通信电路原理

第七章　锁相环

锁相环线性分析

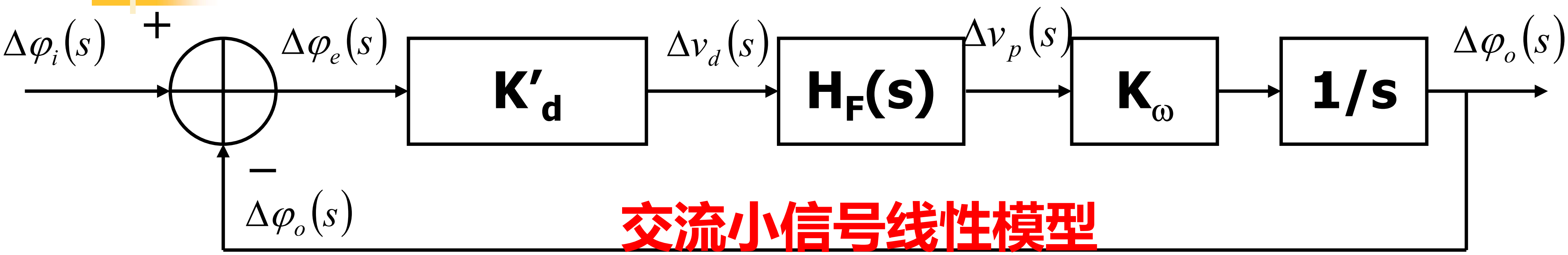
锁相环

- 7.1 概述
- 7.2 PLL基本原理
  - 各部件特性与数学模型
  - 环路方程和相位模型
- 7.3 PLL的线性分析
- 7.4 PLL的非线性分析
- 7.5 集成锁相环
- 7.6 PLL电路实例和应用举例

- 附 AFC：自动频率控制

7.3 PLL线性分析

7.3.1 线性化模型与传递函数



开环传递函数：$H_o(s)=\dfrac{\Delta\varphi_o(s)}{\Delta\varphi_e(s)}=\dfrac{K_pH_F(s)}{s}$

$$K_p=K_d'K_\omega$$

$$K_d'=K_d\cos\varphi_{e\infty}$$

闭环传递函数：$H(s)=\dfrac{\Delta\varphi_o(s)}{\Delta\varphi_i(s)}=\dfrac{H_o(s)}{1+H_o(s)}=\dfrac{K_pH_F(s)}{s+K_pH_F(s)}$

误差传递函数：$H_e(s)=\dfrac{\Delta\varphi_e(s)}{\Delta\varphi_i(s)}=\dfrac{\Delta\varphi_i(s)-\Delta\varphi_o(s)}{\Delta\varphi_i(s)}=1-H(s)=\dfrac{s}{s+K_pH_F(s)}$

$$H(s)=\frac{\Delta\varphi_o(s)}{\Delta\varphi_i(s)}=\frac{H_o(s)}{1+H_o(s)}=\frac{K_pH_F(s)}{s+K_pH_F(s)}$$

再次提醒：PLL是相位传递系统

- s表示输入输出信号相位的变化复频率，而不是输入输出信号的频率
  - 如果输入信号$v_i(t)$是调相波的话，s代表调制信号的复频率jΩ，而不是载波的复频率jω
- 闭环传递函数具有低通特性
  - s→0，H(s)→1
  - s→∞，H(s)→0

$$H(s)=\frac{\Delta\varphi_o(s)}{\Delta\varphi_i(s)}=\frac{K_pH_F(s)}{s+K_pH_F(s)}$$

- 误差传递函数具有高通特性
  - s→0，$H_e(s)$→0
  - s→∞，$H_e(s)$→1

$$H_e(s)=\frac{\Delta\varphi_e(s)}{\Delta\varphi_i(s)}=\frac{s}{s+K_pH_F(s)}$$

- 线性模型成立的前提条件
  - 相位误差变化量$\Delta\varphi_e$很小

$$K_p=K_d'K_\omega=K_dK_\omega\cos\varphi_{e\infty}$$

一阶锁相环

- **环路滤波器为直通电路（没有环路滤波器）**

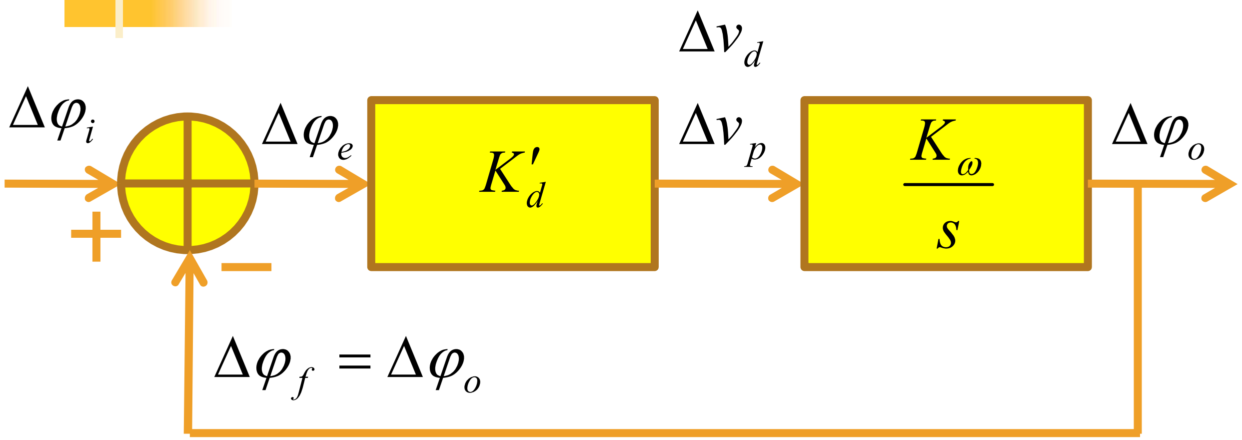
$$H_F(s)=1$$

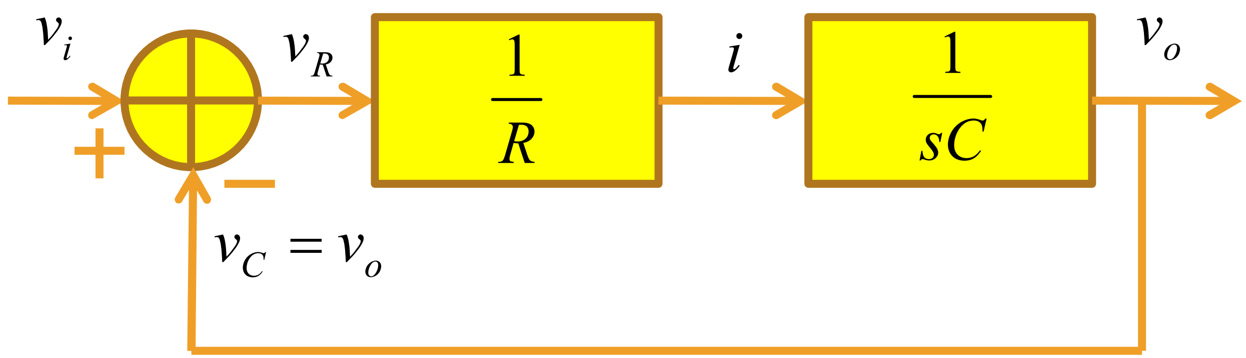
闭环传递函数：$H(s)=\dfrac{\Delta\varphi_o}{\Delta\varphi_i}=\dfrac{K_pH_F(s)}{s+K_pH_F(s)}=\dfrac{K_p}{s+K_p}=\dfrac{\omega_0}{s+\omega_0}$

误差传递函数：$H_e(s)=\dfrac{\Delta\varphi_e}{\Delta\varphi_i}=\dfrac{s}{s+K_pH_F(s)}=\dfrac{s}{s+K_p}=\dfrac{s}{s+\omega_0}$

- **闭环传递函数具有低通特性：输出相位是输入相位中的低频分量**
- **误差传递函数具有高通特性：误差相位是输入相位中的高频分量**
- **K_p是低通和高通的3dB转折点ω_0**

一阶锁相环（相位滤波器）与一阶RC低通（电压滤波器）



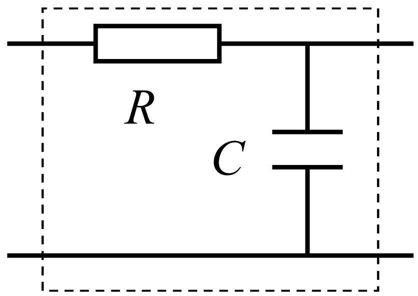


一阶锁相环对输入相位的滤波作用，犹如一阶RC低通电路对输入电压的滤波作用

一阶RC的所有频域和时域特性讨论，同样适用于一阶PLL讨论，只是用相位替代电压而已

时域特性：阶跃响应
频域特性：正弦稳态响应

二阶锁相环



$\tau = RC$

- **以RC积分滤波器为例** $H_F(s) = \dfrac{1}{1 + s\tau}$

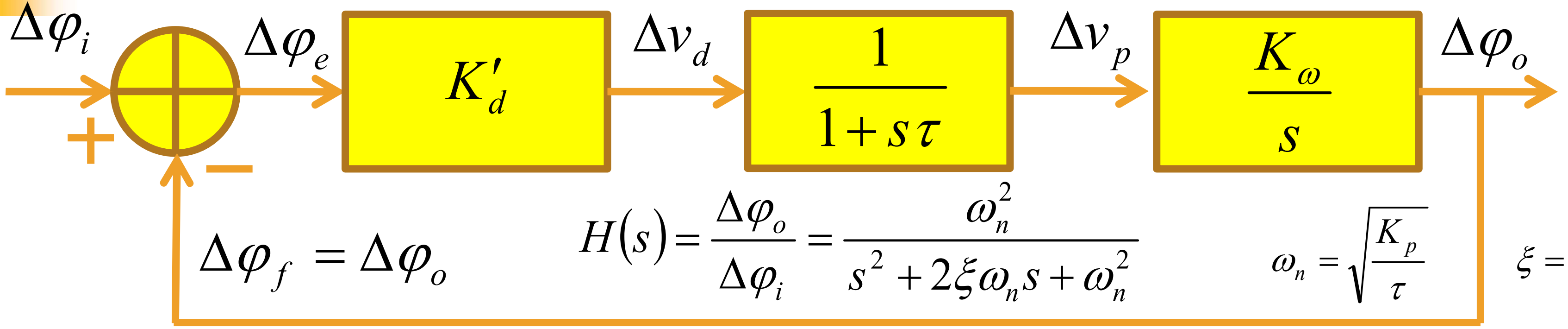
闭环传递函数：$$H(s) = \frac{K_p H_F(s)}{s + K_p H_F(s)} = \frac{\dfrac{K_p}{1+s\tau}}{s + \dfrac{K_p}{1+s\tau}} = \frac{K_p/\tau}{s^2 + s/\tau + K_p/\tau} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

误差传递函数：$$H_e(s) = 1 - H(s) = \frac{s^2 + s/\tau}{s^2 + s/\tau + K_p/\tau} = \frac{s^2 + 2\xi\omega_n s}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$\omega_n^2 = K_p/\tau \qquad 2\xi\omega_n = 1/\tau$$

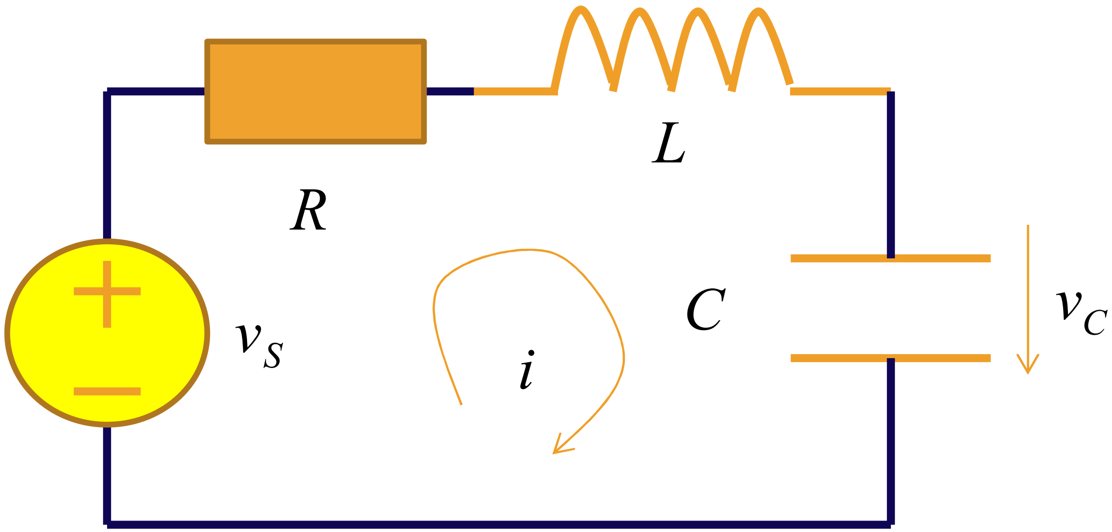
$$\omega_n = \sqrt{\frac{K_p}{\tau}} \qquad \xi = \frac{1}{2\sqrt{K_p\tau}}$$

二阶锁相环与RLC低通



$$H(s)=\frac{\Delta\varphi_o}{\Delta\varphi_i}=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$$

$$\omega_n=\sqrt{\frac{K_p}{\tau}}\qquad \xi=\frac{1}{2\sqrt{K_p\tau}}$$

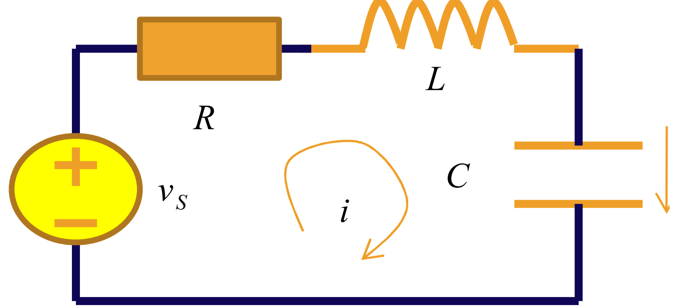


$$H(s)=\frac{v_C}{v_S}=\frac{\frac{1}{LC}}{s^2+s\frac{R}{L}+\frac{1}{LC}}$$

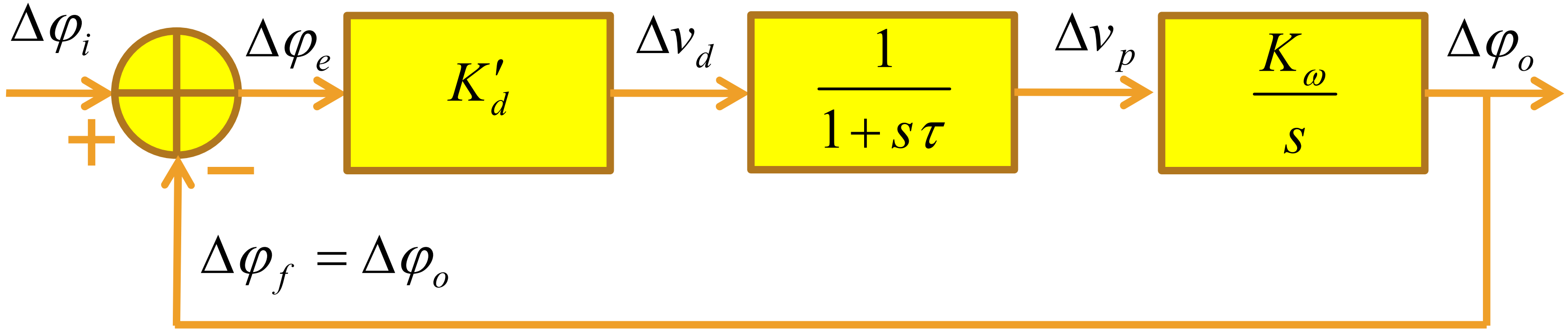
$$=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$$

$$\omega_n=\sqrt{\frac{1}{LC}}\qquad \xi=\frac{R}{2\sqrt{L/C}}$$

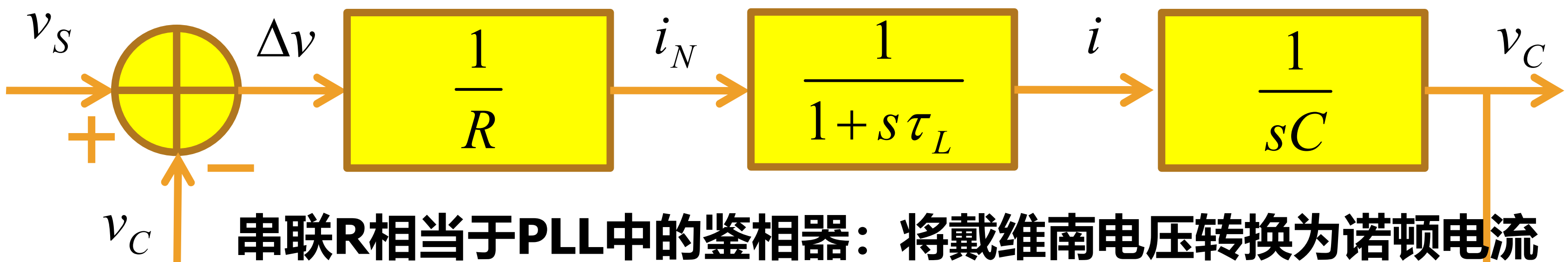
RLC低通滤波器信号流图



$$H(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$$



$$i=\frac{v_S-v_C}{R+sL}=\frac{v_S-v_C}{R}\frac{1}{1+s\tau_L}\qquad v_C=i\frac{1}{sC}$$



串联R相当于PLL中的鉴相器：将戴维南电压转换为诺顿电流
串联L相当于PLL中的环路滤波器：电流低通滤波（电感分流）
串联C相当于PLL中的VCO（积分环节）：电流积分形成电压
如果直连（直通环路滤波器），则为一阶低通（PLL）

三种常见一阶环路滤波器对应　三种二阶锁相环

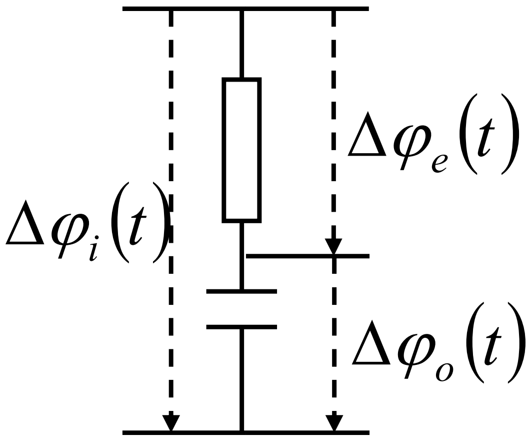
闭环传递函数：$H(s)=\dfrac{K_pH_F(s)}{s+K_pH_F(s)}$　　误差传递函数：$H_e(s)=1-H(s)=\dfrac{s}{s+K_pH_F(s)}$

环路滤波器	闭环传递函数	误差传递函数	特性参数
RC 积分滤波器 $H_F(s)=\dfrac{1}{1+s\tau}$	$\dfrac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$	$\dfrac{s^2+2\xi\omega_n s}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$	$\omega_n^2=\dfrac{K_p}{\tau}$　$2\xi\omega_n=\dfrac{1}{\tau}$
无源比例积分滤波器 $H_F(s)=\dfrac{1+s\tau_2}{1+s(\tau_1+\tau_2)}$	$\dfrac{\left(2\xi-\dfrac{\omega_n}{K_P}\right)\omega_n s+\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$	$\dfrac{s^2+s\dfrac{\omega_n^2}{K_P}}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$	$\omega_n^2=\dfrac{K_p}{\tau_1+\tau_2}$　$2\xi\omega_n=\dfrac{1+K_p\tau_2}{\tau_1+\tau_2}$
有源比例积分滤波器 $H_F(s)=\dfrac{1+s\tau_2}{s\tau_1}$	$\dfrac{2\xi\omega_n s+\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$	$\dfrac{s^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$	$\omega_n^2=\dfrac{K_p}{\tau_1}$　$2\xi\omega_n=K_p\dfrac{\tau_2}{\tau_1}$

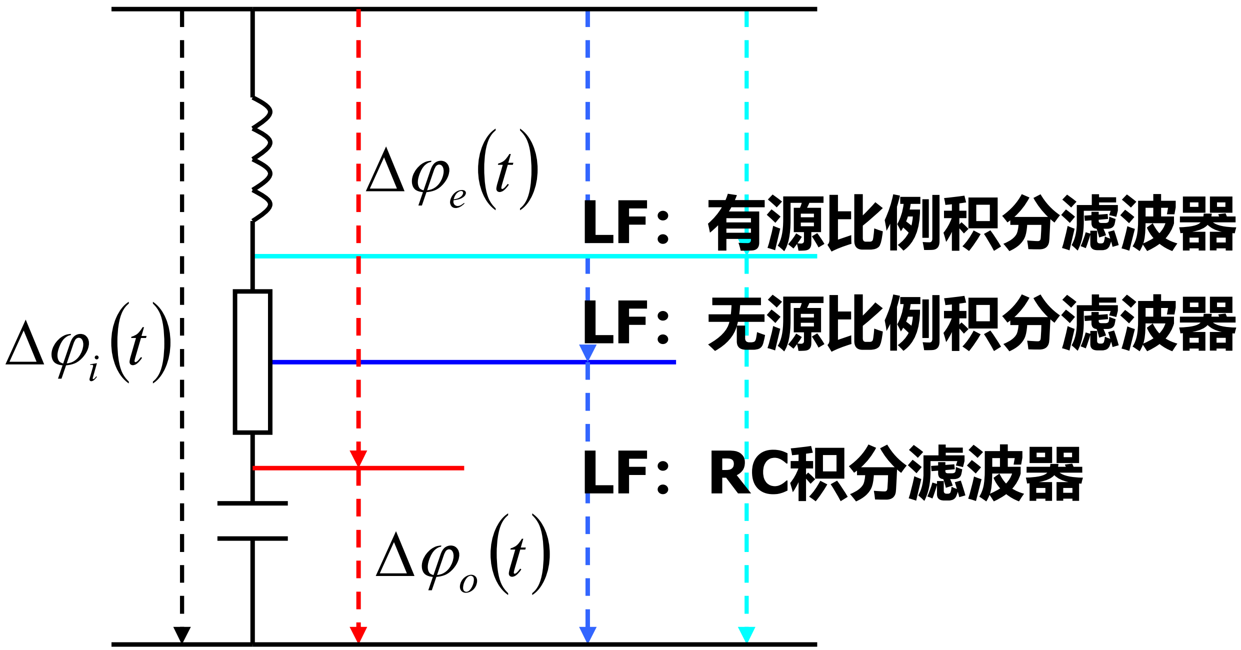
环路滤波器H_F前负号，输出自动调整为-cos($\varphi_o(t)$)，鉴相器鉴相灵敏度为-K_d
这并不会影响到相位环路方程：为了讨论方便，不再考虑这个负号

对PLL低通相位滤波的形象化理解

假设存在对相位犹如对电压起作用的相位RLC器件



一阶RC
一阶PLL



二阶RLC
二阶PLL

锁相环的相位低通滤波是通过负反馈实现的

7.3.2 PLL的跟踪特性 时频分析

- 对于已经锁定的环路，当输入信号的频率或相位发生某种变化时，环路的反馈将迫使压控振荡器的频率和相位跟踪输入信号的相位变化

- 在输入信号发生变化后的一段时间里，环路有一瞬变过程
  - 这个瞬变过程的具体状况与PLL的组成有关，也与输入信号频率或相位的变化规律有关

- 瞬变过程结束后，环路重新进入稳定的锁定状态
  - 这时，压控振荡器与输入信号有相同的频率和一固定的相差，这个相差就是稳态相差

为了简单起见，假设起始状态为同频，锁定则同频同相（正交）

$$\omega_{i0} = \omega_{o0} \qquad (t < 0)$$

$$\varphi_{e\infty,0} = \arcsin \frac{\omega_{i0} - \omega_{o0}}{H_F(0)K_p} = 0$$

相位阶跃与频率阶跃的瞬态响应和稳态相差

输入为相位阶跃：$\Delta\varphi_i(t) = \begin{cases} \Delta\theta_0 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$

$$\Delta\varphi_i(s) = \frac{\Delta\theta_0}{s}$$

输入有一频率阶跃：$\omega_i(t) = \begin{cases} \omega_{o0} + \Delta\omega_0 & t > 0 \\ \omega_{o0} & t < 0 \end{cases}$

$$\Delta\varphi_i(t) = \begin{cases} \Delta\omega_0 t & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$$\Delta\varphi_i(s) = \frac{\Delta\omega_0}{s^2}$$

误差相位的瞬态响应：$\Delta\varphi_e(s) = H_e(s)\Delta\varphi_i(s)$

$$\Delta\varphi_e(t) = L^{-1}\Delta\varphi_e(s)$$

输出相位的瞬态响应：$\Delta\varphi_o(t) = \Delta\varphi_i(t) - \Delta\varphi_e(t)$

稳态相差：$\Delta\varphi_{e\infty} = \lim\limits_{t\to\infty}\Delta\varphi_e(t) = \lim\limits_{s\to 0} s\Delta\varphi_e(s)$ （拉氏变换终值定理）

$$\varphi_{e\infty} = \varphi_{e\infty,0} + \Delta\varphi_{e\infty} = \Delta\varphi_{e\infty}$$

- 稳态相差为0
- 环路增益K_p越大，对相位阶跃的跟踪就越快

$$\Delta\varphi_i(s)=\frac{\Delta\theta_0}{s}$$

一阶PLL对相位阶跃的瞬态响应和稳态相差

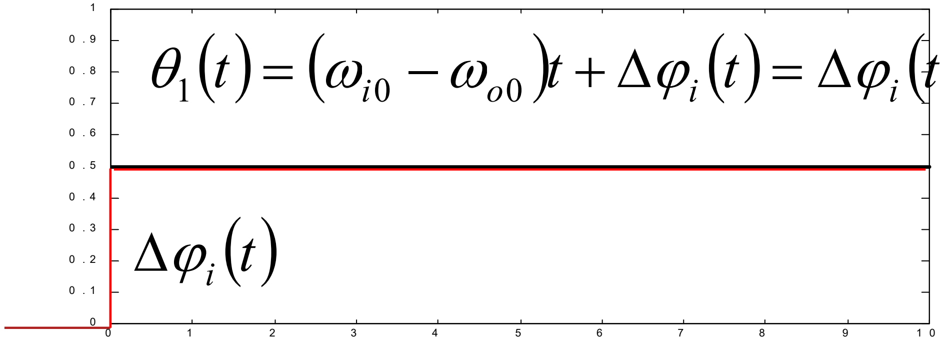
$$H_e(s)=\frac{s}{s+K_P}=\frac{s}{s+\omega_0}$$

$$\Delta\varphi_e(s)=\frac{s}{s+\omega_0}\frac{\Delta\theta_0}{s}=\frac{\Delta\theta_0}{s+\omega_0}$$

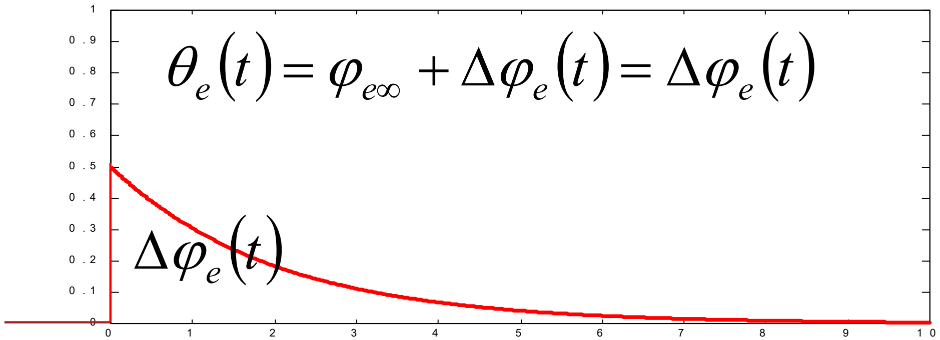
$$\Delta\varphi_e(t)=L^{-1}\frac{\Delta\theta_0}{s+\omega_0}=\Delta\theta_0 e^{-\omega_0 t}$$

$$\Delta\varphi_{e\infty}=0$$

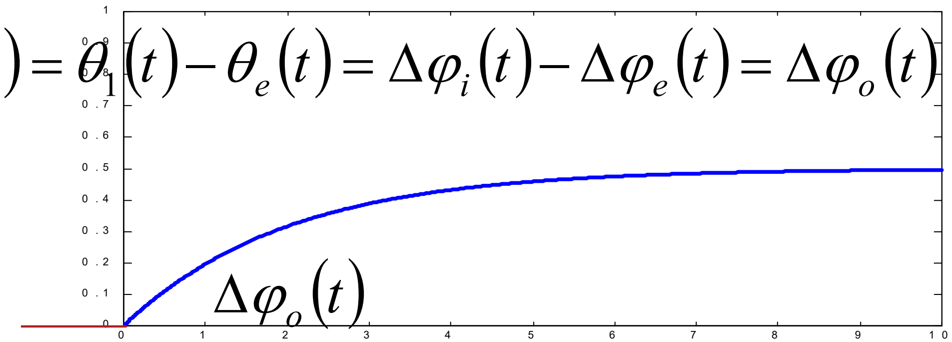
$$\theta_1(t)=(\omega_{i0}-\omega_{o0})t+\Delta\varphi_i(t)=\Delta\varphi_i(t)$$



$$\theta_e(t)=\varphi_{e\infty}+\Delta\varphi_e(t)=\Delta\varphi_e(t)$$



$$\theta_2(t)=\theta_1(t)-\theta_e(t)=\Delta\varphi_i(t)-\Delta\varphi_e(t)=\Delta\varphi_o(t)$$



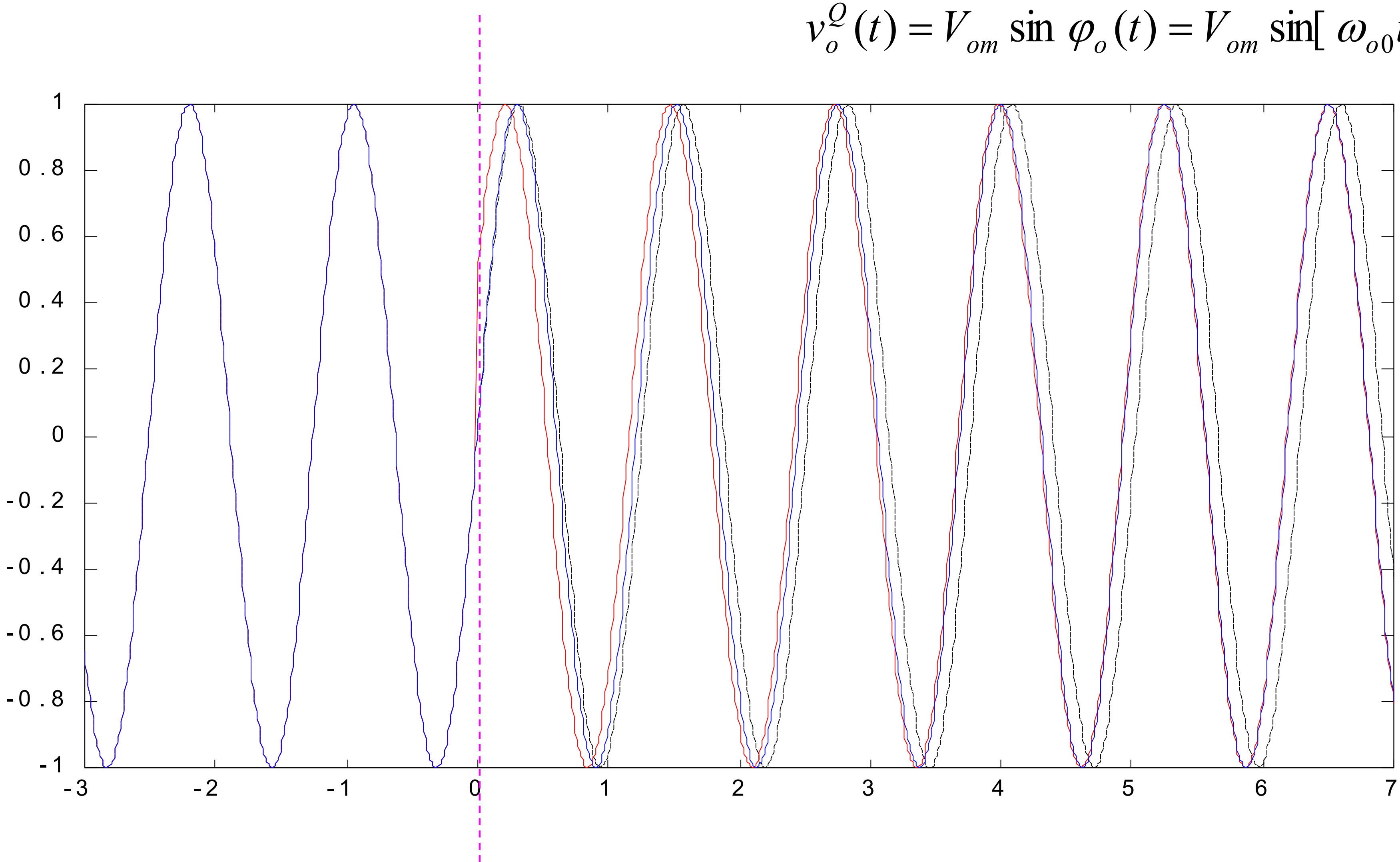
- 压控振荡器输出相位的变化是连续的，它需要经过一段时间才能跟踪得上输入相位的变化：其根本原因是控制电压改变的是压控振荡器的频率，它是随着控制电压的变化而立即变化的。但需要跟踪的是输入信号相位的跳变，而压控振荡器相位的变化是频率的积分，所以它需要一定的时间

一阶环输出信号对输入信号相位阶跃的跟踪

$$v_i(t) = V_{im}\sin\varphi_i(t) = V_{im}\sin\left(\omega_{o0}t + \theta_1(t)\right)$$

$$v_o(t) = V_{om}\cos\varphi_o(t) = V_{om}\cos[\omega_{o0}t + \theta_2(t)]$$

$$v_o^Q(t) = V_{om}\sin\varphi_o(t) = V_{om}\sin[\omega_{o0}t + \theta_2(t)]$$



$$\Delta\varphi_i(s)=\frac{\Delta\theta_0}{s}$$

二阶PLL对相位阶跃的瞬态响应和稳态相差

- **以有源比例积分环路滤波器作为PLL的LF为例**

$$H_e(s)=\frac{s^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$$

$$\Delta\varphi_e(s)=\frac{s\Delta\theta_0}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$$

$$\Delta\varphi_e(t)=\Delta\theta_0 e^{-\xi\omega_n t}\begin{cases}\left(\cos\sqrt{1-\xi^2}\,\omega_n t-\dfrac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\sqrt{1-\xi^2}\,\omega_n t\right) & \xi<1\\ (1-\omega_n t) & \xi=1\\ \left(\cosh\sqrt{\xi^2-1}\,\omega_n t-\dfrac{\xi}{\sqrt{\xi^2-1}}\sinh\sqrt{\xi^2-1}\,\omega_n t\right) & \xi>1\end{cases}$$

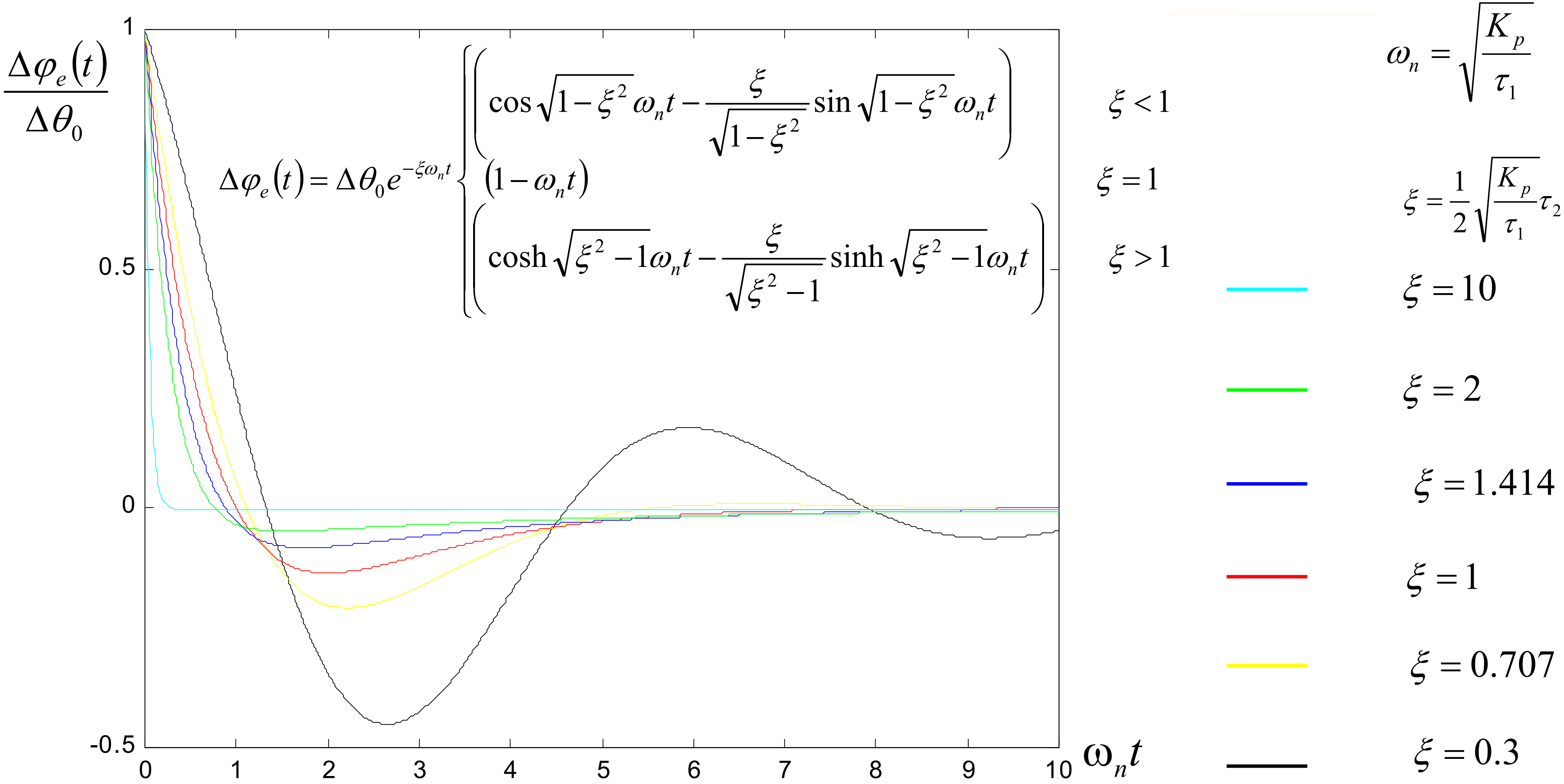
- 稳态相差为0
- ω_n越大，对相位阶跃跟踪得越快
- ξ越小，过冲量越大，跟踪慢； ξ很大时，跟踪看起来很快

误差相位对相位阶跃的响应

$$\Delta\varphi_e(t)=\Delta\theta_0 e^{-\xi\omega_n t}\begin{cases}\left(\cos\sqrt{1-\xi^2}\,\omega_n t-\dfrac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\sqrt{1-\xi^2}\,\omega_n t\right) & \xi<1\\ \left(1-\omega_n t\right) & \xi=1\\ \left(\cosh\sqrt{\xi^2-1}\,\omega_n t-\dfrac{\xi}{\sqrt{\xi^2-1}}\sinh\sqrt{\xi^2-1}\,\omega_n t\right) & \xi>1\end{cases}$$

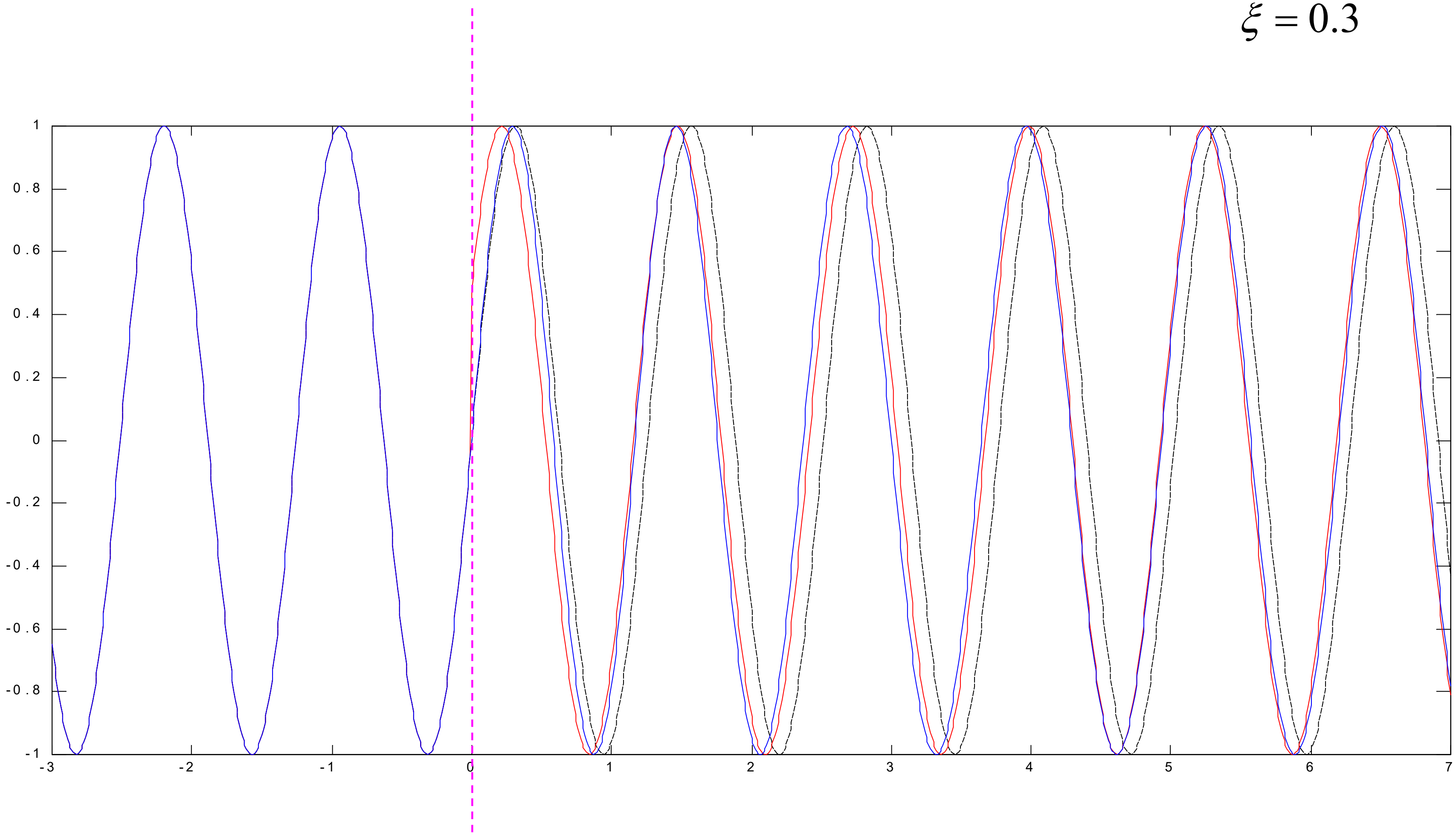
$$\omega_n=\sqrt{\frac{K_p}{\tau_1}}$$

$$\xi=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{K_p}{\tau_1}}\tau_2$$



二阶环输出信号对输入信号相位阶跃的跟踪

$\xi = 0.3$



- 稳态相差为一常数$\Delta\omega_0/K_p$，以保证压控振荡器有频率变化$\Delta\omega_0$，且保持这个变化，这就需要维持相应的控制电压，这个常数相差产生这个控制电压：K_p越大，稳态相差越小，跟踪得也越快

$$\Delta\varphi_i(s)=\frac{\Delta\omega_0}{s^2}$$

一阶PLL对频率阶跃的瞬态响应和稳态相差

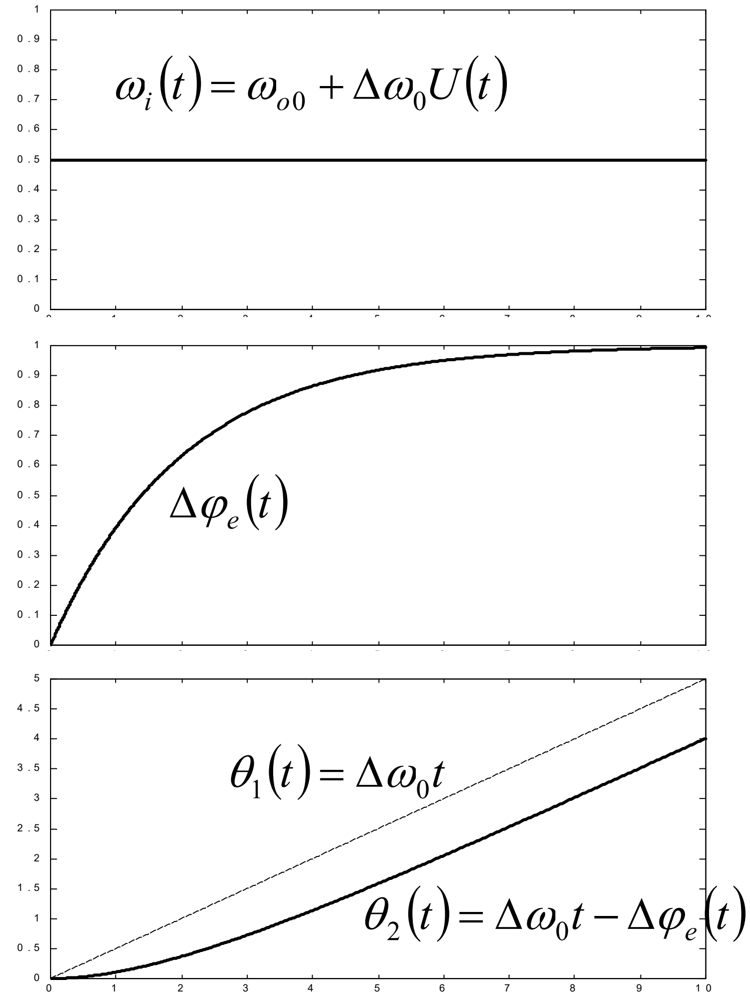
$$H_e(s)=\frac{s}{s+K_P}=\frac{s}{s+\omega_0}$$

$$\Delta\varphi_e(s)=\frac{s}{s+\omega_0}\frac{\Delta\omega_0}{s^2}=\frac{\Delta\omega_0}{s(s+\omega_0)}$$

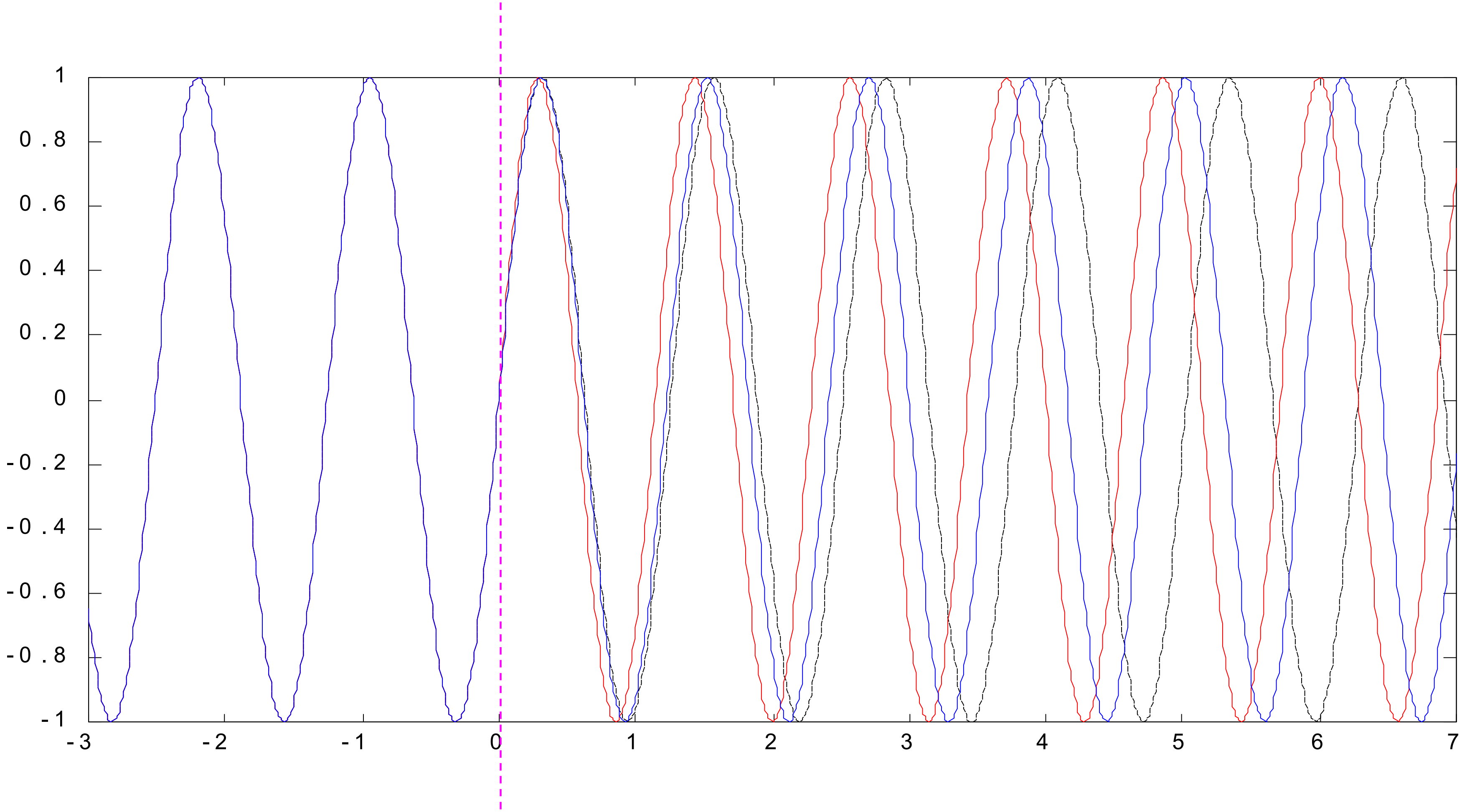
$$\Delta\varphi_e(t)=L^{-1}\Delta\varphi_e(s)=\frac{\Delta\omega_0}{\omega_0}\left(1-e^{-\omega_0 t}\right)$$

$$\Delta\varphi_{e\infty}=\frac{\Delta\omega_0}{\omega_0}=\frac{\Delta\omega_0}{K_p}$$

$$\varphi_{e\infty}=\varphi_{e\infty,0}+\Delta\varphi_{e\infty}=\frac{\Delta\omega_0}{K_p}$$



一阶环输出信号对输入信号频率阶跃的跟踪



$$\Delta\varphi_i(s)=\frac{\Delta\omega_0}{s^2}$$

二阶PLL对频率阶跃的瞬态响应和稳态相差

- 以有源比例积分环路滤波器做为PLL的LF为例

$$H_e(s)=\frac{s^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$$

$$\Delta\varphi_e(s)=\frac{\Delta\omega_0}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

$$\Delta\varphi_e(t)=\frac{\Delta\omega_0}{\omega_n}e^{-\xi\omega_n t}\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\sqrt{1-\xi^2}\,\omega_n t & \xi<1\\ \omega_n t & \xi=1\\ \dfrac{1}{\sqrt{\xi^2-1}}\sinh\sqrt{\xi^2-1}\,\omega_n t & \xi>1\end{cases}$$

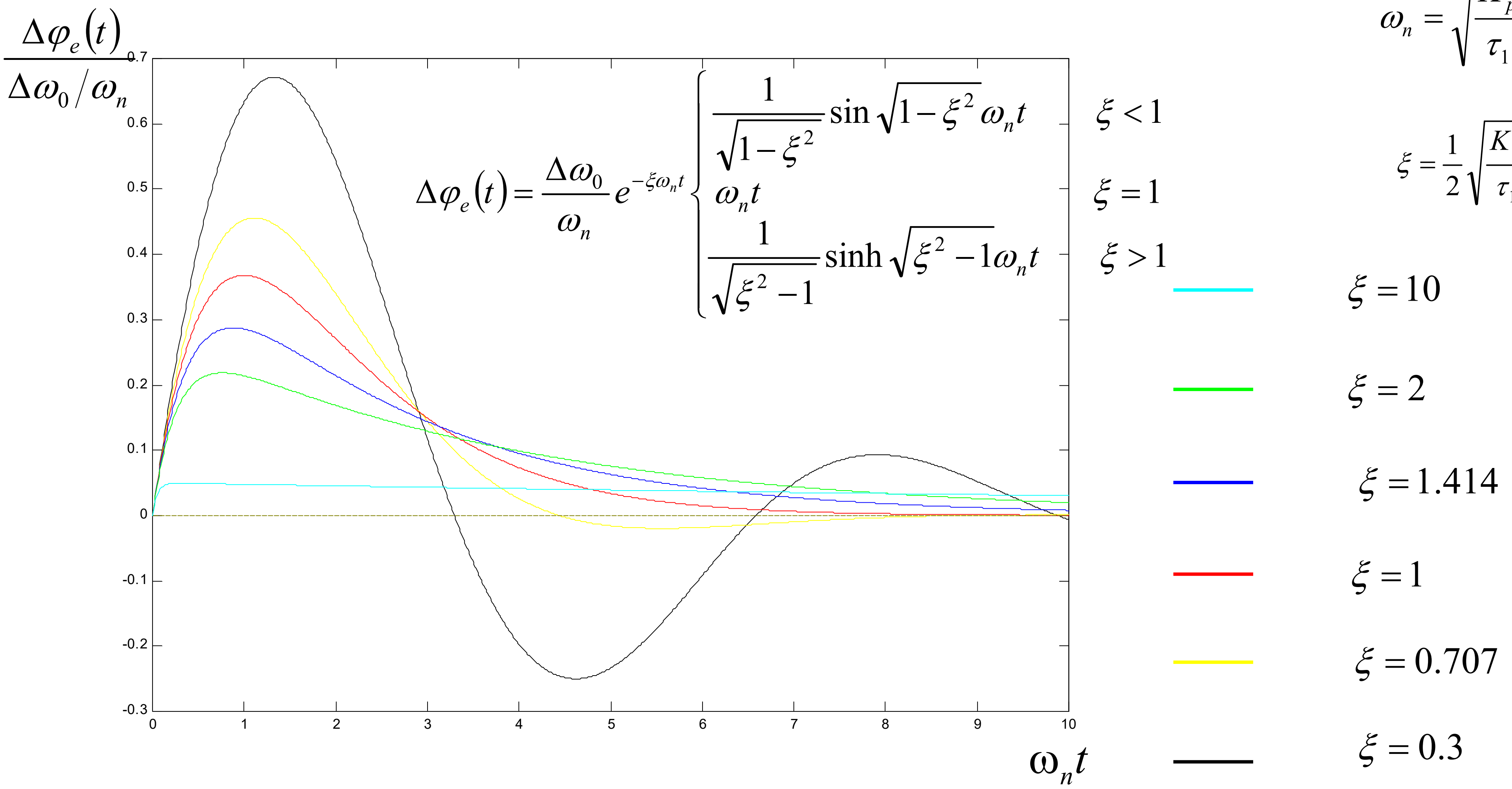
- 对理想运放实现的有源比例积分环路滤波器而言，稳态相差为0
- ω_n越大，对相位阶跃跟踪得越快；瞬态相差越小
- 取ξ=0.707～1可兼顾快的响应速度和小的过冲量

误差相位对频率阶跃的响应

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K_p}{\tau_1}}$$

$$\xi = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{K_p}{\tau_1}}\tau_2$$

$$\Delta\varphi_e(t) = \frac{\Delta\omega_0}{\omega_n} e^{-\xi\omega_n t}\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\sqrt{1-\xi^2}\,\omega_n t & \xi < 1 \\ \omega_n t & \xi = 1 \\ \dfrac{1}{\sqrt{\xi^2-1}}\sinh\sqrt{\xi^2-1}\,\omega_n t & \xi > 1 \end{cases}$$

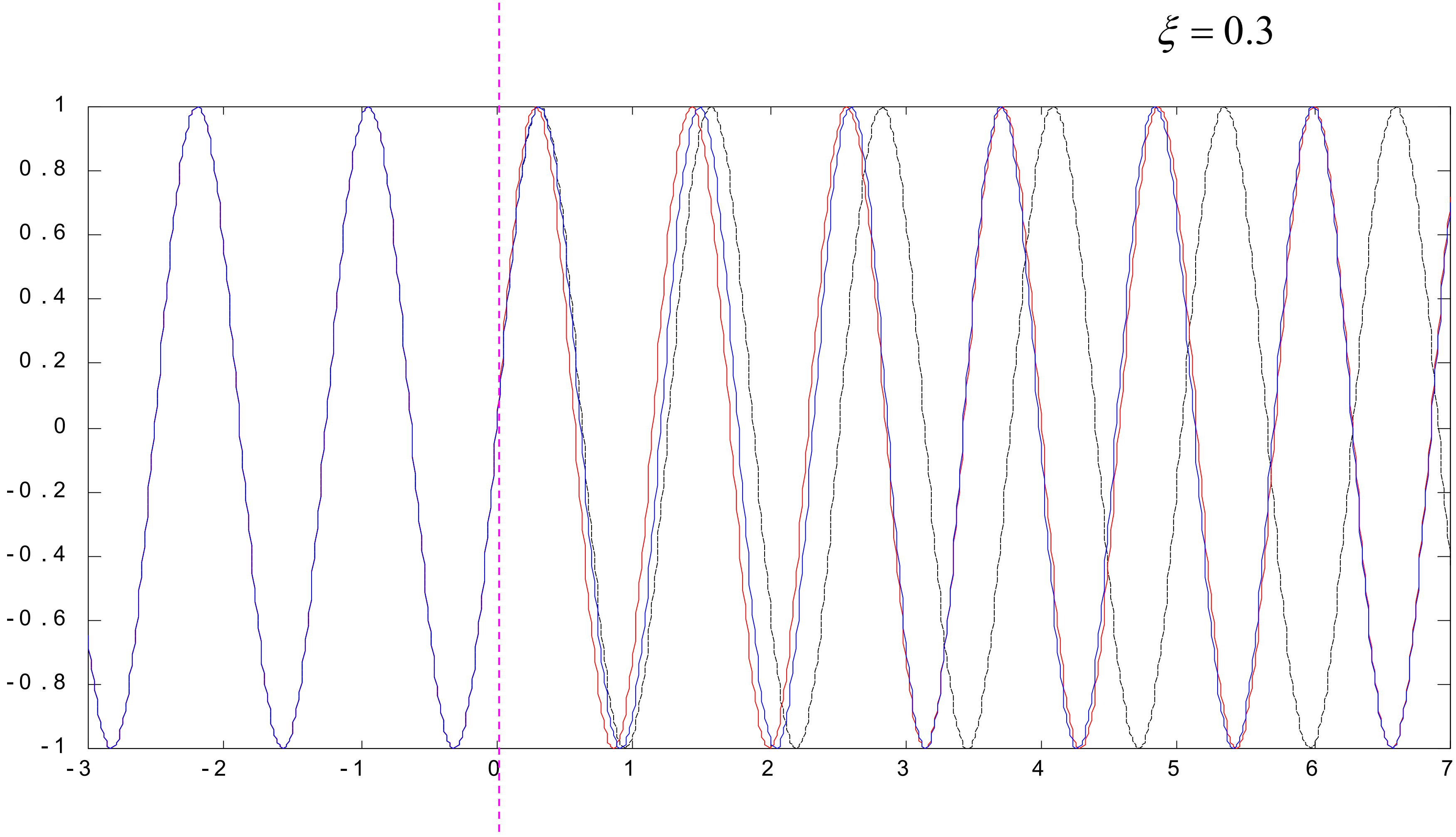


- **对于理想运放实现的有源比例积分环路滤波器，PLL的稳态相差为0；若是RC积分滤波器和无源比例积分滤波器，则存在稳态相差**

$$\varphi_{e\infty}=\arcsin\frac{\Delta\omega}{H_F(0)K_p}\approx\frac{\Delta\omega}{H_F(0)K_p}$$

二阶环输出信号对输入信号频率阶跃的跟踪

$\xi=0.3$



- **PLL对输入相位阶跃的稳态相差为0；PLL实现频率跟踪是以相位误差为代价的**
- **采用有源比例积分滤波器可以使得稳态相差几乎为0，在适当调整阻尼系数后，又可获得一个好的瞬态响应曲线**

相位阶跃和频率阶跃的稳态相差

相位阶跃：$\Delta\varphi_i(s)=\dfrac{\Delta\theta_0}{s}$

$$\Delta\varphi_{e\infty}=\lim_{s\to 0}\frac{s}{s+K_PH_F(s)}\Delta\theta_0=0$$

$$\Delta\varphi_{e\infty}=\lim_{s\to 0}s\Delta\varphi_e(s)=\lim_{s\to 0}sH_e(s)\Delta\varphi_i(s)$$

$$=\lim_{s\to 0}\frac{s^2}{s+K_PH_F(s)}\Delta\varphi_i(s)$$

频率阶跃：$\Delta\varphi_i(s)=\dfrac{\Delta\omega_0}{s^2}$

$$\Delta\varphi_{e\infty}=\lim_{s\to 0}\frac{\Delta\omega_0}{s+K_PH_F(s)}=\frac{\Delta\omega_0}{K_PH_F(0)}=\frac{\Delta\omega_0}{K_{P0}}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{\Delta\omega_0}{K_P} & \text{直通电路，RC积分，无源比例积分滤波器}\\[2ex] \dfrac{\Delta\omega_0}{K_PA_v}\approx 0 & \text{有源比例积分滤波器}\end{cases}$$

$$\Delta\varphi_{e\infty} = \lim_{s\to 0} s\Delta\varphi_e(s) = \lim_{s\to 0} sH_e(s)\Delta\varphi_i(s)$$

$$= \lim_{s\to 0}\frac{s^2}{s+K_P H_F(s)}\Delta\varphi_i(s)$$

频率斜升?

- 发射机和接收机之间有加速运动时发生频率斜升
  - 卫星和导弹跟踪；频率扫描

输入有一频率斜升：$\omega_i(t) = \begin{cases} \omega_{o0} + \Lambda t & t > 0 \\ \omega_{o0} & t < 0 \end{cases}$

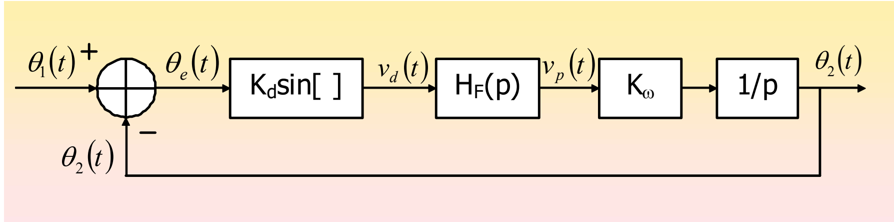
$$\Delta\varphi_i(s) = \frac{\Lambda}{s^3}$$

$$\Delta\varphi_{e\infty} = \lim_{s\to 0}\frac{\Lambda}{s\left(s+K_P H_F(s)\right)} = \frac{\Lambda}{K_P}\lim_{s\to 0}\frac{1}{sH_F(s)}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\Lambda\tau_1}{K_P} \\ 0 \end{cases}$$

$H_F(s) = \dfrac{1}{s\tau_1}(1+s\tau_2)$理想比例积分滤波器

$H_F(s) = \dfrac{1}{s^2}\cdot(\ldots)$两个理想积分器级联



环路对相位阶跃的响应过程

PLL锁定：假设同频同相：$\theta_e(t)=0$：$t<0$：$v_d(t)=0$， $v_p(t)=0$

$t=0$：相位阶跃$\Delta\theta_0$

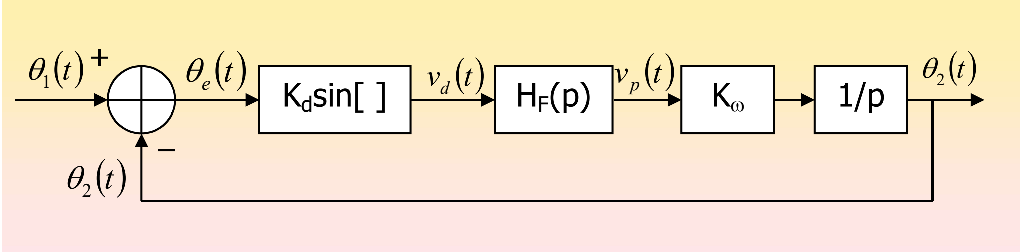
产生相差：$\theta_e(t)=\Delta\theta_0$：$t=0^+$

鉴相器和低通均有电压输出：$V_d(t)=K_d\theta_e(t)$，$v_p(t)=H_F(p)V_d(t)$

VCO频率出现变化，使得输出相位不断接近输入相位，相差逐渐减小

相位阶跃跟踪过程

经过一段时间后，PLL重新锁定：仍然同频同相：$\theta_e(t)=0$，$v_d(t)=0$，$v_p(t)=0$



环路对频率阶跃的响应过程

PLL锁定：假设同频同相：$\theta_e(t)=0$：$t<0$：$v_d(t)=0$，$v_p(t)=0$

$t=0$：频率阶跃$\Delta\omega_0$

输入产生相位斜升：$\theta_1(t)=\Delta\omega_0 t$：$t>0$：产生相差$\theta_e(t)$

鉴相器和低通均有电压输出：$V_d(t)=K_d\theta_e(t)$，$v_p(t)=H_F(p)V_d(t)$

VCO频率出现变化，使得输出频率不断接近输入频率，相差趋于恒值

频率阶跃跟踪过程

PLL重新锁定：同频不同相：$\theta_{e\infty}=\Delta\omega_0/K_pA_v$，$v_{d\infty}=\Delta\omega_0/K_\omega A_v$，$v_{p\infty}=\Delta\omega_0/K_\omega$

7.3.4 PLL的频率特性

- 当输入信号的相位按正弦规律变化时，PLL输出信号的相位也将按正弦规律变化，但按正弦规律变化的相位的幅度和初始相角将随频率的不同而不同，称这种特性为PLL环路的频率特性或频率响应
  - 频率特性就是PLL线性模型传递函数H(s)的频率特性

$$\Delta\varphi_o(s) = H(s)\Delta\varphi_i(s) \qquad H(j\Omega) = H(s)\big|_{s=j\Omega}$$

- **如果输入为一单音调相信号，输出信号仍然为单音调相信号，调制指数发生变化，并且调制信号有相移**

$$H(s)=\frac{\Delta\varphi_o(s)}{\Delta\varphi_i(s)}=\frac{K_P H_F(s)}{s+K_P H_F(s)}$$

输入相位和输出相位表示

$$v_i(t)=v_{im}\,\mathbf{sin}\left[\omega_{o0}t+\theta_{1m}\,\mathbf{sin}\left(\Omega t+\psi_1\right)\right]$$

$$v_o(t)=v_{om}\,\mathbf{cos}\left[\omega_{o0}t+\theta_{2m}\,\mathbf{sin}\left(\Omega t+\psi_2\right)\right]$$

$$\Delta\varphi_i(t)=\theta_{1m}\sin\left(\Omega t+\psi_1\right) \qquad \Delta\varphi_o(t)=\theta_{2m}\sin\left(\Omega t+\psi_2\right)$$

$$\Delta\varphi_o(s)=H(s)\Delta\varphi_i(s)$$

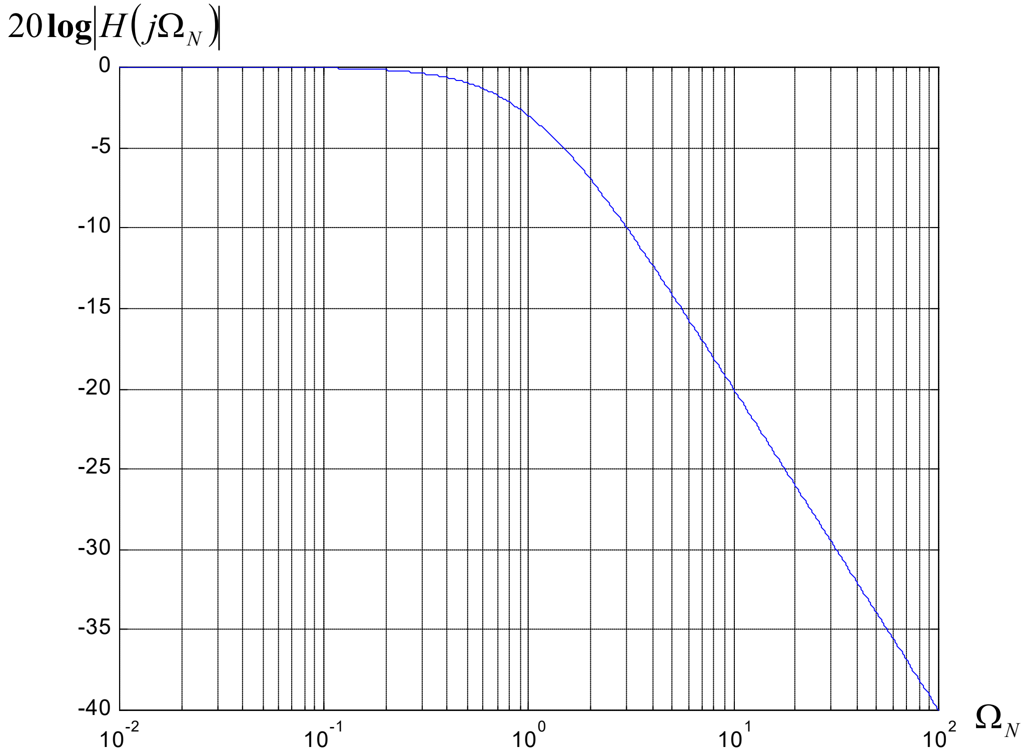
$$\Delta\varphi_o(j\Omega)=H(j\Omega)\Delta\varphi_i(j\Omega)=\left|H(j\Omega)\right|e^{j\varphi_H(\Omega)}\Delta\varphi_i(j\Omega)$$

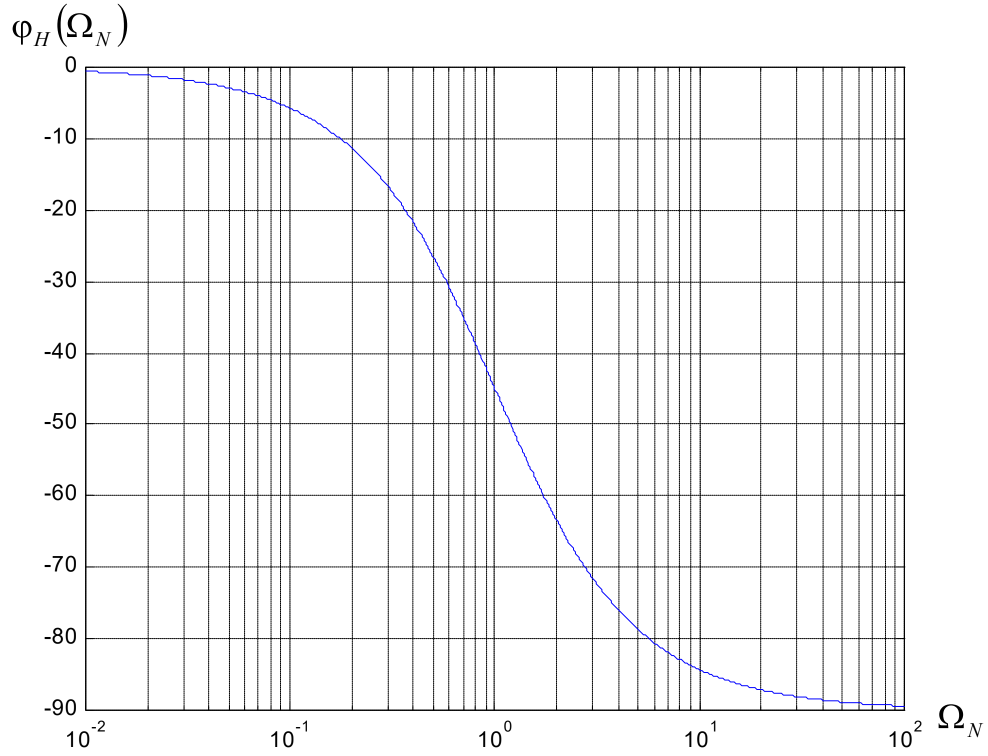
$$\theta_{2m}=\theta_{1m}\left|H(j\Omega)\right| \qquad \psi_2=\psi_1+\varphi_H(\Omega)$$

$$H(s)=\frac{K_P}{s+K_P}=\frac{\omega_0}{s+\omega_0} \qquad \Omega_{3dB}=\omega_0=K_p$$

一阶PLL

$$H(j\Omega)=\frac{K_P}{j\Omega+K_P}=\frac{\omega_0}{j\Omega+\omega_0}=\frac{1}{1+j\left(\dfrac{\Omega}{\omega_0}\right)}=\frac{1}{\sqrt{1+\Omega_N^2}}e^{-j\,\mathbf{arctan}\,\Omega_N}$$



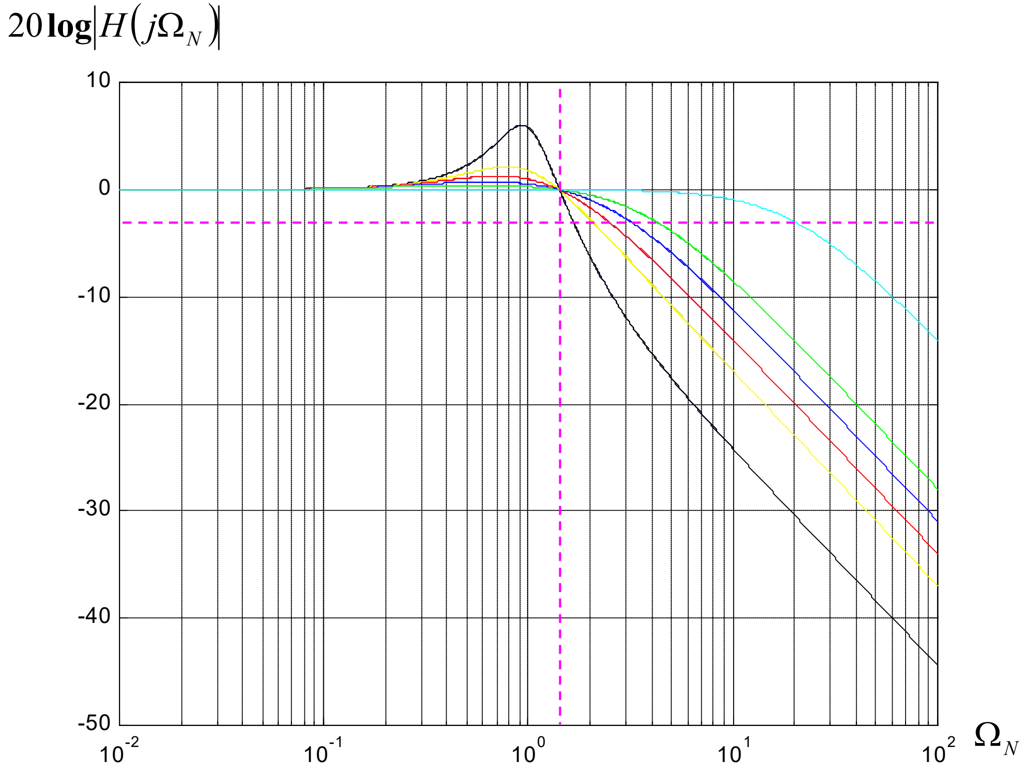


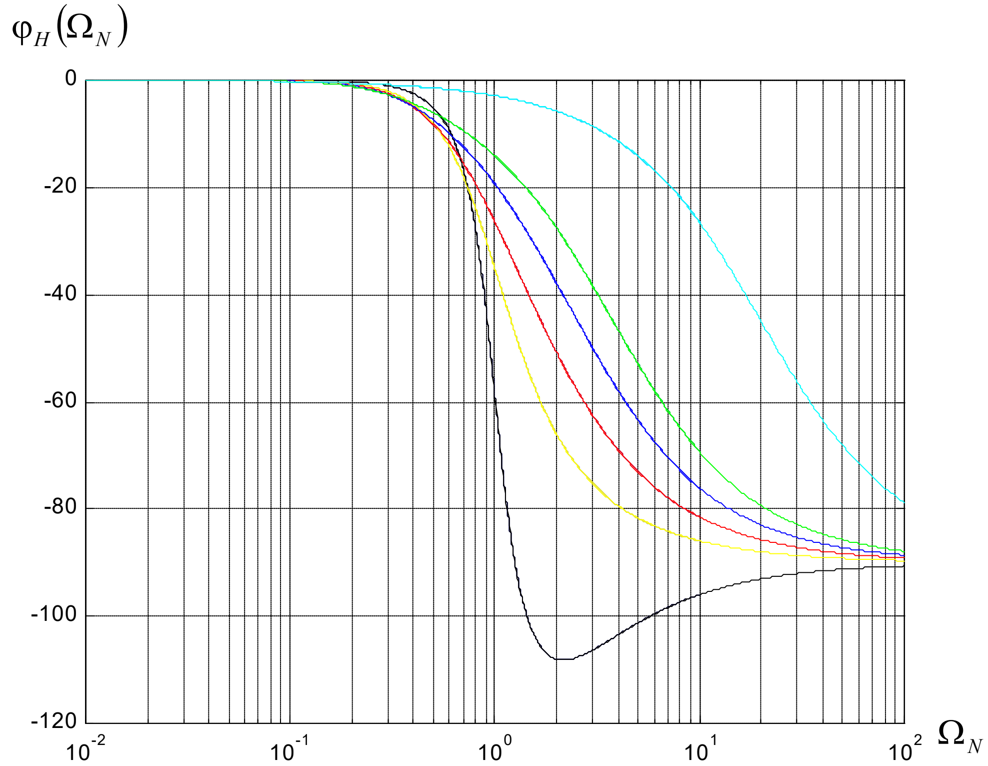
$$H(s)=\frac{2\xi\omega_n s+\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$$

$$\Omega_{N,3dB}=\frac{\Omega_{3dB}}{\omega_n}=\sqrt{2\xi^2+1+\sqrt{\left(2\xi^2+1\right)^2+1}}\text{：}\ \Omega_{3dB}=\Omega_{N,3dB}\omega_n$$

二阶PLL

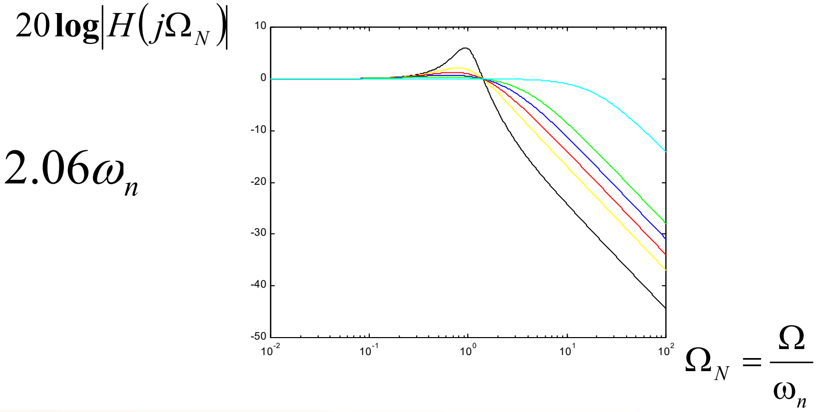
$$H(j\Omega)=\frac{j2\xi\omega_n\Omega+\omega_n^2}{-\Omega^2+j2\xi\omega_n\Omega+\omega_n^2}=\frac{1+j2\xi\Omega_N}{\left(1-\Omega_N^2\right)+j2\xi\Omega_N}=\sqrt{\frac{1+\left(2\xi\Omega_N\right)^2}{\left(1-\Omega_N^2\right)^2+\left(2\xi\Omega_N\right)^2}}e^{j\left(\arctan 2\xi\Omega_N-\arctan\frac{2\xi\Omega_N}{1-\Omega_N^2}\right)}$$





$$\xi=0.3,\ 0.707,\ 1,\ 1.414,\ 2,\ 10$$

$$\Omega_{3dB}=\omega_n\sqrt{2\xi^2+1+\sqrt{\left(2\xi^2+1\right)^2+1}}\qquad \Omega_{3dB}(\xi=0.707)=2.06\omega_n$$

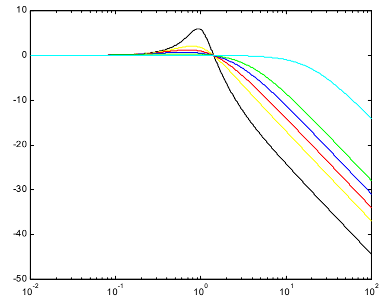


低通特性

- 对于二阶环路，其频率的低通特性主要取决于两个参数，阻尼系数ξ和环路的自然角频率ω_n
  - ω_n决定低通特性的频带宽度
  - ξ主要决定低通特性的形状
- 增大或减小ω_n，只是把低通特性按比例拉宽或缩窄
- ξ越小，低通特性的峰起越严重，截止速度越快
  - ξ =1：临界阻尼；ξ <1：欠阻尼；ξ >1：过阻尼
  - 取ξ =0.707～1是兼顾过冲量小和截止速度快的较通常的选择

$$v_i(t)=v_{im}\sin[\omega_{o0}t+\theta_{1m}\sin(\Omega_1 t+\psi_1)]$$
$$v_o(t)=v_{om}\cos[\omega_{o0}t+\theta_{2m}\sin(\Omega_1 t+\psi_2)]$$
$$\theta_{2m}=\theta_{1m}|H(j\Omega_1)|$$

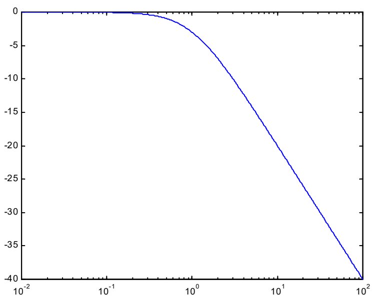
$$\Omega_{3dB}=\omega_n\sqrt{2\xi^2+1+\sqrt{(2\xi^2+1)^2+1}}$$
$$\Omega_{3dB}(\xi=0.707)=2.06\omega_n=2.06\sqrt{\frac{K_P}{\tau_1}}$$



对两种跟踪状态的解释

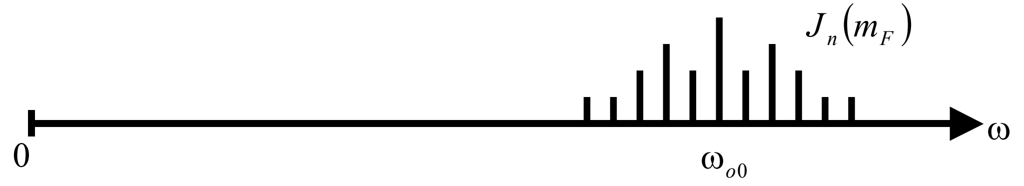
- **锁相环对相位正弦波变化的稳态频率响应具有低通特性，记相位正弦波变化的频率为Ω_1**
  - **如果Ω_1位于低通特性的通带之内，则θ_{2m}不为零，此时输入信号为调角波，输出信号也是调角波：调制跟踪状态**
  - **如果Ω_1位于低通特性的通带之外，则θ_{2m}被大大衰减，此时输入信号为调角波，但输出信号却是载波信号：载波跟踪状态**

只要控制锁相环的闭环传递函数的带宽，就可决定VCO输出信号是跟踪输入信号的角度调制变化，还是跟踪输入信号的载波



$$\Omega_{3dB}=\omega_0=K_P$$

$$v_i(t) = V_{im}\sin(\omega_{o0}t + m_F\sin(\Omega_1 t + \psi_1))$$



区分两种频谱结构：电压谱和相位谱

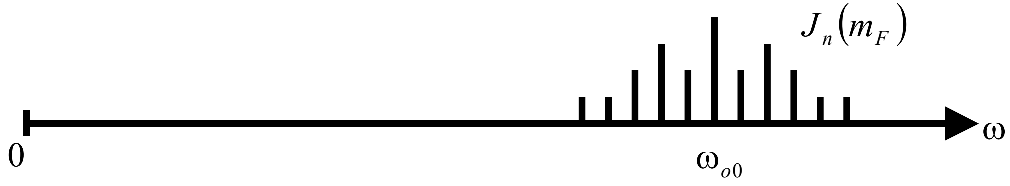
- 以单频调频信号为例，其频谱结构为：以ω_{o0}为中心，谱线间隔为Ω_1，幅值为贝赛尔函数$J_n(m_F)$的无穷多条谱线---**电压谱**
- 而该调频波的瞬时相位变化为$\theta_1(t)$，这是一个频率为Ω_1的正弦波，其频谱为位于Ω_1处，幅值为m_F的一条谱线---**相位谱**

$$\Delta\varphi_i(t) = m_F\sin(\Omega_1 t + \psi_1)$$

- 电压谱位于高频，相位谱位于低频，锁相环闭环传递函数的低通特性是针对相位谱

$$v_i(t) = V_{im}\sin\left(\omega_{o0}t + m_F\sin(\Omega_1 t + \psi_1)\right)$$

谱线幅度：$J_n(m_F)$



窄带跟踪环和调制跟踪环

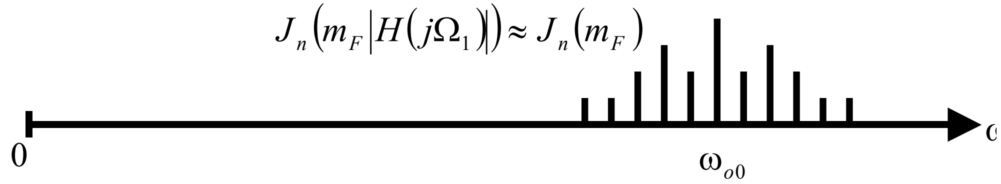
- **锁相环的低通特性是对输入信号的相位谱而言的，而对输入信号的电压谱，锁相环相当于位于中心频率ω_{o0}处的带通滤波器**

$$\Delta\varphi_i(t) = m_F\sin(\Omega_1 t + \psi_1) \qquad \Delta\varphi_o(t) = m_F\left|H(j\Omega_1)\right|\sin\left(\Omega_1 t + \psi_1 + \varphi_H(\Omega_1)\right)$$

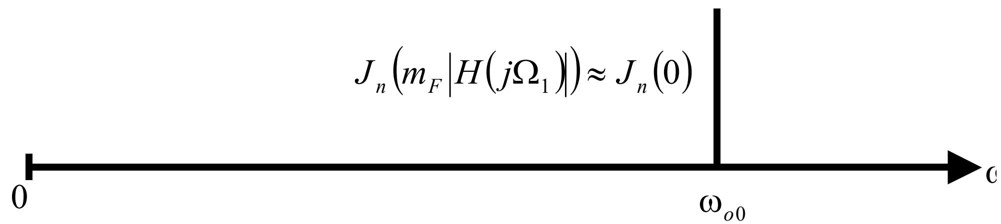
$$v_o(t) = V_{om}\cos\left(\omega_{o0}t + m_F\left|H(j\Omega_1)\right|\sin\left(\Omega_1 t + \psi_1 + \varphi_H(\Omega_1)\right)\right)$$

谱线幅度：$J_n\left(m_F\left|H(j\Omega_1)\right|\right)$

- **调节PLL参数，可以在很高的载频上实现通频带极窄的滤波器（相当于有极高的Q值），称为窄带跟踪环，可用于载波恢复；反之，如果作成宽带，PLL则是一个极好的调制跟踪环：VCO的控制电压就是调制信号的解调电压，可应用于调频波的解调**



$$2\pi BW = 2\left(m_F\left|H(j\Omega_1)\right| + 1\right)\Omega_1$$



7.3.5 PLL的稳定性

- 锁相环是相位负反馈系统，其优良特性应用的前提是**锁相环是稳定的**
- 锁相环是一个非线性动态系统，其稳定性不仅和系统参数有关，还和外界干扰强度有关
  - 在大的干扰作用下，环路失锁，处于捕获状态，必须用非线性捕获过程分析其稳定性
  - 如果干扰较小，处于锁定状态，可用环路的线性模型来分析
    - 线性状态下的稳定性是系统稳定的必要条件

稳定性判定准则

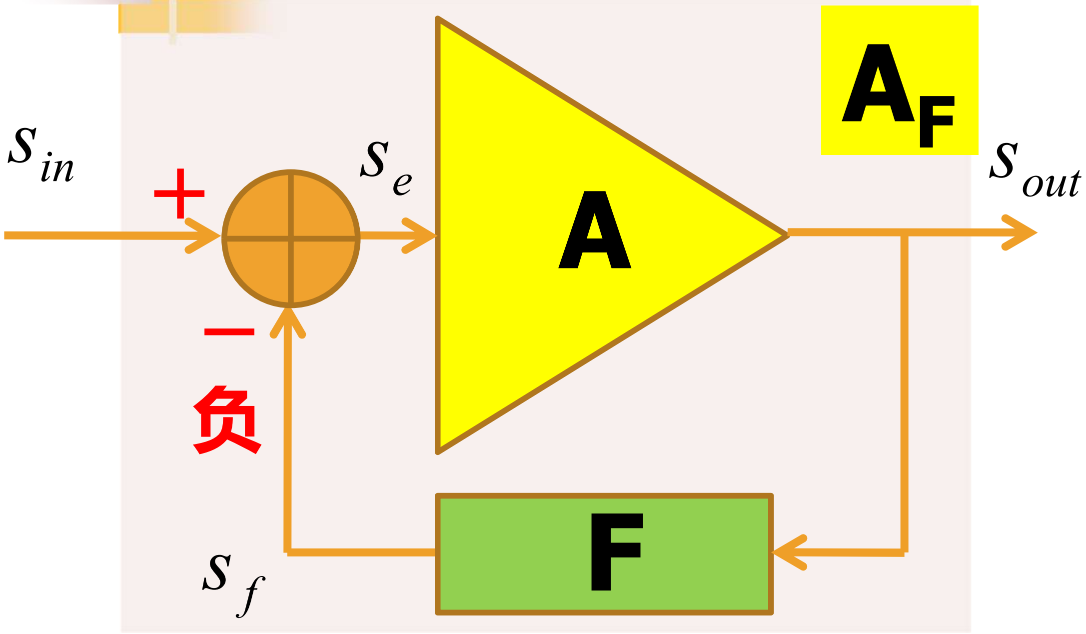
$$H(s)=\frac{H_o(s)}{1+H_o(s)}$$

- 系统的闭环传递函数的全部极点都位于s平面的左半平面，则系统是稳定的
  - 闭环传递函数较为复杂，用开环传递函数判定反馈系统的稳定性是较常用的
    - 开环传递函数可以实际测量，计算也较为简单
- 波特准则：对于单位反馈环路，如果其开环特性是稳定的且满足如下条件，该系统闭环后一定是稳定的

$$当\varphi_{H_o(j\omega_K)}=\pi时，20\log\left|H_o(j\omega_K)\right|<0dB$$

$$当20\log\left|H_o(j\omega_u)\right|=0dB时，\left|\varphi_{H_o(j\omega_u)}\right|<\pi$$

负反馈放大器变正反馈振荡器



由于电容、电感动态元件的参与，信号处理出现延时和相移，如果移相超过180°，则可使得反馈信号s_f反相位，负反馈变成了正反馈

正反馈：无限大的增益
器件最终损毁
驱动器件进入锁定状态
形成振荡

$$s_{out} = \frac{A}{1+AF} s_{in} \overset{AF>>1}{\approx} \frac{1}{F} s_{in}$$

期望实现的深度负反馈

如果振荡：振荡的平衡条件

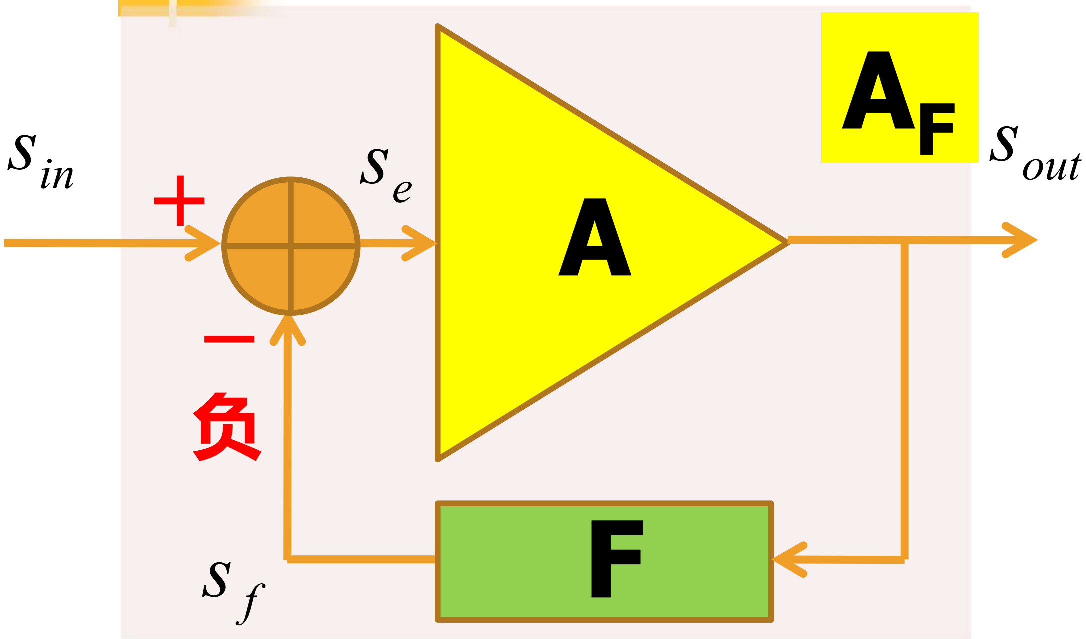
$$AF = -1$$

如果振荡：振荡的起振条件

$$AF < -1$$

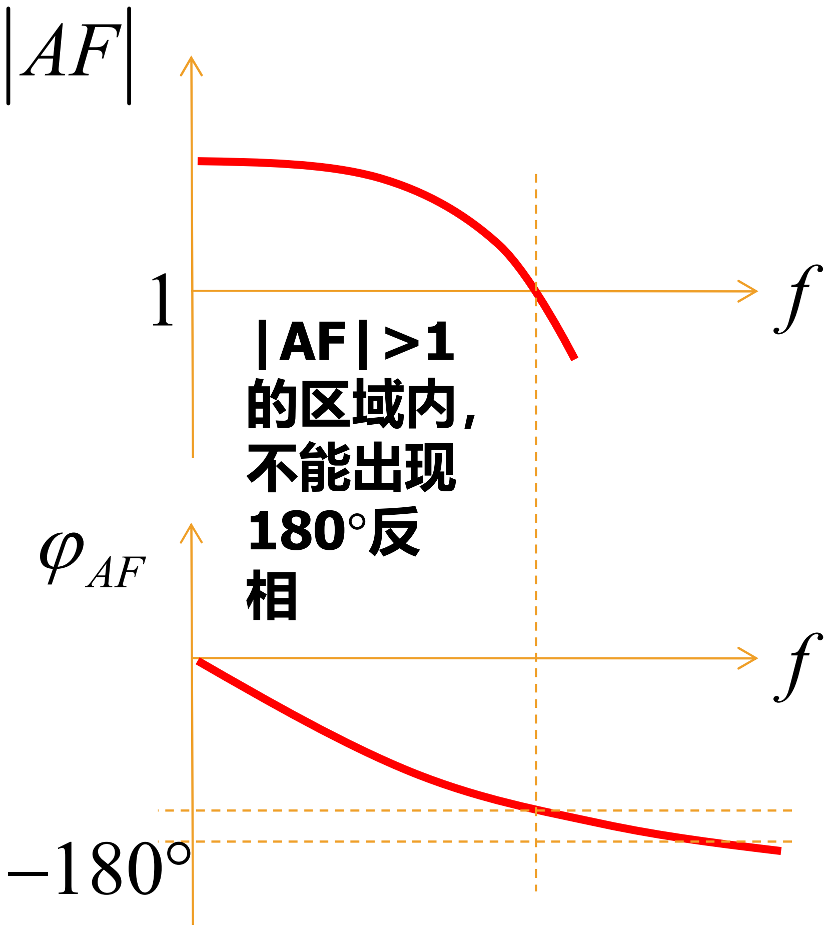
不出现起振条件和振荡平衡条件：$\cancel{AF < -1}$ $\cancel{AF = -1}$

怎样保证负反馈系统不振荡?



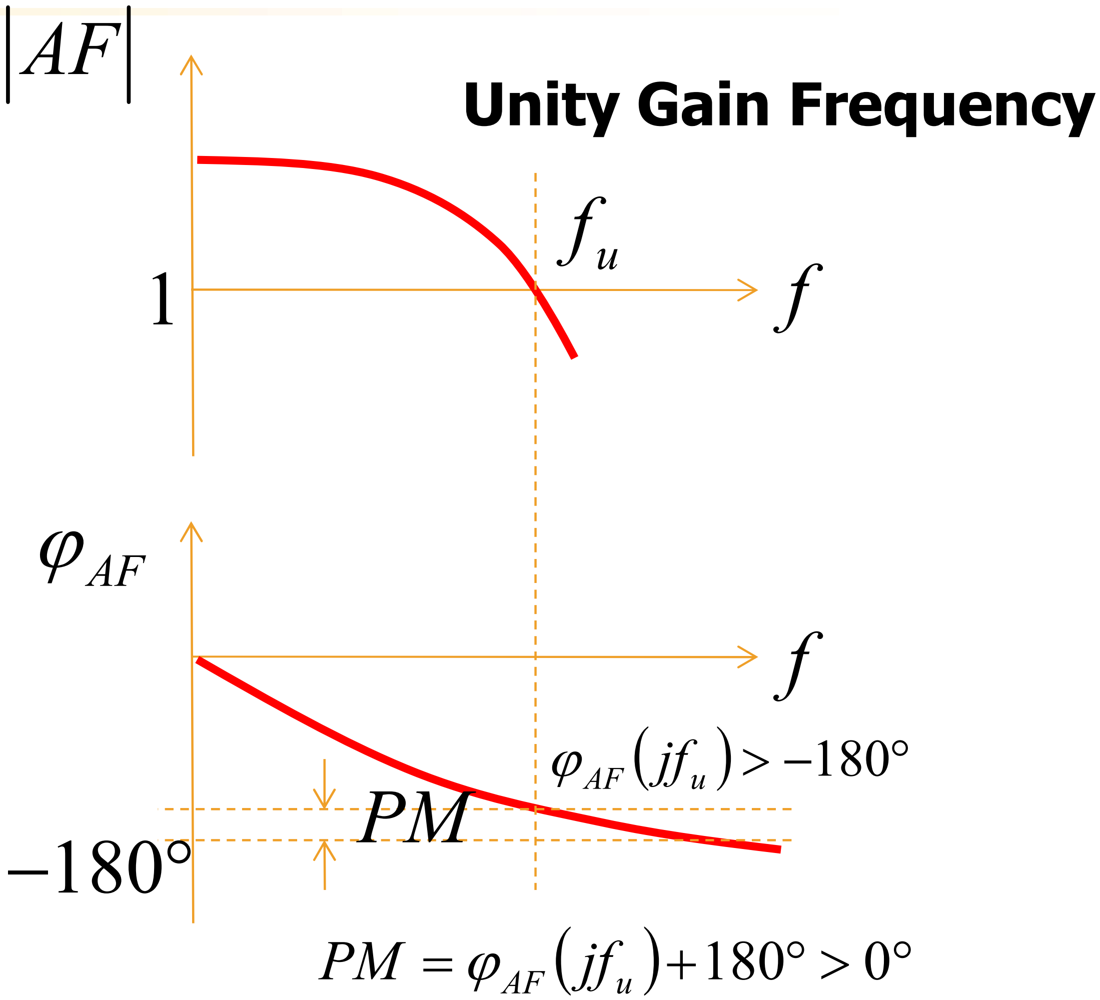
$$s_{out} = \frac{A}{1+AF} s_{in} \overset{AF>>1}{\approx} \frac{1}{F} s_{in}$$

期望实现的深度负反馈

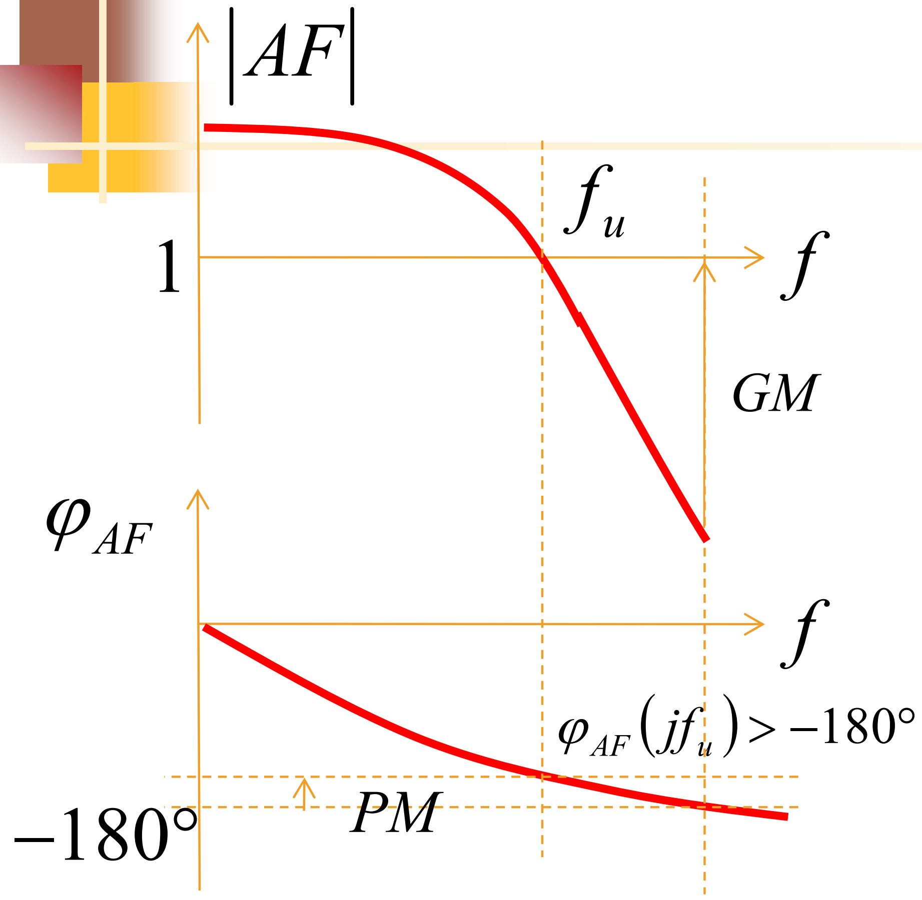


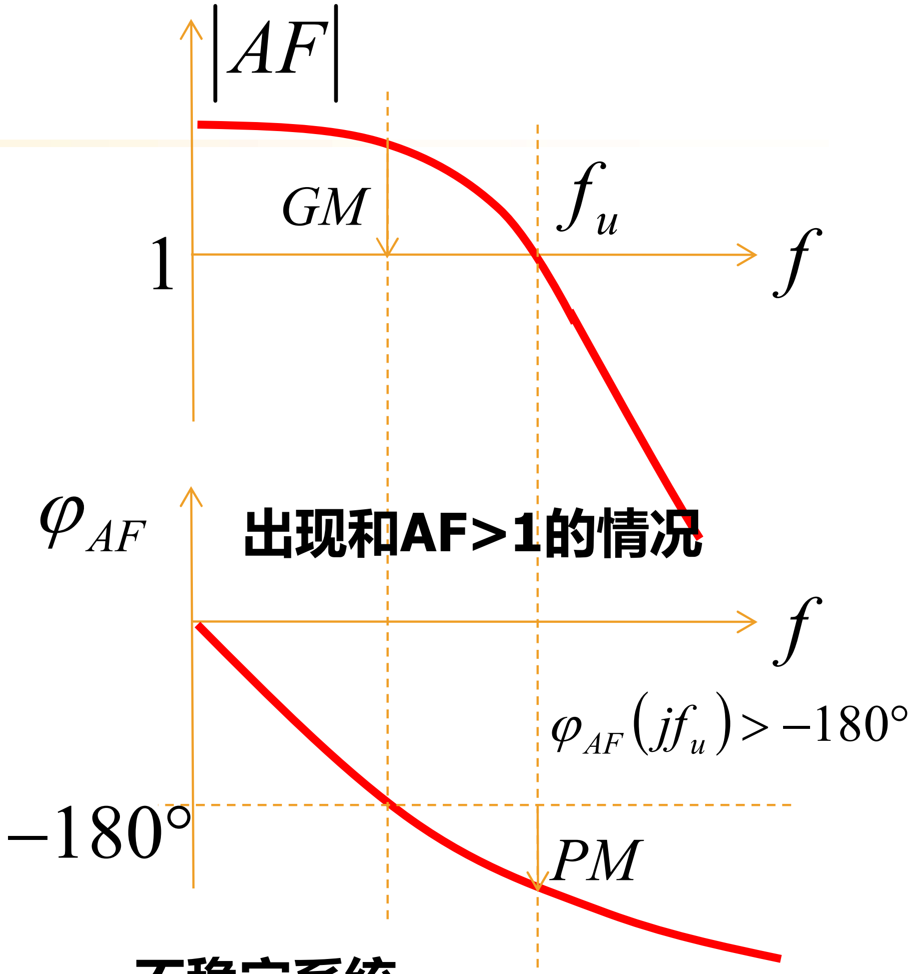
相位裕度

- |AF|>1的区域内，不能出现180°反相
  - 对于常见电路系统，|AF|随频率是单调下降的，此时可定义相位裕度
    - PM：Phase Margin



相位裕度和增益裕度





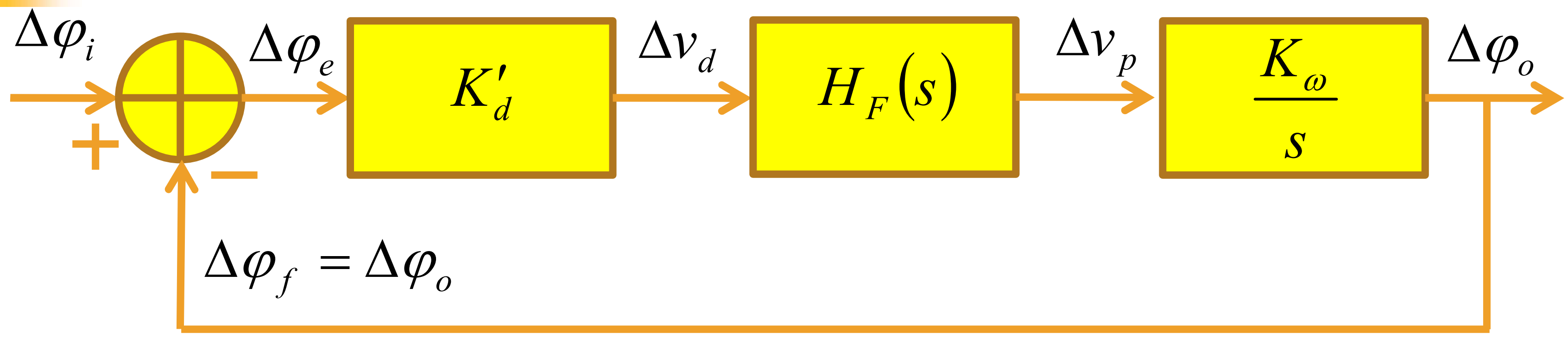
稳定系统
环路增益AF具有正的相位裕度和增益裕度
闭环反馈系统函数极点全部位于左半平面

不稳定系统
环路增益AF具有负的相位裕度和增益裕度
闭环反馈系统函数有极点位于右半平面

多少相位裕度合适?

- 一阶有损积分：PM>90°，肯定是稳定的
- 二阶有损积分：PM>0°，肯定也是稳定的
  - 但时域响应未必很好，为了获得好的时域响应，相位裕度应该足够大
    - 相位裕度取65°具有较好的时域特性：闭环传递函数的阻尼系数大体为0.7
- 一般负反馈系统，环路增益AF的相位裕度取65°较为适当，至少要求>45°

锁相环：单位负反馈系统



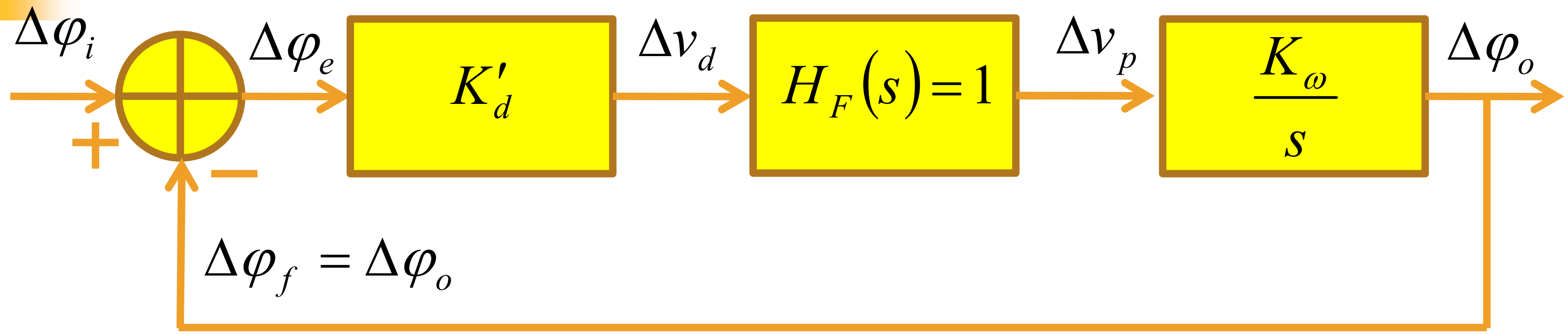
单位负反馈系统 $F=1$

$$AF = A = H_o(s) = K_p \frac{H_F(s)}{s} \qquad H(s) = \frac{H_o(s)}{1+H_o(s)}$$

1、查看开环传递函数（环路增益）的相位裕量，即可判定稳定性

2、考察闭环传递函数的极点，如果全部位于左半平面，则系统稳定

一阶锁相环



$$AF = H_o(s) = K_p \frac{H_F(s)}{s} = \frac{K_p}{s}$$

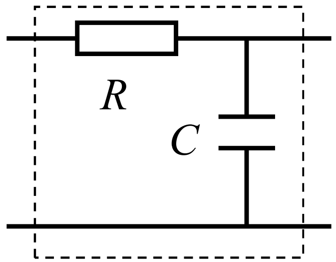
$$\Omega_u = K_p : |AF| = 1, \varphi_{AF} = -90°$$

一阶锁相环一定是稳定的：PM=90°

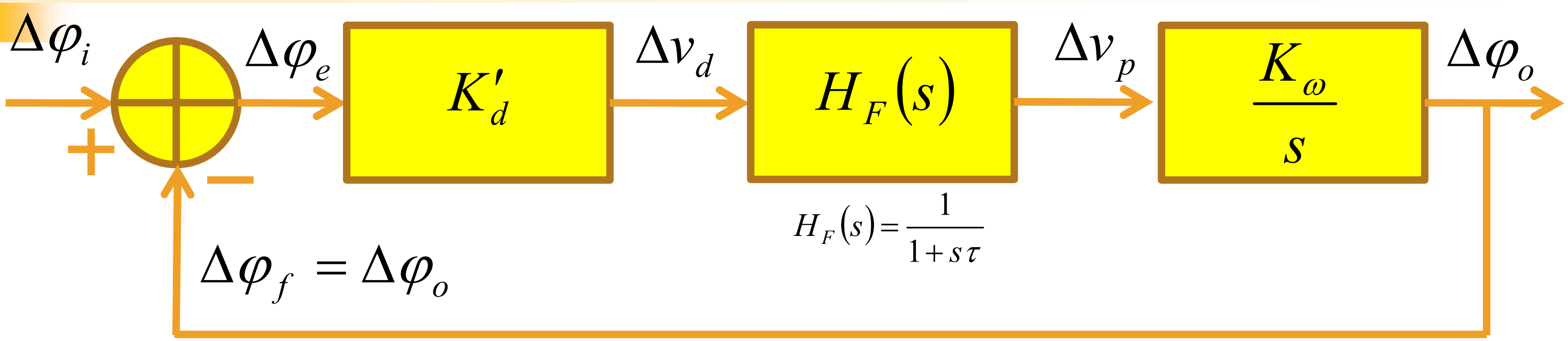
$$H(s) = \frac{H_o(s)}{1+H_o(s)} = \frac{K_p}{s+K_p}$$

闭环传递函数极点位于左半平面，稳定

二阶锁相环
RC积分环路滤波器



$\tau = RC$



$$H_F(s) = \frac{1}{1+s\tau}$$

$$AF = H_o(s) = K_p \frac{H_F(s)}{s} = \frac{K_p}{s(1+s\tau)}$$

$$= \frac{K_p}{j\Omega(1+j\Omega\tau)} = \frac{K_p}{\Omega\sqrt{1+\Omega^2\tau^2}} e^{-j\left(\frac{\pi}{2}+\arctan\Omega\tau\right)}$$

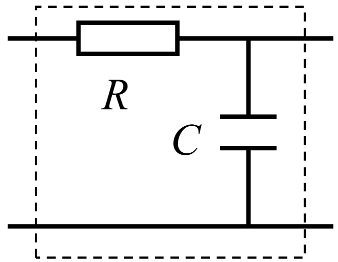
$$|AF| = 1$$

$$\Omega_u = \sqrt{\frac{\sqrt{1+4K_p^2\tau^2}-1}{2\tau^2}}$$

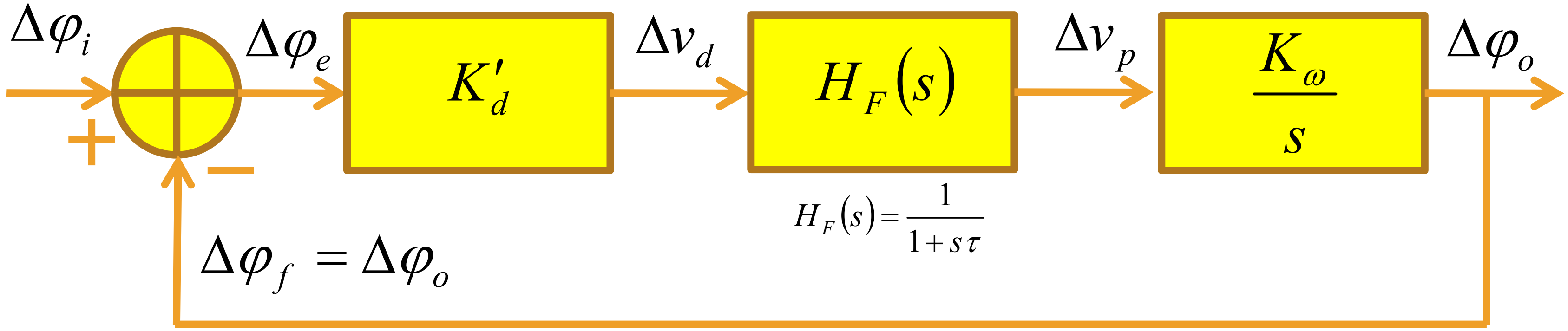
$$PM = 90° - \arctan\Omega_u\tau = 90° - \arctan\sqrt{\frac{\sqrt{1+4K_p^2\tau^2}-1}{2}} = 65°$$

$$K_p\tau = 0.515$$

二阶锁相环 RC积分环路滤波器设计



$\tau = RC$



$$AF = H_o(s) = K_p \frac{H_F(s)}{s} = \frac{K_p}{s(1+s\tau)}$$

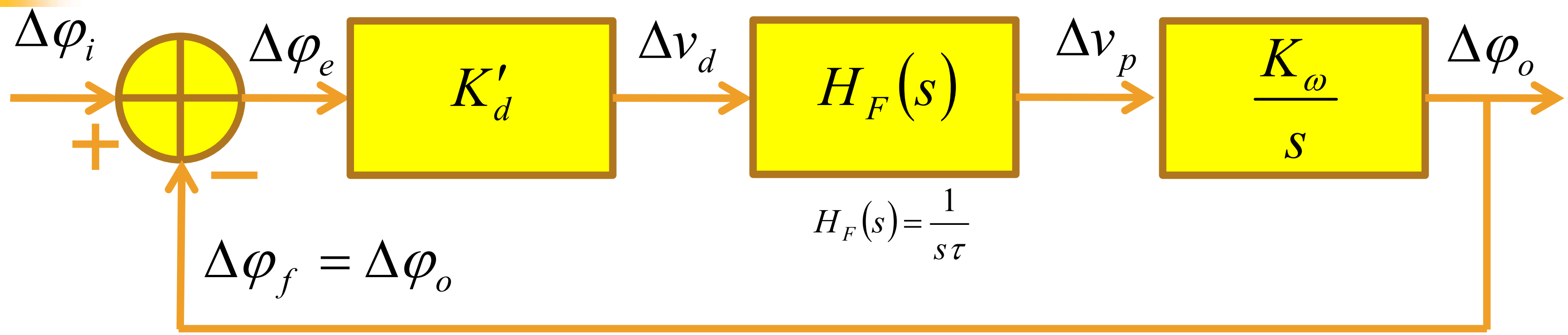
$$PM = 65^\circ \Rightarrow \tau = \frac{0.515}{K_p}$$

$$H(s) = \frac{H_o(s)}{1+H_o(s)} = \frac{K_p/\tau}{s^2 + s/\tau + K_p/\tau} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

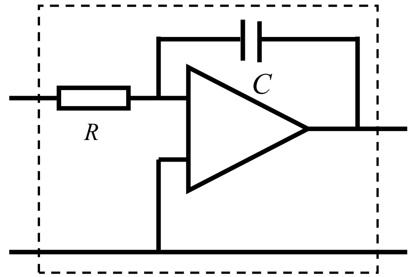
$$\xi = \frac{1}{2\sqrt{K_p\tau}} = 0.697 \qquad \omega_n = \sqrt{K_p/\tau} = 1.393K_p$$

取相位裕度为PM=65°，阻尼系数大约为0.7，可确保有良好的系统响应特性

二阶锁相环
理想积分环路滤波器



$$H_F(s)=\frac{1}{s\tau}$$

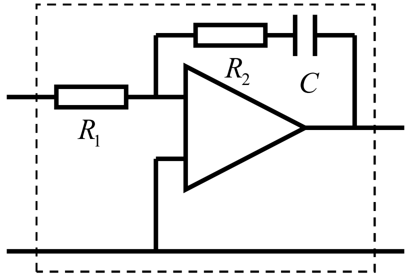


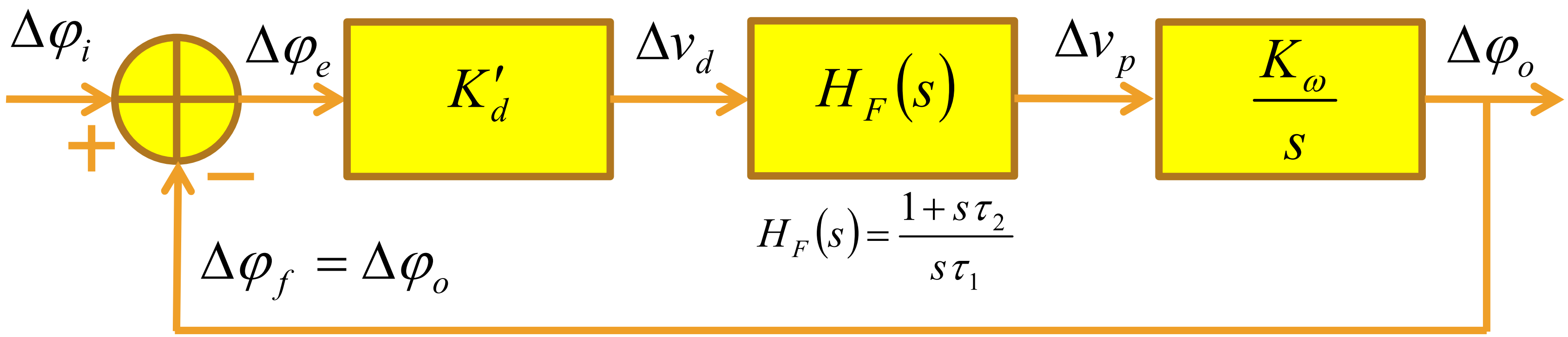
$$AF=H_o(s)=K_p\frac{H_F(s)}{s}=\frac{K_p}{s^2\tau}$$

$$PM=0°$$

闭环系统不稳定，无法使用

二阶锁相环
有源比例积分环路滤波器





$$H_F(s)=\frac{1+s\tau_2}{s\tau_1} \qquad AF=H_o(s)=K_p\frac{H_F(s)}{s}=\frac{K_p(1+s\tau_2)}{s^2\tau_1}$$

$PM=\arctan\Omega_u\tau_2=65^\circ$ **开环** ⇨ **闭环** $\xi=0.697$

通过增加一个左半平面零点，使得闭环系统趋于稳定：合理设定环路滤波器参数，使得开环传递函数相位裕度在65°附近，将获得比较满意的设计效果

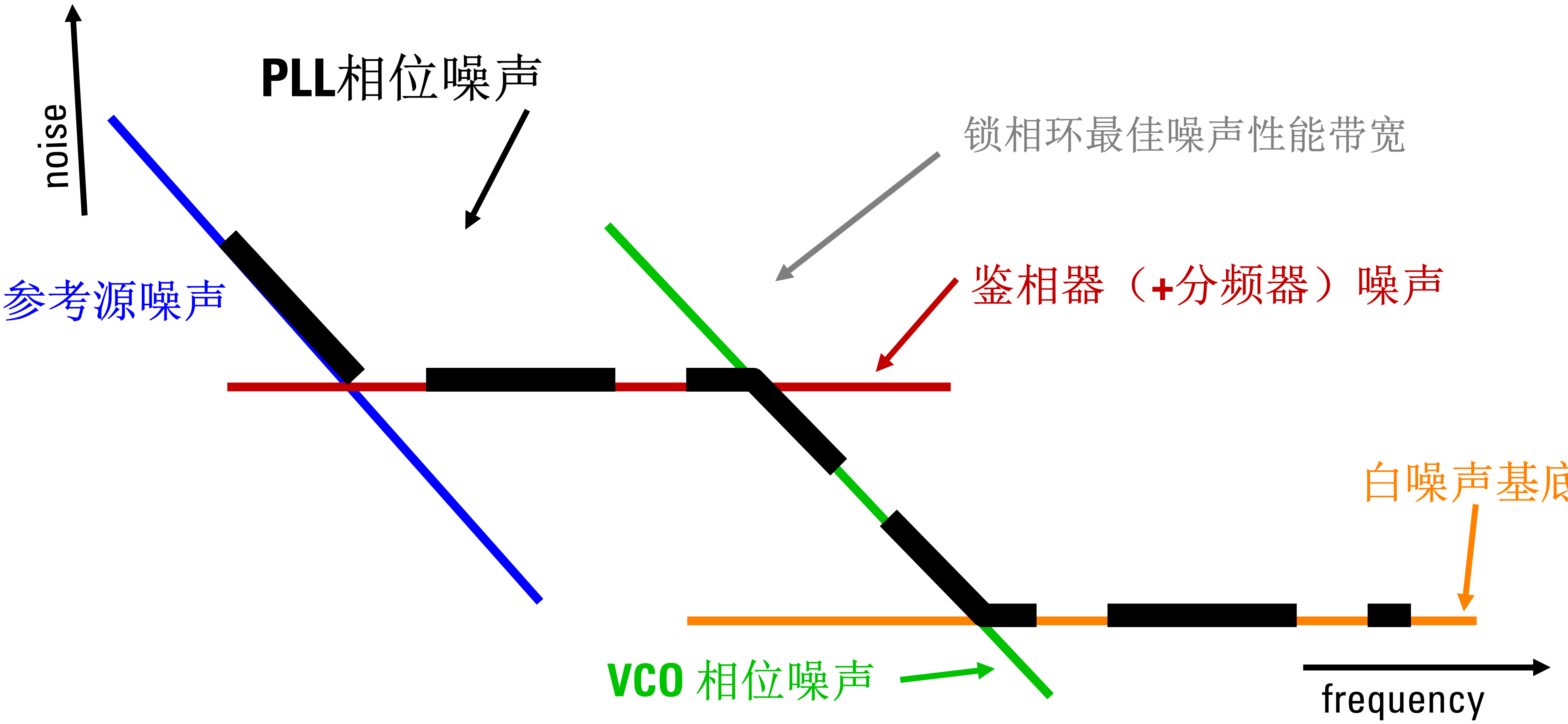
闭环稳定性

- 锁相环锁定（在平衡点上）
  - 一阶锁相环一定稳定
  - 二阶锁相环基本稳定
    - 设计环路滤波器常数使得开环传递函数的相位裕度在65°附近，那么闭环阻尼系数将在0.7附近，具有良好的响应特性
  - 高阶锁相环，精心设计可稳定
    - 设计时使得开环传递函数的相位裕度设置在65°附近，无论开环系统是几阶系统，闭环后系统将具有类似$\xi=0.7$的二阶系统的良好响应特性

7.3.6 PLL的噪声特性

- 实际PLL总会有干扰和噪声存在，它们会影响到环路的工作性能
  - 频率合成器输出频谱不纯，频率解调器信噪比下降，…
- PLL中各个部件都会产生噪声，而且输入参考源也有噪声
  - 对随输入信号一起加到PLL的噪声或参考源本身的噪声（电压），环路对它的响应是闭环传递函数（低通），环路将抑制输入噪声中的高频分量
  - PLL各部件附加噪声最重要的是VCO的相位噪声，环路对它的响应是误差传递函数（高通），环路将抑制VCO相位噪声中的低频分量

锁相环带宽对相位噪声的影响



锁相环的线性分析小结

- 线性分析的的前提是误差相位的直流分量偏离最佳位置不要太远，误差相位的交流分量位于线性范围之内
  - 开环传递函数---一般应用于稳定性分析
  - 闭环传递函数---一般应用于稳态频率特性分析
  - 误差传递函数---一般应用于跟踪特性的瞬态分析

- 可以通过调节环路增益K_p和环路滤波器时间常数τ来实现环路的不同应用
  - 载波跟踪和调制跟踪

$$v_i(t) = V_{im}\sin\left(\omega_{i0}t + m_f\cos\Omega t\right)$$

$$v_o(t) = V_{om}\cos\omega_{o0}t$$

例1：7-6

- 一阶环路的输入信号为$v_i(t)$，当其接入环路的瞬间，压控振荡器输出信号为$v_o(t)$：
  - 环路的起始频差
  - 环路的起始相差
  - 环路的稳态相差
  - 锁定后环路输出电压表达式

$$H(s)=\frac{K_P}{s+K_P}$$

$$\varphi_i(t)=\omega_{i0}t+m_f\cos\Omega t$$

$$\omega_i(t)=\frac{d\varphi_i(t)}{dt}=\omega_{i0}-m_f\Omega\sin\Omega t$$

$$H_e(s)=\frac{s}{s+K_P}$$

$$\varphi_o(t)_{t<0}=\omega_{o0}t$$

$$\omega_o(t)_{t=0^-}=\frac{d\varphi_o(t)_{t=0^-}}{dt}=\omega_{o0}$$

例1解

起始频差：$\Delta\omega_i=\omega_i(0)-\omega_o(0)=\omega_{i0}-\omega_{o0}$

起始相差：$\varphi_e(0)=\varphi_i(0)-\varphi_o(0)=m_f$

稳态相差响应：$\varphi_e(t)=m_{fe}\cos(\Omega t+\psi_{H_e})+\arcsin\dfrac{\omega_{i0}-\omega_{o0}}{K_P}$

$$m_{fe}=m_f\sqrt{\frac{\Omega^2}{K_P^2+\Omega^2}}\qquad \psi_{H_e}=\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{\Omega}{K_P}$$

锁定输出：$v_o(t)=V_{om}\cos(\varphi_i(t)-\varphi_e(t))=V_{om}\cos(\omega_{i0}t-\varphi_{e\infty}+m_{fo}\cos(\Omega t+\psi_H))$

$$\varphi_{e\infty}=\arcsin\frac{\omega_{i0}-\omega_{o0}}{K_P}\qquad m_{fo}=\frac{m_f}{\sqrt{1+\left(\frac{\Omega}{K_P}\right)^2}}\qquad \psi_H=-\arctan\frac{\Omega}{K_P}$$

$$v_i(t)=V_{im}\sin\varphi_i(t)=V_{im}\sin(\omega_{i0}t+m_f\cos\Omega t)$$

如何求稳态相差

- **如果输入信号为调角波，求稳态相差时，可暂不考虑角度调制，先求出输入频率平均值与ω_{o0}之差作为输入固有频差，获得稳态相差中的直流分量；然后求出调角波输入正弦波相位对应的稳态正弦波误差相位（用误差传递函数求得交流分量）**

$$\varphi_{e\infty}=\arcsin\frac{\overline{\omega_{i0}}-\omega_{o0}}{K_P A_v}$$

$$\varphi_e(t)=\varphi_{e\infty}+m_f|H_e(j\Omega)|\cos(\Omega t+\varphi_{H_e(j\Omega)})$$

$$\begin{aligned}\varphi_o(t)&=\varphi_i(t)-\varphi_e(t)\\&=\omega_{i0}t-\varphi_{e\infty}+m_f|H(j\Omega)|\cos(\Omega t+\psi_H(\Omega))\end{aligned}$$

$$v_o(t)=V_{om}\cos\varphi_o(t)$$

例2：7-9

$$v_i(t) = V_{im}\sin\left(\omega_{i0}t + 0.5\sin\Omega t\right)$$

- 某锁相环采用无源比例积分滤波器，滤波器参数为τ_1=1.25s,τ_2=10ms。环路增益为$K_p=5\times10^4$rad/s。 输入信号为$v_i(t)$，其中，$\omega_{i0}=10^6$rad/s，Ω=200rad/s。如果压控振荡器的自由振荡角频率为$\omega_{o0}=1.005\times10^6$rad/s，鉴相器具有正弦鉴相特性，求环路锁定后，压控振荡器输出电压$v_o(t)$的表达式

$K_P = 5\times10^4 rad/s \quad \tau_1 = 1.25s \quad \tau_2 = 10ms = 0.01s$

$\omega_{i0} = 10^6 rad/s \quad \omega_{o0} = 1.005\times10^6 rad/s \quad \Omega = 200 rad/s \quad m_f = 0.5$

例2解

$$H_F(s) = \frac{1+s\tau_2}{1+s(\tau_1+\tau_2)}$$

$$\varphi_{e\infty} = \mathbf{arcsin}\frac{\Delta\omega_i}{K_P A_v} = \mathbf{arcsin}\frac{-0.005\times10^6}{5\times10^4} = \mathbf{arcsin}(-0.1) = -0.1002 \approx -0.1$$

$$\cos\varphi_{e\infty} = 0.995 \approx 1$$

$$H(s) = \frac{K_P H_F(s)}{s+K_P H_F(s)} = \frac{sK_P\tau_2 + K_P}{s^2(\tau_1+\tau_2)+s(1+K_P\tau_2)+K_P} = \frac{500s+50000}{1.26s^2+501s+50000}$$

$$H(j200) = 0.9960 - j0.5030 = 1.1158e^{-j0.4676}$$

$$v_i(t) = V_{im}\,\mathbf{sin}(\omega_{i0}t + 0.5\,\mathbf{sin}\,\Omega t) = V_{im}\,\mathbf{sin}\left(10^6 t + 0.5\,\mathbf{sin}\,200t\right)$$

$$v_o(t) = V_{om}\,\mathbf{cos}\left(10^6 t + 0.1 + 0.5579\,\mathbf{sin}(200t - 0.4676)\right)$$

例3

- 一阶环路的正弦鉴相器灵敏度$K_d=2V$，压控振荡器调制灵敏度$K_\omega=2\pi\times10^4 rad/s.V$，自由振荡角频率为$\omega_{o0}= 2\pi\times10^6 rad/s$，当输入信号为$v_i(t)$，求稳态相差和直流控制电压，环路的3dB带宽为多少kHz?

$$v_i(t)=V_{im}\sin\left(2\pi\times1.01\times10^6 t\right)\ (V)$$

$$v_i(t)=V_{im}\,\mathbf{sin}\left(2\pi\times1.01\times10^6 t\right)\ (V)$$

$$K_d=2,\ K_\omega=2\pi\times10^4$$

$$\omega_{i0}=2\pi\times1.01\times10^6 rad/s$$

例3解

$$\omega_{o0}=2\pi\times10^6 rad/s$$

$$\Delta\omega_i=2\pi\times10^4 rad/s \qquad K_P=K_dK_\omega=4\pi\times10^4 rad/s$$

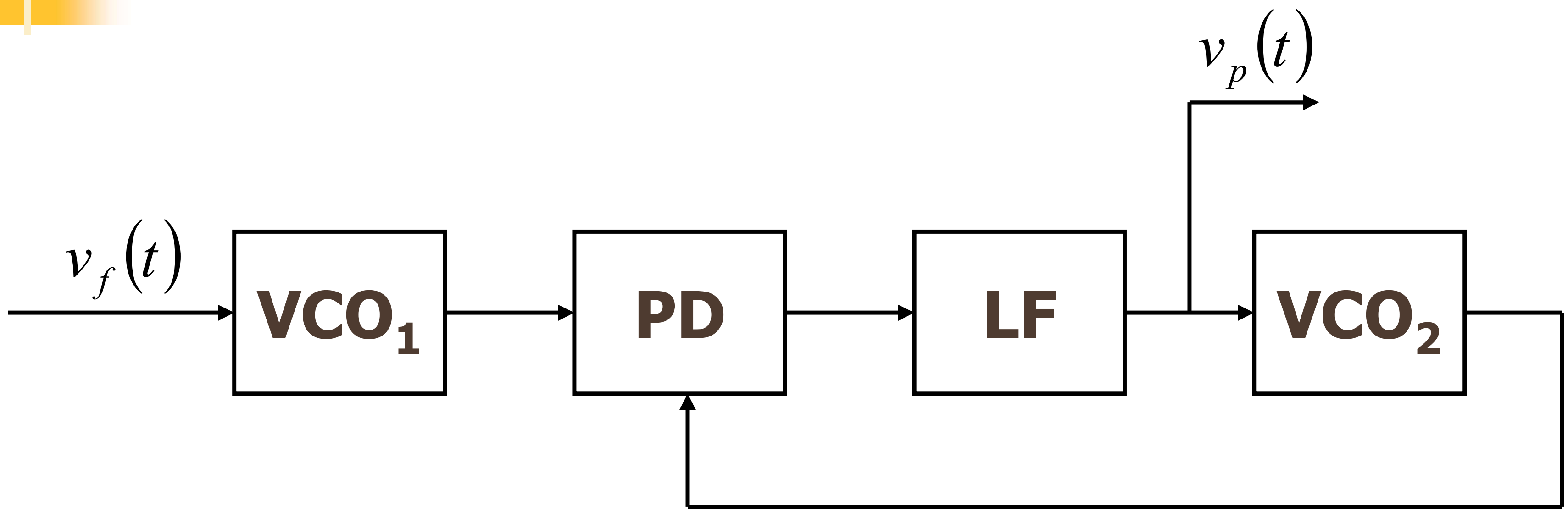
$$\varphi_{e\infty}=\mathbf{arcsin}\frac{\Delta\omega_i}{K_P}=\mathbf{arcsin}\,0.5=\frac{\pi}{6} \qquad (30^\circ)$$

$$\omega_o=\omega_{o0}+K_\omega V_p=\omega_{i0} \qquad V_p=\frac{\Delta\omega_i}{K_\omega}=1(V)$$

$$\omega_{3dB}=K_dK_\omega\cos\varphi_{e\infty}=4\pi\times10^4 rad/s\times0.866$$

$$BW_{3dB}=20kHz\times0.866=17.3kHz$$

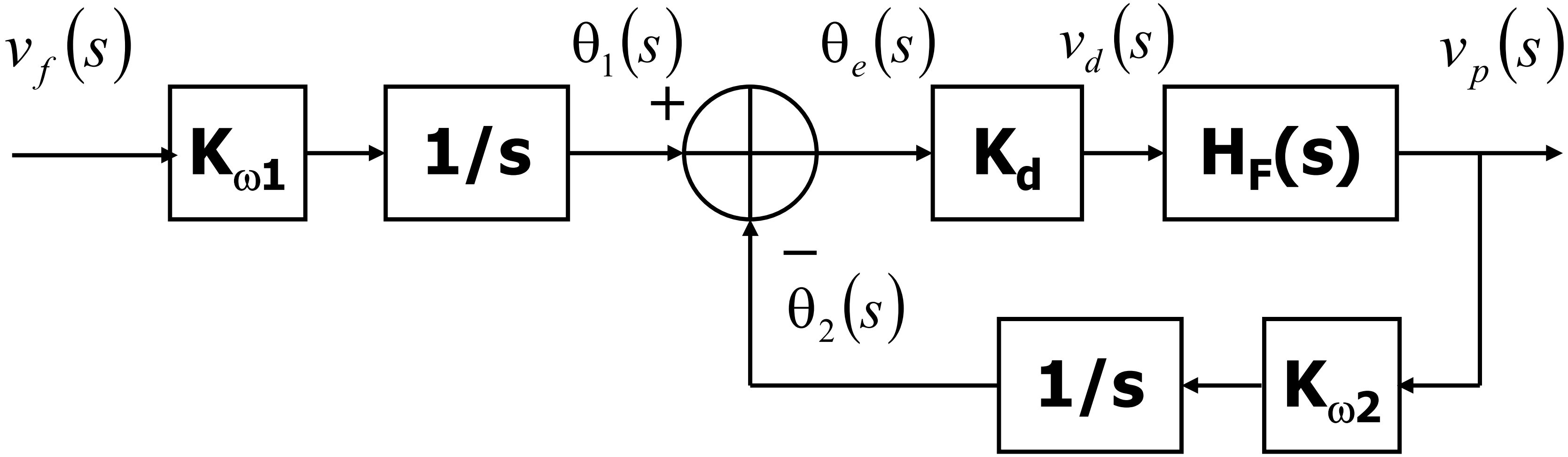
例4 PLL频率特性测试电路



- 画出相位数学模型（线性化数学模型）
- 求出电压传递函数（v_f输入电压，v_p输出电压）

- **测量时选用相同的VCO模块，则电压传递函数就是PLL闭环传递函数**

例4解



$$\Delta\varphi_i(s) = K_{\omega 1}\frac{v_f(s)}{s} \qquad \Delta\varphi_o(s) = K_{\omega 2}\frac{v_p(s)}{s}$$

$$H_v(s) = \frac{v_p(s)}{v_f(s)} = \frac{s\Delta\varphi_o(s)/K_{\omega 2}}{s\Delta\varphi_i(s)/K_{\omega 1}} = \frac{K_{\omega 1}}{K_{\omega 2}}\frac{\Delta\varphi_o(s)}{\Delta\varphi_i(s)} = \frac{K_{\omega 1}}{K_{\omega 2}}H(s) = H(s)$$

作业一：稳态相差

- 当输入一阶环路的信号发生频率阶跃时，试说明为什么除了$K_p \to \infty$之外，环路总会有稳态相差？从物理意义上说明该稳态相差与频率阶跃$\Delta\omega$和环路增益K_p的关系

作业二、一阶锁相环

- 一阶环的输入信号为 $v_i(t) = V_{im}\sin(\omega_{i0}t + m_f\cos\Omega t)$

  当其接入环路瞬间，压控振荡器在自由振荡 $v_o(t) = V_{om}\cos(\omega_{o0}t)$

- 求
  - 环路的起始频差
  - 环路的起始相差
  - 环路的稳态相差
  - 锁定后环路输出电压表达式

作业三：稳定后的输出信号

- 一阶环接通瞬间输入和输出信号分别为

$$v_i(t) = V_{im}\sin\left(2.005\times10^6\pi t + 0.5\sin\left(2\pi\times10^3 t\right)\right)$$

$$v_o(t) = V_{om}\cos\left(2\pi\times10^6 t\right)$$

- 测得锁定后稳态相差0.5rad
- （1）写出环路锁定后，输出信号的表达式
- （2）计算该环路的带宽

作业四：闭环传递函数

- 已知某PLL的$K_\omega = 3\times10^6$rad/Vs，$K_d = 4$V，环路滤波器采用R=10kΩ, C=0.01μF的RC低通滤波器，求
  - 闭环传递函数
  - 环路带宽

作业五：相位裕度与稳定性

- 确认：采用有源比例积分滤波器作为环路滤波器的二阶PLL，其环路增益相位裕度65°时，闭环阻尼系数在0.7左右，具有良好的时域频域特性

选作CAD

- 自行搭建一个PLL锁相环，实现160MHz的正弦振荡输出
  - 输入参考信号为10MHz的晶体振荡电路，具有高的稳定性
    - 需要一个16分频器
  - 压控振荡器可以选用变容二极管方案
  - 调整环路滤波器参数，考察加电后环路捕获、跟踪过程，以及稳定后的噪声特性