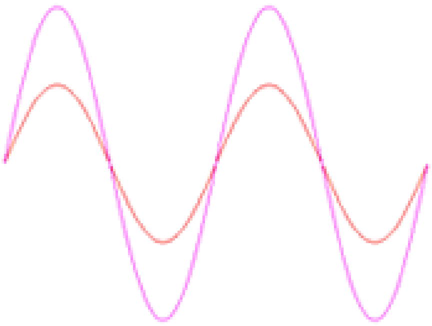
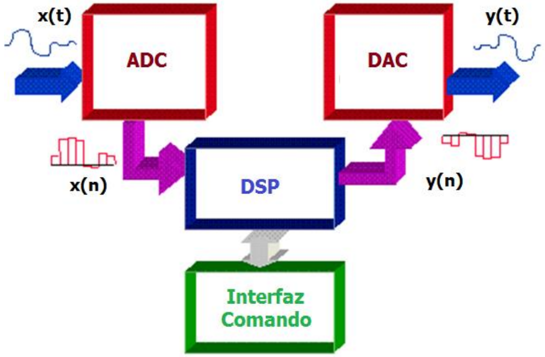
Introducción

- Analizar la respuesta de sistemas LTI ante entradas sinusoidales.



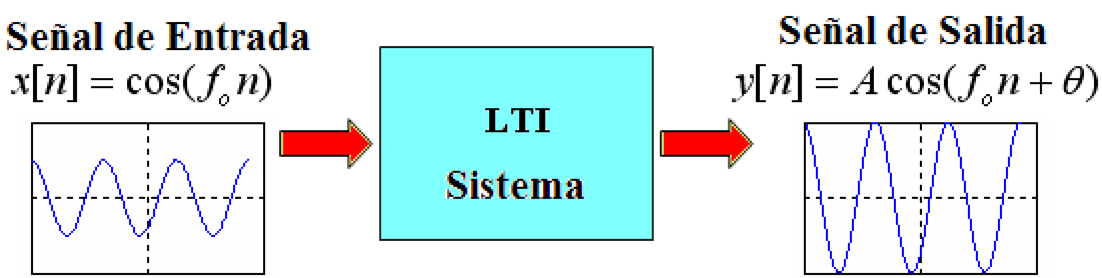


humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Anásilis Frecuencial de Señales

Introducción …

- La señal sinusoidal es útil como entrada de prueba debido a que:
  - La respuesta del sistema difiere sólo en amplitud y fase respecto a la entrada.

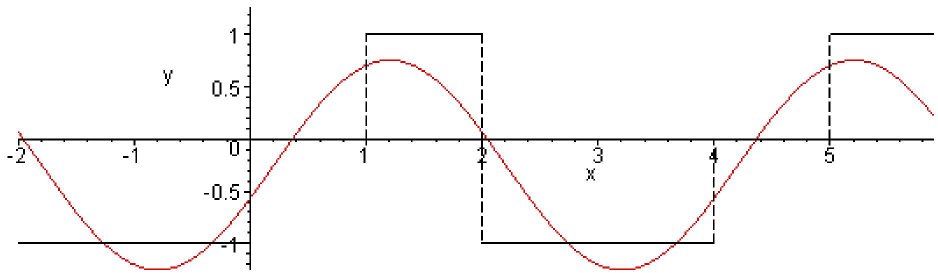


  - Las variaciones de amplitud y fase suministran información útil para caracterizar y diseñar sistemas.

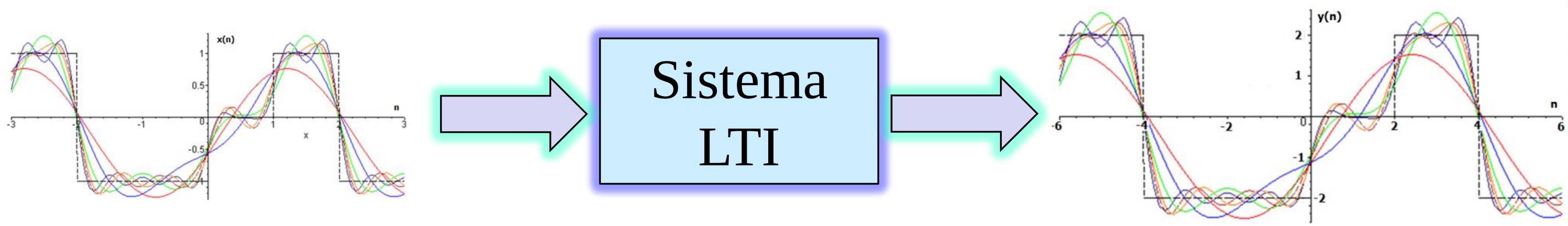
humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Introducción …

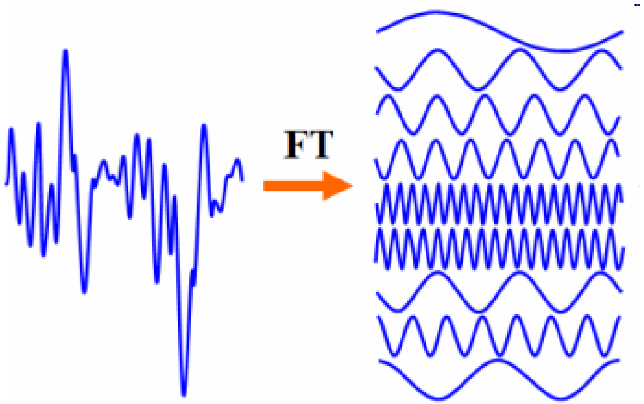
- Las señales utilizadas pueden descomponerse en señales sinusoidales

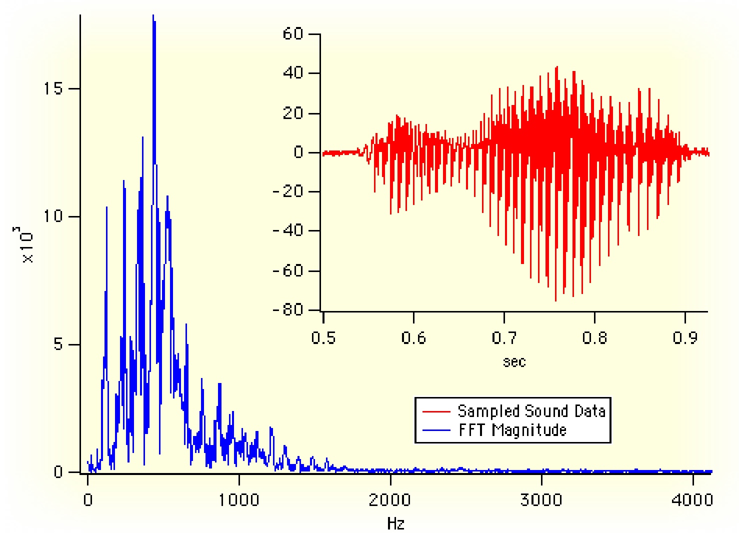


- La respuesta de los sistemas LTI a una suma lineal de sinusoidales es otra serie de sinusoidales



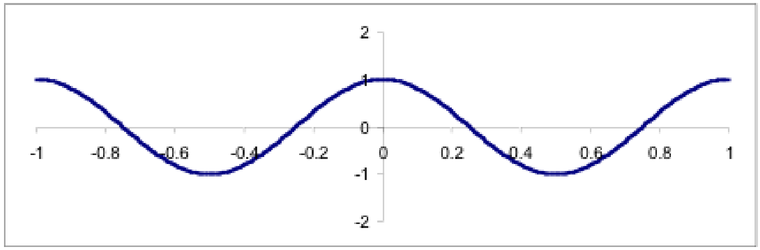
- **Introducción…**
  - **Representación en el dominio de la frecuencia**
    - Descomposición de señales en términos de componentes sinusoidales o exponenciales complejas.



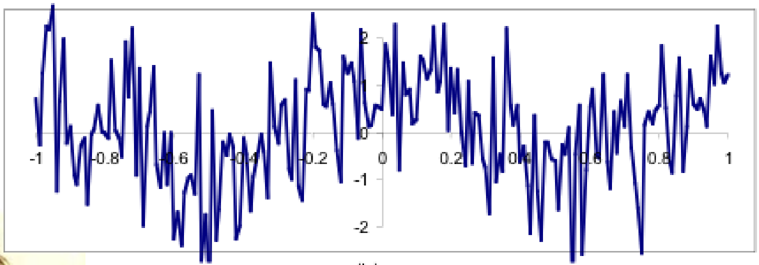


Análisis Frecuencial de Señales

- **Introducción …**
  - **Herramientas**
    - **Serie de Fourier**: efectúa la descomposición de señales periódicas.
    - **Transformada de Fourier**: efectúa la descomposición de señales no periódicas.

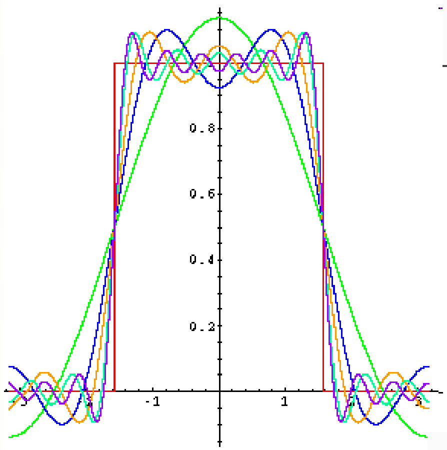


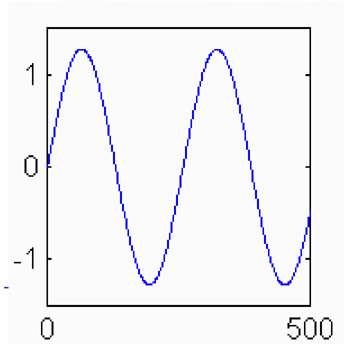
(a)

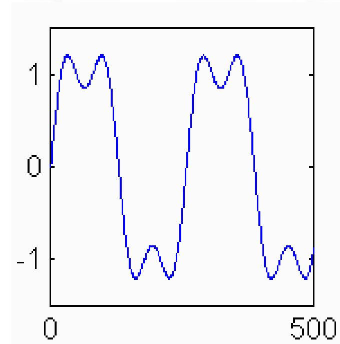

(b)

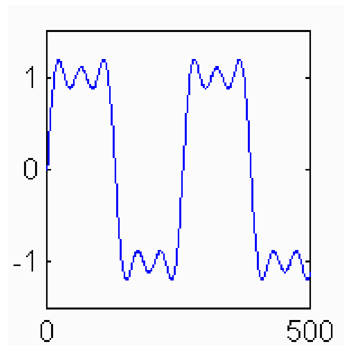
Análisis Frecuencial de Señales

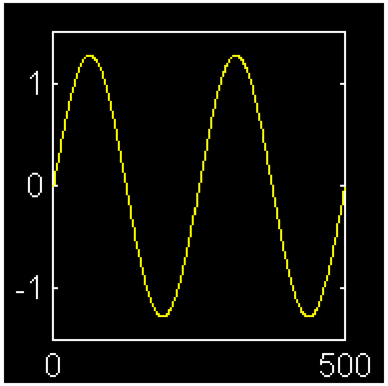
PSI Percepción y Sistemas Inteligentes

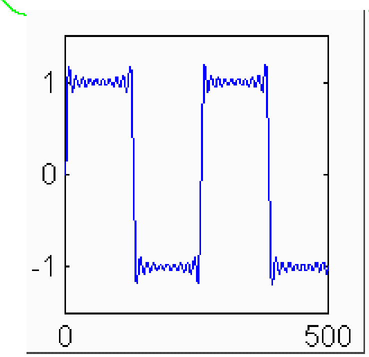


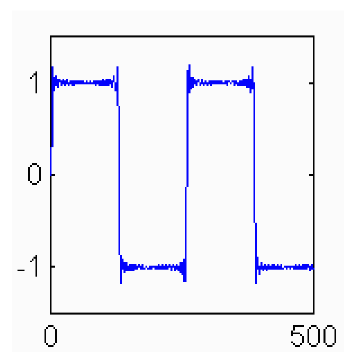










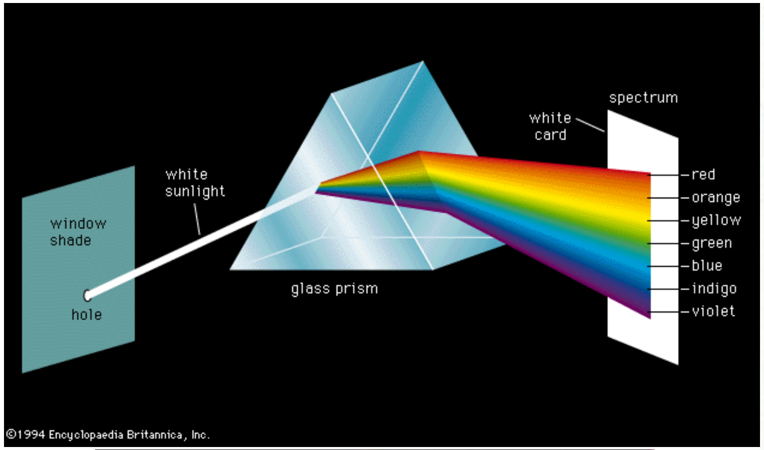


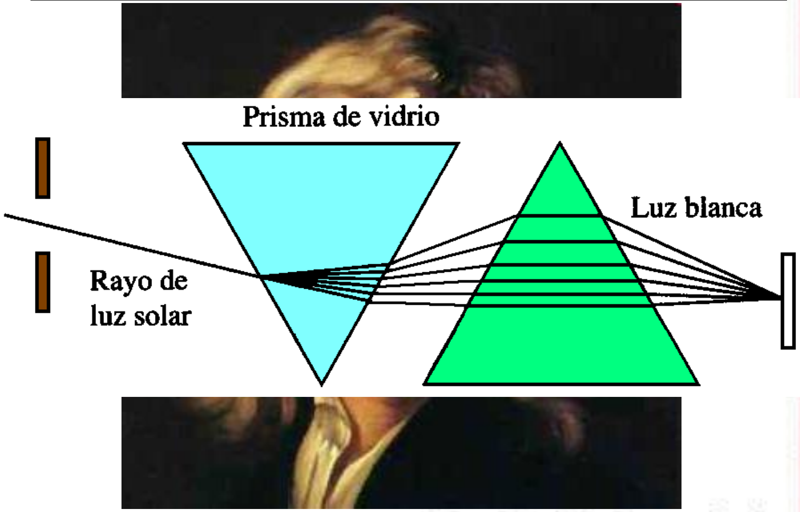
humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

■ Reseña Histórica

- 1672- Isaac Newton empleó el término ***espectro*** para describir las **bandas contínuas** de colores producidas al **descomponerse** la **luz blanca** cuando se hacía pasar por un **prisma**.

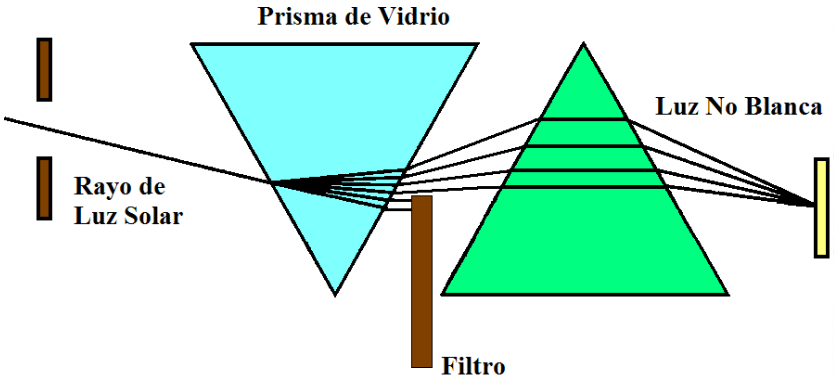
- Al colocar **dos prismas** los colores volvían **a mezclarse** para producir la luz blanca.

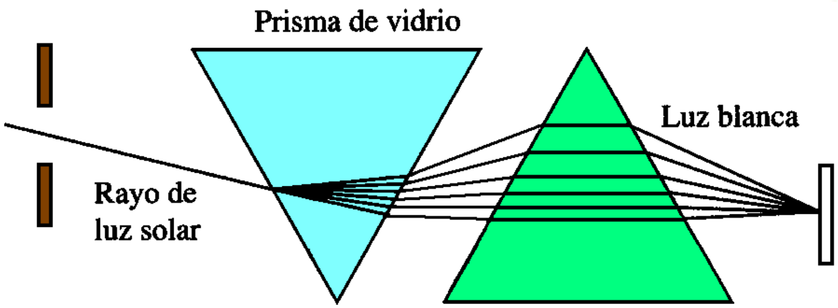




Reseña Histórica…

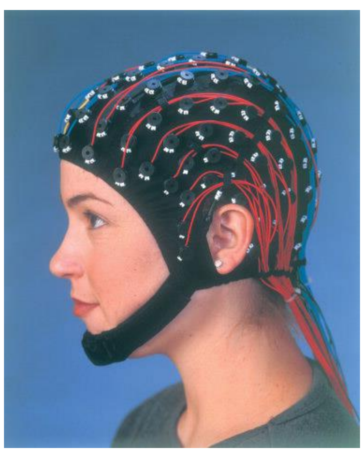
- **Al impedir** el paso de uno o varios de los colores, la luz obtenida **no era blanca**.
  - **Filtrado!!**
- Este estudio es un **análisis frecuencial**,
  - La luz blanca se descompone en colores, y cada color posee una **frecuencia específica**.
  - Se aplica a cualquier señal!!

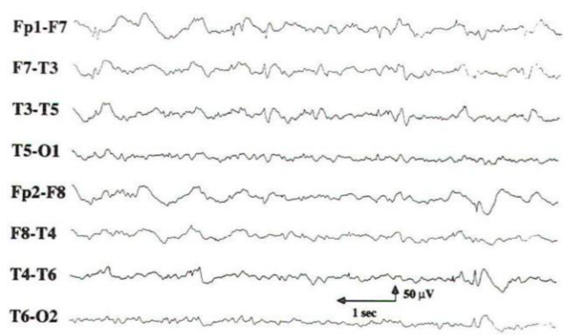


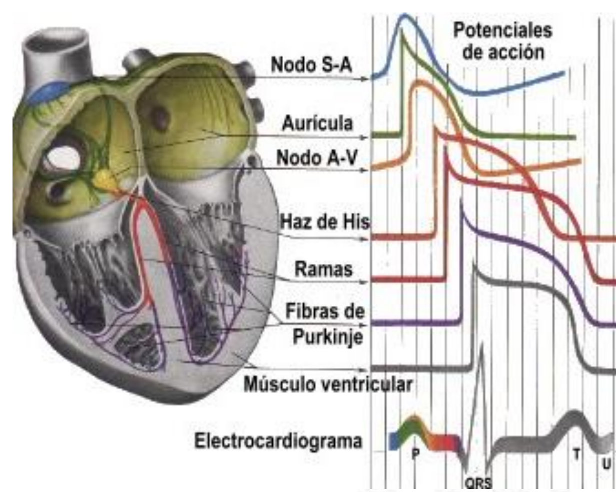


Frecuencia en Señales Biológicas

Señal Biológica	Rango Frec.	Descripción básica
Electroretinograma	0 - 20	Registro de la actividad eléctrica de la retina
Electronistagmograma	0 - 20	Registro del movimimiento involuntario de los ojos
Neumograma	0 - 40	Registro de la actividad respiratoria
Electrocardiograma (ECG)	0 - 100	Registro de la actividad cardiaca
Electroencefalograma (EEG)	0 - 100	Registro de la actividad eléctrica del cerebro
Electromiograma	10 - 200	Registro gráfico de la actividad muscular
Esfigmograma	0 - 200	Registro gráfico de la presión sanguínea
Voz	100 - 4000	Sonido generado por el aparato fonador humano





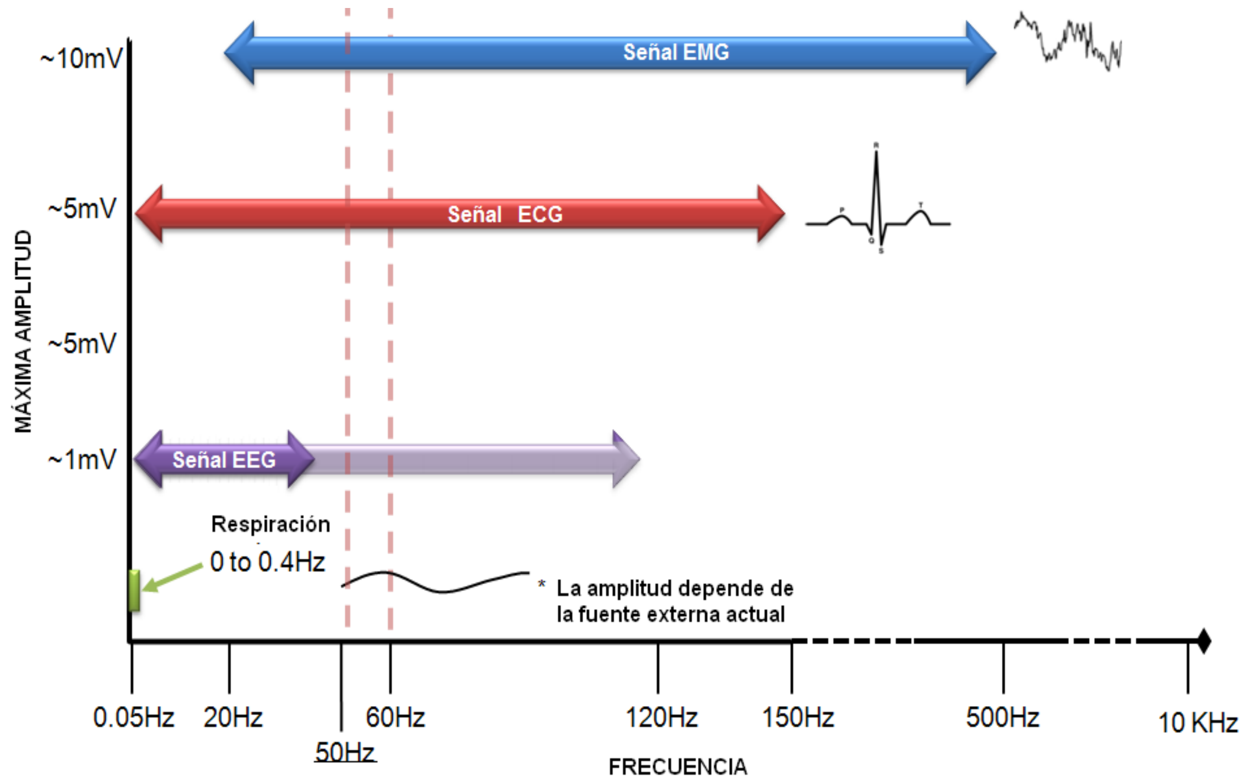


Universidad del Valle
Facultad de Ingeniería
Escuela de Ingeniería Eléctrica y Electrónica
humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Frecuencia en Señales Biológicas

PSI Percepción y Sistemas Inteligentes

- Rangos de frecuencias de señales Biopotenciales (Texas Instruments)

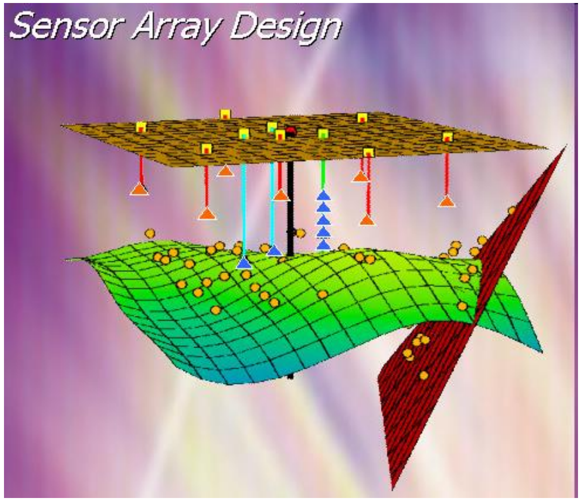


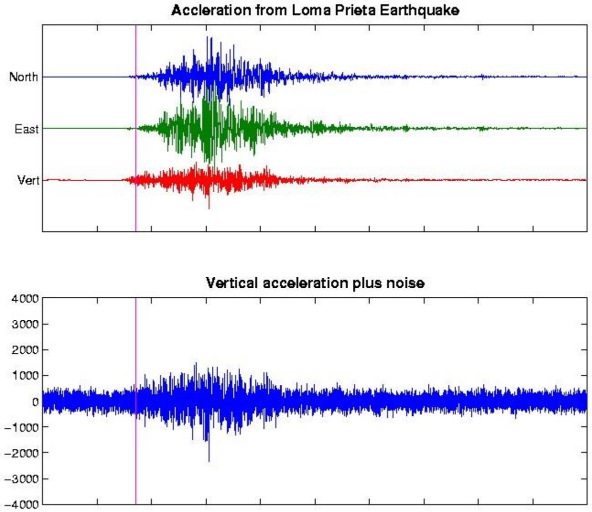
humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Frecuencia en Señales Sísmicas

PSI Percepción y Sistemas Inteligentes

Señal Sísmica	Rango Frec. (Hz)
Ruido del viento	100-1000
Señales de exploración sísmica	10-100
Señales de terremotos y explosiones	0.01-10
Ruido sísmico	0.1-1

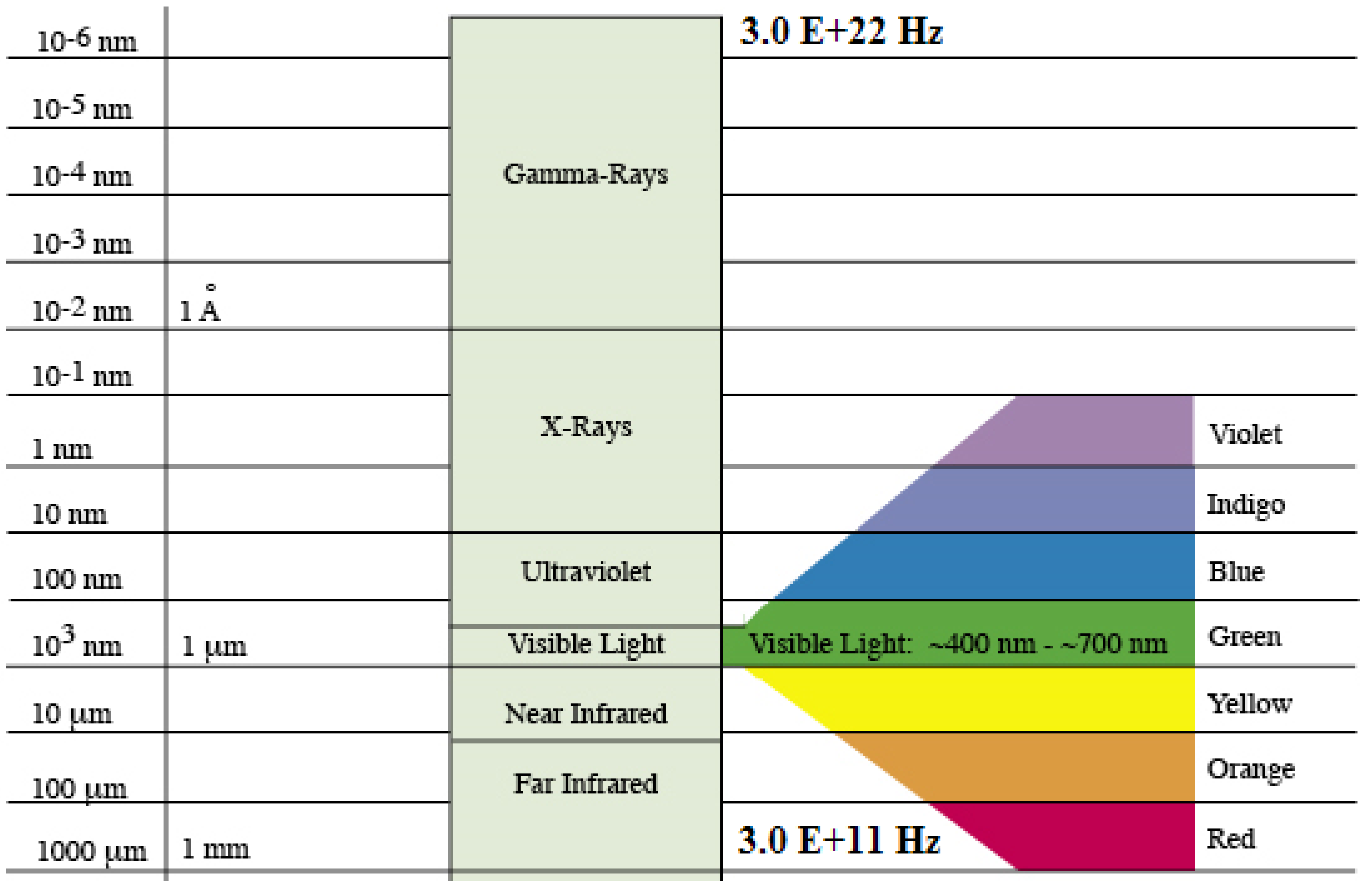




humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Frecuencia - Señales Electromagnéticas

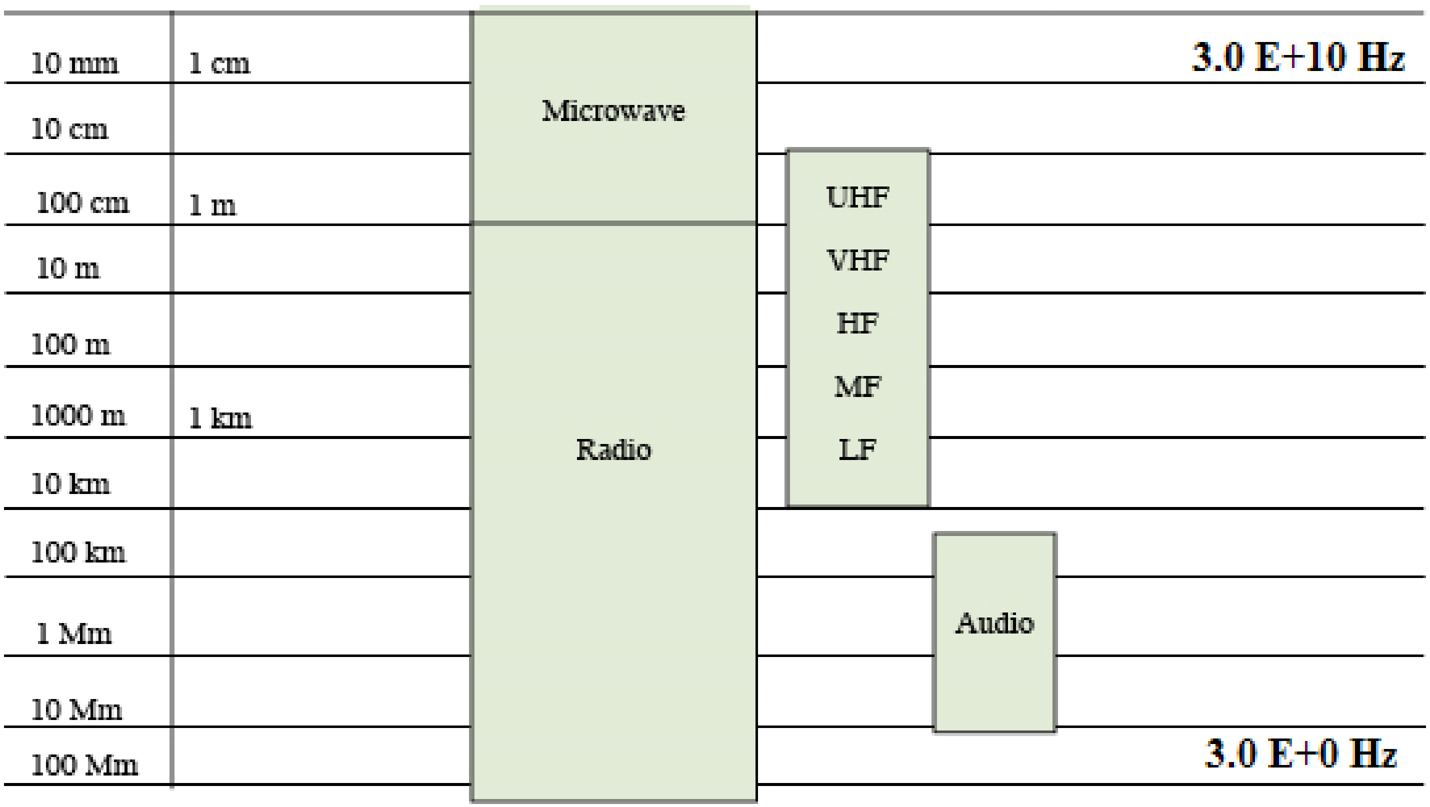
The Electromagnetic Spectrum



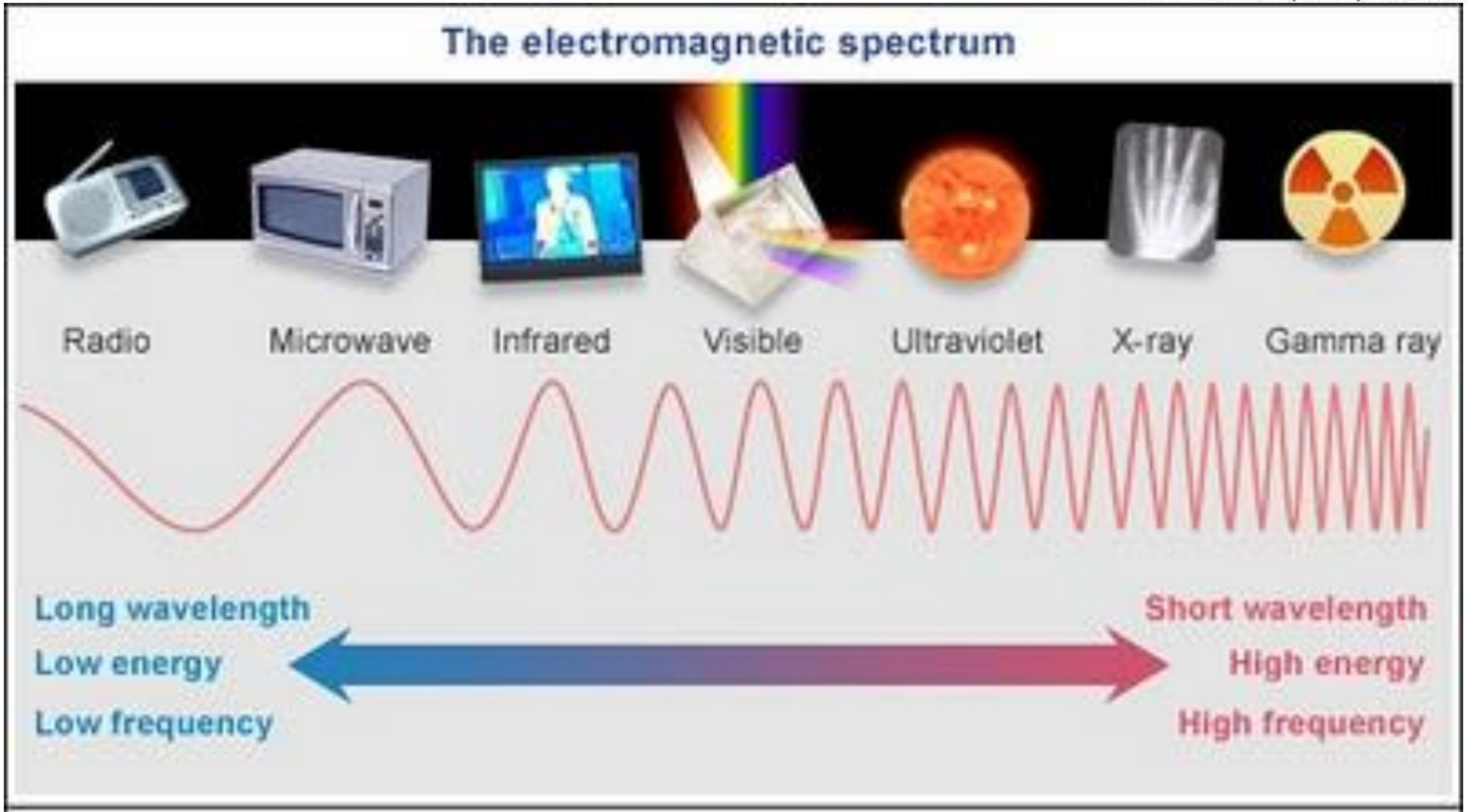
humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Frecuencia - Señales Electromagnéticas

The Electromagnetic Spectrum



Frecuencia - Señales Electromagnéticas

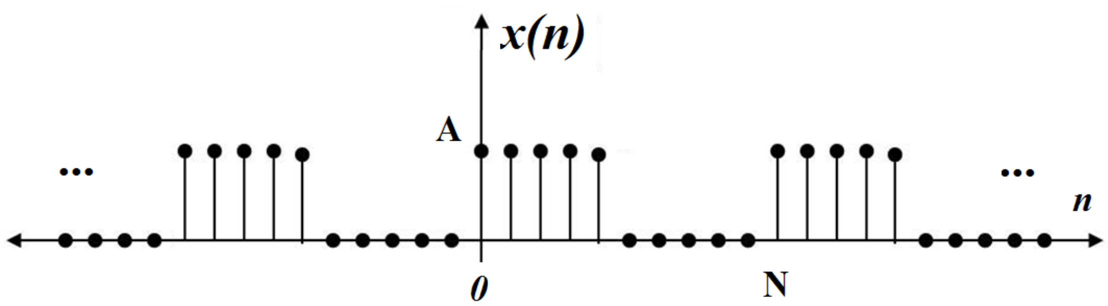


The radiation behind radios, visible light and nuclear blasts is all exactly the same thing, just with different amounts of energy.

Introducción

- Para una secuencia discreta periódica $x(n)$ de periodo N se cumple que:

$$x(n) = x(n + N) \quad \forall n$$



humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

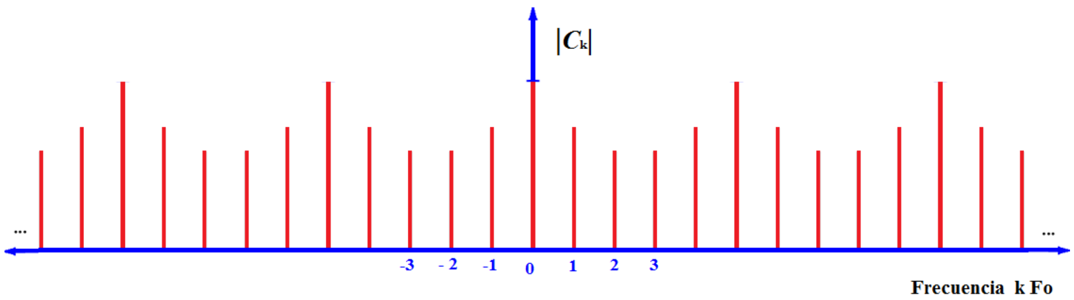
Introducción …

- $x(n)$ tendrá una representación en series de Fourier con N funciones exponenciales armónicamente relacionadas dada por:

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k \, e^{\,j2\pi kn/N}$$

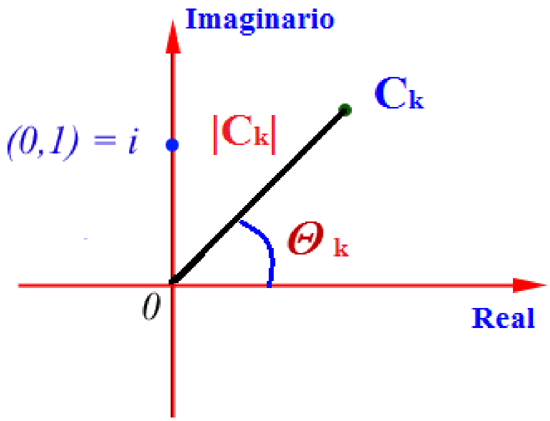
  - donde c_k son los *coeficientes de Fourier* definidos como,

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi kn/N} \qquad k = 0,1,\ldots, N-1$$



Introducción …

- Los coeficientes c_k son complejos y proporcionan la descripción de $x(n)$ en el dominio de la frecuencia.



$$c_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi kn/N} \qquad k = 0,1,\ldots,N-1$$

Introducción …

- El *término exponencial* puede escribirse en términos de la frecuencia angular w_k :

$$s_k(n) = e^{j 2\pi k n / N} = e^{j w_k n} \qquad donde \quad w_k = 2\pi\, k / N$$

- Se observa que las funciones $s_k(n)$ *también son periódicas* de periodo N, es decir,

$$s_k(n) = s_k(n+N) \quad \text{para todo } n$$

- Por lo tanto, los C_k definen una *secuencia periódica* que se extiende fuera del rango $k = 0,1, \ldots, N-1$.

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Introducción …

- Por lo anterior, el espectro de una señal $x(n)$ de periodo N, es una secuencia de periodo N.

$$c_{k+N} = c_k \quad \forall\, k$$

- Los coeficientes se analizan sólo en los tiempos $0 < k < N - 1$, que se corresponde con las frecuencias

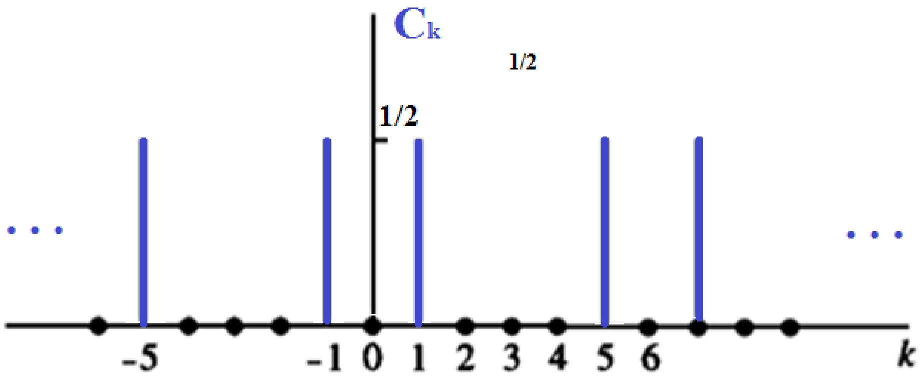
$$0 \leq w_k = \frac{2\pi k}{N} < 2\pi$$

Series de Fourier - Señales *Discretas*

- **Ejemplo 1.** Encuentre los coeficientes de la serie de Fourier para

$$x(n) = cos(n\,\pi/3)$$

- **Solución**
  - Se tiene N= 6 y $c_k = \dfrac{1}{6}\displaystyle\sum_{n=0}^{5} \cos(\pi\, n/3)\, e^{-j\pi k\, n/3} \qquad k = 0,1,\ldots,5$
  - Los coeficientes son:
    - $c_0 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$
    - $c_1 = c_5 = 1/2$
    - Espectro Real !



- **Ejemplo 2.** Reconstruya la señal $x(n)$ periódica con $N = 6$ a partir de los coeficientes de Fourier:

$$c_0 = c_2 = c_3 = c_4 = 0 \ , \qquad c_1 = c_5 = 1/2$$

- **Solución**
  - Se tiene que $N = 6$ y de la definición de la Serie de Fourier:

$$x(n) = \sum_{k=0}^{6-1} c_k e^{j2\pi kn/6}$$

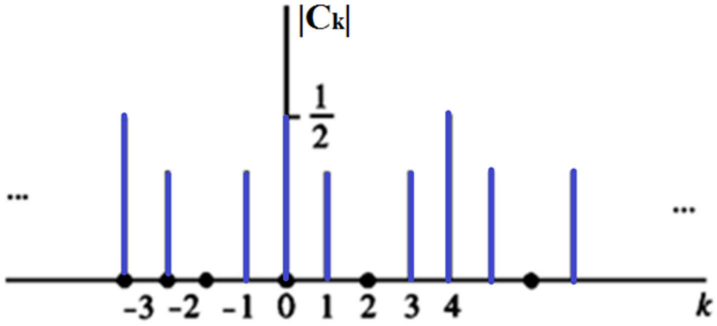
  - De donde,

$$x(n) = c_1 e^{j\pi\ n/3} + c_5 e^{j\pi 5\,n/3} = \frac{1}{2}\left(e^{j\pi\,n/3} + e^{-j\pi\,n/3}\right) = cos\left(\frac{\pi}{3}\,n\right)$$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

- **Ejemplo 3.** Encuentre los coeficientes de Fourier de la secuencia

$$x(n) = \{\underline{1},\ 1,\ 0,\ 0\} \text{ con } N = 4$$



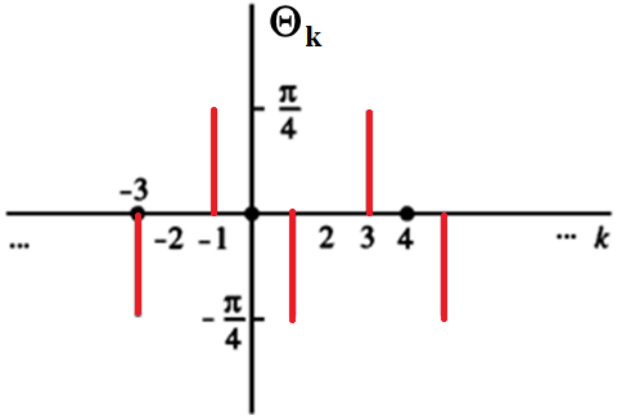
- **Solución**

$$c_k = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{3} x(n)e^{-j\pi kn/2} \qquad k = 0,1,\ldots,3$$

De donde,

$$|c_0| = \frac{1}{2}, |c_1| = \frac{\sqrt{2}}{4}, |c_2| = 0, |c_3| = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\Theta_0 = 0, \Theta_1 = -\frac{\pi}{4}, \Theta_2 = indef., \Theta_3 = \frac{\pi}{4}$$



humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Series de Fourier - Señales *Discretas*

- **Potencia Media de una señal periódica**
  - Para una señal periódica en tiempo discreto con periodo N se define como:

$$P_x = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}|x(n)|^2 = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)x^*(n)$$

  - Al reemplazar $x^*(n)$ por su serie de Fourier se tiene,

$$P_x = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\left[\sum_{k=0}^{N-1} c_k{}^* \, e^{-j2\pi kn/N}\right]$$

$$P_x = \sum_{k=0}^{N-1} c_k{}^* \left[\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, e^{-j2\pi kn/N}\right] = \sum_{k=0}^{N-1}|c_k|^2$$

Potencia Media de una señal periódica …

- La expresión

$$P_x = \sum_{k=0}^{N-1} |c_k|^2$$

indica que la *potencia media* de una señal es la *suma* de las potencias medias de las componentes individuales en frecuencia.

- **Relación de Parseval** para señales periódicas en tiempo discreto

$$P_x = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 = \sum_{k=0}^{N-1} |c_k|^2$$

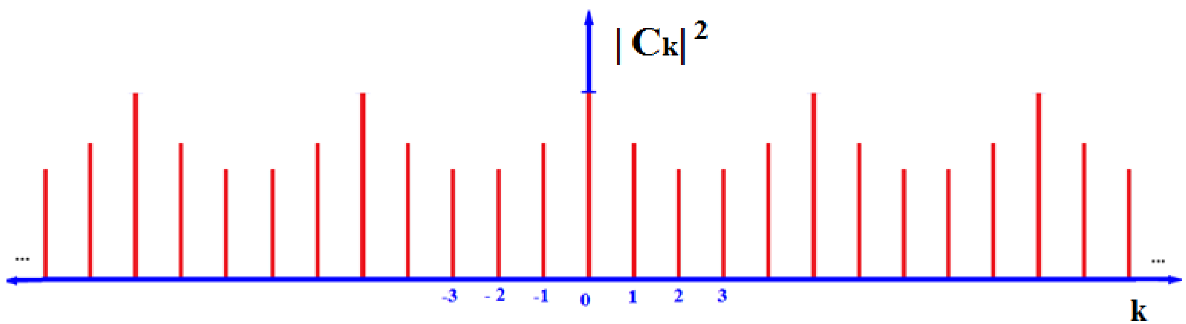
- **Energía** en un periodo:

$$E_N = \sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 = N\sum_{k=0}^{N-1} |c_k|^2$$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Densidad Espectral de Potencia de Señales Periódicas

- $|C_k|^2$ representa la potencia del k-ésimo armónico de la señal para k=0, 1,…, N-1.
- La gráfica de $S_x = |C_k|^2$ en función de k ilustra la distribución de la potencia de la señal $x(n)$ en los armónicos.

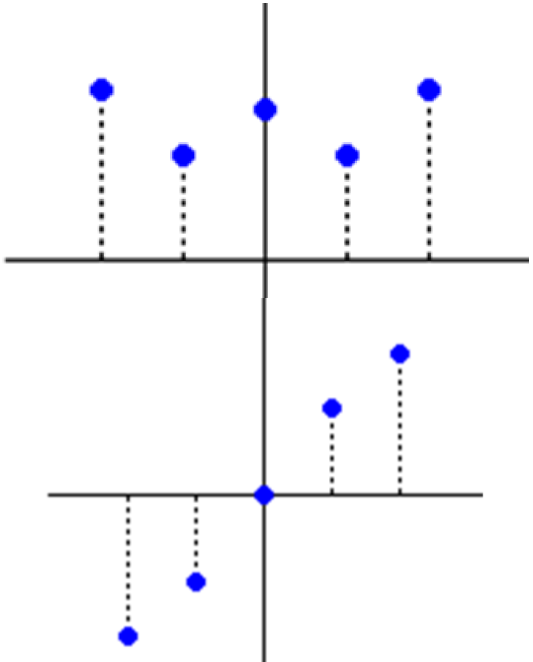


- Para señales discretas y periódicas el espectro de potencia es **discreto** y **periódico**.

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Series de Fourier de Señales *Discretas*

Señal periódica *real*



- Una señal real cumple que:
  - $x^*(n) = x(n)$ y por lo tanto $c_k{}^* = c_{-k}$
- Lo que implica que:
  - **Magnitud**: $|c_{-k}| = |c_k|$ tiene simetría par
  - **Fase**: $-\angle c_{-k} = \angle c_k$ tiene simetría impar
- La simetría define el rango de frecuencias de las señales en tiempo discreto.

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

- **Señal Periódica Real …**
  - Puesto que los coeficientes de Fourier de una señal periódica son periódicos, se cumple que:

$$
\begin{array}{lll}
\textit{Magnitud} & \textit{Fase} & \\
|c_k| = |c_{N-k}| & \angle c_k = -\angle c_{N-k} & \\
|c_0| = |c_N| & \angle c_0 = -\angle c_N = 0 & \\
|c_1| = |c_{N-1}| & \angle c_1 = -\angle c_{N-1} & \\
\vdots & \vdots & \\
|c_{N/2}| = |c_{N/2}| & \angle c_{N/2} = 0 & \text{si N es par} \\
|c_{(N-1)/2}| = |c_{(N+1)/2}| & \angle c_{(N-1)/2} = -\angle c_{(N+1)/2} & \text{si N es impar}
\end{array}
$$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

- **Señal Periódica Real …**
  - **Observaciones**
    - Una señal real, se específica completamente sólo con la mitad de los componentes espectrales:
      - c_k para $k = 0 \ldots N/2$ para N par,
      - c_k para $k = 0 \ldots (N-1)/2$ para N impar,
    - La frecuencia relativa w_k más alta que puede representarse mediante una señal discreta es π.

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

- **Señal Periódica Real …**
  - **Formas Alternas de la Serie**
    - Por las propiedades de simetría, la serie de Fourier de una señal discreta periódica y real puede expresarse como:

$$x(n) = c_0 + 2\sum_{k=1}^{L} |c_k| \cos\left(\frac{2\pi}{N} k\,n + \theta_k\right)$$

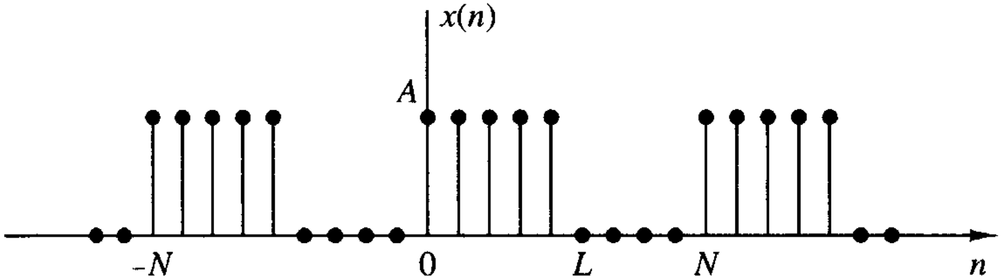
$$x(n) = a_0 + \sum_{k=1}^{L}\left(a_k \cos\frac{2\pi}{N} k\,n - b_k\, sen\frac{2\pi}{N} k\,n\right)$$

$$a_0 = c_0,\ a_k = 2|c_k| \cos\theta_k,\ \ b_k = 2|c_k|\, sen\,\theta_k\,,$$

L = N/2 si N es par ó L = (N -1)/2 si N es impar

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

- **Ejemplo.** Para la señal rectangular de amplitud A y periodo N encontrar:
  - a) Los **coeficientes** de Fourier
  - b) La **densidad espectral de potencia**



$$x(n) = \begin{cases} A & n = 0,1,\ldots,L-1 \\ 0 & n = L, L+1,\ldots,N-1 \end{cases}$$

- **Solución a):**
  - Por definición,

$$c_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi kn/N} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{L-1} A e^{-j2\pi kn/N} \quad k = 0,1,\ldots,N-1$$

de donde:

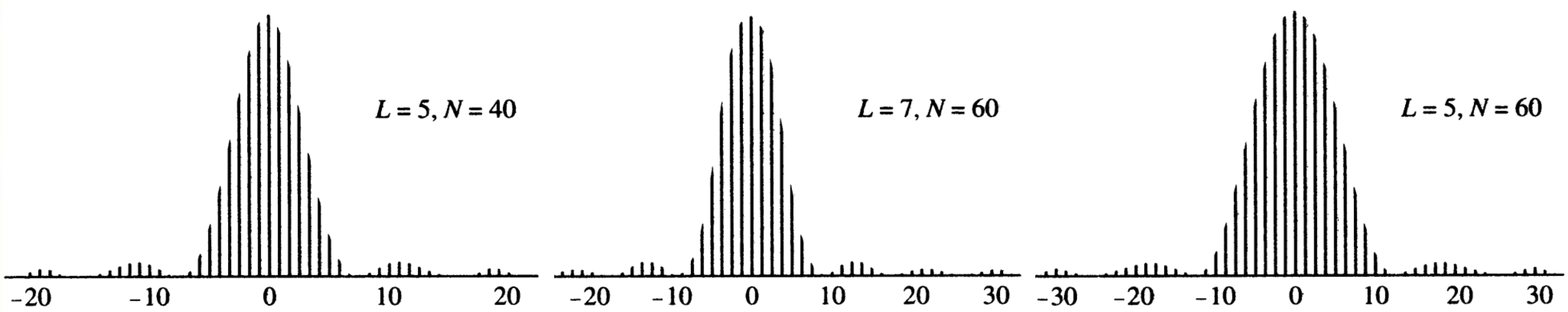
$$c_k = \begin{cases} \dfrac{AL}{N} & k = 0,+N,\pm 2N,\ldots \\ \dfrac{A}{N} e^{-j\pi k(L-1)/N} \dfrac{sen(\pi\ kL/N)}{sen(\pi\ k/N)} & \text{otro valor de } k \end{cases}$$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

- **Solución b):**
  - La **densidad espectral** de potencia se obtiene como:

$$|c_k|^2 = \begin{cases} \left(\dfrac{AL}{N}\right)^2 & k = 0, \pm N, \pm 2N, \ldots \\ \left(\dfrac{A}{N}\right)^2 \left(\dfrac{sen(\pi\; k\,L/N)}{sen(\pi\; k/N)}\right)^2 & \text{otro valor de } k \end{cases}$$

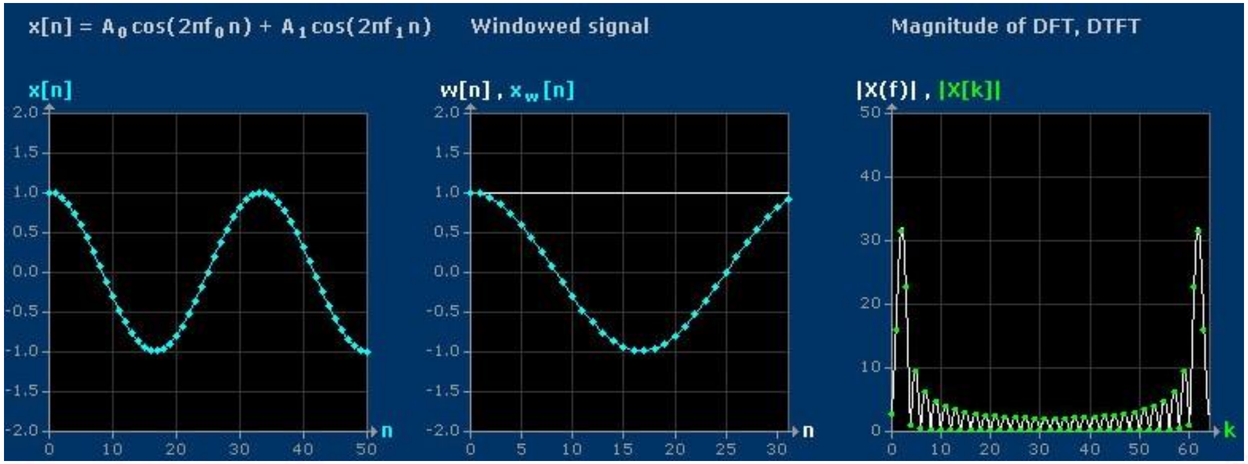
  - Su representación para diferentes valores de N y L



humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Introducción

- La T.F. de $x(n)$ constituye una representación en términos de la función exponencial compleja e^{jwn},
  - donde w es la variable real de frecuencia.
- La TF puede entenderse como una particularización de la TZ
- Útil en la evaluación de la respuesta frecuencial de un sistema LTI en régimen *permanente*.



Transf. de Fourier - Señales *Discretas*

Definición

- La TF de una señal de energía finita en tiempo discreto $x(n)$ se define como,

$$X(w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\, e^{-jwn}$$

- $X(w)$ representa el contenido en frecuencia de la señal $x(n)$.
- $X(w)$ es una descomposición de $x(n)$ en sus componentes frecuenciales.
- $X(w)$ existe si la sumatoria converge en algún sentido (absoluta, o cuadráticamente sumable)
  - $X(w)$ converge si $\sum_{n=\infty}^{-\infty} |x(n)| < \infty$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

- **Diferencias entre TF de tiempo discreto y continuo**
  - **Señal Continua**
    - Rango de frecuencia que va desde $-\infty$ hasta $+\infty$.
    - La TF involucra una integral
  - **Señal Discreta**
    - Rango de frecuencia que va desde -π a π (ó de 0 a 2 π).
    - La TF involucra una sumatoria.

Transf. de Fourier - Señales *Discretas*

Periodicidad de la TF de una señal discreta

$$X(w+2\pi k)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j(w+2\pi k)n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-jwn}e^{-j2\pi k n}$$

$$X(w+2\pi k)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-jwn}=X(w)$$

- **Consecuencias**
  - Cualquier señal en tiempo discreto tiene una TF con un rango de frecuencia igual a $(-\pi,\pi)$ ó $(0,\ 2\pi)$,
  - Cualquier frecuencia fuera de este intervalo es equivalente a una en su interior.

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

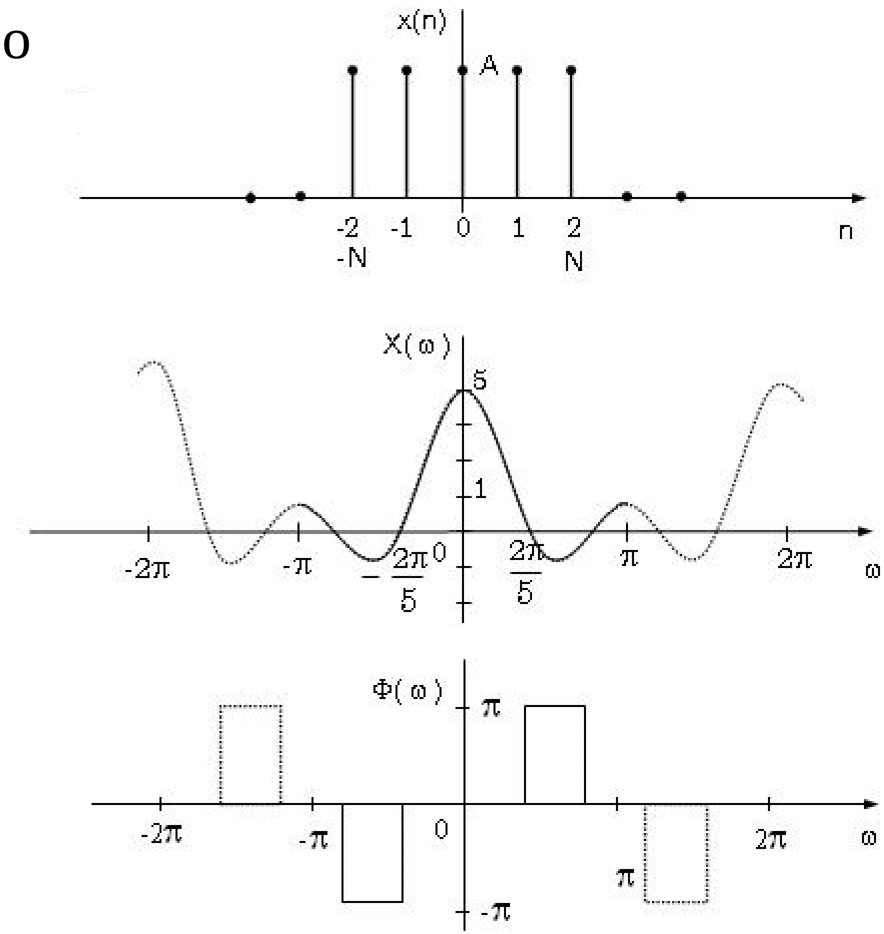
Transf. de Fourier - Señales *Discretas*

Percepción y Sistemas Inteligentes

■ Ejemplo

- ▸ Encuentre la T.F. del pulso rectangular digital.

■ Solución



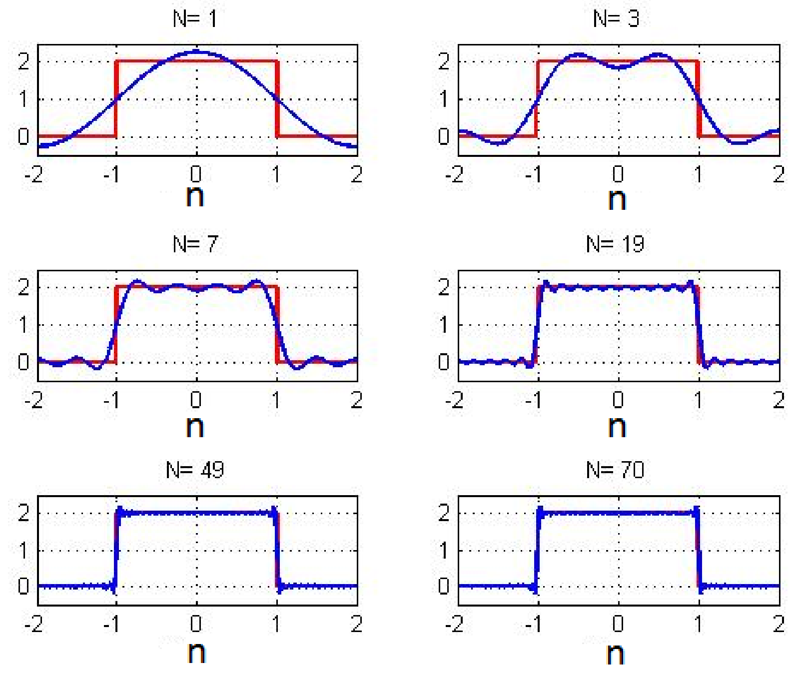
$$X(w) = \sum_{n=-N}^{N} A e^{-jwn} = A\frac{e^{jwN} - e^{-jw(N+1)}}{1-e^{-jw}}$$

$$X(w) = A\frac{\sin\left(\left[N+\frac{1}{2}\right]w\right)}{\sin\left(\frac{w}{2}\right)}$$

$$\Phi(w) = \begin{cases} 0, & X(w) \geq 0 \\ \pm\pi, & X(w) < 0 \end{cases}$$

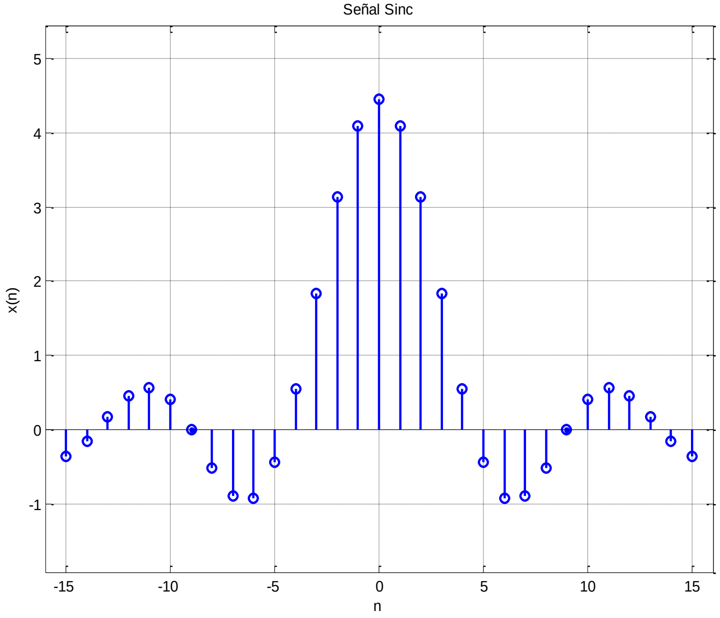
humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

- **Fenómeno de Gibbs (1899)**
  - **Introducción**
    - Efecto de rizado cerca de las discontinuidades de las señales.
    - Fenómeno explicado por J. Willard Gibbs y se presenta en transformadas calculadas de forma aproximada para señales que no son absolutamente sumables.



PSI Percepción y Sistemas Inteligentes

- **Fenómeno de Gibbs**
  - **Ejercicio:** Encontrar la Transformada de Fourier de la señal
    - $x(n) = \dfrac{sen(w_c\, n)}{\pi\, n}\ ,\ -\infty < n < \infty,\ \ \text{con}\ x(0) = \dfrac{w_c}{\pi}$



- **Fenómeno de Gibbs…**
  - **Solución:**

$$x(n) = \frac{sen(w_c\, n)}{\pi\, n}, \qquad -\infty < n < \infty, \qquad \text{con } x(0) = \frac{w_c}{\pi}$$

  - **Características de $\boldsymbol{x(n)}$**
    - No es continua
    - No es absolutamente sumable
    - Si es cuadráticamente sumable
    - Es de energía finita: $E_x = \frac{w_c}{\pi}$

- **Fenómeno de Gibbs…**
  - **Solución…**
    - Aplicando la definición:

$$X(w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{sen\ w_c\ n}{\pi\ n}\ e^{-jwn}$$

    - La serie infinita de la transformada *no converge uniformemente* para todo *w*, pero sí lo hace *de forma cuadrática*.

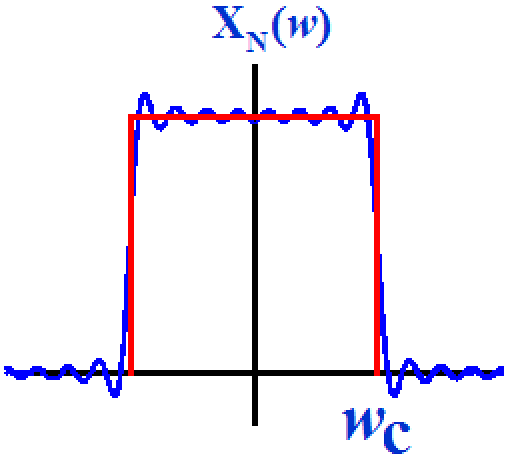
humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Fenómeno de Gibbs

Solución…

- Para analizar este comportamiento, se considera la suma sobre un intervalo finito de 2N+1.
- Se ocasionan oscilaciones fuertes al rededor de w_c.
- La amplitud de las oscilaciones se mantienen independientemente de N.

$$X_N(w) = \sum_{n=-N}^{N} \frac{sen\ w_c\ n}{\pi\ n} e^{-jwn}$$



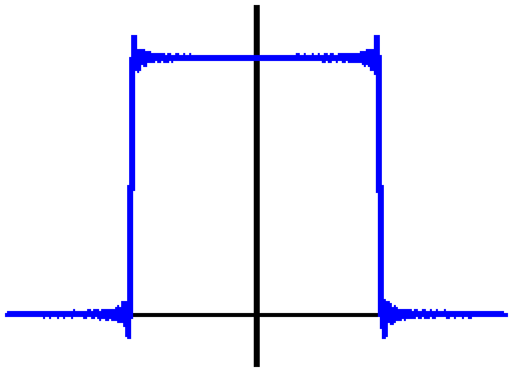
humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

■ Fenómeno de Gibbs

▸Solución…

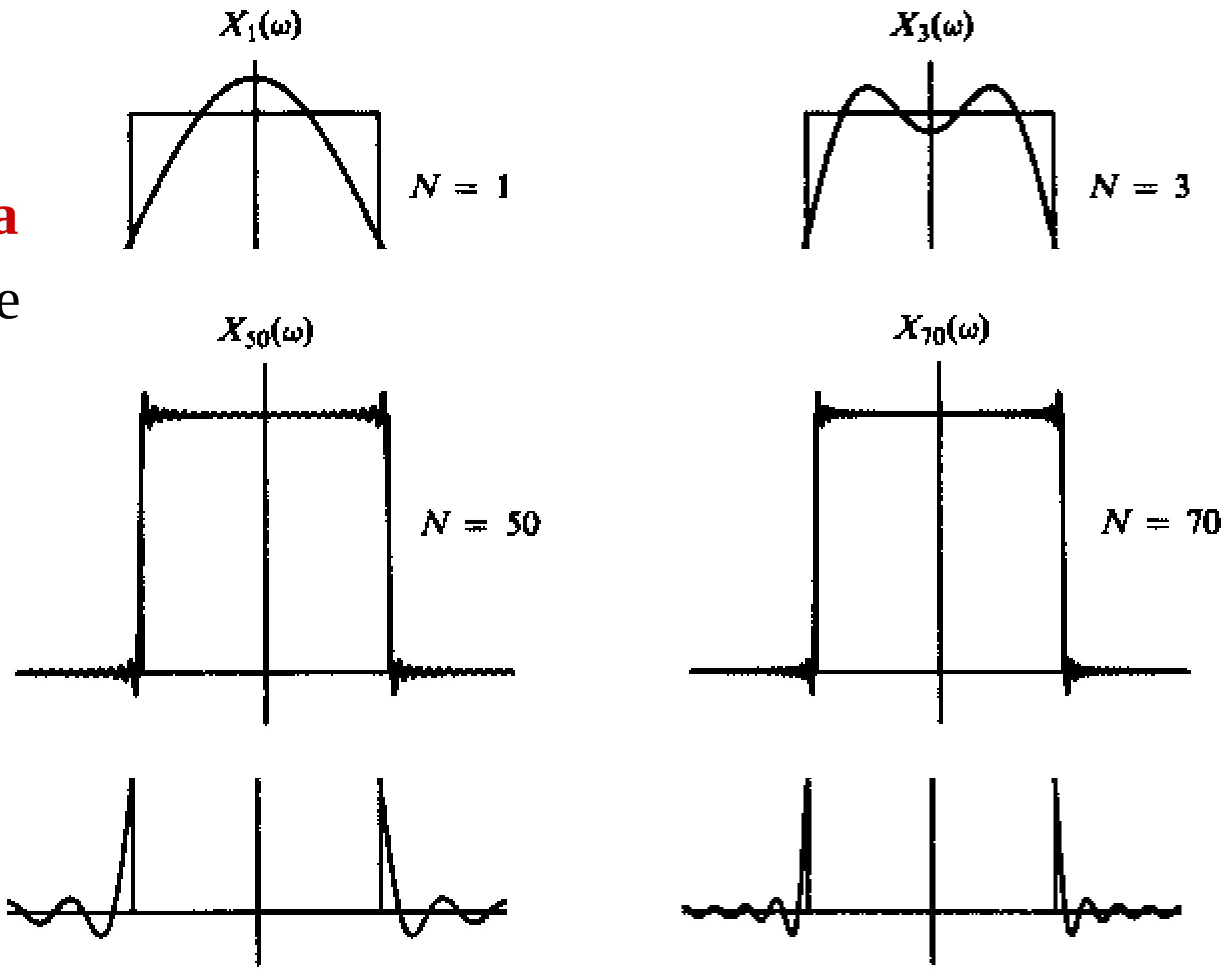
- La frecuencia de las oscilaciones aumenta con N.
- Cuando N $\rightarrow$ ∞ las oscilaciones convergen a la discontinuidad en $w = w_c$
- El **comportamiento oscilante** de $X_N(w)$ que aproxima a la función $X(w)$ en el punto de **discontinuidad** se denomina **fenómeno de Gibbs**.

$$X_N(w) = \sum_{n=-N}^{N} \frac{sen\ w_c\ n}{\pi\ n} e^{-jwn}$$



Transf. de Fourier - Señales *Discretas*

- **Fenómeno de Gibbs**
  - **Ilustración gráfica**
    - Convergencia de la T.F y fenómeno de Gibbs en la discontinuidad



Transformada Inversa de Fourier de S.D

Introducción

- La **TIF** permite **recuperar** la señal x(n) a partir de su información espectral X(w).

Definición

- La TF está dada por:

$$X(w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\, e^{-jwn}$$

- De la definición de la TF se observa que X(w) tiene la forma de una **serie de Fourier**, donde los **coeficientes** son los valores de la **secuencia x(n).**

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

T. Inversa de Fourier de S.D.

■ Derivación

- Multiplicando la expresión de X(w) por $e^{j\,w\,m}$ e integrando sobre el intervalo (-π, π) se tiene,

$$\int_{-\pi}^{\pi} X(w)e^{jwm}\,dw = \int_{-\pi}^{\pi}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\,e^{-jwn}\right]e^{jwm}\,dw$$

- Si la serie converge puede **intercambiarse** la integral y el sumatorio del **lado derecho** así:

$$\int_{-\pi}^{\pi} X(w)e^{jwm}\,dw = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\int_{-\pi}^{\pi} e^{-jwn}\;e^{jwm}\,dw$$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

T. Inversa de Fourier de S.D.

■ Derivación…

- Conociendo que la solución de la integral del lado derecho es:

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{jw(m-n)}\, dw = \begin{cases} 2\pi & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases}$$

- Por consiguiente,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \int_{-\pi}^{\pi} e^{jw(m-n)}\, dw = \begin{cases} 2\pi \; x(n) & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases}$$

- Despejando x(n) se obtiene la expresión de la *Transformada Inversa de Fourier* para una señal discreta aperiódica

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(w) e^{jwn}\, dw$$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

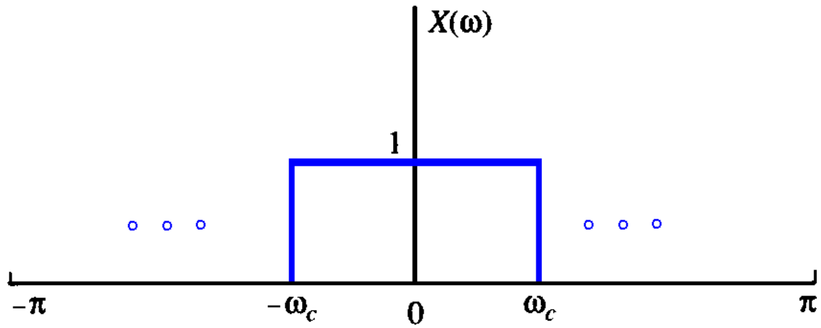
T. Inversa de Fourier de S.D.

Ejemplo

- Obtener la *transformada inversa* de Fourier de una señal ***rectangular.***

$$X(w) = \begin{cases} 1 & |w| \le w_c \\ 0 & w_c < |w| \le \pi \end{cases}$$

$\therefore$ Señal de energía finita con periodo 2π



- **Solución:** por definición:

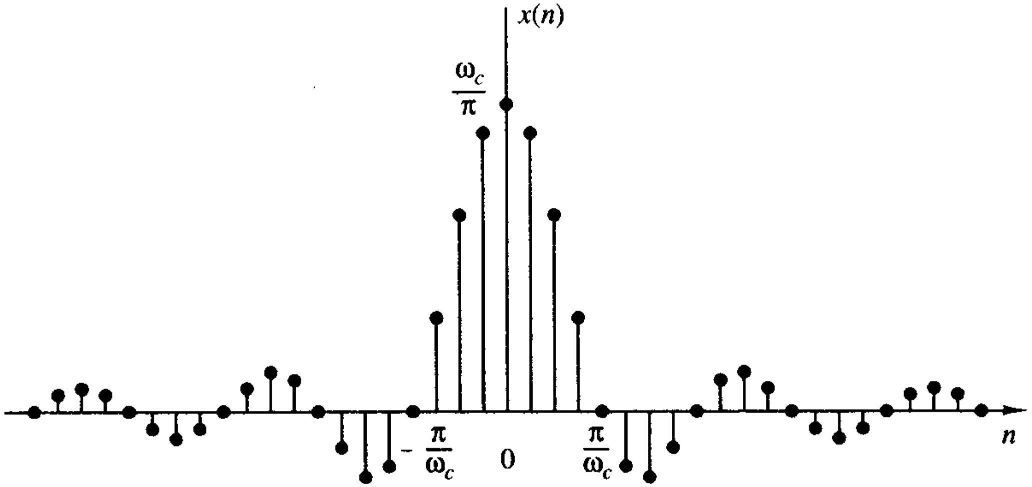
$$x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-w_c}^{w_c} e^{jwn}\, dw = \frac{sen\,(w_c\, n)}{\pi\, n} \qquad n \neq 0, \qquad\qquad x(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-w_c}^{w_c} dw = \frac{w_c}{\pi}$$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

■ Ejemplo…

- ► **Solución:** ….

$$x(n)=\begin{cases}\dfrac{w_c}{\pi} & n=0\\[2ex] \dfrac{w_c}{\pi}\,\dfrac{sen\,(w_c\,n)}{w_c\;n} & n\neq 0\end{cases}$$



- **Energía de Señales Discretas**
  - Para una señal discreta $x(n)$, la energía se calcula como:

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)x^*(n)$$

  - Al reemplazar $x^*(n)$ por la definición de la Transformada inversa, se obtiene

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)x^*(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X^*(w)e^{-jwn}\,dw\right]$$

Densidad Espectral de Energía

- **Energía de Señales Discretas**
  - Manipulando la expresión anterior, se llega a:

$$E_x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X^*(w)\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\, e^{-jwn}\right] dw = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |X(w)|^2 \, dw$$

  - **Relación de Parseval:** relación de energía entre x(n) y X(*w*)

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |X(w)|^2 \, dw$$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Densidad Espectral de Energía

- **Definición**
  - La Densidad Espectral de Energía $S_{xx}(w)$ de una señal $x(n)$ representa la distribución de energía en función de la frecuencia

$$S_{xx}(w) = |X(w)|^2$$

    - Donde $X(w) = |X(w)|\, e^{j\,\Theta(w)}$, con

      $|X(w)|$ espectro de magnitud

      $\Theta(w) = \angle X(w)$ espectro de fase

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Densidad Espectral de Energía

- **CASO ESPECIAL: Señales aperiódicas reales**
  - Constituyen todas las señales prácticas
  - En forma general X(w) es complejo y satisface las siguientes condiciones
    - $X(w)^* = X(-w)$
    - $|X(w)| = |X(-w)|$, simetría par
    - $\Theta(w) = -\Theta(w)$, simetría impar
    - $S_{xx}(w) = S_{xx}(-w)$, simetría par
  - Por las propiedades de simetría:
    - El rango de frecuencias puede limitarse a $0 \leq w \leq \pi$ (la mitad).
    - La otra mitad se determina a partir de las condiciones de simetría.

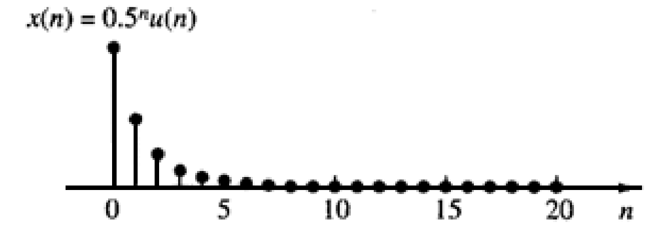
Observación

- Las condiciones de simetría se conservan para señales discretas periódicas y aperiódicas,
- La descripción en el dominio de la frecuencia de una **señal real** en tiempo discreto se especifica completamente por su espectro en el rango $0 \leq w \leq \pi$.

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

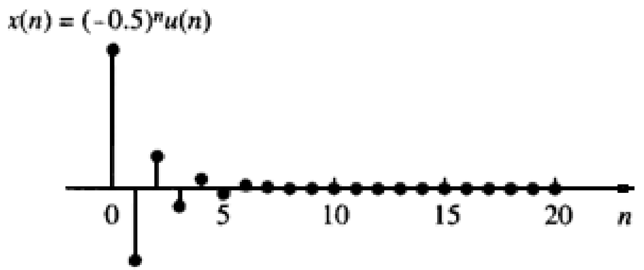
- **Ejemplo 1.** Determinar la T.F y la densidad espectral de energía de la señal,

$$x(n) = a^n u(n) \qquad -1 < a < 1$$



- Puesto que |a | < 1, la secuencia x(n) es absolutamente sumable,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| = \sum_{n=0}^{\infty} |a^n| = \frac{1}{1-|a|} < \infty$$



- La transformada de Fourier de x(n) existe y está dada por,

$$X(w) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-jwn} = \sum_{n=0}^{\infty} (a e^{-jw})^n = \frac{1}{1-a e^{-jw}}$$

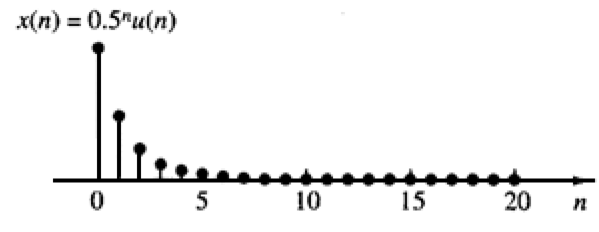
humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

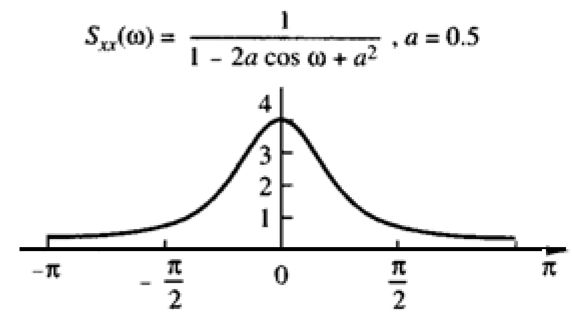
Transf. de Fourier - Señales *Discretas*

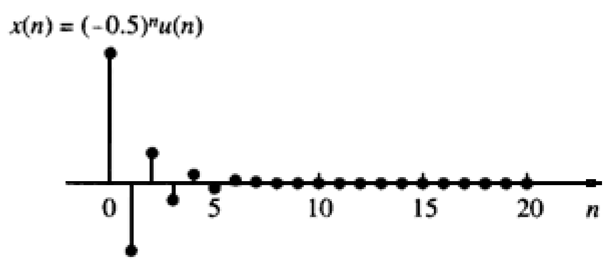
■ Ejemplo 1. ..

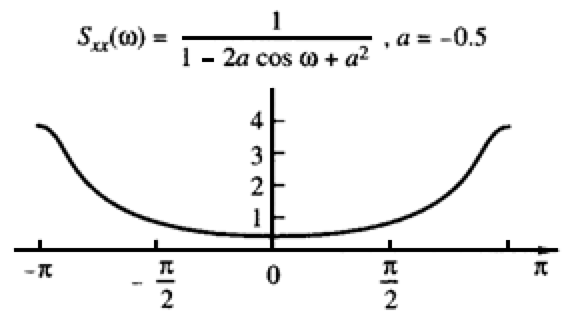
▸ La densidad espectral de energía viene dada por,

$$S_{xx}(w)=\left|X(w)\right|^2=X(w)X^*(w)=\frac{1}{\left(1-a\,e^{-jw}\right)\left(1-a\,e^{jw}\right)}=\frac{1}{1-2a\cos w+a^2}$$



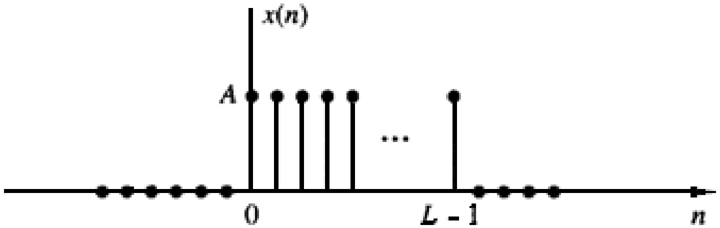






- **Ejemplo 2.** Determinar la TF y la densidad espectral de energía de la secuencia

$$x(n)=\begin{cases} A & 0\le n\le L-1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$



- **Solución**
  - La señal x(n) es de energía finita y es absolutamente sumable → su TF existe.

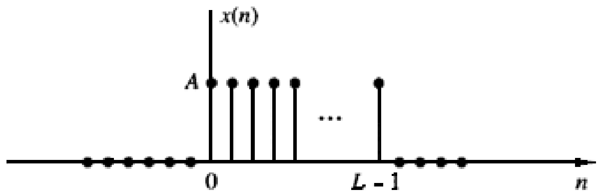
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|x(n)\right|=\sum_{n=0}^{L-1}|A|=L|A|<\infty \qquad E_x=L\,|A|^2$$

  - La TF está dada por:

$$X(w)=\sum_{n=0}^{L-1}A\,e^{-jwn}=A\frac{1-e^{-jwL}}{1-e^{-jw}}=Ae^{-j(w/2)(L-1)}\frac{sen(wL/2)}{sen(w/2)}$$

Ejemplo 2…

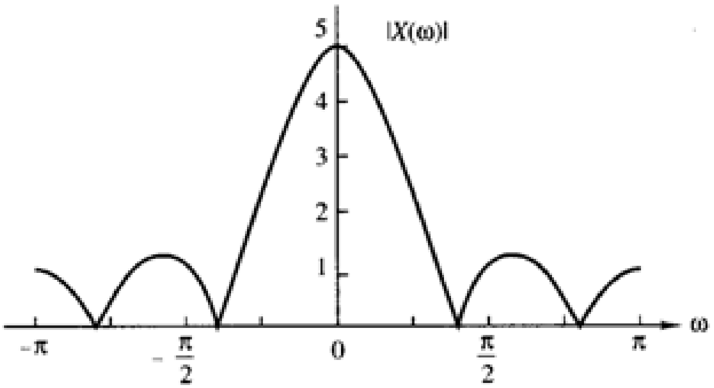
- Por lo tanto, para x(n)

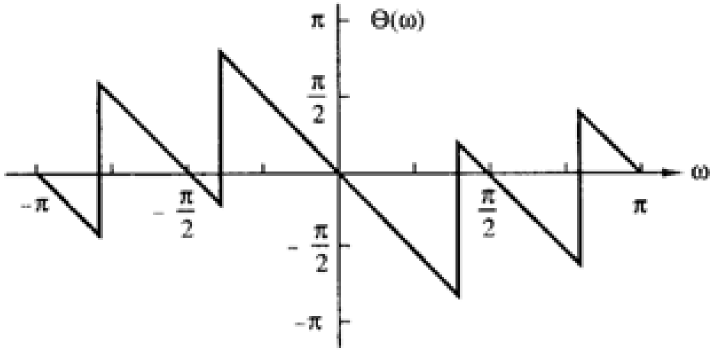


- La magnitud y fase del espectro son:

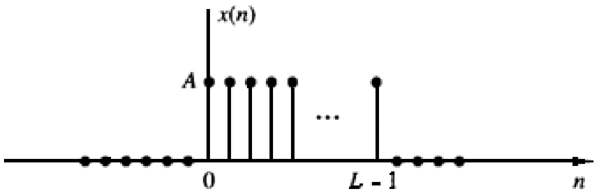
$$|X(w)| = \begin{cases} |A|L & w = 0 \\ |A|\left|\dfrac{sen(wL/2)}{sen(w/2)}\right| & \text{otro } w \end{cases}$$

$$\angle X(w) = \angle A - \frac{w}{2}(L-1) + \angle \frac{sen(wL/2)}{sen(w/2)}$$

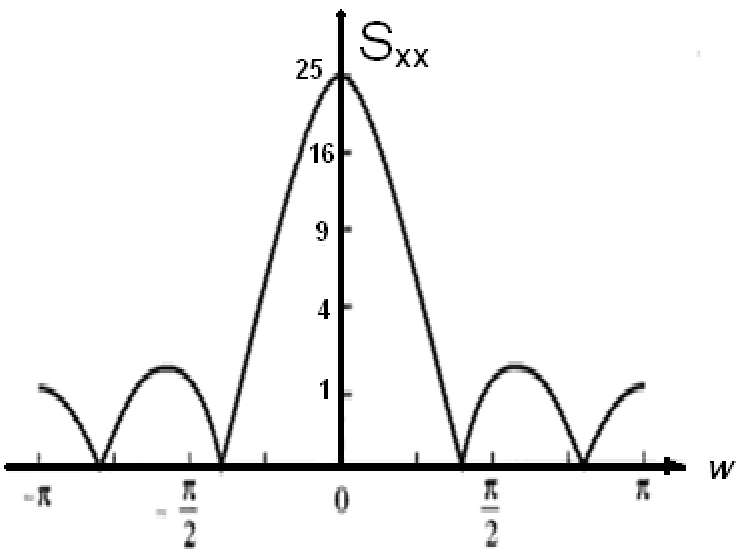




- **Ejemplo 2…**
  - La densidad espectral de energía está dada por:



$$|X(w)|^2 = \begin{cases} |A|^2 L^2 & w = 0 \\ |A|^2 \left| \dfrac{sen(wL/2)}{sen(w/2)} \right|^2 & \text{otro } w \end{cases}$$



Relación Transformada - Serie de Fourier

- Si se **compara** la **TF** en un conjunto de frecuencias **armónicamente** relacionadas del **pulso rectangular**,

$$w_k = \frac{2\pi}{N}k \qquad k = 0,1,\ldots,N-1$$

$$X\left(\frac{2\pi}{N}k\right) = Ae^{-j(\pi/N)k(L-1)}\frac{sen[(\pi/N)k\,L]}{sen[(\pi/N)k]}$$

con los **coeficientes de Fourier** de la respectiva **onda rectangular** ***periódica***, se encuentra que:

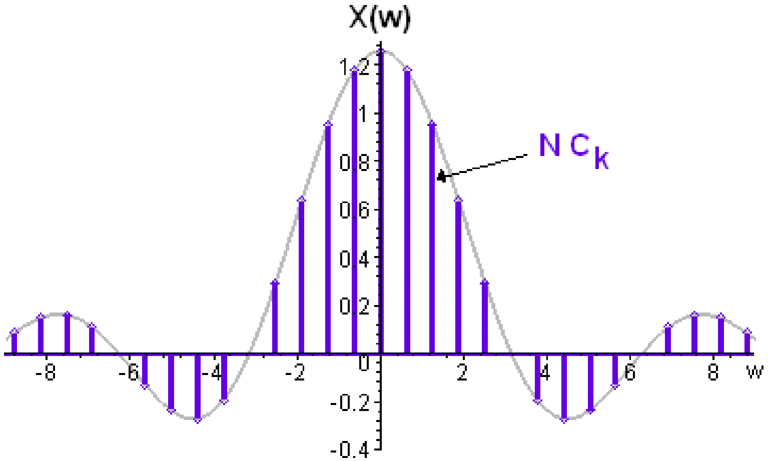
$$X\left(\frac{2\pi}{N}k\right) = N\,c_k \qquad \text{para} \quad k = 0,1,\ldots,N-1$$

■ Relación Transformada - Serie de Fourier …

► **Conclusión:**

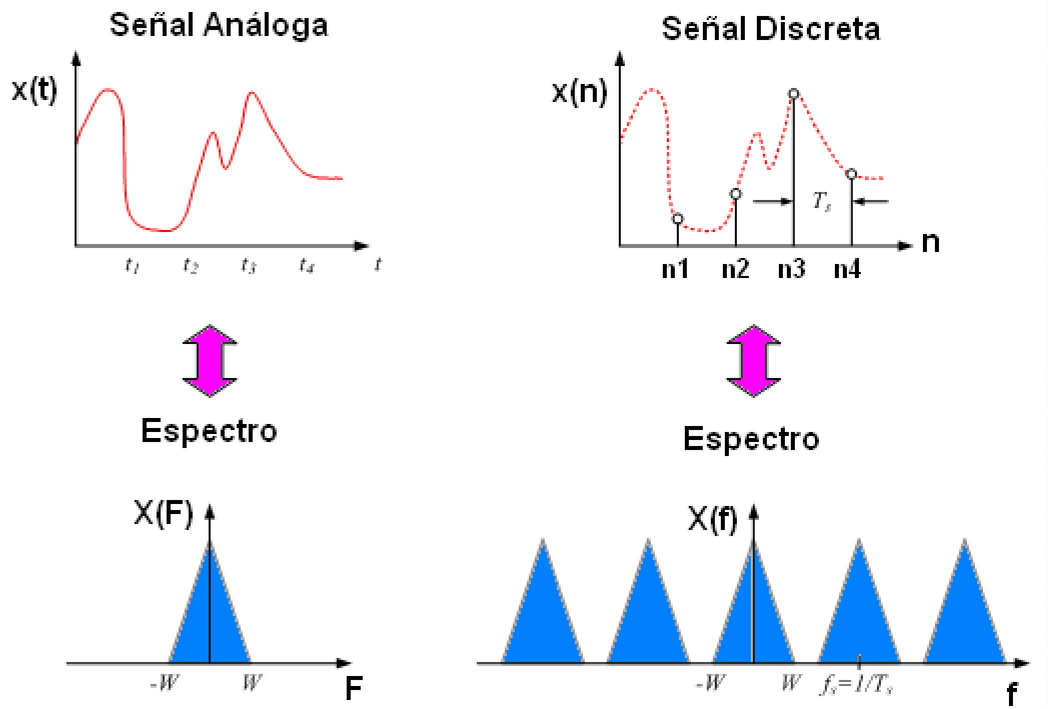
La T.F. de un solo pulso rectangular evaluado en un conjunto de frecuencias armónicas, es un múltiplo de los Coeficientes de la Serie Fourier $\{c_k\}$ de la correspondiente señal periódica.

► Lo anterior se cumple para todas las señales !!



Relación Transformada Continua –Transformada Discreta

- Para una señal x(t) y su respectiva señal discretizada x(n) se ecuentra que sus espectros tienen **formas similares**, pero:
  - La señal **x(t):** Espectro continuo aperiódico.
  - La señal **x(n):** Espectro continuo periódico.



Relación entre Transformadas Fourier y Z

- La transformada z se **define** como:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\, z^{-n} \qquad ROC:\ r_2 < |z| < r_1$$

- Al sustituir **z= r e ^{jw}** en X(z) dentro de la ROC, se tiene

$$X(z)\,\big|_{z=re^{jw}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[x(n)\, r^{-n}\right] e^{-jwn}$$

- La expresión anterior puede considerarse como la TF de **x(*n*) r $^{-n}$**.
  - El factor **r^{-n}** crece con *n* si r<1 y decrece si r>1.
- Si X(z) **converge** para | z | = 1, se tiene:

$$X(z)\,\big|_{z=e^{jw}} \equiv X(w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\, e^{-jwn}$$

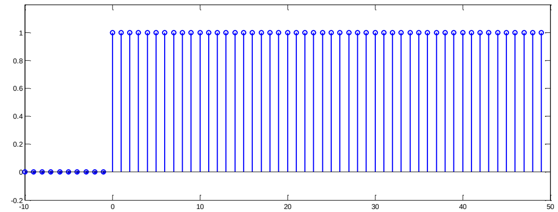
- **La T. F. puede interpretarse como la T. z. de la secuencia x(n) evaluada sobre la circunferencia unidad**

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Observaciones

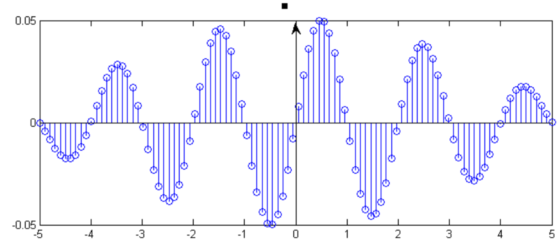
- La T. F. es igual a la T. z. evaluada en la circunferencia unidad.
- Si $|z| = 1$ no pertenece a la ROC de X(z) $\rightarrow$ la T.F. X (w) no existe.
- *Existen señales* ***con Transformada z*** *pero sin* ***T.F.***
  - *Ejemplo:*

$$x(n) = u(n)$$



- *Existen señales* ***con Transformada de Fourier*** *sin* ***T.z.***
  - *Ejemplo:*

$$x(n) = \frac{sen\,(w_c\, n)}{\pi\ n}$$



humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

- **T. F. de Señales con Polos en el Círculo Unitario.**

  - La T.F. de $x(n)$ puede obtenerse evaluando su T.z. sobre la **circunferencia unidad**, siempre y cuando la circunferencia se encuentre **en la ROC**.

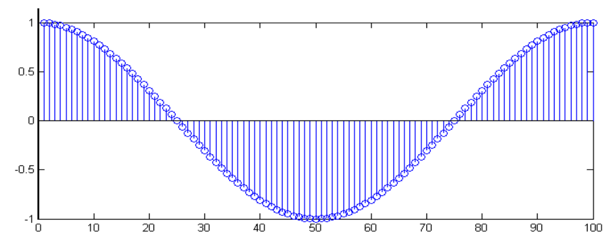
  - Existen secuencias **aperiódicas** que no son **ni absoluta ni cuadráticamente sumables**.
    - Su T.F. no existe.
    - Tienen polos sobre la circunferencia unidad.

T. Fourier de señales con polos en el círculo unitario.

- **Ejemplos:**

$$x(n) = u(n) \qquad X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

$$x(n) = \cos(w_0\, n)\, u(n) \qquad X(z) = \frac{1 - z^{-1}\cos w_0}{1 - 2\, z^{-1}\cos w_0 + z^{-2}}$$



- **T.F. de señales con polos en el círculo unitario …**

  - Cómo calcular las T.F de señales $x(n)$ que no son ni absoluta ni cuadráticamente sumables ?
  - Permitiendo que $X(w)$ tengan discontinuidades (*impulsos*) en las frecuencias que corresponden a las localidades de los polos de $X(z)$ sobre la circunferencia .

- **T. Fourier de señales con polos en el círculo unitario …**

  - **Ejemplo 1.** Determine la transformada de Fourier de la señal

$$x_1(n) \;=\; u(n)$$

  - **Solución**:
    - La Transformada z de $x_1(n)$ está dada por,

$$X_1(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1} \qquad ROC: |z| > 1$$

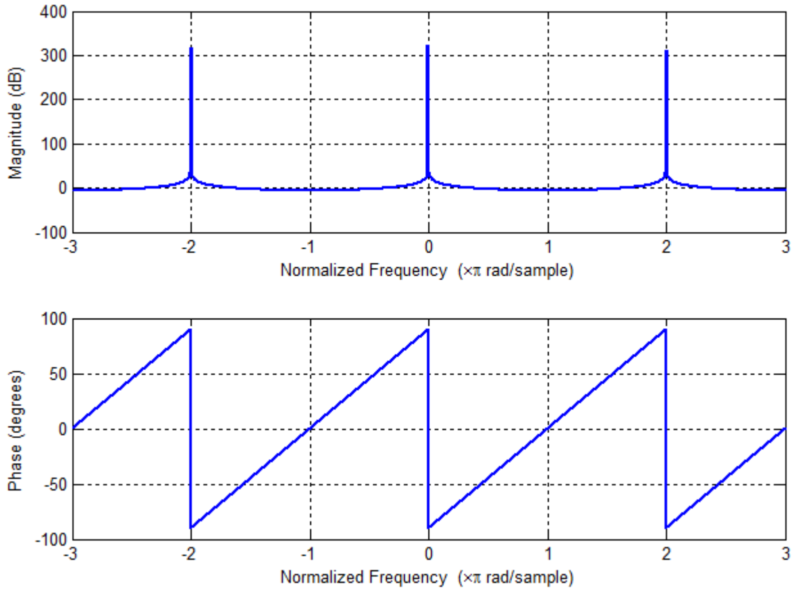
- **Solución …**
  - Reemplazando $z = e^{jw}$ en

$$X_1(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1} \qquad ROC: |z| > 1$$

  - Se tiene,

$$X_1(w) = \frac{e^{jw/2}}{2\,j\,sen(w/2)} = \frac{1}{2\,sen(w/2)} e^{j(w-\pi/2)}$$

$$w \neq 2\pi\ k \quad k = 0,1,\ldots$$



  - $X_1(w)$ presenta impulsos de área π en w=0 y múltiplos de 2 π.

T. Fourier de señales con polos en el círculo unitario …

- **Ejemplo 2.** Determine la transformada de Fourier de la señal

$$x_2(n) = (-1)^n u(n)$$

- **Solución**:
  - La Transformada z de $x_2(n)$ está dada por,

$$X_2(z) = \frac{1}{1+z^{-1}} = \frac{z}{z+1} \qquad ROC: |z| > 1$$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

- **Solución …**
  - Reemplazando $z = e^{jw}$ en

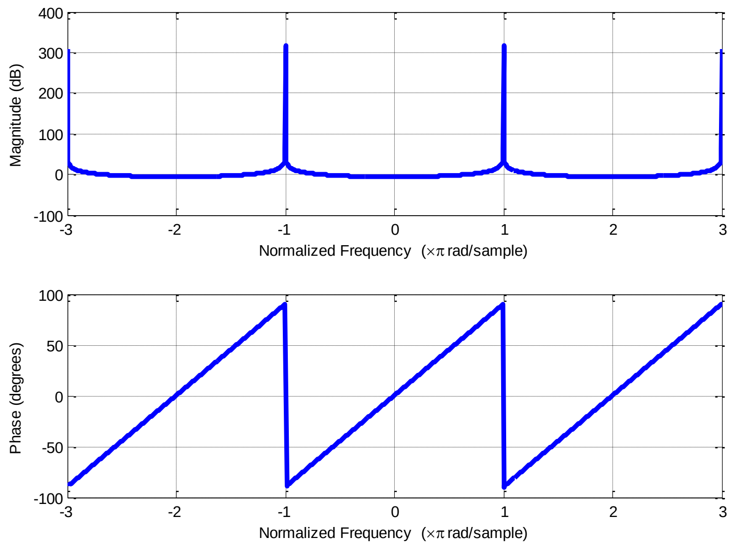
$$X_2(z) = \frac{1}{1+z^{-1}} = \frac{z}{z+1} \qquad ROC: |z| > 1$$

  - Se tiene,

$$X_2(w) = \frac{e^{jw/2}}{2\cos(w/2)}$$

$$w \neq 2\pi\left(k + \frac{1}{2}\right) \quad k = 0,1,\ldots$$

  - $X_2(w)$ presenta impulsos en $w = \pi + 2\pi k$.



T. F. de señales con polos en el círculo unitario …

- **Solución...**
  - El **módulo** del espectro es,

$$|X_2(w)| = \frac{1}{2|\cos(w/2)|} \quad w \neq 2\pi k + \pi \quad k = 0,1,\ldots$$

  - La **fase** está dada por,

$$\angle X_2(w) = \begin{cases} \dfrac{w}{2} & si \quad \cos(w/2) \geq 0 \\ \dfrac{w}{2} + \pi & si \quad \cos(w/2) < 0 \end{cases}$$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co

Alguna Relaciones Útiles

$$e^{a+jb} = e^{a}\left(\cos b + j\,sen\,b\right)$$

$$e^{a-jb} = e^{a}\left(\cos b - j\,sen\,b\right)$$

$$\cos\theta = \frac{e^{j\theta}+e^{-j\theta}}{2}$$

$$sen\,\theta = \frac{e^{j\theta}-e^{-j\theta}}{2j}$$

humberto.loaiza@correounivalle.edu.co