ÍNDICE

Índice 1

I Clase 2: Introducción a Autómatas Finitos 2

1. Autómatas Finitos: Definiciones Basicas, Computación, Operaciones y Clausura . . . 2
   1.1. Ejemplos . . . 2
2. Cómo opera un AF . . . 2
3. Definición Formal de un Autómata Finito . . . 3
   3.1. Ejemplo 1 . . . 3
4. Lenguaje asociado a un Autómata Finito . . . 3
5. Definición Formal de Computación de un AF . . . 4
6. Lenguaje Reconocido por un Autómata Finito . . . 4
7. Clase de lenguajes regulares . . . 5
8. Propuestos . . . 5
9. Algunas precisiones . . . 5
10. Operaciones sobre Lenguajes . . . 5
11. Clausura . . . 5
    11.1. Motivación . . . 5
    11.2. Definición . . . 6
    11.3. Clausura en lenguajes regulares . . . 6
        11.3.1. Complemento . . . 6
        11.3.2. Unión . . . 6
        11.3.3. Intersección . . . 6

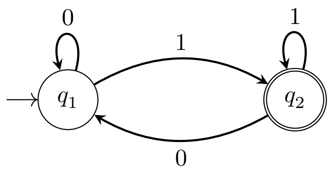
I

CLASE 2: INTRODUCCIÓN A AUTÓMATAS FINITOS

1 Autómatas Finitos: Definiciones Basicas, Computación, Operaciones y Clausura

1.1 Ejemplos

- M_1



Un poco de simbología.

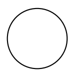


Figura 1.1: Estado

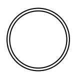


Figura 1.2: Estado final

Flecha = Transición.

2 Cómo opera un AF

Autómata finito M al recibir una cadena w como entrada:

- Parte en estado inicial.
- Lee entrada de izquierda a derecha, un símbolo a la vez.
- Cambia de estado según transición tomada
- Al leer el último símbolo, M produce una salida que depende del estado:
  - — si quedó en estado final, entonces entrega `'acepta'`.
  - — sino `'rechaza'` (no acepta).

3 Definición Formal de un Autómata Finito

Definición 1.1: ***Autómata Finito***

Un autómata finito es una 5-tupla $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ donde

- Q es un conjunto finito o conjunto de estados
- Σ es un conjunto finito o alfabeto
- $\delta : Q \times \Sigma \to Q$ es la función de transición
- $q_0 \in Q$ es el estado inicial, y
- $F \subseteq Q$ es el conjunto de estados finales

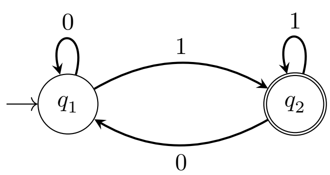
3.1 Ejemplo 1

$M_1 = (Q, \Sigma, \delta, q_1, F)$ donde

- $Q = \{q_1, q_2\}$
- $\Sigma = \{0, 1\}$
- $\delta : Q \times \Sigma \to Q$ está definido por

δ	0	1
q_1	q_1	q_2
q_2	q_1	q_2

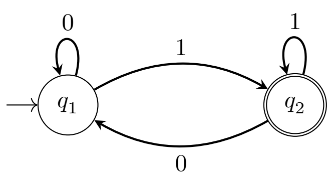
- q_1 es el estado inicial, y
- $F = \{q_2\}$

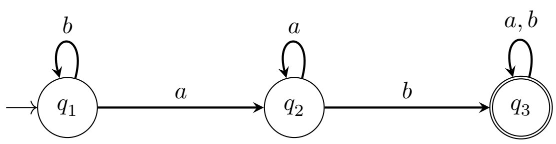


4 Lenguaje asociado a un Autómata Finito

Sea M un autómata finito. Informalmente, diremos que el lenguaje reconocido por M, y denotado $\mathcal{L}(M) = \varnothing$, es el conjunto de todas las palabras en Σ^* para las cuales M retorna `'acepta'`.

Si M no acepta ninguna palabra, entonces $\mathcal{L}(M) = \varnothing$





- $\mathcal{L}(M_1) = \{w \in \{0, 1\}^* \mid w \text{ termina en} 1\}$
- $\mathcal{L}(M_2) = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ tiene como subcadena } \underline{\text{ab}}\}$

5 Definición Formal de Computación de un AF

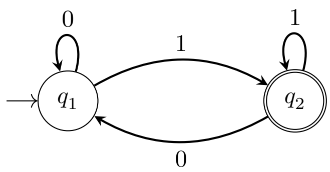
Definición 1.2: *Computación de un AF*

Sea $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un autómata finito y sea $\mathrm{w} = \mathrm{w}_1 \dots \mathrm{w}_n$ una cadena sobre Σ. Decimos que M acepta w si existe una secuencia de estados $r_0, r_1, \dots, r_n \in Q$ con las siguientes 3 condiciones

1) $r_0 = q_0$

2) $\delta(r_i, w_{i+1}) = r_{i+1}$ para todo $i = 0, \dots, n-1$

3) $r_n \in F$



¿M_1 acepta 01001? ¡Sí! $\exists$ secuencia de estados $(r_0, \dots, r_5) = (q_1, q_1, q_2, q_1, q_2, q_2)$ tal que

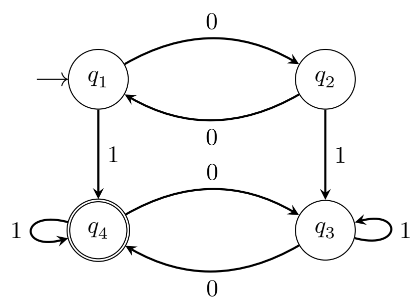
- $r_0 = q_1$
- Cada r_{i+1} proviene de un r_i procesando el símbolo w_{i+1}, para $i = 0$ hasta $i = 4$:
  1) $\delta(r_0, w_1) = \delta(q_1, 0) = q_1 = r_1$
  2) $\delta(r_0, w_2) = \delta(q_1, 1) = q_2 = r_2$
  3) $\delta(r_0, w_3) = \delta(q_1, 0) = q_1 = r_3$
  4) $\delta(r_0, w_4) = \delta(q_1, 1) = q_2 = r_4$
  5) $\delta(r_0, w_5) = \delta(q_1, 1) = q_2 = r_5$
- $r_5 = q_2 \in F$

6 Lenguaje Reconocido por un Autómata Finito

Definición 1.3: *Lenguaje reconocido por un AF*

Sea M un autómata finito. El **lenguaje reconocido por** M, denotado $\mathcal{L}(M)$, es el conjunto de todas las palabras en Σ^* para las cuales M retorna `'acepta'`. Esto es

$$\mathcal{L}(M) = \{\mathrm{w} \in \Sigma^* \mid M(\mathrm{w}) = \texttt{'acepta'}\}$$



$\mathcal{L}(M_1) = ?$

(Propuesto)

7 Clase de lenguajes regulares

Definición 1.4: *Lenguajes Regulares*

Un lenguaje es regular si existe un AF que lo reconoce.

8 Propuestos

Demuestre que son regulares, donde $\Sigma = \{0, 1\}$.

- $L_1 = \varnothing$
- $L_2 = \{\mathrm{w} \in \Sigma^* \mid \text{w contiene al menos 3 unos}\}$
- $L_3 = \{\mathrm{w} \in \Sigma^* \mid \text{w contiene un 1 en la tercera posición}\}$
- $L_4 = \{\mathrm{w} \in \Sigma^* \mid \text{w contiene 00 como substring}\}$
- $L_5 = \{\mathrm{w} \in \Sigma^* \mid \text{w contiene un 1 en la tercera posición de atrás para adelante}\}$

9 Algunas precisiones

$$\begin{array}{cc}
\varnothing & \text{denota el conjunto vacío: } \varnothing = \{\} \\
\varepsilon & \text{denota la palabra vacía}(\varepsilon \notin \Sigma) \text{ y } |\varepsilon| = 0 \\
\{\varepsilon\} & \text{denota un lenguaje, con 1 sólo elemento} \\
\varnothing & \text{es un lenguaje}
\end{array}$$

10 Operaciones sobre Lenguajes

Recuerdo. Unión, Intersección, Concatenación, Complemento, Estrella de Kleene.

11 Clausura

11.1 Motivación

Sabemos que ambos

$$A = \{\mathrm{w} \in \{0, 1\}^* \mid \text{w comienza con un 1}\}$$

Y

$$B = \{\mathrm{w} \in \{0, 1\}^* \mid \text{w termina con un 0}\}$$

son regulares. Entonces ¿debiera ser el lenguaje

$$C = \{\mathrm{w} \in \{0, 1\}^* \mid \text{w comienza con 1 y termina con un 0}\}$$

también regular?

Más generalmente: Si lo único que sabemos es que L_1 y L_2 son regulares, ¿$L_1 \cap L_2$ también lo es? y $L_1 \cup L_2$

11.2 Definición

Definición 1.5: ***Clausura***

Una clase $\mathcal{C}$ de lenguajes es *cerrada* bajo la operación (binaria) $\oplus$ si el lenguaje resultante de aplicar la operación $\oplus$ sobre dos lenguajes $L_1, L_2 \in \mathcal{C}$ tambien está en $\mathcal{C}$, esto es, si

$$L_1, L_2 \in \mathcal{C} \text{ implica que } L_1 \oplus L_2 \in \mathcal{C}$$

Similarmente, si $\odot$ es operación unaria, entonces $\mathcal{C}$ es cerrada bajo $\odot$ si para todo $L \in \mathcal{C}, \odot L \in \mathcal{C}$

11.3 Clausura en lenguajes regulares

Teorema 1.1: ***Clausura de lenguajes regulares***

1) Complemento

2) Unión

3) Intersección

4) Concatenación

5) Estrella de Kleene

Dejaremos pendiente por ahora: Concatenación y Estrella de Kleene.

11.3.1 *Complemento*

Dem: Sea L un lenguaje regular cualquiera y $M = \{Q, \Sigma, \delta, q_0, F\}$ el autómate finito que lo reconoce $(\mathcal{L}(M) = L)$.

Creamos $M' =$ igual a M pero donde todo estado final se cambia por un estado no final y viceversa.

Luego $M' = M = \{Q, \Sigma, \delta, q_0, F'\}$, $F' = Q \setminus F$

Demostraremos que $\mathcal{L}(M) = \mathcal{L}(M')^{\complement} = L^{\complement}$ por una doble inclusión.

1) $\mathcal{L}(M) \subseteq \mathcal{L}(M')^{\complement}$

- Sea $w \in \Sigma^*$, tal que $w \in L = \mathcal{L}(M)$. $w \in w_1, \ldots, w_n$.
- Luego, $\exists r_0, r_1, \ldots, r_n \in Q$ tales que $r_0 = q_0, r_{i+1} = \delta(r_i, w_{i+1}) \forall i = 0, \ldots, n-1 r_n \in F$
- Pero en M' trendremos que $r_n \in F, r_n \notin F'$
- $\Rightarrow w \notin \mathcal{L}(M')$ pues M' es determinista.

11.3.2 *Unión*

Dem: Pendiente

11.3.3 *Intersección*

Dem: Pendiente