/128,\ldots\}$$

coincide exactamente con: $h_d(n)=2(1/2)^n\,u(n)$,

- **Ejemplo 2**
  - Desarrolle un **programa** en Matlab para implementar el método de Padé para el diseño de filtros Digitales.
    - El programa debe calcular los coeficientes del filtro y la respuesta en frecuencia
  - Pruébelo para la siguiente respuesta impulsional protótipo:

$$h_d(n) = \{\, \underline{0.2} \;\; 0.32 \;\; 0.192 \;\; 0.1152 \;\; 0.0691 \;\; 0.0415 \;\; 0.0249 \;\; 0.0149 \;\; 0.009 \;\; 0.0054 \;\; 0.0032 \,\}$$

  - Indique qué tipo de filtro se obtuvo y la frecuencia de corte.

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Solución

Pade_general.m

```
clc; close all; clear all;

% Respuesta h(n): Se supone que el primer valor corresponde a h(0).
% num H(z)= b0+ b1 z^(-1) +...+ bM z^(-M)
% den H(z)= 1 + a1 z^(-1) +...+ aN z^(-N)
h=[0.2  0.32 0.192 0.1152 0.0691 0.0415 0.0249 0.0149 0.009 0.0054  0.0032 ];
M=3;N=3;

%PASO 1: Evaluar n>M para encontrar los coeficientes ai i=0-->N; a0=1
for x=1:1:N
    for y=1:1:N
        A(x,y)=-h(N-y+x+1);
        %El uno es para hacer coincidir la notación según índices en matlab.
    end
    b(x)=h(N+x+1);
end
```

Solución …

```
%Coeficientes ai (i=0,2,..N)

%Calculo de coeficientes desde i=1-->N; siempre a0=1

% Determinar si la matriz A es singular
prueba= inv(A);
if (prueba==Inf | prueba==NaN )
    coef_a=pinv(A)*b’ ; % si es singular, forma alterna de calcular solución
else
    coef_a=A\b' ;
end

disp(['Coeficientes ai, i=0-->' num2str(N)])
aa=[1 coef_a']
```

Solución …

```
% PASO 2:  Evaluar 0 <= n <= M para encontrar los coeficientes bi ; i=0,..M
bb(0+1)=h(0+1);
for k=1:M
    c=h(k+1);
    for j=1:k
        c=c+coef_a(j)*h(k-j+1);
    end
    bb(k+1)=c;
end
disp(['Coeficientes bi, i=0-->' num2str(M)  ])
bb
```

Solución

```
% Respuesta en frecuencia
[H,w]=freqz (bb, aa );

% Frecuencia de corte
ind_wc1=find(abs(H)>(1/sqrt(2)),1,'last');
ind_wc2=find(abs(H)<(1/sqrt(2)),1,'first');
if abs(abs(H(ind_wc1))-1/sqrt(2))< abs(abs(H(ind_wc1))-1/sqrt(2))
    ind_wc=ind_wc1;
else
    ind_wc=ind_wc2;
end
wc=w(ind_wc)
```


humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Solución

```
% Graficación
subplot(2,1,1); plot(w,abs(H)); grid on;
title ( ['Respuesta en Frecuencia- Aprox. Padé.  M= ' num2str(M) '  N= '
num2str(N)] )
xlabel('w'); ylabel('|H(w)|');
text(w(ind_wc), abs(H(ind_wc)),'\leftarrow wc','HorizontalAlignment','left')

subplot(2,1,2); plot(w,angle(H)); grid on;
title ( ['Frecuencia de corte wc=' num2str(wc)]);
xlabel('w'); ylabel('Fase(w)');

% Respuesta impulsional deseada
figure
stem(0:1:length(h)-1,h); grid on;
xlabel('n'); ylabel('h(n)');
```

Solución …

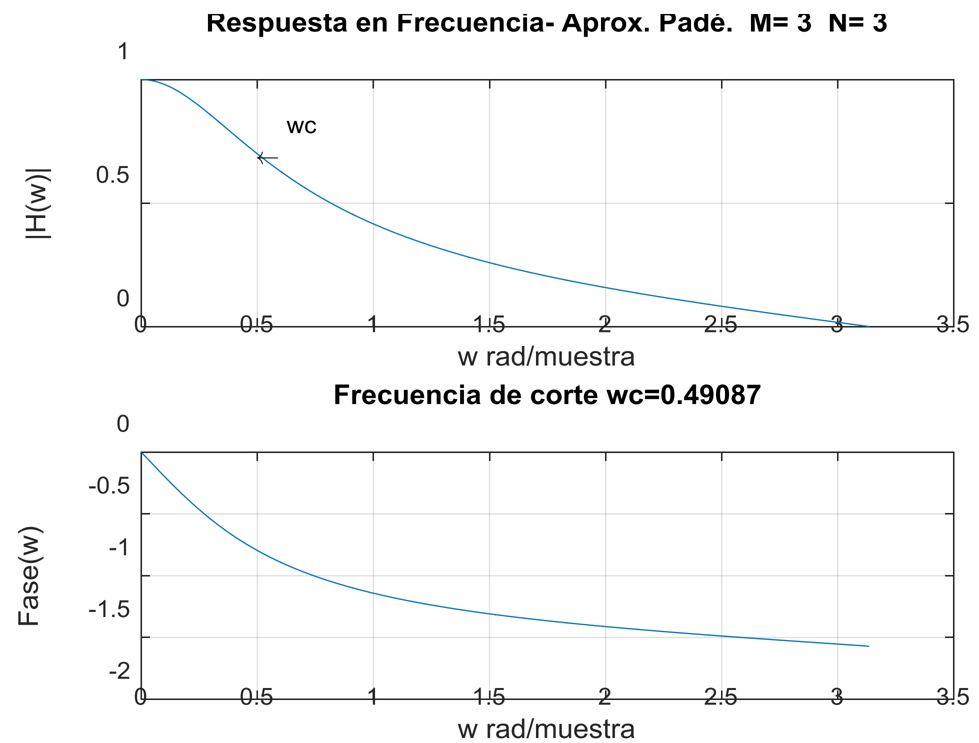
$$M = N = 3$$

$$a_i = 1.0 \quad 2.0 \quad 4.0 \quad -3.3359$$

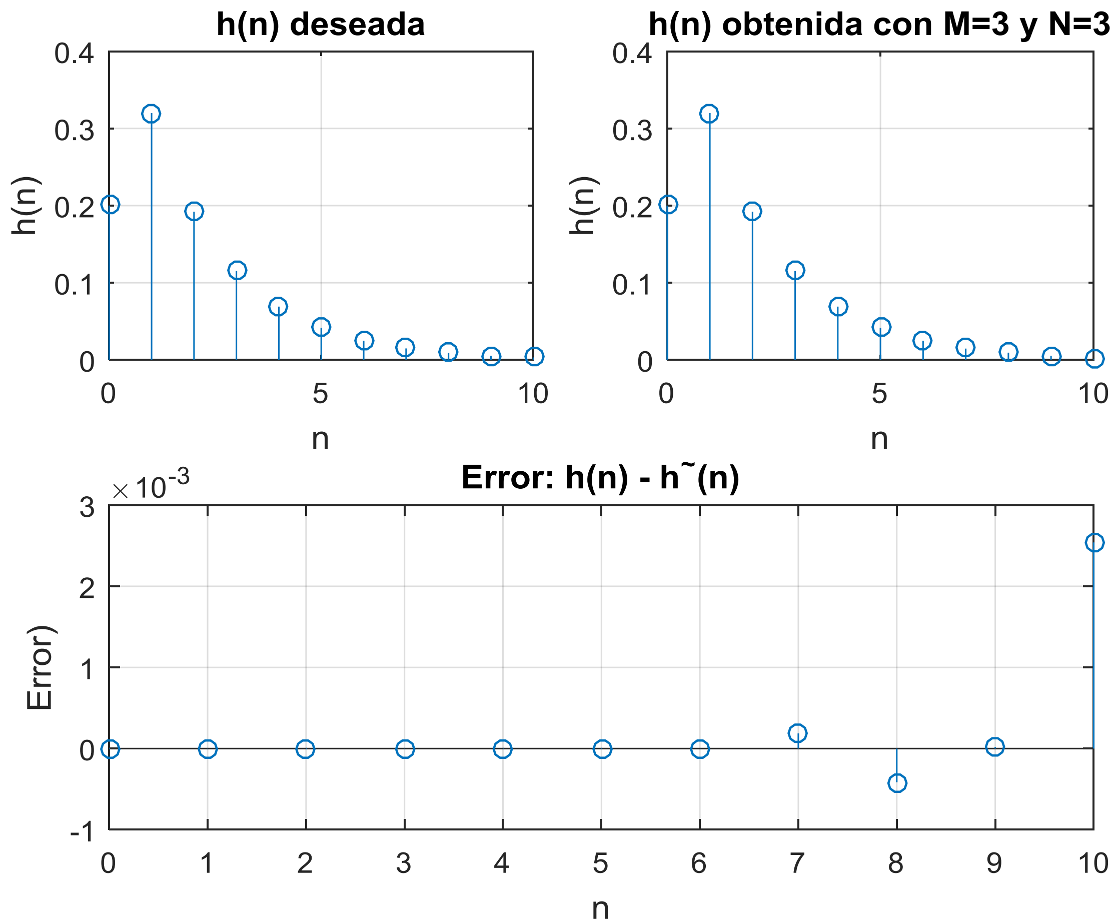
$$b_i = 0.20 \quad 0.72 \quad 1.632 \quad 1.112$$

Paso bajo

$$\omega_c = 0.4909\, rad/m$$



Solución



h(n) deseada
h(n) obtenida con M=3 y N=3
h(n)
n
0
0.1
0.2
0.3
0.4
5
10
Error: h(n) - h~(n)
×10^-3
Error)
-1
1
2
3
4
6
7
8
9

Observación

- La aproximación de Padé resulta en un **ajuste perfecto** a $H_d(z)$ cuando la función de transferencia deseada es *racional* y se **conocen *a priori*** el número de polos y ceros del sistema.

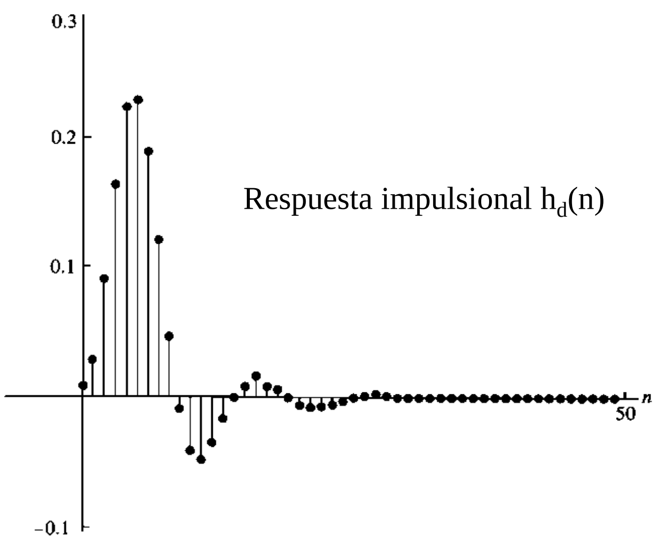
- Generalmente lo anterior no es el caso, ya que $h_d(n)$se determina a partir de algunas especificaciones de $H_d(w)$.
  - En estos casos, la aproximación de Padé puede ***NO*** resultar en un buen diseño del filtro.

Efecto de la selección de los valores de *M* y *N*

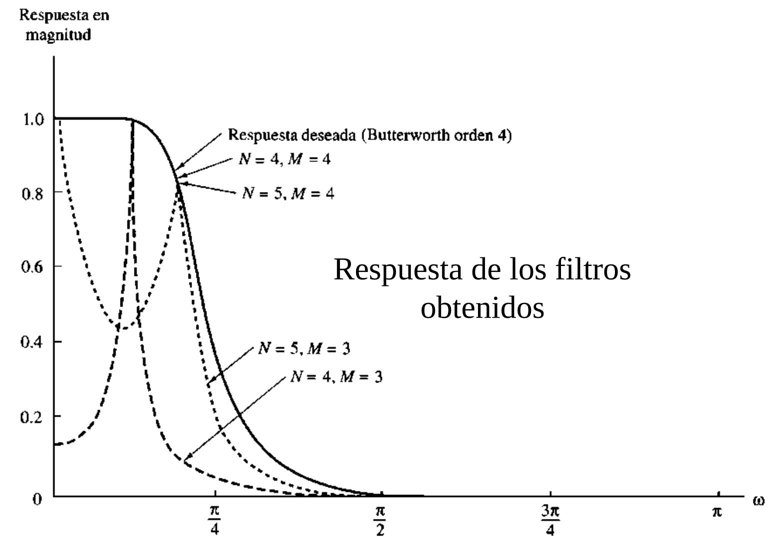
- Considerar el filtro Butterworth de cuarto orden dado por,

$$H_d(z) = \frac{4.8334x10^{-3}(z+1)^4}{(z^2 - 1.3205z + 0.6326)(z^2 - 1.0482z + 0.2959)}$$

- Con respuesta impulsional:



- **Efecto de la selección de los valores de M y N…**
  - Aproximación de Padé para diferentes valores de de polos (N) y ceros (M).



Respuesta de los filtros obtenidos

- $\{M, N\} < 4$, la aproximación es pobre.
- $M \geq 4$ se obtiene una muy buena aproximación.
- $M > 4$ se puede obtener un buen resultado, incluso para $N < 4$.