通信电路原理

第二章 滤波器

LC滤波器的综合

LC滤波器综合

- **滤波的基本概念**
- **基于传输与反射的LC滤波网络综合**
  - 单端口梯形网络综合
  - 基于传输与反射的二端口LC滤波器综合
  - 滤波器逼近
  - 低通到高通、带通、带阻的转换
- **其他滤波器**

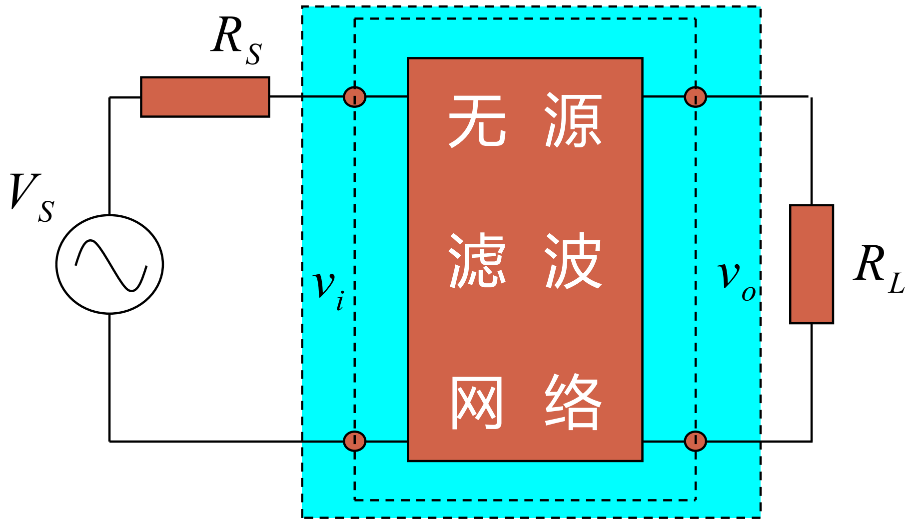
郑君里 等，《信号与系统》，第十章，模拟与数字滤波器

- 滤波器可形成传输电路中的通频带以对信号进行限带处理，在频分复用系统中可完成解复用功能，对传输信道的频率特性进行校正以及阻抗匹配与阻抗转换等功能，是通信系统重要的组成部分。

一、滤波

- 滤波：选择部分信号，通过或者阻断
- 广义上讲：滤波是对信号频谱进行处理的过程，滤波器是对信号频谱进行处理而完成某种功能的器件或电路
  - 对某一范围内或某一特定的频率分量无失真地保留或完全衰减：理想滤波器
    - 理想滤波器不可物理实现，但我们设计滤波器时总是让设计出来的滤波器尽可能地拟合逼近理想滤波器性能
  - 对某一范围内各频率分量之间的相对幅度和相位关系进行修正：均衡器
  - 更广义地讲，任何一个有频率响应的线性时不变网络均可以被视为是滤波网络

滤波器传输特性



$$H(s)=T_p(s)=2\sqrt{\frac{R_S}{R_L}}\frac{v_o}{v_S}\overset{R_L=R_S}{=}2\frac{v_o}{v_S}=\frac{v_o}{0.5v_S}$$

校准

$$\left|H(j\omega)\right|^2=4\frac{R_S}{R_L}\frac{\left|\dot{V}_o(j\omega)\right|^2}{\left|\dot{V}_S(j\omega)\right|^2}=\frac{\left|\dot{V}_o(j\omega)\right|^2/R_L}{\left|\dot{V}_S(j\omega)\right|^2/4R_S}=\frac{P_o}{P_{S,\max}}=G_p$$

$$H(s)=T_p(s)=2\sqrt{\frac{R_S}{R_L}}\frac{v_o(s)}{v_S(s)}$$

频率特性

集总参数滤波器传输函数具有如下形式：

传输函数：$$H(s)=\frac{b_0 s^m+b_1 s^{m-1}+\ldots+b_m}{s^n+a_1 s^{n-1}+\ldots+a_n}\qquad (m\le n)$$

频率特性：$$H(j\omega)=|H(j\omega)|e^{j\theta(\omega)}$$

幅频特性：$$A(\omega)=|H(j\omega)|$$

衰减特性：$$\alpha(\omega)=20\log\frac{1}{A(\omega)}$$

相频特性：$$\theta(\omega)=\arg\{H(j\omega)\}=\arctan\frac{\mathrm{Im}\{H(j\omega)\}}{\mathrm{Re}\{H(j\omega)\}}$$

群延时特性：$$\tau_g(\omega)=-\frac{d\theta(\omega)}{d\omega}$$

$$H(j\omega)=A(\omega)e^{j\theta(\omega)}$$

相位延时与群延时

$$V_0\cdot\cos\omega t$$
$$\rightarrow$$
$$A(\omega)V_0\cdot\cos(\omega t+\theta(\omega))$$
$$=A(\omega)V_0\cdot\cos\omega(t-\tau_p(\omega))$$

相位延时： $\tau_p(\omega)=-\dfrac{\theta(\omega)}{\omega}$

- 相位延时表示的是一个角频率为ω的正弦信号通过线性系统后所产生的延时

群延时： $\tau_g(\omega)=-\dfrac{d\theta(\omega)}{d\omega}$

- 群延时描述的是一群不同频率的信号通过线性系统后所产生的时间延时
  - 当其值为常数时，表示信号中各频率分量的延时时间相同，所以信号经过该滤波器后相位上不会产生失真
  - 如果不是常数，则会产生相位失真

理想线性系统

$$H(j\omega)=A(\omega)e^{j\theta(\omega)}$$

- 幅频特性为常数
- 相频特性为直线
  - 群延时特性为常数

$$H(j\omega)=A_0e^{-j\omega\tau_0}$$

理想传输线是理想线性系统：延时器

$$H(j\omega)=e^{-j\beta l}=e^{-j\omega T_D}$$

$$in=x(t)$$

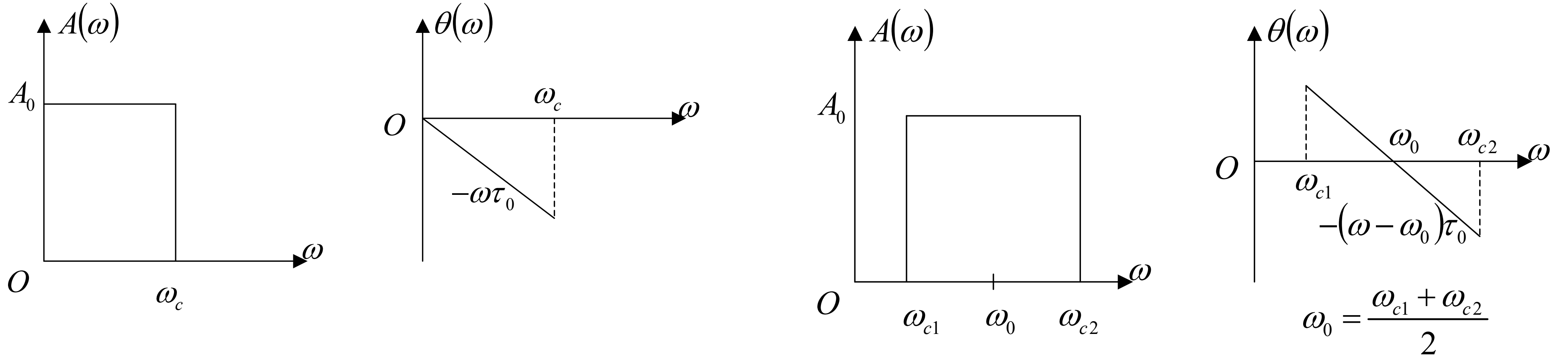
$$out=A_0x(t-\tau_0)$$

无失真传输：但不具滤波特性

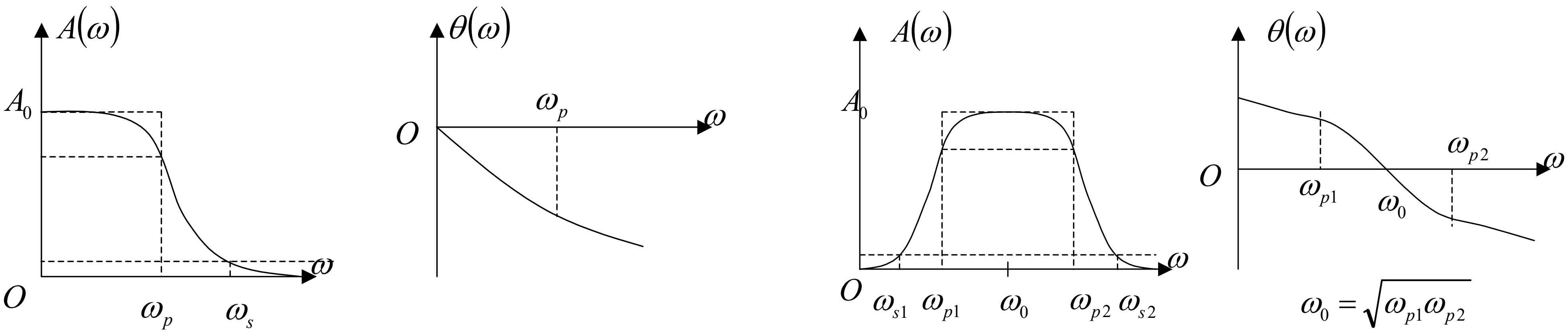
理想滤波器

- 通频带内的信号可实现无失真传输，通带外完全滤除

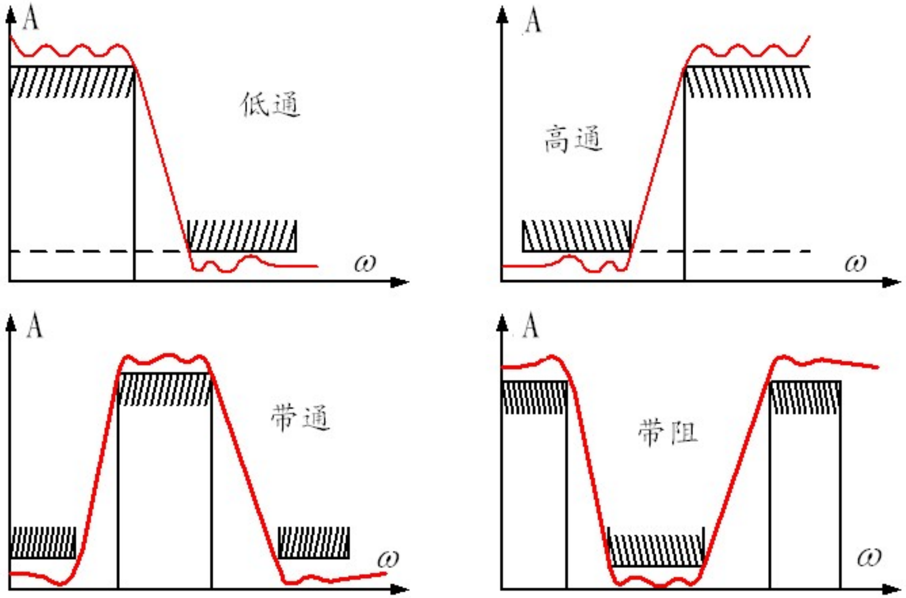
滤波特性



理想滤波器不可实现，实际滤波特性应尽可能接近理想滤波特性



滤波器分类

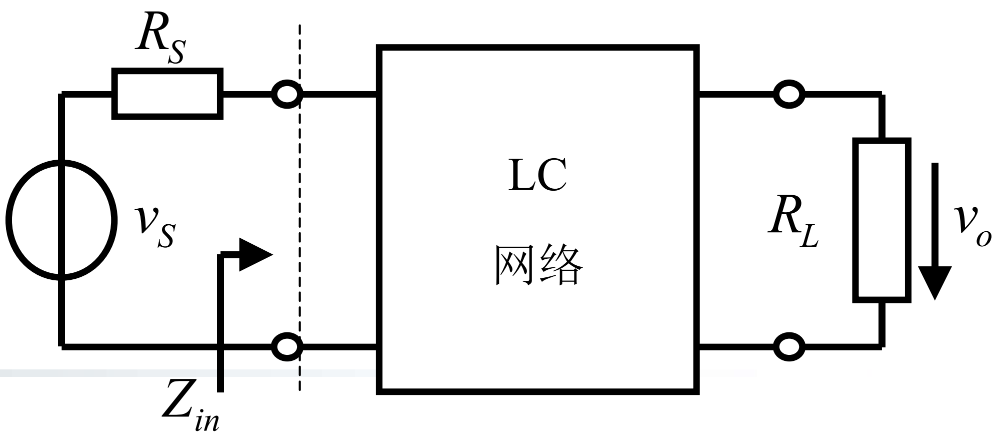


- 按幅频特性分类
  - 低通、高通、带通，带阻
- 按器件分类
  - 无源滤波器
    - LC滤波器、声表面波滤波器、晶体滤波器、分布参数滤波器
  - 有源滤波器
    - RC有源滤波器、Gm-C滤波器、开关电容滤波器、开关电流滤波器、对数滤波器
- 按被处理的信号形式分类
  - 模拟滤波器，数字滤波器，抽样数据滤波器
- 按滤波器传输函数逼近理想滤波器形式分类
  - 巴特沃思、切比雪夫、贝塞尔、椭圆逼近、…

二、LC滤波器网络综合

- LC滤波器的综合问题其实就是二端口线性网络的综合问题
  - 网络综合：给定激励信号与响应，求满足这一要求的具体网络结构及其网络参数
    - 简化：给出网络的系统函数H(s)（激励与响应之间的关系给定），求具有这种关系的网络电路结构和参数
  - LC滤波器综合：给定对滤波器幅频特性或相频特性的要求（中心频率、通频带、阻带、...），求满足要求的滤波器结构及其电路参数

LC滤波器综合步骤



- 逼近
  - 用某种形式的传输函数H(s)来逼近给定的滤波器指标要求
    - 巴特沃思、切比雪夫、贝塞尔、椭圆、…
    - 它们是某种程度上理想滤波器的替代

$$H(j\omega)=2\sqrt{\frac{R_S}{R_L}}\frac{\dot{V}_o}{\dot{V}_S}$$

$$|T_p|=|H|$$

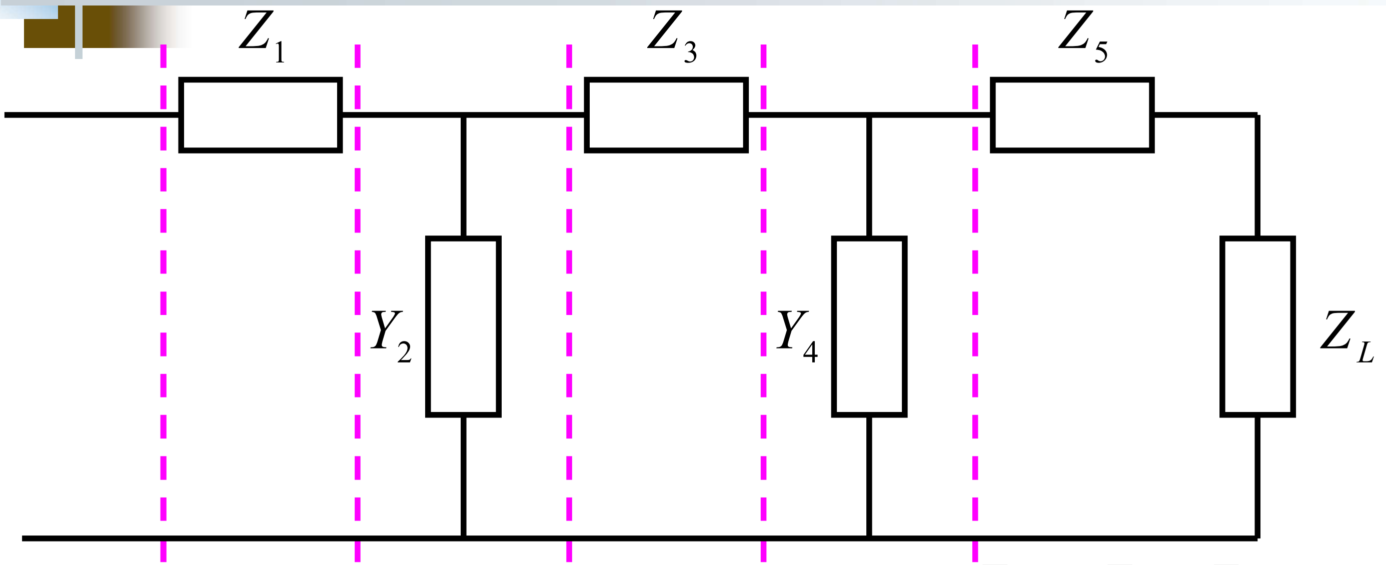
- 达林顿法
  - 根据确定的传输函数（传输系数）H(s)，确定反射系数Γ(s)，进而确定单端口输入阻抗Z_{in}(s)

$$|T_p|^2+|\Gamma_p|^2=1$$

- 单端口网络综合
  - 根据单端口输入阻抗Z_{in}(s)将LC网络综合出来

$$\Gamma_p=\frac{Z_{in}-Z_S^*}{Z_{in}+Z_S}=\frac{Z_{in}-R_S}{Z_{in}+R_S}$$

2.1 无源单端口梯形网络的输入阻抗或导纳



- 梯形单端口网络可以用连分式形式表示其输入阻抗或输入导纳

$$Z_{55} = Z_5 + Z_L$$

$$Y_{44} = Y_4 + \frac{1}{Z_{55}}$$

$$Z_{33} = Z_3 + \frac{1}{Y_{44}}$$

$$Y_{22} = Y_2 + \frac{1}{Z_{33}}$$

$$Z_{11} = Z_1 + \frac{1}{Y_{22}}$$

$$Z_{11} = Z_1 + \cfrac{1}{Y_2 + \cfrac{1}{Z_3 + \cfrac{1}{Y_4 + \cfrac{1}{Z_5 + R_L}}}}$$

- 将给定的单端口网络输入阻抗/导纳表示为连分式形式

无源单端口梯形网络的综合

$$Z_{in}(s)=\frac{3s^3+6s^2+6s+3}{2s^2+4s+3}$$

$$Z_{in}(s)=\frac{3}{2}s+\cfrac{1}{\cfrac{4}{3}s+\cfrac{1}{\cfrac{1}{2}s+1}}}$$

$$\frac{3}{2}s$$

$$2s^2+4s+3\,\big)\,3s^3+6s^2+6s+3$$

$$3s^3+6s^2+\frac{9}{2}s \qquad\qquad \frac{4}{3}s$$

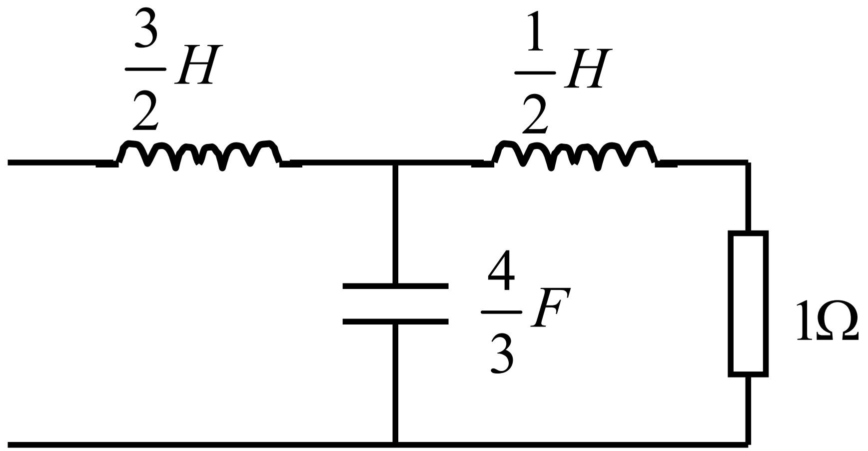
$$\frac{3}{2}s+3\,\big)\,2s^2+4s+3$$

$$2s^2+4s \qquad\qquad \frac{1}{2}s+1$$

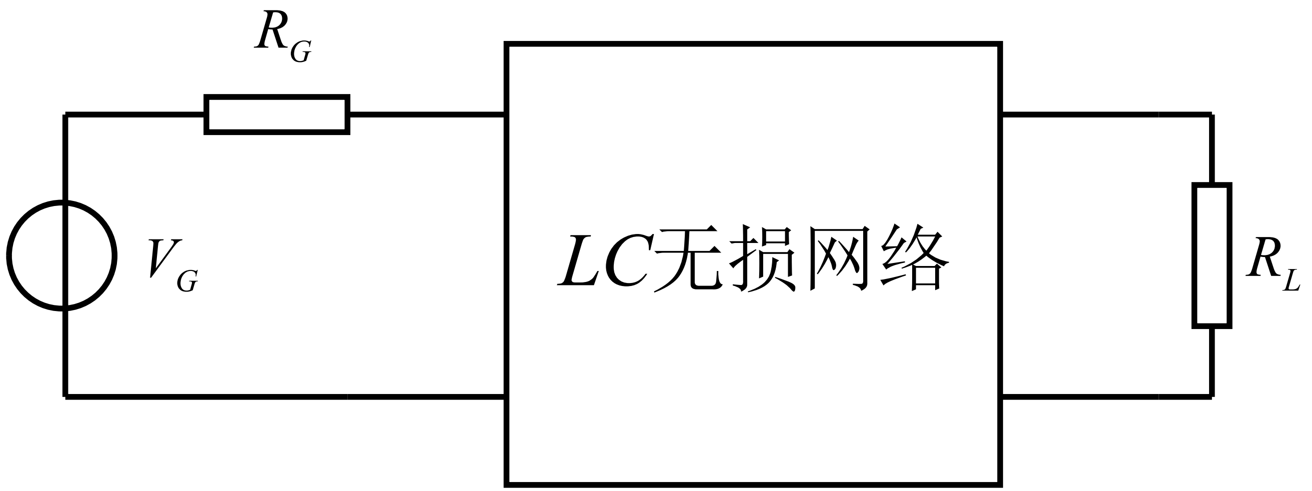
$$3\,\big)\,\frac{3}{2}s+3$$

$$\frac{3}{2}s+3$$

$$0$$

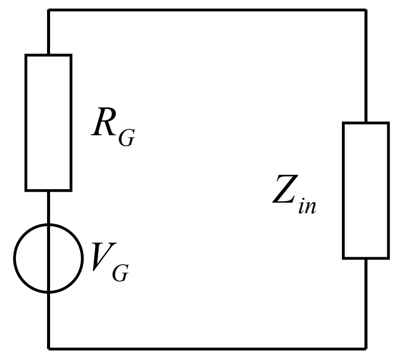


2.2 基于功率传输与反射的二端口达林顿法LC网络综合



信号源资用功率：$P_{s\max}=\dfrac{1}{2}\dfrac{\left|\dot V_G\right|^2}{4R_G}$　负载实际得到功率：$P_L=\dfrac{1}{2}\dfrac{\left|\dot V_O\right|^2}{R_L}$

功率传输:$\left|H(j\omega)\right|^2=\dfrac{P_L}{P_{s\max}}=\dfrac{4R_G}{R_L}\left|\dfrac{\dot V_O(j\omega)}{\dot V_G(j\omega)}\right|^2$　滤波器传递函数



反射系数和输入阻抗

- 传输函数表示功率传输，反射系数表示功率被反射回激励源的情况

$$\left|\Gamma_p(j\omega)\right|^2 = \frac{P_{s\max} - P_{in}}{P_{s\max}} = \frac{P_{s\max} - P_L}{P_{s\max}} = 1 - \left|H(j\omega)\right|^2$$

- 反射系数一旦确定，输入阻抗则可确认，从而可以由策动点阻抗确定电路参数

$$Z_{in}(s) = R_G \frac{1+\Gamma_p(s)}{1-\Gamma_p(s)}$$

$$\Gamma_p(s) = \frac{Z_{in}(s) - R_G}{Z_{in}(s) + R_G}$$

例1

$$\Gamma_p(s)=\frac{Z_{in}(s)-R_G}{Z_{in}(s)+R_G}$$

$$|H(j\omega)|^2=\frac{H_0^2}{1+\omega^6}$$

- 确定一个三阶巴特沃思低通滤波器的电路结构和参数，其3dB通带边缘角频率为1rad/s，已知信号源内阻为20Ω，负载电阻为80Ω。

$$\Gamma_p(j0)=\frac{Z_{in}(j0)-R_G}{Z_{in}(j0)+R_G}=\frac{R_L-R_G}{R_L+R_G}=\frac{80-20}{80+20}=0.6$$

$$H_0^2=|H(j0)|^2=1-|\Gamma_p(j0)|^2=1-0.36=0.64$$

$$|\Gamma_p(j\omega)|^2=1-|H(j\omega)|^2=1-\frac{0.64}{1+\omega^6}=\frac{0.36+\omega^6}{1+\omega^6}$$

$$\left|\Gamma_p(j\omega)\right|^2 = \frac{0.36+\omega^6}{1+\omega^6} = \Gamma_p(j\omega)\Gamma_p^*(j\omega) = \Gamma_p(j\omega)\Gamma_p(-j\omega)$$

$$p = \frac{s}{0.36^{\frac{1}{6}}} = \frac{s}{0.6^{\frac{1}{3}}}$$

$$\Gamma_p(s)\Gamma_p(-s) = \frac{0.36-s^6}{1-s^6} = 0.36\frac{1-p^6}{1-s^6}$$

$$= 0.36\frac{\left(-p^3+2p^2-2p+1\right)\left(p^3+2p^2+2p+1\right)}{\left(-s^3+2s^2-2s+1\right)\left(s^3+2s^2+2s+1\right)}$$

限定函数是最小相位的，

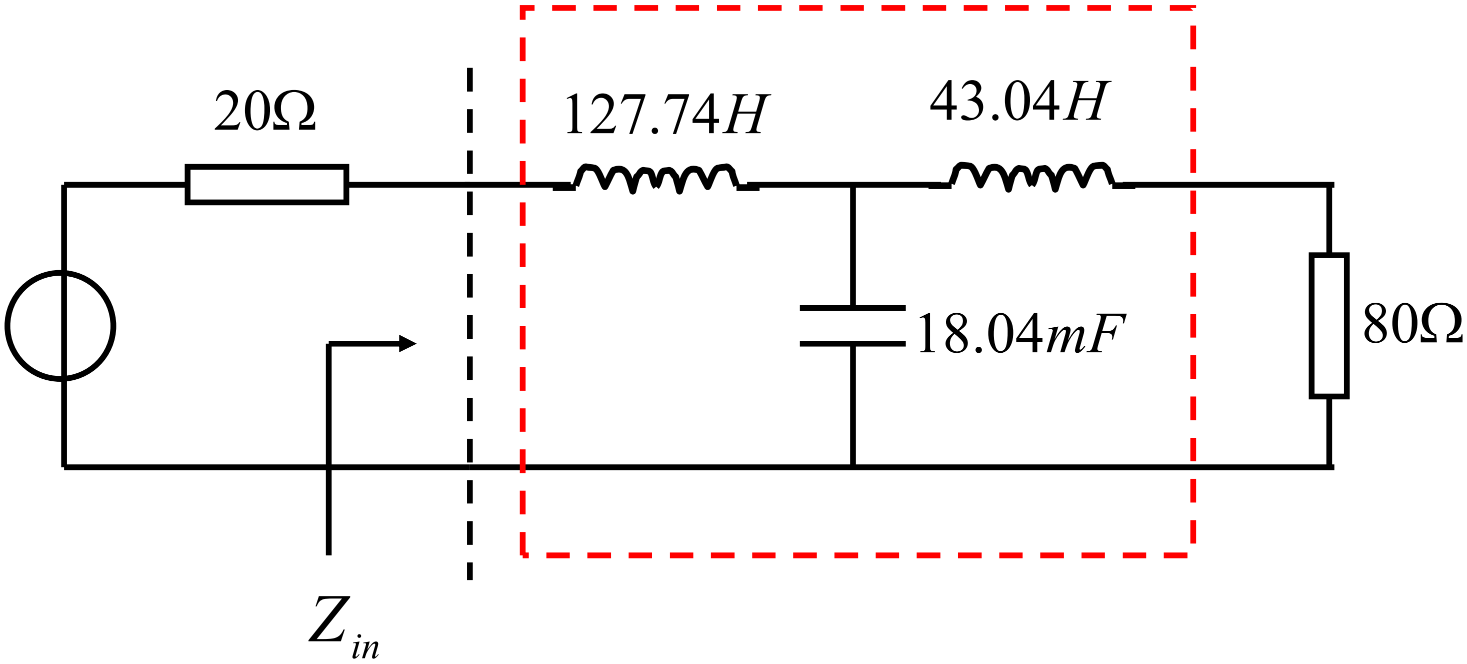
则要求零极点都在左半平面

$$\Gamma_p(s) = 0.6\frac{p^3+2p^2+2p+1}{s^3+2s^2+2s+1} = \frac{s^3+\frac{1.2}{0.6^{\frac{2}{3}}}s^2+\frac{1.2}{0.6^{\frac{1}{3}}}s+0.6}{s^3+2s^2+2s+1}$$

$$Z_{in}(s) = R_G\frac{1+\Gamma_p(s)}{1-\Gamma_p(s)} = 20\frac{2s^3+3.6869s^2+3.4228s+1.6}{0.3131s^2+0.5772s+0.4}$$

$$= 127.74s + \frac{1}{0.01804s + \frac{1}{43.40s+80}}$$

$$Z_{in}(s) = 127.74s + \cfrac{1}{0.01804s + \cfrac{1}{43.40s + 80}}$$

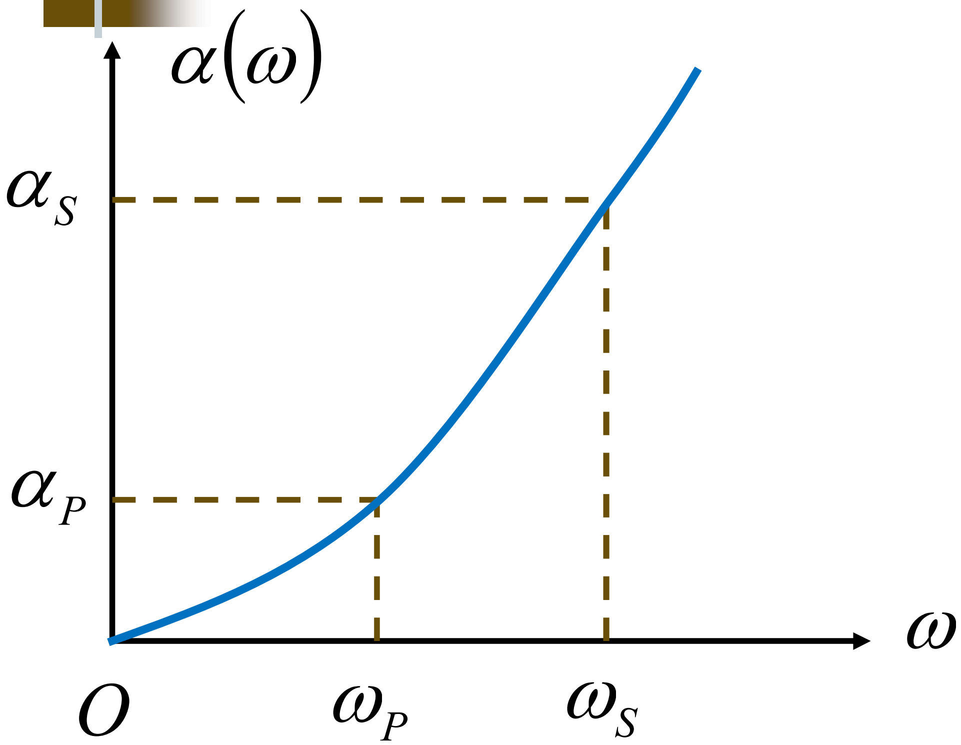


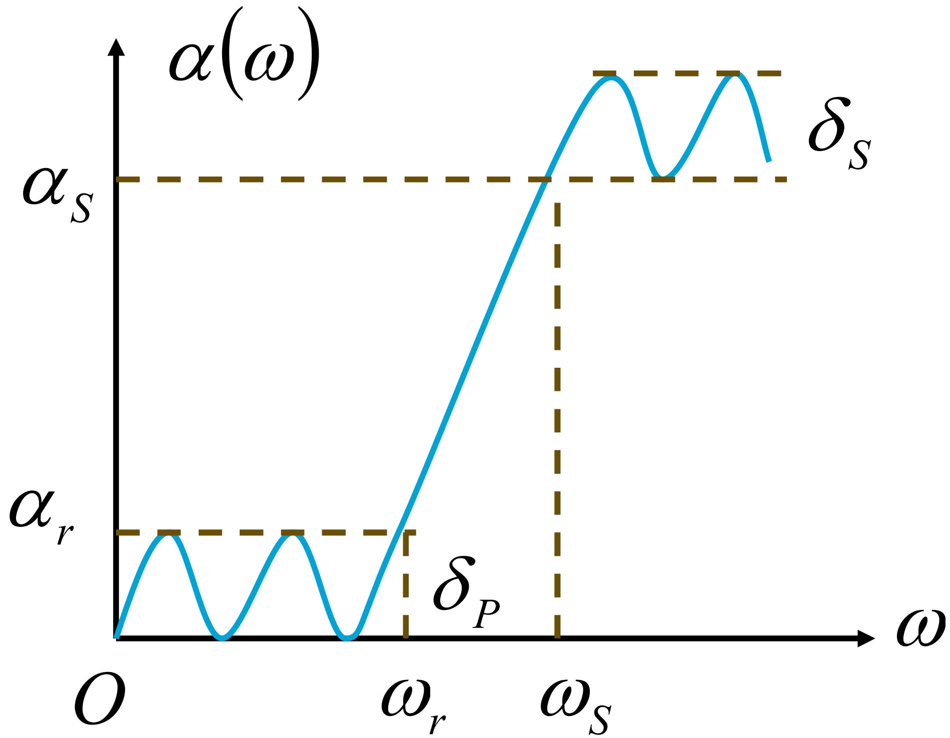
- 确定了一个三阶巴特沃思低通滤波器的电路结构和参数，其3dB通带边缘角频率为1rad/s，信号源内阻为20Ω，负载电阻为80Ω。

- 所谓逼近，就是按给定的频响特性选择适当的传输函数，以满足要求

ω_c：截止频率：人为假定的通带和阻带界限：衰减3dB处角频率

2.3 LC滤波器逼近





α_P：通带最大衰减

ω_P：通带角频率

α_S：阻带最小衰减

ω_S：阻带边缘角频率

α_r：波纹（衰减）

ω_r：波纹带宽

δ_P：通带内幅度起伏

δ_S：阻带内幅度起伏

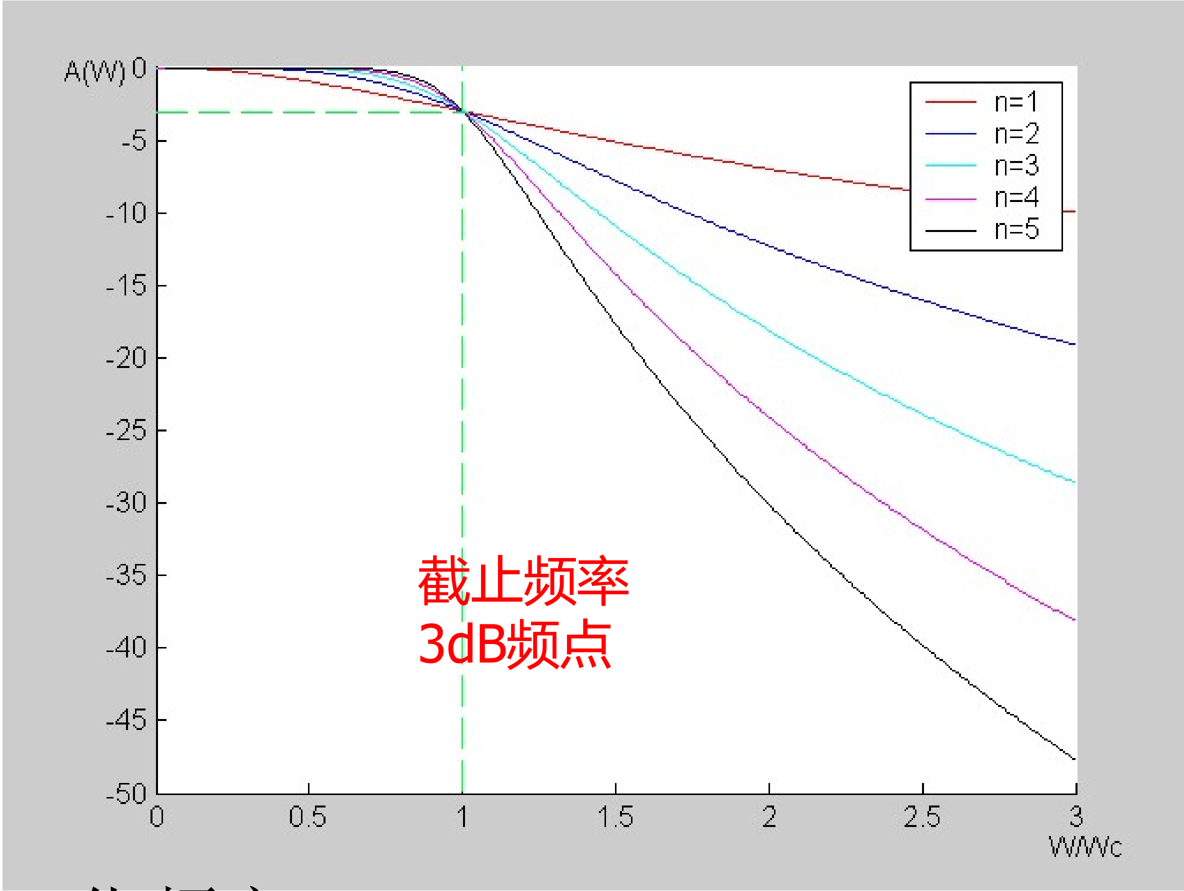
假设$R_L = R_G$，则在零频点上信号源的资用功率可全部传输到负载上，于是$H_{n0} = 1$

巴特沃思逼近

$$|H_n(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1+\Omega^{2n}}$$

- 巴特沃思滤波器在其通带内提供最大的幅度平坦度
  - 最大平坦

$$|H_n(j\omega)|^2 = \frac{H_{n0}^2}{1+\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2n}}$$



令$\Omega = \frac{\omega}{\omega_c}$，并称之为归一化频率

$$\left|H_n(j\Omega)\right|^2 = \frac{1}{1+\Omega^{2n}} \qquad \Omega = \frac{\omega}{\omega_c}$$

巴特沃思滤波器的解析解

（1）$1-s^{2n}=0$有解析解（均匀地分布在单位圆上），

（2） 滤波器归一化元件值存在解析表达式:

$$g_0 = g_{n+1} = 1$$

$$g_k = 2\sin\frac{2k-1}{2n}\pi \qquad k = 1,2,\ldots,n$$

其中，g_k 为归一化元件值

$$R = g^R R_G, L = \frac{g^L R_G}{\omega_C}, C = \frac{g^C}{\omega_C R_G}$$

$n=3$

幅度平坦，选用巴特沃思滤波器

$$\left|H_n(j\omega)\right|^2=\frac{1}{1+\left(\dfrac{\omega}{\omega_c}\right)^{2n}}$$

例2

- 设计一个幅度平坦低通滤波器，要求从0-2.5kHz衰减不大于1dB，20kHz以上衰减大于35dB，信号源和负载电阻均为600Ω

$$f_P=2.5kHz,\alpha_{P\max}=1dB,f_S=20kHz,\alpha_{S\min}=35dB,R_L=R_G=600\Omega$$

$$\begin{cases}\alpha_P=10\log\dfrac{1}{\left|H(j\omega_P)\right|^2}=10\log\left(1+\left(\dfrac{\omega_P}{\omega_C}\right)^{2n}\right)\le\alpha_{P\max}\\ \alpha_S=10\log\dfrac{1}{\left|H(j\omega_S)\right|^2}=10\log\left(1+\left(\dfrac{\omega_S}{\omega_C}\right)^{2n}\right)\ge\alpha_{S\min}\end{cases}\Rightarrow n\ge\frac{\log\dfrac{10^{\frac{\alpha_{S\min}}{10}}-1}{10^{\frac{\alpha_{P\max}}{10}}-1}}{2\log\dfrac{\omega_S}{\omega_P}}=2.26$$

- 满足要求的滤波器的解不是唯一的，具体依实际应用综合考虑
  - 一般取n的最小值：阶数越低，电路越简单，成本越低
  - 一般取fc的最小值：人们给定指标时往往暗含着他希望的通带就是给定的通带

解的不唯一性

$$f_P = 2.5kHz, \alpha_{P\max} = 1dB, f_S = 20kHz, \alpha_{S\min} = 35dB$$

$$\begin{cases} 10\log\left(1+\left(\dfrac{\omega_P}{\omega_C}\right)^{2n}\right) \le \alpha_{P\max} \\ 10\log\left(1+\left(\dfrac{\omega_S}{\omega_C}\right)^{2n}\right) \ge \alpha_{S\min} \end{cases} \Rightarrow \frac{\omega_P}{\left(10^{\frac{\alpha_{P\max}}{10}}-1\right)^{\frac{1}{2n}}} \le \omega_C \le \frac{\omega_S}{\left(10^{\frac{\alpha_{S\min}}{10}}-1\right)^{\frac{1}{2n}}}$$

$$\Downarrow$$

$$n \ge \frac{\log \dfrac{10^{\frac{\alpha_{S\min}}{10}}-1}{10^{\frac{\alpha_{P\max}}{10}}-1}}{2\log\dfrac{\omega_S}{\omega_P}} = 2.26$$

$n = 3$ $\quad 3.1314kHz \le f_C \le 6.5257kHz$

$n = 4$ $\quad 2.9600kHz \le f_C \le 7.3038kHz$

$n=3$ $3.1314kHz \le f_C \le 6.5257kHz$

不妨取$n=3, f_C=4kHz$

$$g_0=g_{n+1}=1,\quad g_k=2\sin\frac{2k-1}{2n}\pi,\quad k=1,2,\ldots,n$$

解

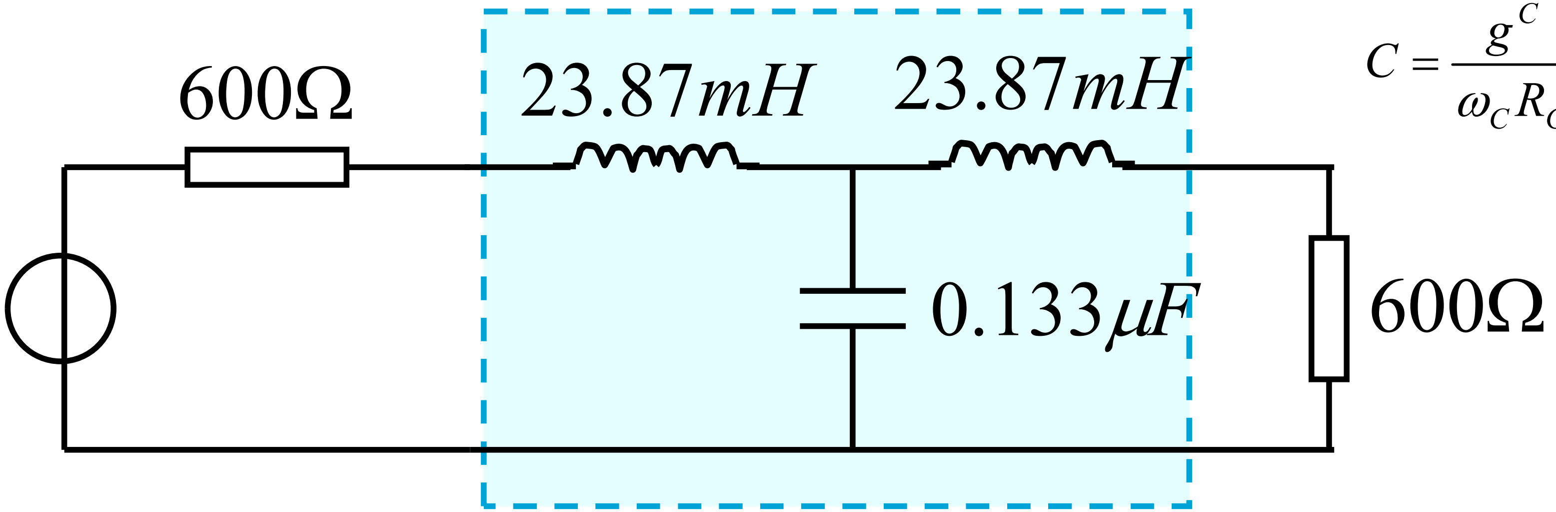
$$g_1=1, g_2=2, g_3=1$$

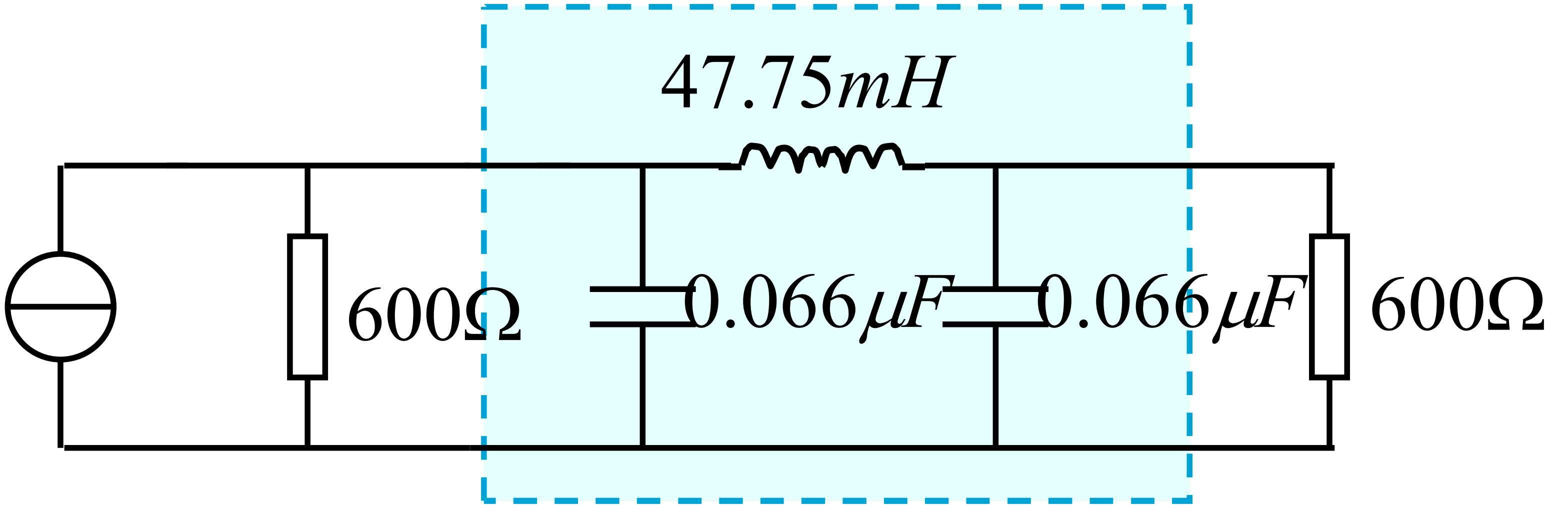
$$R_L=R_G=600\Omega$$

$$R=g^R R_G=600g^R(\Omega)$$

$$L=\frac{g^L R_G}{\omega_C}=23.87g^L(mH)$$

$$C=\frac{g^C}{\omega_C R_G}=0.066g^C(\mu F)$$

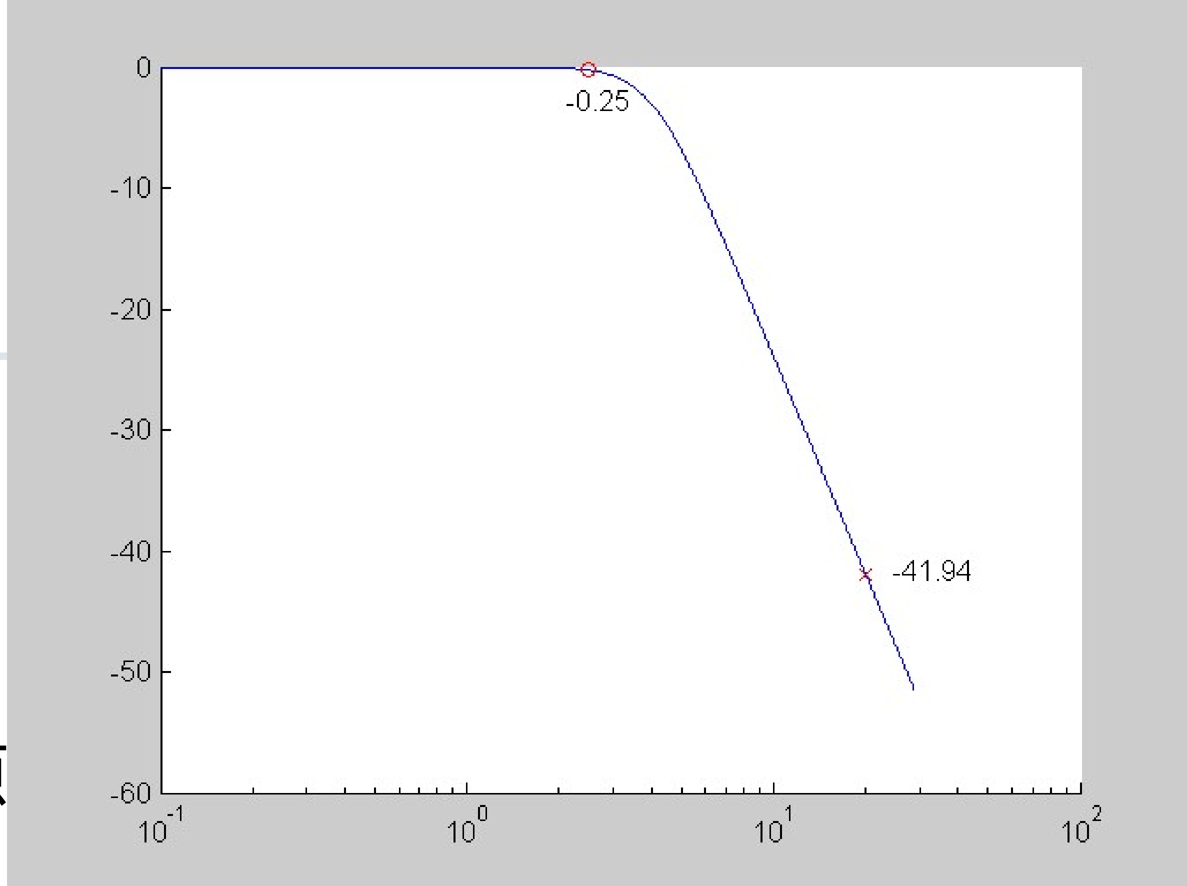


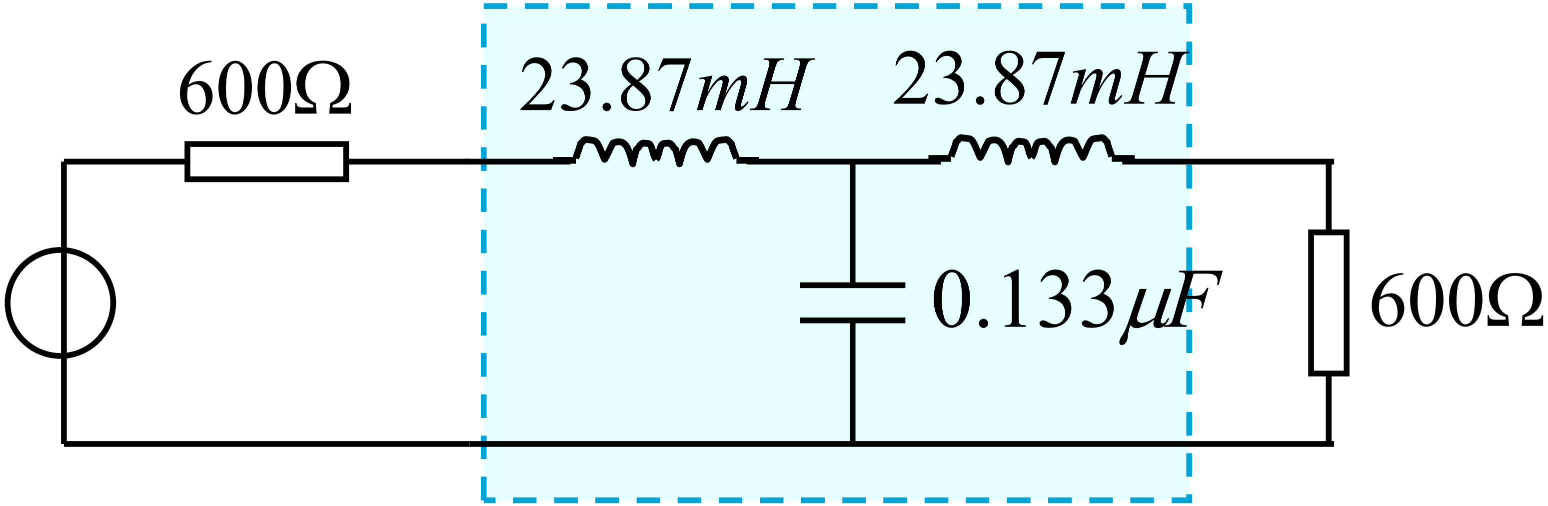


- 设计一个幅度平坦低通滤波器要求从0-2.5kHz衰减不大于1dB，20kHz以上衰减大于35dB，信号源和负载电阻均为600Ω

验证

- 经验证，满足题设要求
  - 幅度平坦低通滤波器，要求从0-2.5kHz衰减不大于1dB，20kHz以上衰减大于35dB，信号源和负载电阻均为600Ω。





切比雪夫逼近

- 切比雪夫滤波器可以在给定通带波纹下以最大的带宽或给定带宽下以最小的波纹
  - 切比雪夫滤波器频率特性在整个通频带内，幅频特性的幅度起伏以振荡的形式均匀分布
    - 等波纹滤波器
- 巴特沃思滤波器在其通带内提供最大的幅度平坦度
  - 幅度最大平坦滤波器

ε：决定通带内起伏大小 的波纹参数　　通带等波纹：通带内的 最大误差最小化

切比雪夫滤波器

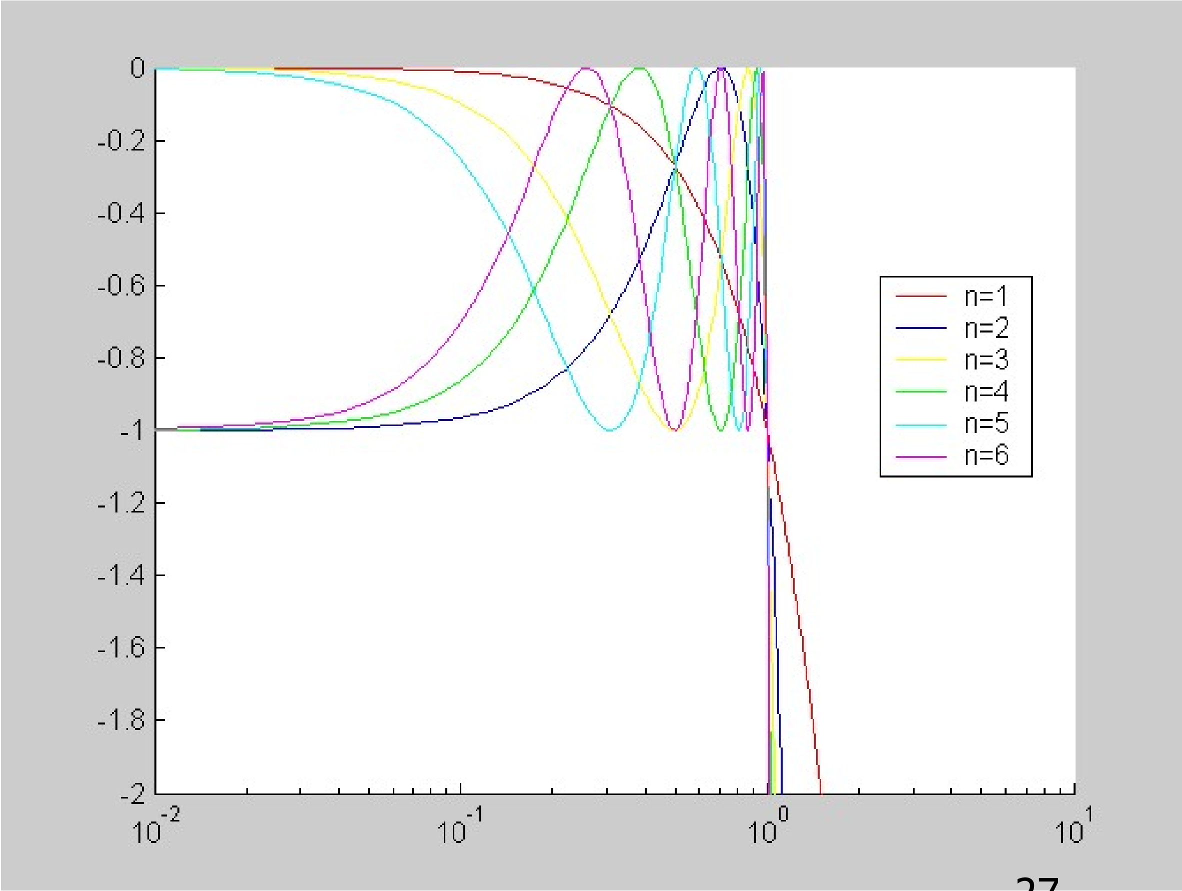
- 通带等波纹滤波器逼近原则是使通带内误差分布均匀

$$|H_n(j\omega)|^2 = \frac{H_{n0}^2}{1+\varepsilon^2 T_n^2\left(\dfrac{\omega}{\omega_C}\right)}$$

$$T_n(x) = \begin{cases} \cos(n \arccos x) & |x| \le 1 \\ \cosh(n \operatorname{arccos h} x) & |x| > 1 \end{cases}$$

$$T_n(x) = 1, x, 2x^2-1, 4x^3-3x,$$
$$8x^4-8x^2+1, \ldots$$

$$|H_n(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1+\varepsilon^2 T_n^2(\Omega)}$$



$$\left|H_n(j\Omega)\right|^2=\frac{1}{1+\varepsilon^2T_n^2(\Omega)}$$

切比雪夫滤波器的解析解

- 极点可解析解得，也可得到归一化器件的解析表述

$$n\geq\frac{\operatorname{arccosh}\left(\frac{1}{\varepsilon}\sqrt{10^{\frac{\alpha_{S\min}}{10}}-1}\right)}{\operatorname{arccosh}\left(\frac{\omega_S}{\omega_C}\right)}$$

$$g_0=1,g_{n+1}=\begin{cases}1 & n\text{为奇数}\\ \tanh^2\frac{\beta}{4} & n\text{为偶数}\end{cases}$$

$$g_1=\frac{2a_1}{\gamma},g_k=\frac{4a_{k-1}a_k}{b_{k-1}g_{k-1}},k=2,3,\ldots,n$$

$$a_k=\sin\frac{(2k-1)\pi}{2n},b_k=\gamma^2+\sin^2\frac{k}{n}\pi,k=1,2,\ldots,n$$

$$\beta=\ln\left(\coth\frac{A_m}{17.37}\right),A_m=10\log\left(\varepsilon^2+1\right),\gamma=\sinh\frac{\beta}{2n}$$

$$A_m=1dB,n=3:g_1=2.0236,g_2=0.9941,g_3=2.0236$$

其他等波纹滤波器逼近

- 切比雪夫II型滤波器
  - 切比雪夫滤波器通带内是等波纹的，而阻带是平滑的；切比雪夫II型滤波器在阻带内是等波纹的，通带内是平滑的
- 椭圆滤波器
  - 椭圆滤波器在通带和阻带均产生等波纹
    - 幅频特性具有陡峭的边缘或狭窄的过渡带，这是以允许通带和阻带有波纹来换取的
    - 椭圆滤波器的电路拓扑结构较为复杂，没有简单的显式公式来描述归一化RLC器件值，一般采用数值法获得表格进行设计

贝塞尔逼近

$$\lim_{n\to\infty}\frac{B_n(0)}{B_n(sT)}=\frac{1}{e^{sT}}\left(=e^{-j\omega T}\right)$$

- 前面讨论的是对滤波器传输函数的幅度进行控制，对其相位不加考虑
  - 贝塞尔滤波器可以提供最大平坦时延响应

$$H(sT)=\frac{B_n(0)}{B_n(sT)}$$

$$B_n(x)=(2n-1)B_{n-1}(x)+x^2B_{n-2}(x)$$

$$B_0(x)=1$$

$$B_1(x)=x+1$$

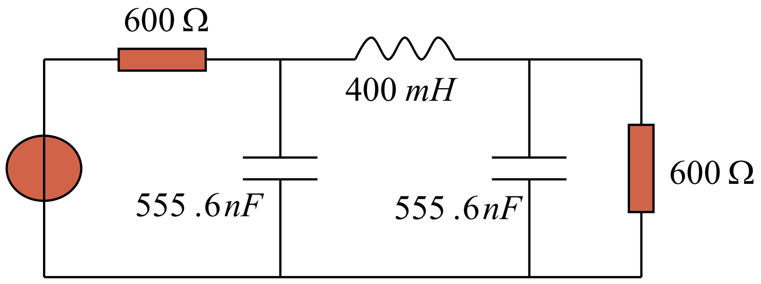
$$B_2(x)=x^2+3x+3$$

$$B_3(x)=x^3+6x^2+15x+15$$

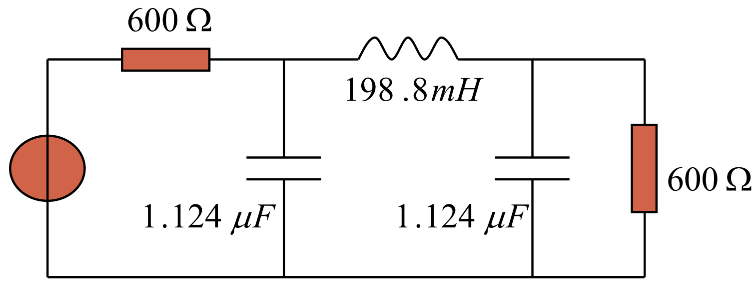
……

- 三阶低通滤波器：负载、内阻600Ω，截止频率3krad/s

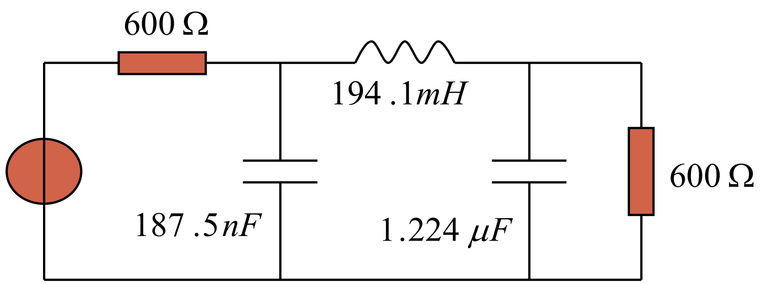
例：四种逼近形式的三阶低通滤波器电路



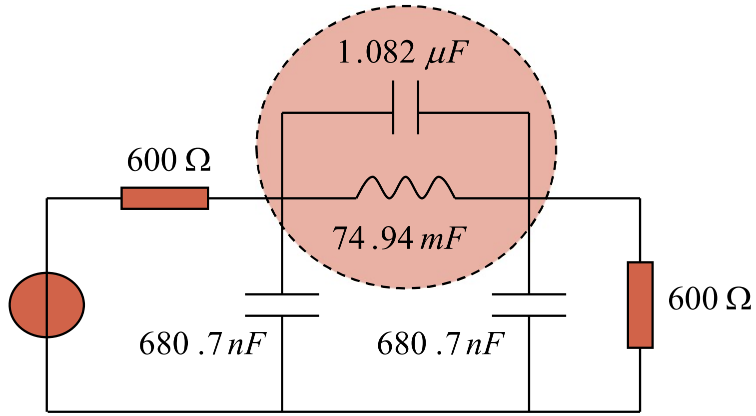
巴特沃思滤波器



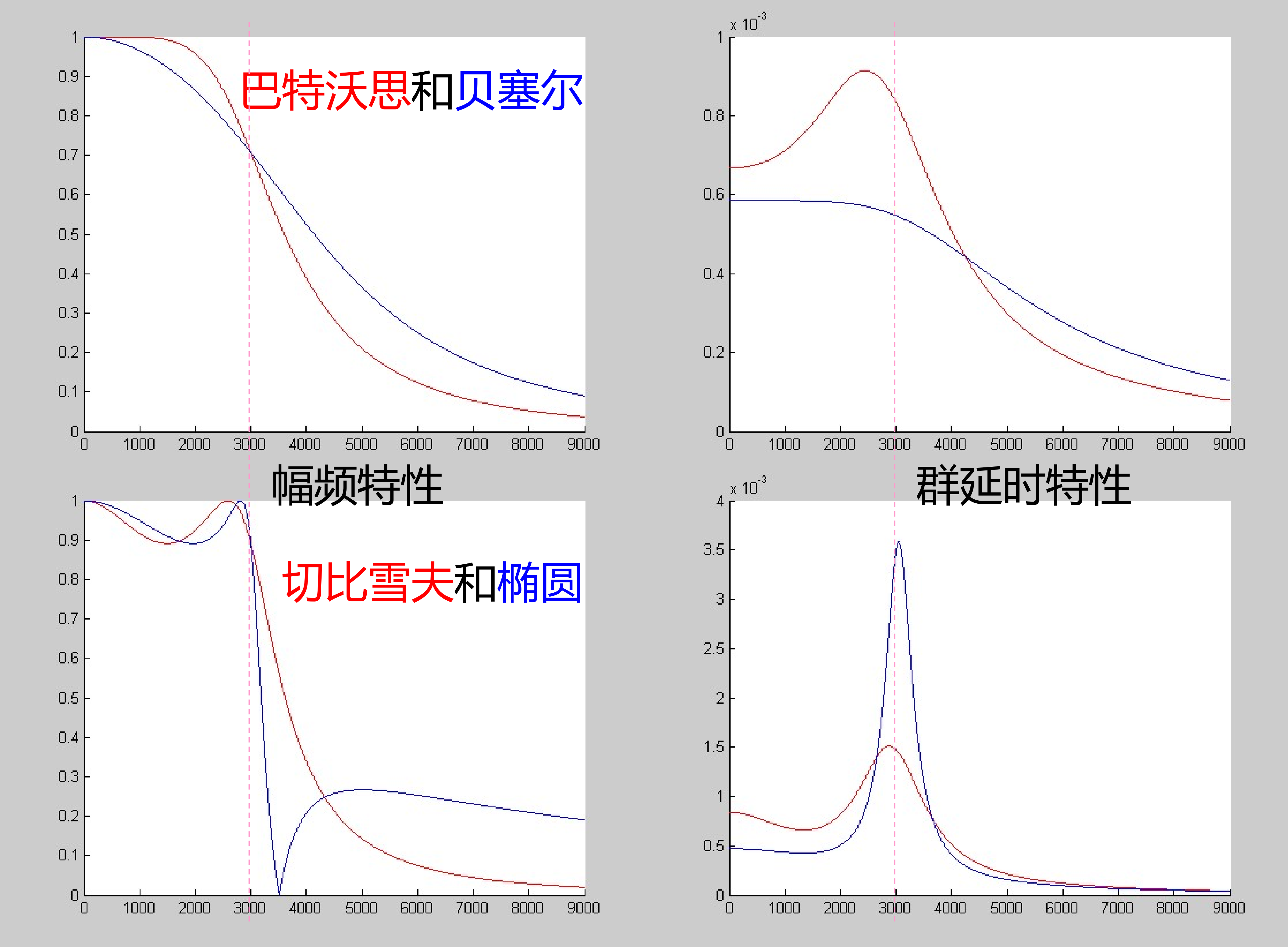
切比雪夫滤波器



贝塞尔滤波器



椭圆滤波器

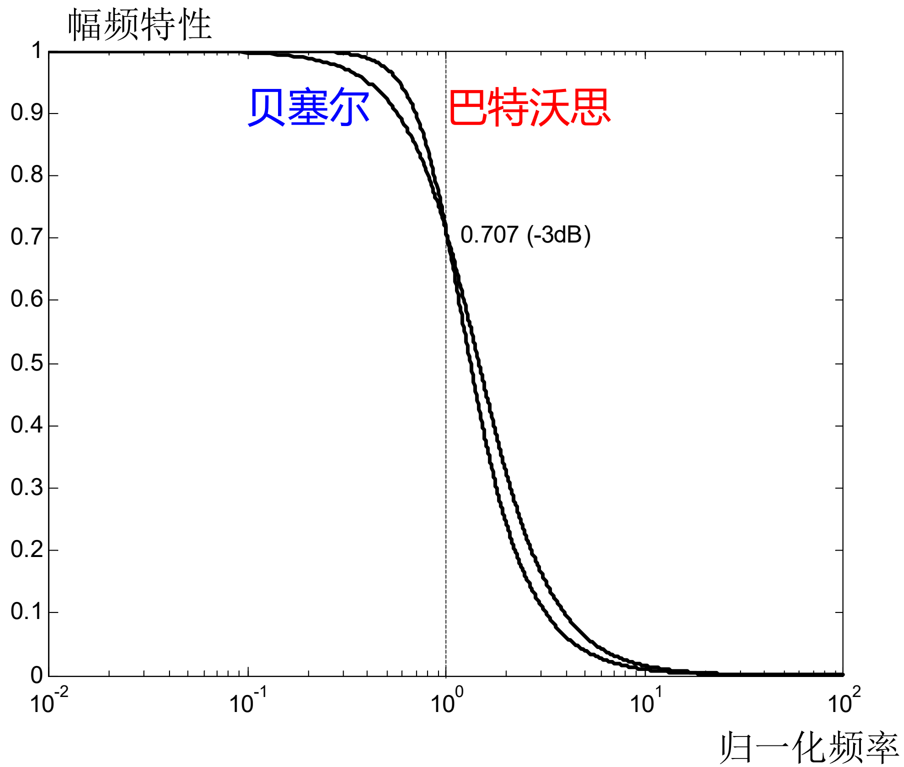


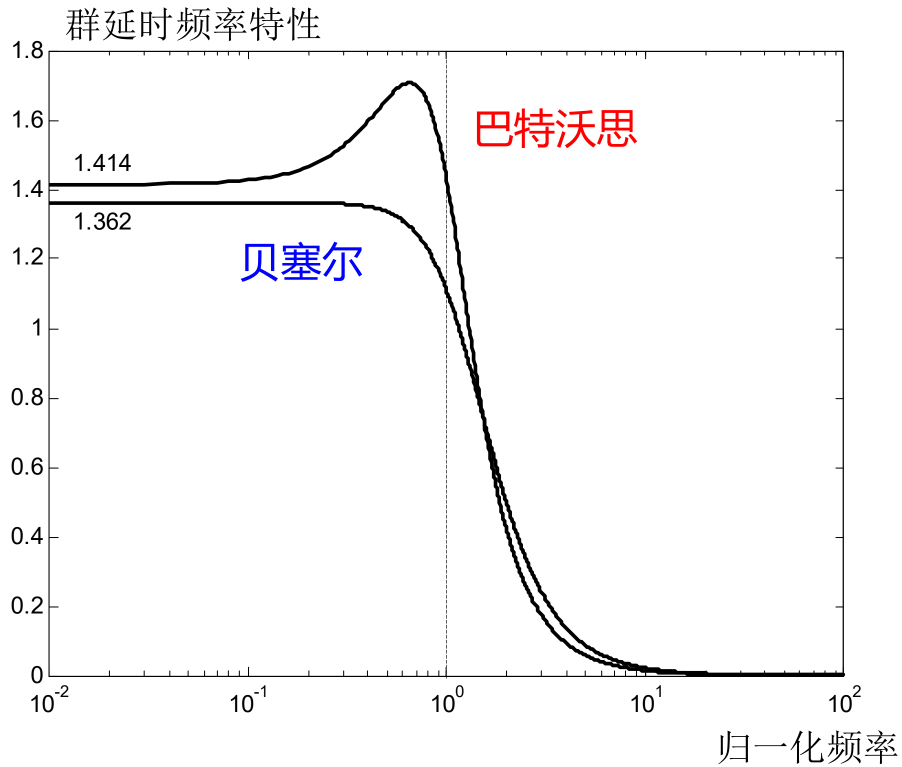
巴特沃思和贝塞尔
幅频特性
切比雪夫和椭圆
群延时特性
x 10^-3
x 10^-3
0 1000 2000 3000 4000 5000 6000 7000 8000 9000

$$H(s)=\frac{1}{s^2+\sqrt{2}s+1}$$

$$H(s)=\frac{1}{s^2+\sqrt{3}s+1}$$

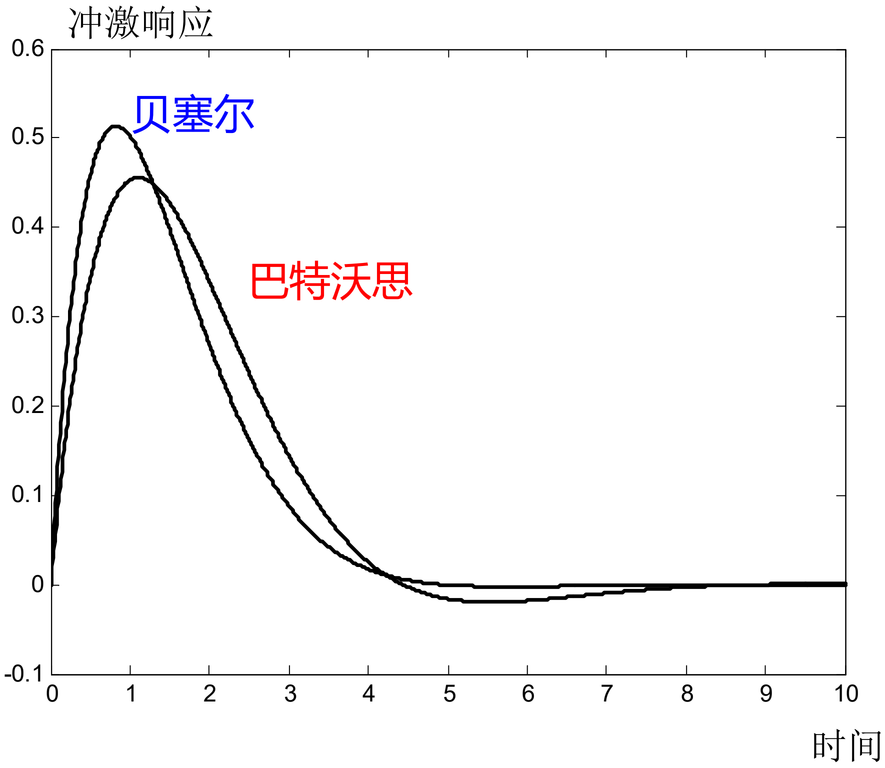
二阶巴特沃思和贝塞尔：频域

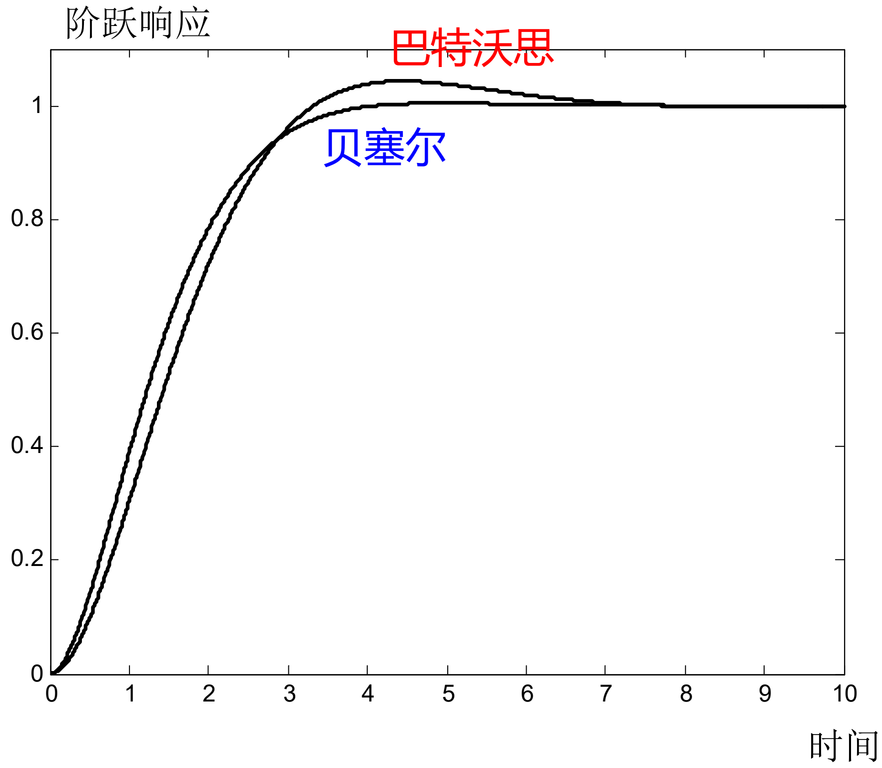




$$H(s)=\frac{1}{\left(\frac{s}{\beta}\right)^2+\sqrt{3}\left(\frac{s}{\beta}\right)+1}$$

二阶巴特沃思和贝塞尔：时域





- 除了这四种滤波器外，还有许多其他逼近类型

四种逼近方法总结

群延时特性优 ⟷ 频率选择性优

贝塞尔滤波器

巴特沃思滤波器

切比雪夫II型滤波器

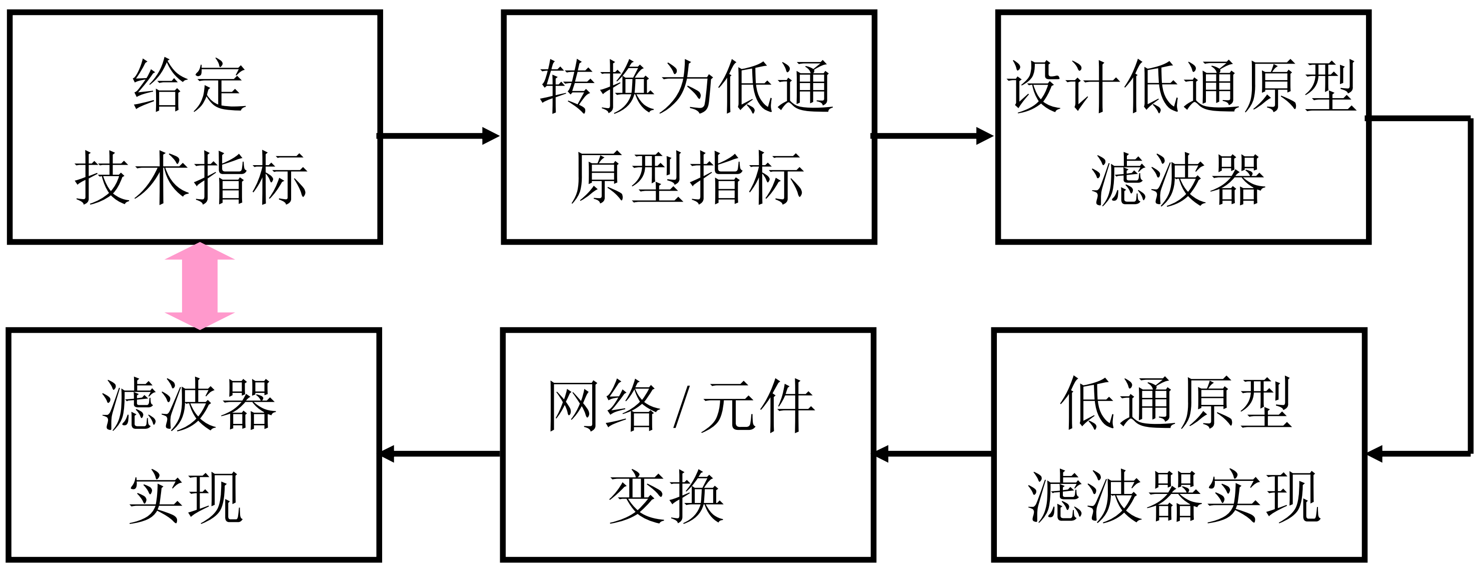
切比雪夫滤波器

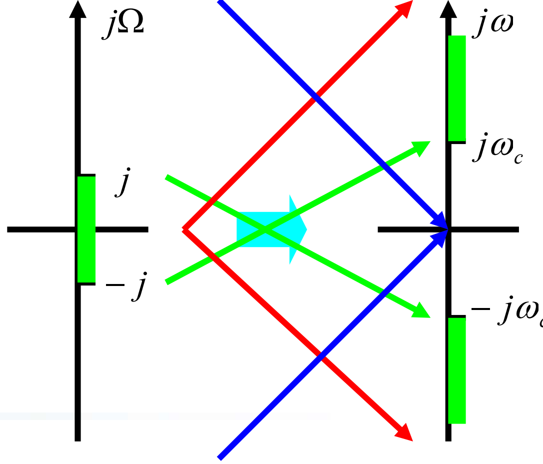
椭圆滤波器

▪前面只论述了低通滤波器的综合，下面讨论如何从低通原型滤波器经变换获得高通、带通和带阻滤波器

2.4 从低通原型到实际滤波器

- 在工程实际中，设计高通、带通、带阻滤波器的常用方法是借助对应的低通原型滤波器，经频率变换和元件变换得到





低通到高通的变换

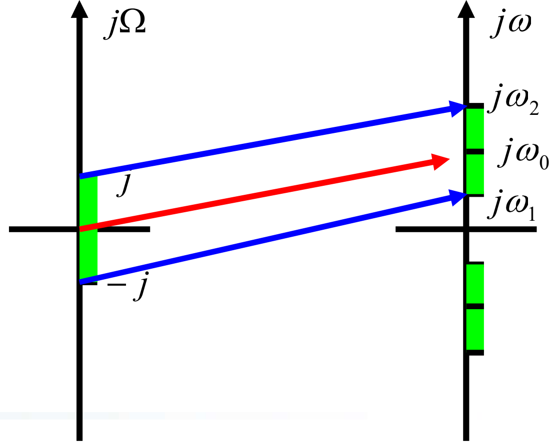
- 在归一化复频率平面上，低通原型滤波器的通带在虚轴上-j到+j之间，而要求的高通滤波器的通带为ω>ωC，所以可以用如下变换实现

$$s=\frac{\omega_c}{s_p}$$

- 于是低通原型中的电感在高通中变换为电容，电容变换为电感

$$s_pL_p=\frac{\omega_c}{s}L_p=\frac{1}{s\dfrac{1}{\omega_cL_p}}=\frac{1}{sC}\quad\Rightarrow\quad C=\frac{1}{\omega_cL_p}$$

$$s_pC_p=\frac{\omega_c}{s}C_p=\frac{1}{s\dfrac{1}{\omega_cC_p}}=\frac{1}{sL}\quad\Rightarrow\quad L=\frac{1}{\omega_cC_p}$$



低通到带通的变换

- 带通滤波器通带为ω_1到ω_2，中心频率为这两个频率的几何平均ω_0=sqrt(ω_1*ω_2)，归一化带宽为Bw=(ω_2-ω_1)/ω_0，于是我们可以将低通原型滤波器的中心0变换为带通滤波器的中心ω_0，原型滤波器的截止频率1变换为$\omega_{1,2}$

$$s_p = \frac{1}{B_w}\left(\frac{s}{\omega_0} + \frac{\omega_0}{s}\right)$$

$$\Omega = \frac{1}{B_w}\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)$$

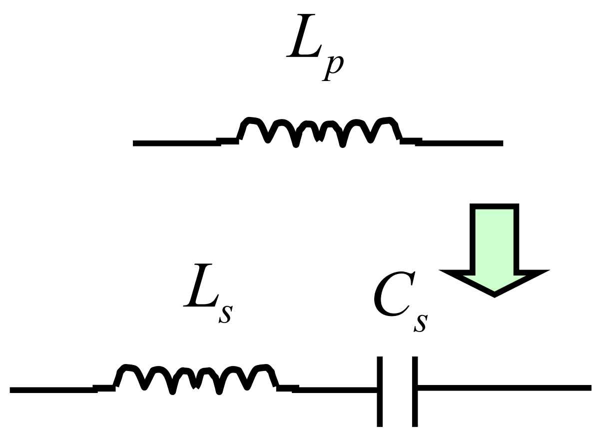
$$\frac{1}{B_w}\left(\frac{\omega_0}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_0}\right) = 0$$

$$\frac{1}{B_w}\left(\frac{\omega_{1,2}}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_{1,2}}\right) = \frac{1}{B_w}\left(\frac{\omega_{1,2}}{\omega_0} - \frac{\omega_0\omega_{2,1}}{\omega_{1,2}\omega_{2,1}}\right) = \frac{1}{B_w}\frac{\omega_{1,2} - \omega_{2,1}}{\omega_0} = \mp 1$$

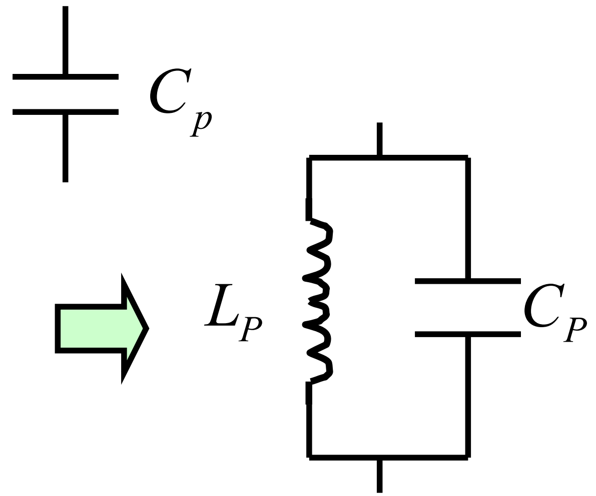
$$s_p=\frac{1}{B_w}\left(\frac{s}{\omega_0}+\frac{\omega_0}{s}\right)$$

低通到带通的元件变换

$$s_pL_p=\frac{1}{B_w}\left(\frac{sL_p}{\omega_0}+\frac{\omega_0L_p}{s}\right)=s\frac{L_p}{B_w\omega_0}+\frac{1}{s\dfrac{B_w}{\omega_0L_p}}=sL_s+\frac{1}{sC_s}$$

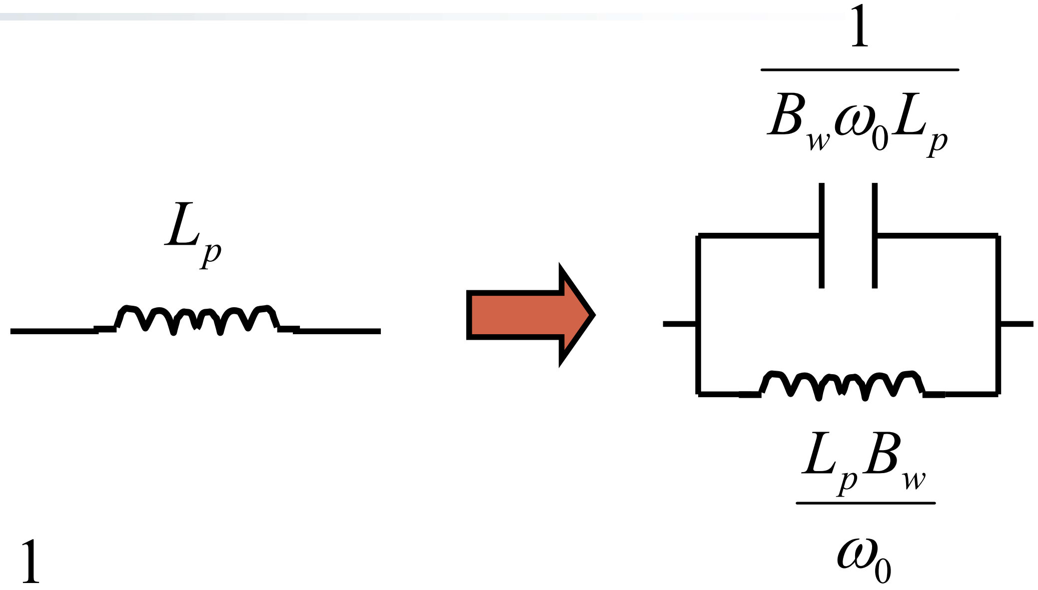


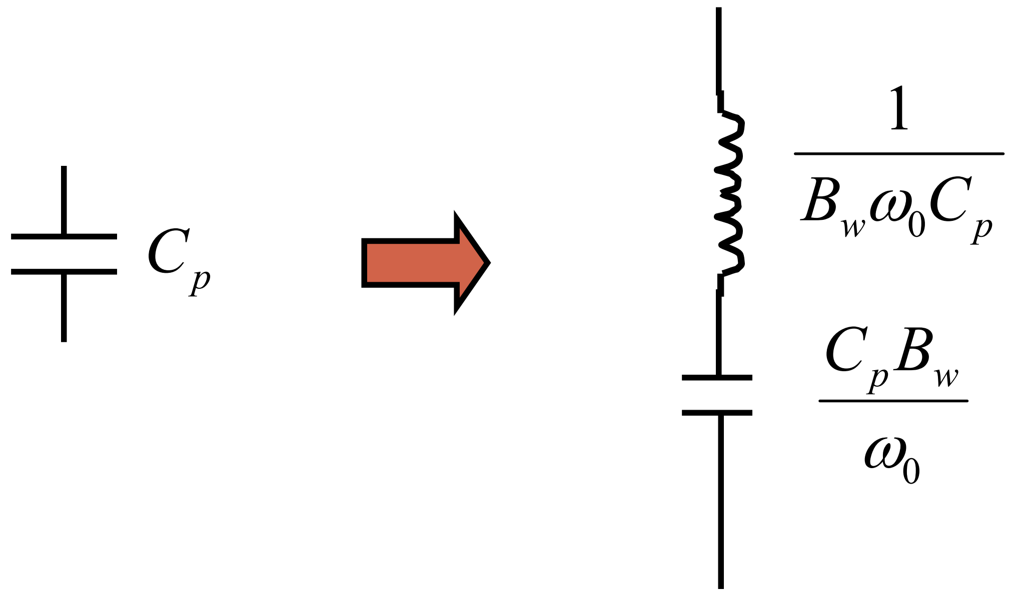
$$s_pC_p=\frac{1}{B_w}\left(\frac{sC_p}{\omega_0}+\frac{\omega_0C_p}{s}\right)=s\frac{C_p}{B_w\omega_0}+\frac{1}{s\dfrac{B_w}{\omega_0C_p}}=sC_P+\frac{1}{sL_P}$$



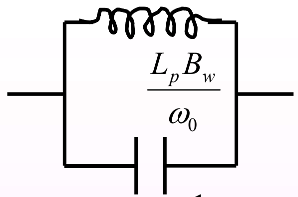
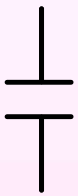
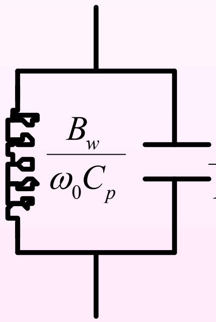
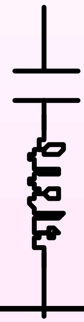
$$\frac{1}{s_p}=\frac{1}{B_w}\left(\frac{s}{\omega_0}+\frac{\omega_0}{s}\right)$$

低通到带阻的元件变换





低通原型和高通、带通、带阻滤波器元件变换表

低通原型	高通	带通	带阻
 L_p	 $\frac{1}{\omega_c L_p}$	 $\frac{L_p}{B_w\omega_0}$ $\frac{B_w}{L_p\omega_0}$	 $\frac{L_pB_w}{\omega_0}$ $\frac{1}{B_wL_p\omega_0}$
 C_p	 $\frac{1}{\omega_c C_p}$	 $\frac{B_w}{\omega_0 C_p}$ $\frac{C_p}{B_w\omega_0}$	 $\frac{C_pB_w}{\omega_0}$ $\frac{1}{B_wC_p\omega_0}$

$$\Omega = \frac{1}{B_w}\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)$$

例 一个带通滤波器的综合

- 给定带通滤波器指标如下：两个通带频率分别为15kHz和25kHz，两个阻带频率分别为10kHz和30kHz，允许通带起伏2dB，阻带衰减至少15dB，用巴特沃思滤波器实现，已知信源内阻和负载相等，均为600Ω。求该滤波器的电路实现。

$$f_0 = \sqrt{f_{p1} f_{p2}} = \sqrt{15 \cdot 25} = 19.365kHz$$

$$B_w = \frac{f_{p2} - f_{p1}}{f_0} = \frac{25 - 15}{19.365} = 0.5164$$

$$f_0=\sqrt{f_{p1}f_{p2}}=\sqrt{15\cdot 25}=19.365kHz$$

$$B_w=\frac{f_{p2}-f_{p1}}{f_0}=\frac{25-15}{19.365}=0.5164$$

带通滤波器指标转换为低通原型滤波器指标

$$\Omega=\frac{1}{B_w}\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)$$

$$\Omega_{P1}=\frac{1}{0.5164}\left(\frac{15}{19.365}-\frac{19.365}{15}\right)=-1$$

$$\Omega_{P2}=\frac{1}{0.5164}\left(\frac{25}{19.365}-\frac{19.365}{25}\right)=1$$

取$\Omega_P=1$

$$\Omega_{S1}=\frac{1}{0.5164}\left(\frac{10}{19.365}-\frac{19.365}{10}\right)=-2.75$$

$$\Omega_{S2}=\frac{1}{0.5164}\left(\frac{30}{19.365}-\frac{19.365}{30}\right)=1.75$$

取$\Omega_S=1.75$

$$\Omega_P = 1 \qquad \alpha_{P\max} = 2dB$$

$$\Omega_S = 1.75 \qquad \alpha_{S\min} = 15dB$$

低通原型滤波器综合

$$n \geq \frac{\log \dfrac{10^{\frac{\alpha_{S\min}}{10}} - 1}{10^{\frac{\alpha_{P\max}}{10}} - 1}}{2\log \dfrac{\Omega_S}{\Omega_P}} = 3.54$$

取$n = 4$

$$\frac{\Omega_P}{\left(10^{\frac{\alpha_{P\max}}{10}} - 1\right)^{\frac{1}{2n}}} \leq \Omega_C \leq \frac{\Omega_S}{\left(10^{\frac{\alpha_{S\min}}{10}} - 1\right)^{\frac{1}{2n}}}$$

$1.069 \leq \Omega_C \leq 1.141$ 取$\Omega_C = 1.07$

$$g_0 = g_{n+1} = 1, \quad g_k = 2\sin\frac{2k-1}{2n}\pi, \quad k = 1,2,\ldots,n$$

$$g_1 = 0.7654, g_2 = 1.8478, g_3 = 1.8478, g_4 = 0.7654$$

$$g_1^{\ L}=0.7654, g_2^{\ C}=1.8478, g_3^{\ L}=1.8478, g_4^{\ C}=0.7654$$

$$R_p=g^R R_G, L_p=\frac{g^L R_G}{\Omega_C}, C_p=\frac{g^C}{\Omega_C R_G}$$

频率变换与元件变换

低通原型滤波器参数

$$L_{p1}=429.18H, C_{p2}=2878.1\mu F$$

$$L_{p3}=1036.1H, C_{p4}=1192.2\mu F$$

$$R_0=600\Omega, R_5=600\Omega$$

$$B_w=0.5164, \omega_0=2\pi\times19.365\times10^3$$

$$L_S=\frac{L_p}{B_w\omega_0}, C_S=\frac{B_w}{\omega_0 L_p}$$

$$L_{S1}=6.8306mH, C_{S1}=9889.0pF$$

$$L_{S3}=16.4905mH, C_{S3}=4096.2pF$$

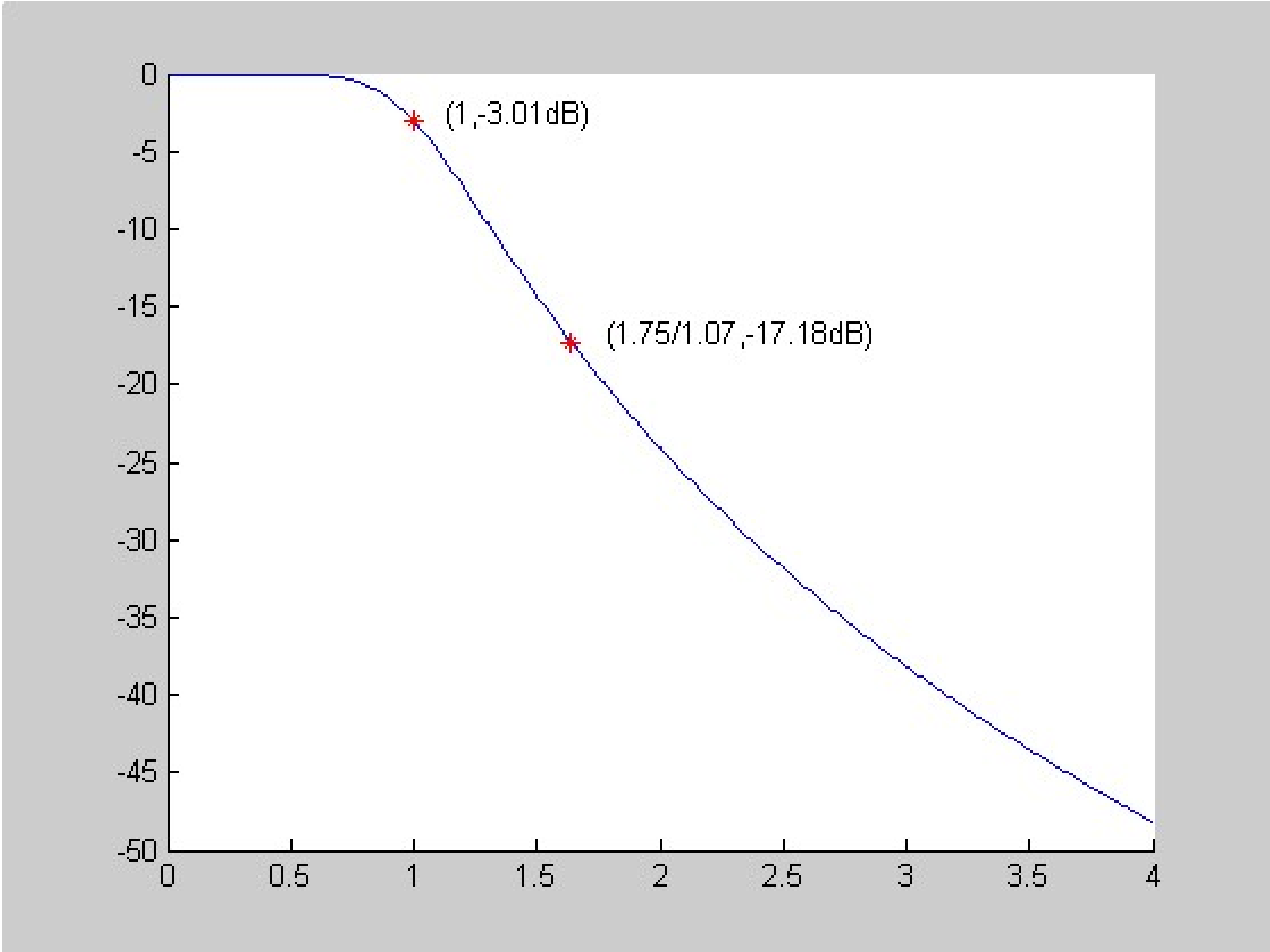
$$C_P=\frac{C_p}{B_w\omega_0}, L_P=\frac{B_w}{\omega_0 C_p}$$

$$C_{P2}=45807pF, L_{P2}=1.4746mH$$

$$C_{P4}=18974pF, L_{P4}=3.5600mH$$

$$g_0^{\ R}=1, g_1^{\ L}=0.7654, g_2^{\ C}=1.8478, g_3^{\ L}=1.8478, g_4^{\ C}=0.7654, g_5^{\ R}=1$$

归一化低通滤波器



▪允许通带起伏2dB，阻带衰减至少15dB

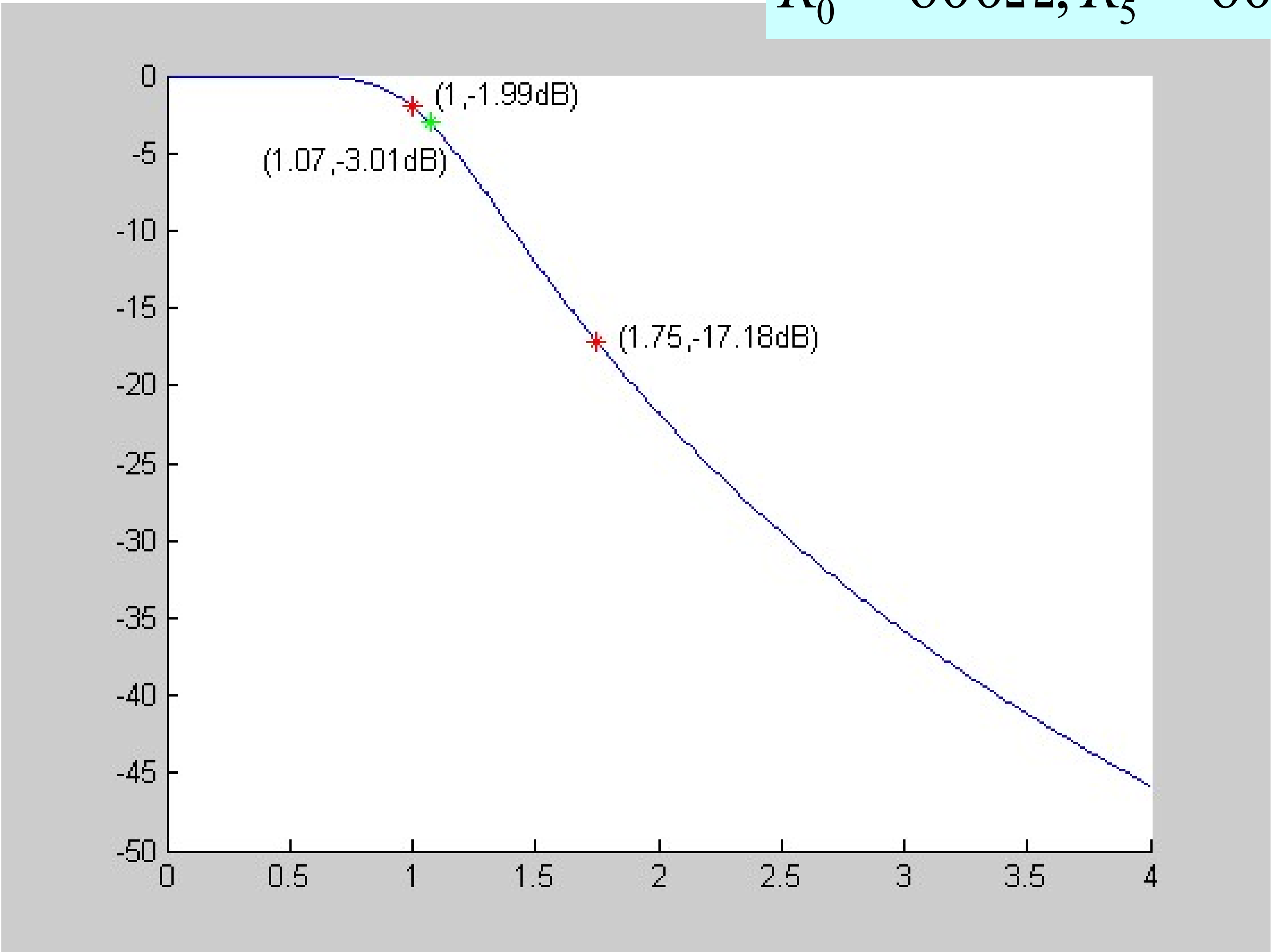
低通原型滤波器

低通滤波器参数

$$L_{p1}=429.18H, C_{p2}=2878.1\mu F$$

$$L_{p3}=1036.1H, C_{p4}=1192.2\mu F$$

$$R_0=600\Omega, R_5=600\Omega$$



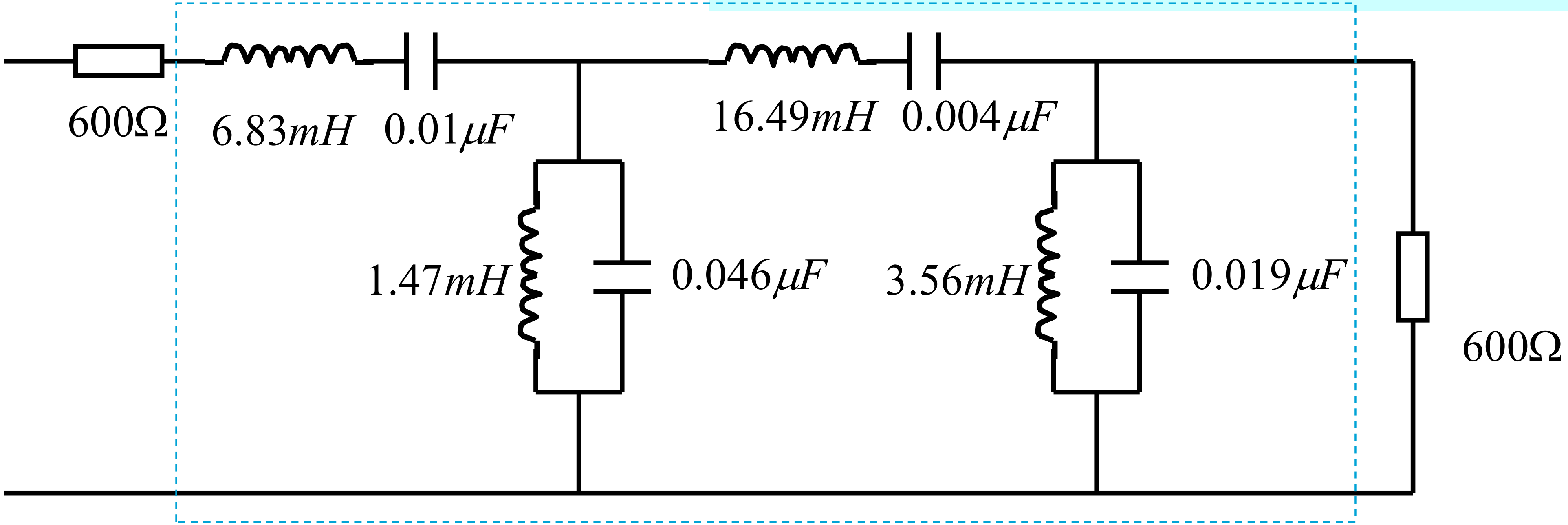
$$L_{S1}=6.8306mH, C_{S1}=9889.0pF$$

$$L_{S3}=16.4905mH, C_{S3}=4096.2pF$$

带通滤波器电路结构

$$C_{P2}=45807pF, L_{P2}=1.4746mH$$

$$C_{P4}=18974pF, L_{P4}=3.5600mH$$



- 两个通带频率分布为15kHz和25kHz，两个阻带频率分别为10kHz和30kHz，允许通带起伏2dB，阻带衰减至少15dB，用巴特沃思滤波器实现，已知信源内阻和负载相等，为600Ω

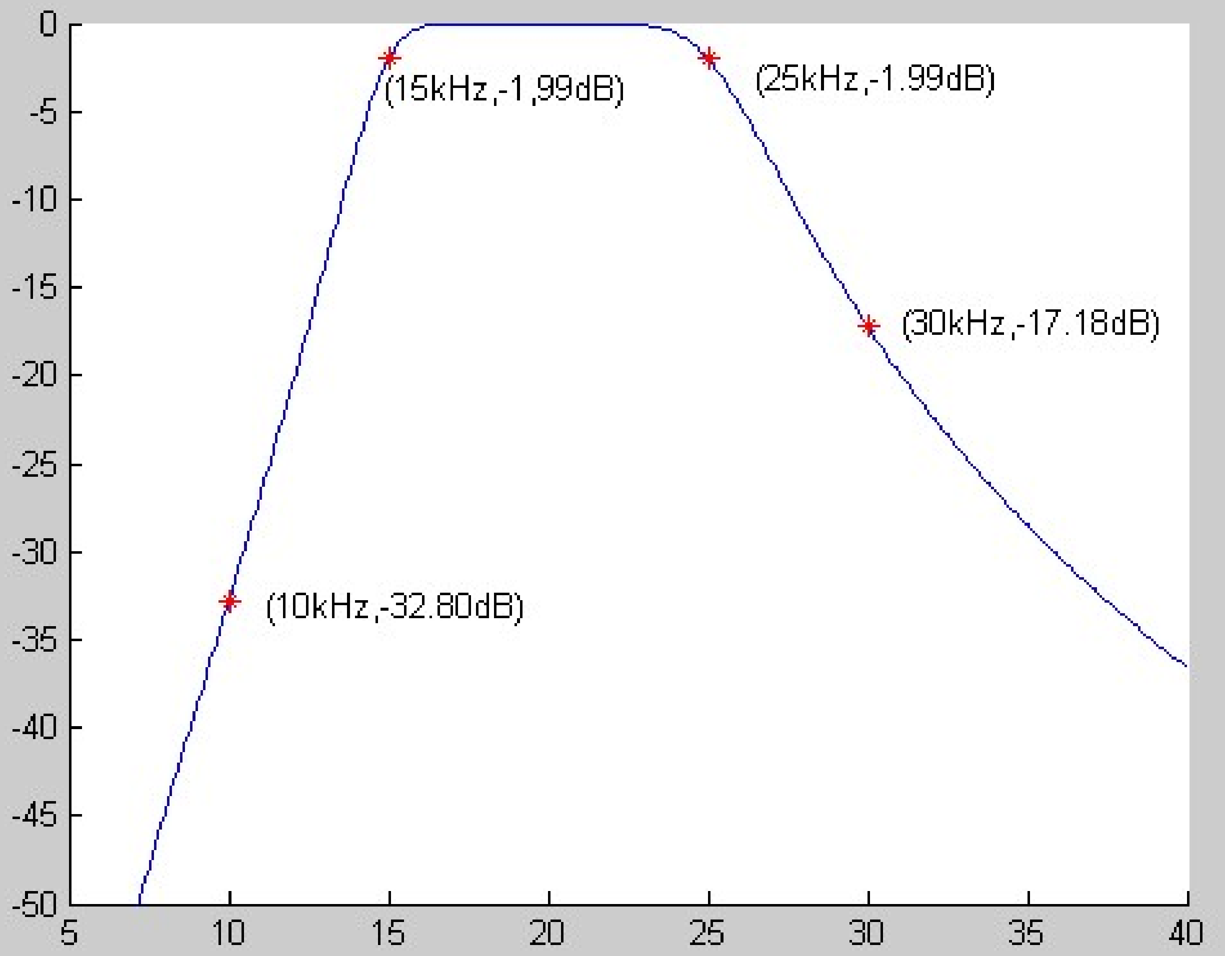
$$L_{S1}=6.8306mH, C_{S1}=9889.0pF$$

$$L_{S3}=16.4905mH, C_{S3}=4096.2pF$$

带通滤波器

$$C_{P2}=45807pF, L_{P2}=1.4746mH$$

$$C_{P4}=18974pF, L_{P4}=3.5600mH$$



- 两个通带频率分布为15kHz和25kHz，两个阻带频率分别为10kHz和30kHz，允许通带起伏2dB，阻带衰减至少15dB

LC滤波器综合小结

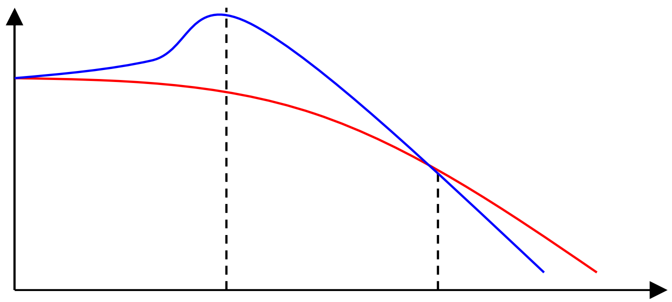
- LC滤波器物理概念明晰，理论分析严格，有大量的工程设计数据表格可供使用，设计十分方便
  - 应用广泛，也是集成滤波器设计的重要基础

- 集成滤波器中电感实现相对困难，因而在集成滤波器中电感的功能往往用电容通过变换替代掉

作业1：同时也是CAD作业

- （CAD作业）：用巴特沃思逼近方法设计一个低通滤波器，要求在频率0-3kHz范围内衰减小于2dB，频率高于30kHz的范围衰减大于35dB，信源与负载阻抗为600Ω。
  - 将低通滤波器变换为带通滤波器，中心频率6kHz，通频带带宽6kHz
  - 仿真确认低通、带通滤波器的频率特性符合设计需求

习题不限，可以用matlab，仿真作业则需用Cadence给仿真结果



作业2

- 修改例1 （20Ω-80Ω）巴特沃思滤波器的LC值使得滤波器的通带频率f_c为50MHz；
  - 用SPICE或matlab仿真获得该滤波器的幅频特性；

- 该滤波器是否为最大功率传输匹配网络？如果不是，请设计一个低通T型匹配网络，要求在50MHz上达到最大功率传输而且在100MHz上对二次谐波有和该巴特沃思滤波器具有相同的衰减
  - 同一张图上画出两个网络功率传输曲线进行对比