通信电路原理

第七章　锁相环

锁相环原理

锁相环

- 7.1 概述：从幅度滤波到相位滤波
- 7.2 PLL基本原理
  - 各部件特性与数学模型
  - 环路方程和相位模型
- 7.3 PLL的线性分析
- 7.4 PLL的非线性分析
- 7.5 集成锁相环
- 7.6 PLL电路实例和应用举例
- 附 AFC：自动频率控制

$$H(j\omega)=A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

以低通滤波为例
通带内

$$\tau_g(\omega)=-\frac{d\varphi}{d\omega}\approx-\frac{\varphi(\omega)}{\omega}=\tau_p(\omega)$$

7.1 从幅度滤波到相位滤波

- **第二章讨论的滤波器，是针对幅度进行滤波的：以低通滤波器为例**

$$v_{in}(t)=V_m\cos\omega t$$

$$v_{out}(t)=A(\omega)V_m\cos(\omega t+\varphi(\omega))=A(\omega)V_m\cos\omega(t-\tau_p(\omega))$$

如果ω落在通带之内 $A(\omega)\approx A_0=A(\omega=0)$ $\tau(\omega)\approx\tau_0=\tau(\omega=0)$

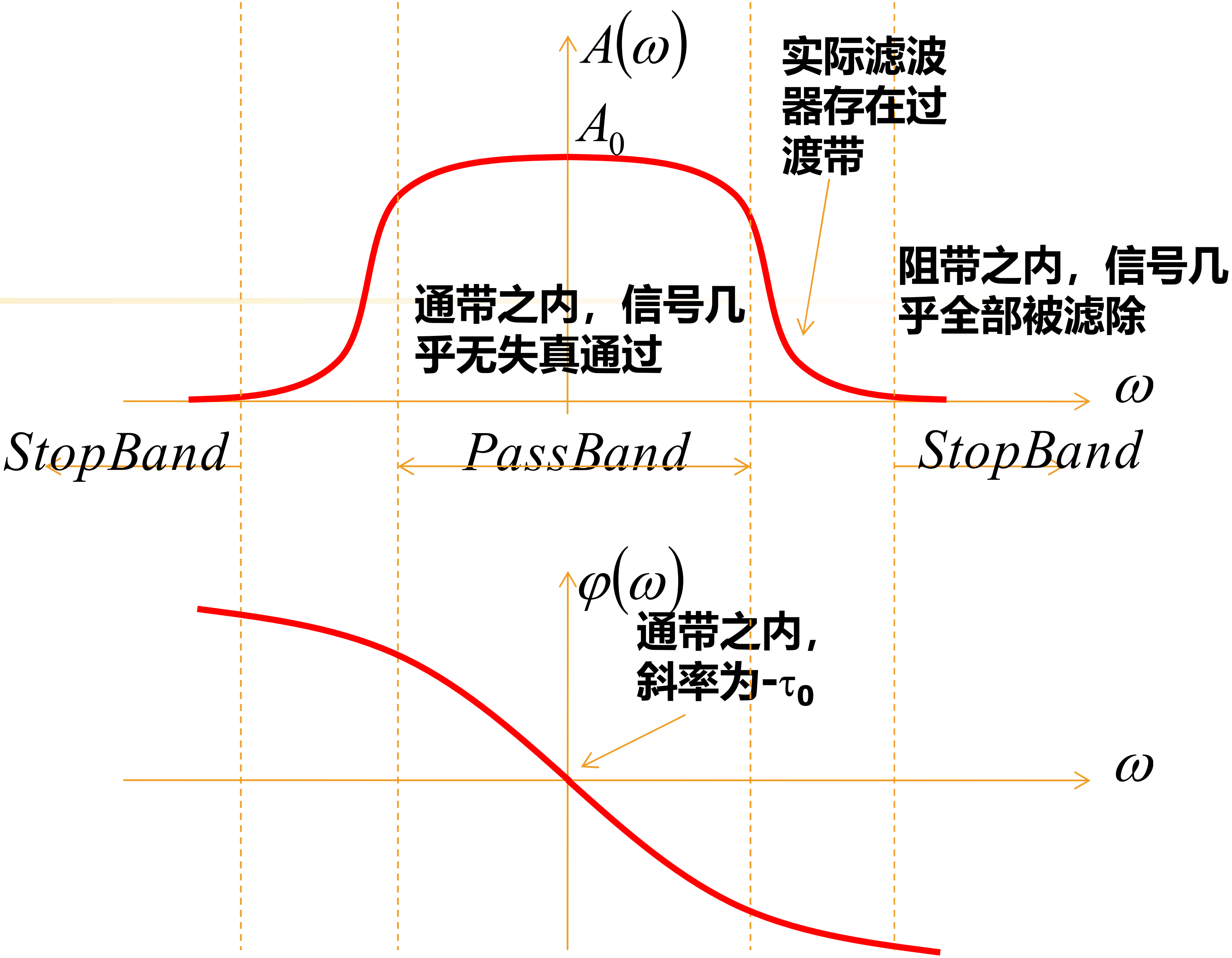
$v_{out}(t)\approx A_0V_m\cos\omega(t-\tau_0)$ **信号几乎无失真通过** $\omega\in PassBand$

如果ω_0落在阻带之内 $A(\omega)\approx\dfrac{A_0}{\omega^n}\approx 0$

$v_{out}(t)\approx 0$

信号几乎被滤除不见 $\omega\in StopBand$

滤波特性

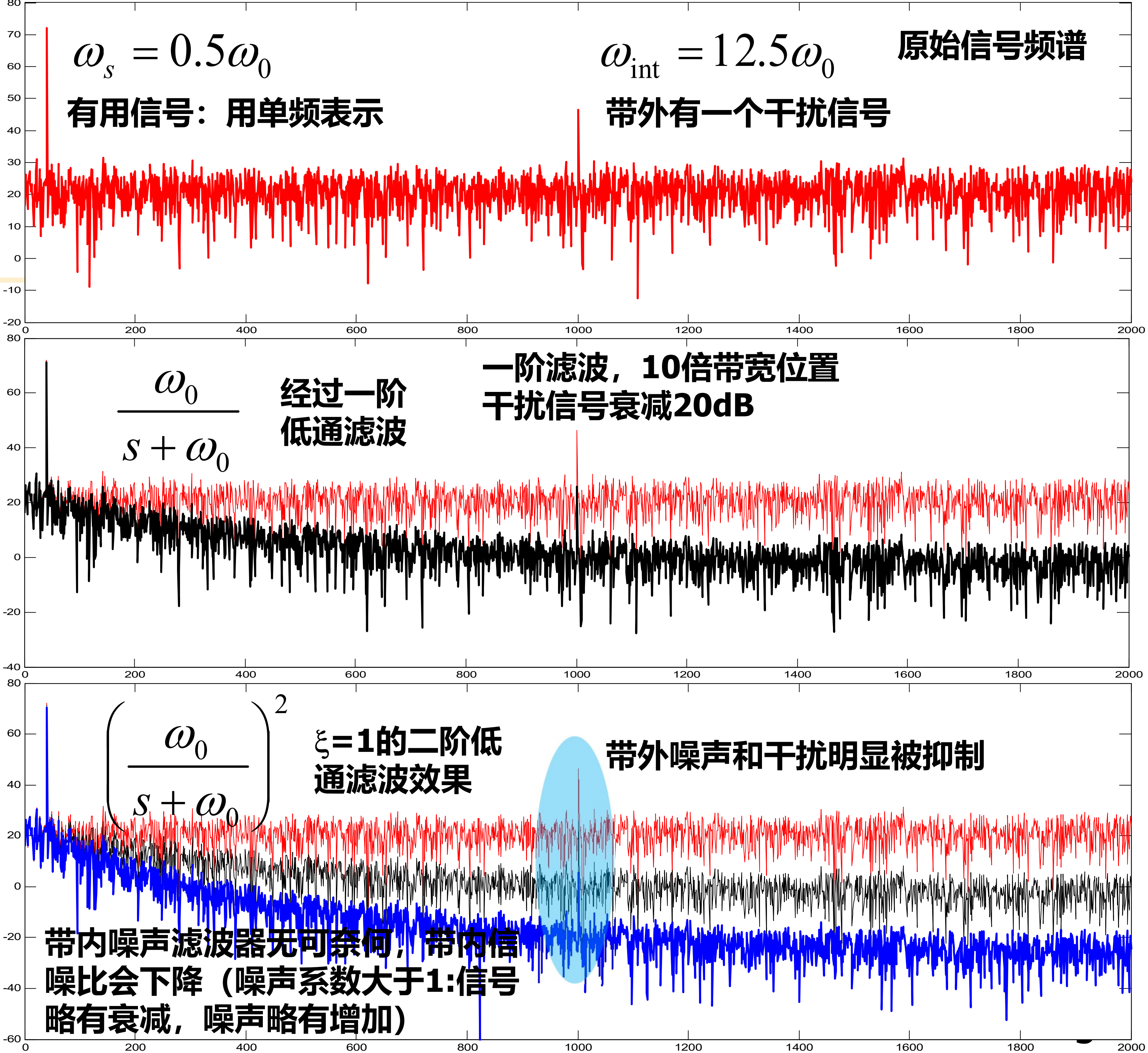


$$v_{in}(t) = v_s(t) + v_n(t) \Rightarrow v_{out}(t) \approx A_0 v_s(t - \tau_0) + v_n'(t)$$

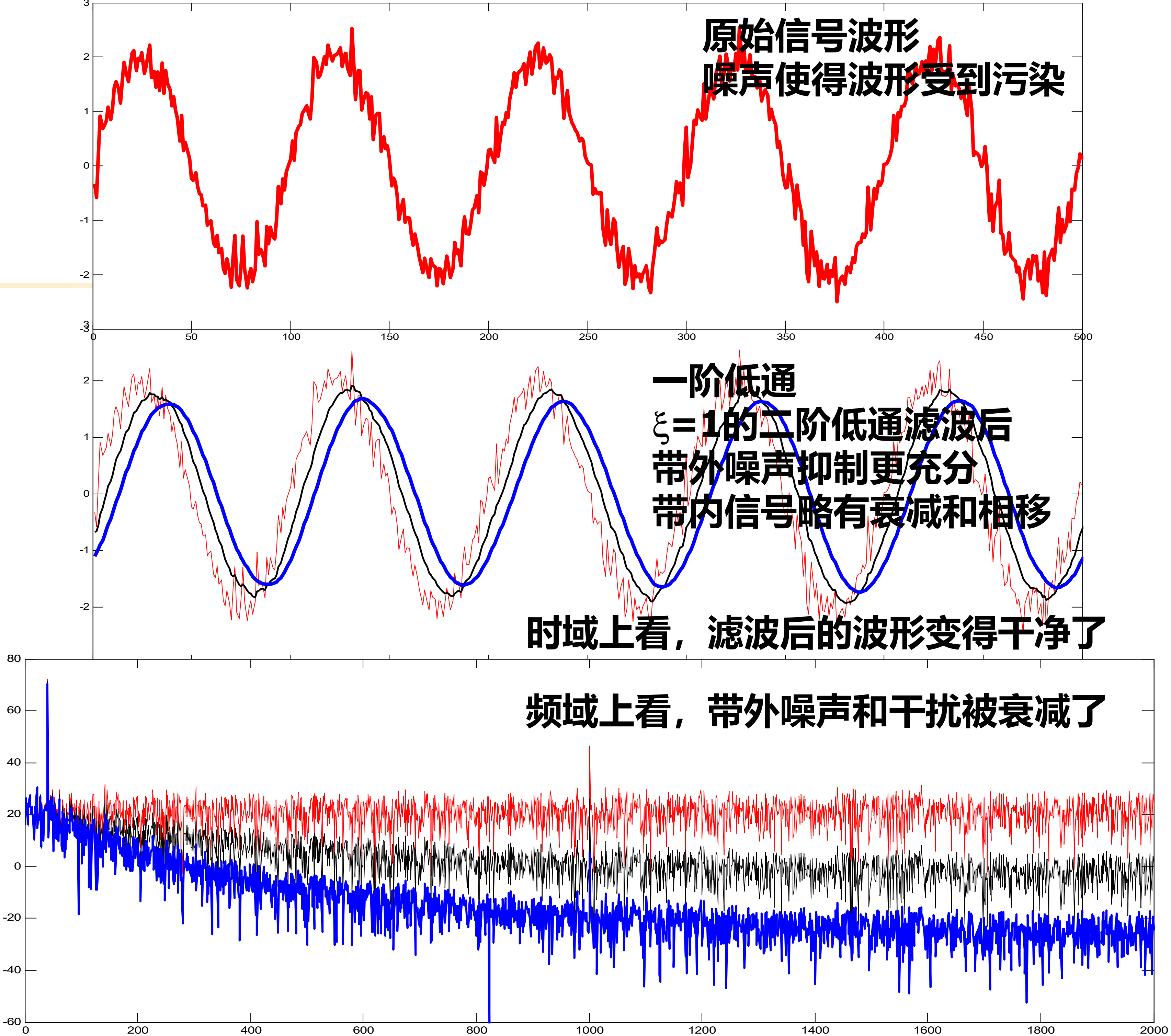
假设信号频谱全部位于通带之内

通带内噪声过，阻带内噪声被滤除

一阶二阶低通滤波效果 频域



一阶二阶低通滤波效果　时域



已调正弦波信号

- 调幅波，信息负荷在正弦波幅度上
- 调频波和调相波，信息是负荷在正弦波的相位上

$$A(t) = V_{0m} + k_{AM} \cdot v_f(t) \qquad v_{AM}(t) = \left(V_{0m} + k_{AM} v_f(t)\right)\cos\left(\omega_c t + \varphi_0\right)$$

$$\omega(t) = \omega_c + k_{FM} \cdot v_f(t) \qquad \begin{aligned} v_{FM}(t) &= V_{0m}\cos\left(\int_0^t \omega(\tau)d\tau + \varphi_0\right) \\ &= V_{0m}\cos\left(\omega_c t + k_{FM}\int_0^t v_f(\tau)d\tau + \varphi_0\right) \end{aligned}$$

$$\varphi(t) = \varphi_0 + k_{PM} \cdot v_f(t) \qquad v_{PM}(t) = V_{0m}\cos\left(\omega_c t + k_{PM} v_f(t) + \varphi_0\right)$$

加性噪声：导致调幅调相

$$v_s(t)+v_n(t)=V_{0m}\cos\omega_c t+V_{nm}\cos\omega_n t=V_{0m}\cos\omega_c t+V_{nm}\cos\left(\omega_c t+(\omega_n-\omega_c)t\right)$$

$$=V_{0m}\cos\omega_c t+V_{nm}\cos\omega_c t\cos\Omega_n t-V_{nm}\sin\omega_c t\sin\Omega_n t$$

$$=\left(V_{0m}+V_{nm}\cos\Omega_n t\right)\cos\omega_c t-\left(V_{nm}\sin\Omega_n t\right)\sin\omega_c t$$

$$=A\cos\omega_c t+B\sin\omega_c t=V_{0m+n}\cos\left(\omega_c t+\varphi_n\right)\qquad\left(\Omega_n=\omega_n-\omega_c\right)$$

$$V_{0m+n}=\sqrt{\left(V_{0m}+V_{nm}\cos\Omega_n t\right)^2+\left(V_{nm}\sin\Omega_n t\right)^2}=\sqrt{V_{0m}^2+V_{nm}^2+2V_{0m}V_{nm}\cos\Omega_n t}$$

$$=\sqrt{V_{0m}^2+V_{nm}^2}\sqrt{1+\frac{2V_{0m}V_{nm}}{V_{0m}^2+V_{nm}^2}\cos\Omega_n t}\approx\sqrt{V_{0m}^2+V_{nm}^2}\left(1+\frac{V_{0m}V_{nm}}{V_{0m}^2+V_{nm}^2}\cos\Omega_n t\right)$$

$$\approx V_{0m}\left(1+\frac{V_{nm}}{V_{0m}}\cos\Omega_n t\right)=V_{0m}+V_{nm}\cos\Omega_n t\qquad\left(V_{nm}<<V_{0m}\right)$$

$$\varphi_n=\arctan\frac{V_{nm}\sin\Omega_n t}{V_{0m}+V_{nm}\cos\Omega_n t}\approx\arctan\frac{V_{nm}\sin\Omega_n t}{V_{0m}}\approx\frac{V_{nm}}{V_{0m}}\sin\Omega_n t$$

调频波和调相波均为调角波，以调相波为例考察噪声影响

噪声影响

由于调幅噪声可以通过限幅器去除，这里只考察相位上的噪声影响

$$\varphi_t(t)=\varphi_0+k_{PM}\cdot v_f(t)=\varphi_0+k_{PM}\cdot\left(v_s(t)+v_{ni}(t)\right)$$

发射机的调相情况：信息调制在相位上

如果考虑噪声，接收机接收信号的相位为

$$\varphi_r(t)=\varphi_0+\underline{k_{PM}\cdot v_s(t)}+\underline{k_{PM}\cdot v_{ni}(t)}+\underline{\frac{V_{nm}}{V_{0m}}\sin\Omega_n t}+\underline{\varphi_{nA}(t)}$$

接收机期望接收的负荷了信息的有用信号

发射机信号中的噪声

信道传输，发射机处理，接收机处理中的加性噪声或干扰导致的相位调制噪声

发射机和接收机相位处理过程中附加的各种相位噪声，包括振荡器自身的相位噪声

相位噪声不可避免

$$\varphi_r(t)=\varphi_0+k_{PM}\cdot v_s(t)+k_{PM}\cdot v_{ni}(t)+\frac{V_{nm}}{V_{0m}}\sin\Omega_n t+\varphi_{nA}(t)$$

$$v_{PM,r}(t)=V_{0m}\cos\left(\omega_c t+\varphi_0+k_{PM}\cdot v_s(t)+k_{PM}\cdot v_{ni}(t)+\underline{\underline{\frac{V_{nm}}{V_{0m}}\sin\Omega_n t+\varphi_{nA}(t)}}\right)$$

假设调幅噪声已通过限幅器去除，不予考虑

相位噪声：phase noise
附着在正弦波相位上的噪声：包括输入信号自带的噪声，传输与处理过程中的加性噪声导致的调相噪声，调制器与解调器相位处理过程中附加的其他相位噪声

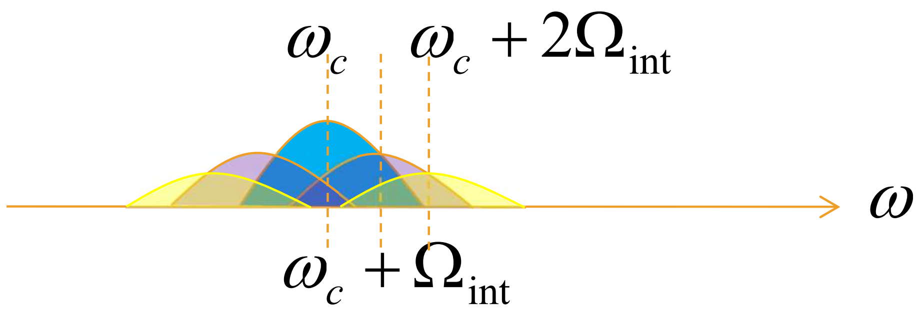
只要电路中的某个因素能够影响频率或相位，那么这个因素的不确定性就会导致相位噪声，正弦信号中的相位噪声不可避免，…，

正弦波振荡器频率稳定性（时域）对应相位噪声（频域），频率波动就越大，振荡频率稳定性就越差，相位噪声也就越大

频谱混叠，带内噪声难以滤除
用一个单频干扰信号代表相位噪声

$$v_{PM}(t)=V_{0m}\cos\left(\omega_c t+k_{PM}v_s(t)+\theta_{\text{int}}\sin\Omega_{\text{int}}t+\varphi_0\right)$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}V_{0m}J_n(\theta_{\text{int}})\cos\left((\omega_c+n\Omega_{\text{int}})t+k_{PM}v_s(t)+\varphi_0\right)$$



想象：可否进入到相位域进行直接的相位滤波?

相位上的噪声，会导致信号频谱在带内出现混叠，用幅度滤波器虽然可消除带外干扰，带内较为严重的频谱混叠并不能消除！！

是否存在相位域内的相位滤波的可能性?

$$v_{PM}(t)=V_{0m}\cos\left(\omega_c t+k_{PM}v_s(t)+\varphi_n(t)+\theta_{\text{int}}\sin\Omega_{\text{int}}t+\varphi_0\right)$$

而非对电压信号的频谱进行滤波处理

直接对相位信号的频谱进行滤波处理

相位低通滤波器

相位谱上的低通滤波：A(ω) e^{jφ(ω)}

$$v'_{PM}(t)=V_{0m}\cos\left(\omega_c t+k_{PM}A_0v_s(t-\tau_0)+\varphi_{n,out}(t)+\theta_{\text{int}}A_\varphi(\Omega_{\text{int}})\sin\left(\Omega_{\text{int}}t+\varphi_\varphi(\Omega_{\text{int}})\right)+\varphi_0\right)$$

带内信号保留

带内噪声保留
带外噪声抑制

带外干扰抑制：$A_\varphi \approx 0$

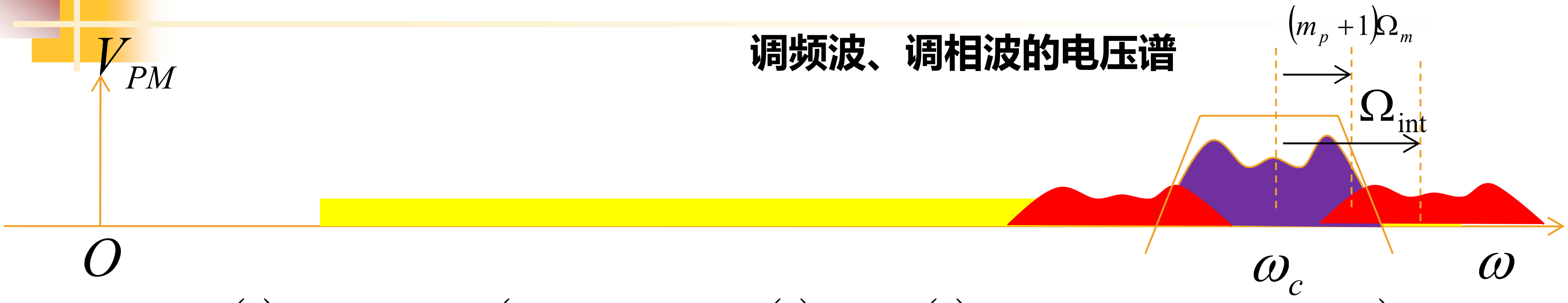
直流分量对低通而言通过，保留

$$\Omega_{\text{int}} < 2(m_P+1)\Omega_m$$

电压谱的频谱就会混叠

电压谱和相位谱

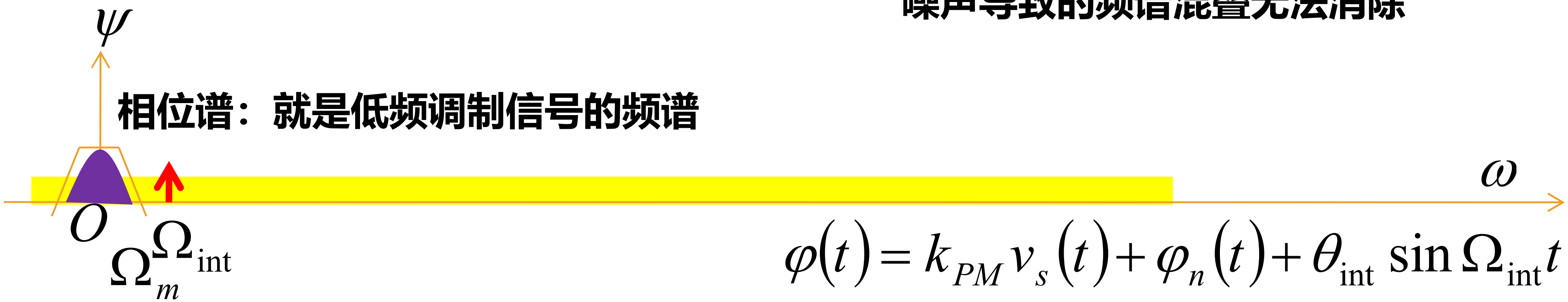
调频波、调相波的电压谱



$$v_{PM}(t)=V_{0m}\cos\left(\omega_c t+k_{PM}v_s(t)+\varphi_n(t)+\theta_{\text{int}}\sin\Omega_{\text{int}}t+\varphi_0\right)$$

噪声导致的频谱混叠无法消除

相位谱：就是低频调制信号的频谱



$$\varphi(t)=k_{PM}v_s(t)+\varphi_n(t)+\theta_{\text{int}}\sin\Omega_{\text{int}}t$$

$\Omega_{\text{int}} > \Omega_m$ 带外噪声被相位滤波器滤除

$$\varphi_{out}(t)\approx k_{PM}v_s(t-\tau_0)+\varphi_{n,out}(t)$$

信号干净了很多

相位谱的频谱就可以分离，从而干扰被滤除

如何走进相位域进行相位滤波?

- 我们学过的滤波器是针对电压信号的，现在需要走进相位域
  - 将有噪声的相位转化为电压，对电压进行滤波，滤波后的电压再转化为相位
    - 相当于对相位做了滤波

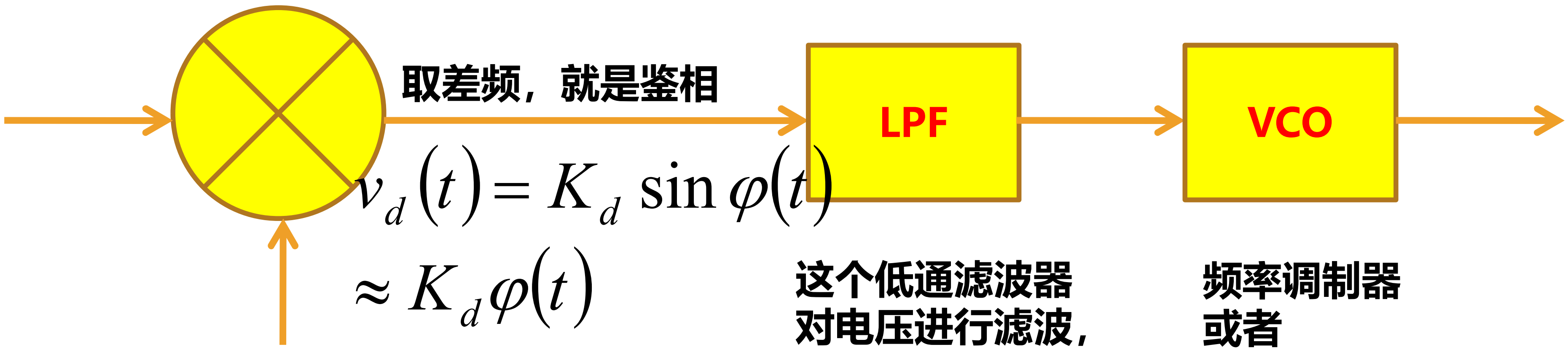
- 第一步把相位转化为电压：鉴相器
  - 下面的讨论以乘法器实现的鉴相器为例
- 第二步对电压进行滤波
  - 普通RC滤波即可（非功率传输问题，是信息处理，无需考虑阻抗匹配问题）
- 第三步将电压转化为相位
  - 调相，调频，压控振荡器VCO，…

- 问题：如何确保VCO输出中心频率和输入的完全一致

$$v'_{PM}(t) = V_{0m}\cos\left(\underline{\underline{\omega_c t}} + \underline{\underline{k_{PM} v_{s,out}(t) + \varphi_{n,out}(t) + \theta_{\text{int}} A_\varphi(\Omega_{\text{int}})\sin\left(\Omega_{\text{int}} t + \varphi_\varphi(\Omega_{\text{int}})\right)}} + \varphi_0\right)$$

实现相位滤波可能的构件

$$v_{PM}(t) = V_{0m}\cos\left(\omega_c t + \varphi(t)\right)$$



$$v_d(t) = K_d \sin\varphi(t)$$
$$\approx K_d \varphi(t)$$

$$-V_{2m}\sin\omega_c t$$

这个低通滤波器对电压进行滤波，就是对相位差进行滤波

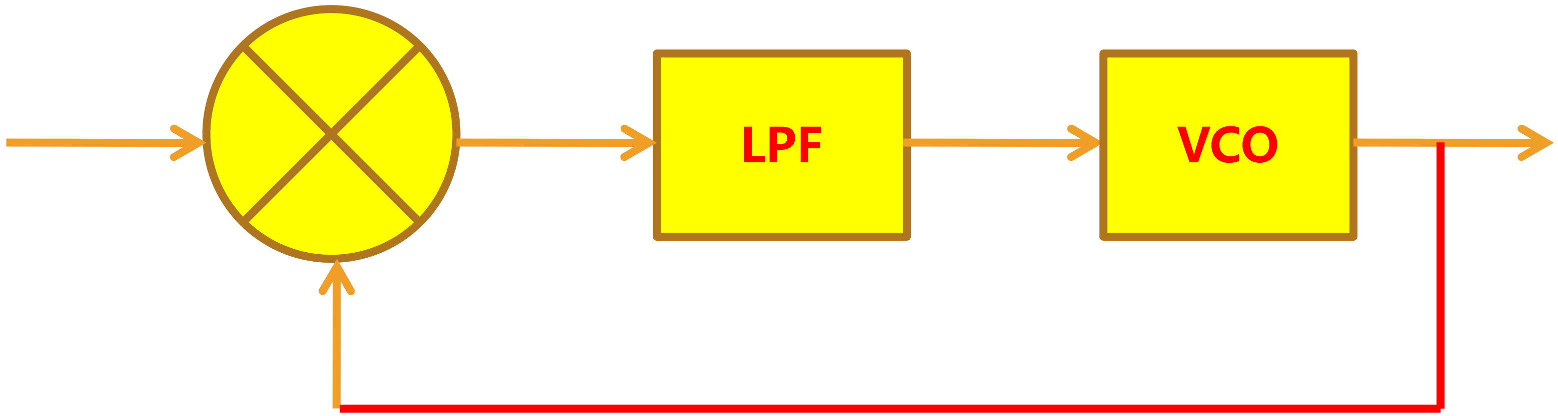
频率调制器
或者
相位调制器
…

问题1：谁提供这个鉴相基准

问题2：如何确保它的中心频率的准确性和稳定性

用输出做基准可否?

1、如果相位滤波起作用了，VCO的输出就是比较干净的频谱



2、用这个频谱相对干净的信号做鉴相基准，可否?

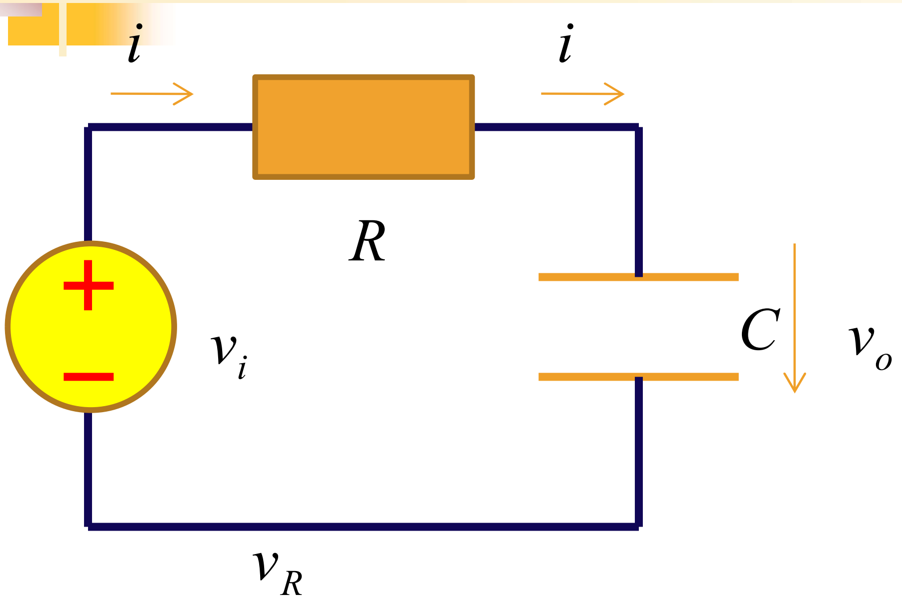
3、可。显然这是一个反馈路径：应该形成负反馈路径，否则会出现相位信号的振荡、锁死、不稳定

通过调整LPF参数，可以让VCO输出是单频信号：相位上的所有波动全部被滤除，包括信号和噪声，只剩下单频载波输出：载波跟踪应用：**第一种应用**

第二种应用：调制跟踪应用：输出相位跟踪输入相位，通带内信号保留并跟踪，通带外信号滤除：可实现调相波（调频波）的相位低通滤波

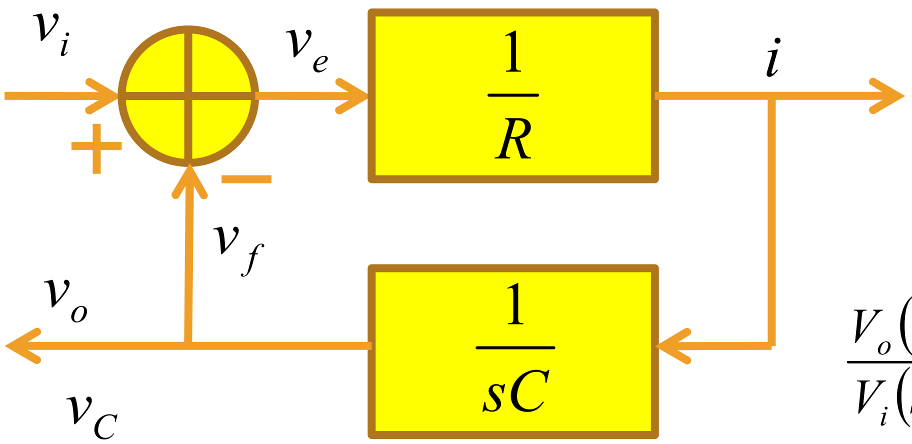
为何负反馈环路可实现低通滤波?

一阶低通滤波的负反馈信号流图解释



$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)}=\frac{\frac{1}{sC}}{R+\frac{1}{sC}}=\frac{\frac{1}{RC}}{s+\frac{1}{RC}}=\frac{\omega_0}{s+\omega_0}$$

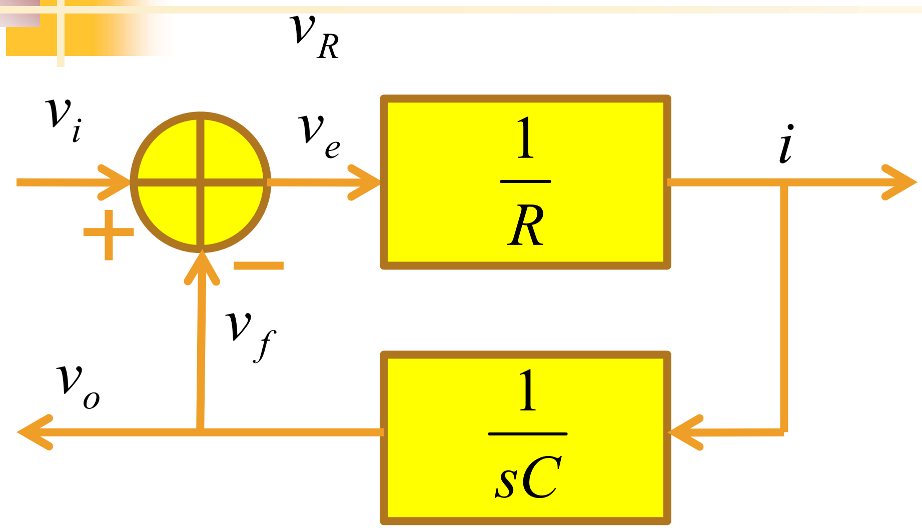
$$G_{m0}=\frac{1}{R} \qquad R_F=\frac{1}{sC}$$



$$G_{mF}=\frac{G_{m0}}{1+G_{m0}R_F}=\frac{\frac{1}{R}}{1+\frac{1}{sRC}}=\frac{sC}{1+sRC}$$

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)}=\frac{V_o(s)}{I(s)}\frac{I(s)}{V_i(s)}=\frac{1}{sC}G_{mF}=\frac{1}{1+sRC}=\frac{\frac{1}{RC}}{s+\frac{1}{RC}}=\frac{\omega_0}{s+\omega_0}$$

单位负反馈理解

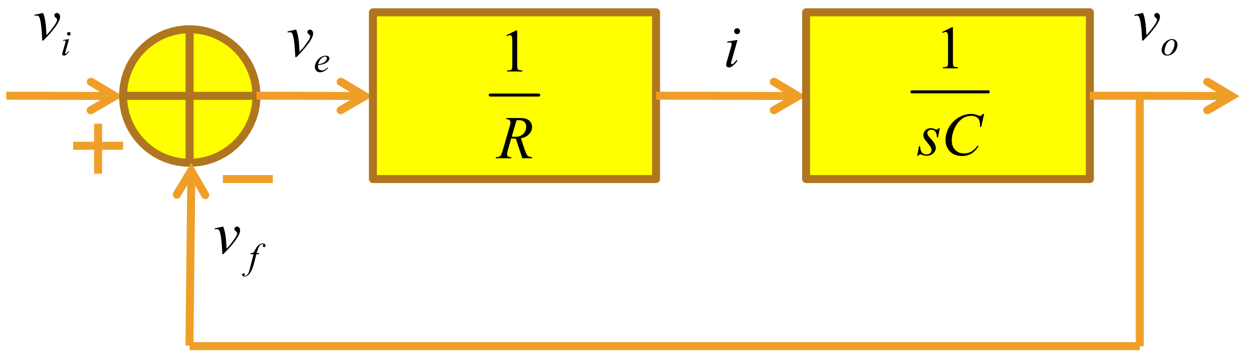


$$A_{v0} = \frac{1}{sRC} \qquad F = 1$$

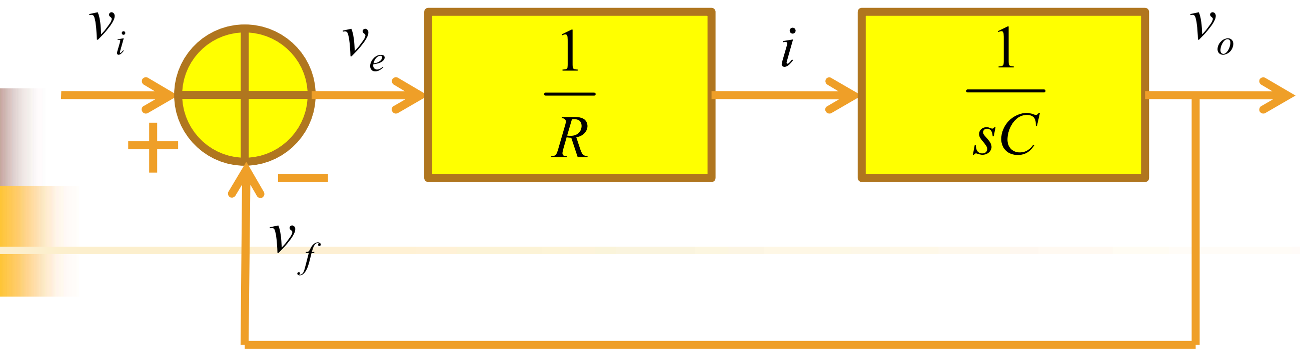
$$A_{vF} = \frac{A_{v0}}{1 + A_{v0}F}$$

$$= \frac{\frac{1}{sRC}}{1 + \frac{1}{sRC}} = \frac{1}{1 + sRC}$$

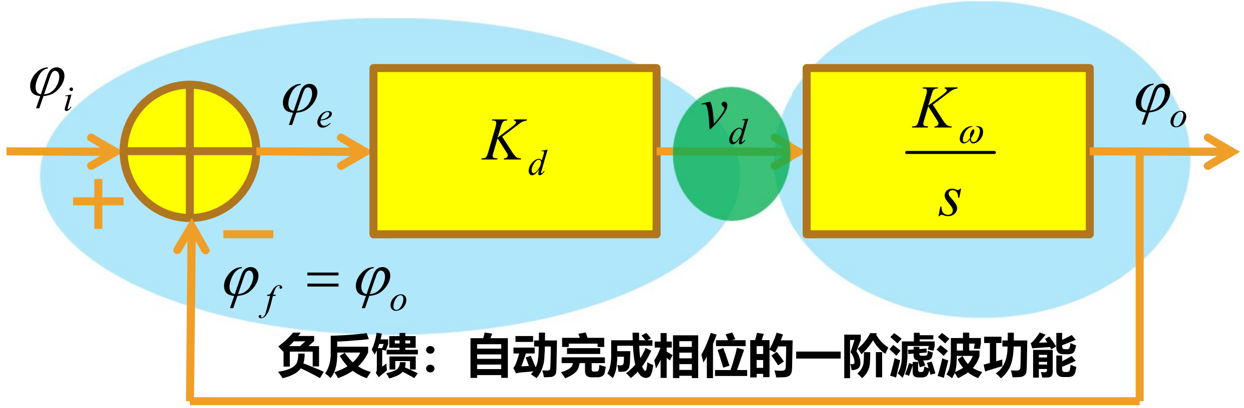
$$= \frac{\frac{1}{RC}}{s + \frac{1}{RC}} = \frac{\omega_0}{s + \omega_0}$$



从电压滤波到相位滤波



鉴相器：相位转电压　　　VCO：电压转频率，频率积分为相位

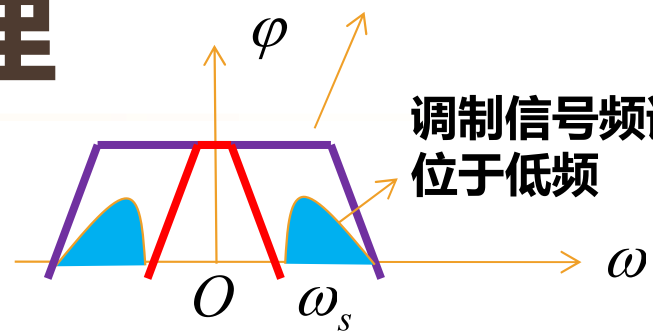


$$\frac{\varphi_o(s)}{\varphi_i(s)} = \frac{A_0}{1+A_0F} = \frac{\frac{K_dK_\omega}{s}}{1+\frac{K_dK_\omega}{s}} = \frac{K_dK_\omega}{s+K_dK_\omega} = \frac{\omega_0}{s+\omega_0}$$

我们可以利用相位负反馈系统实现滤波功能

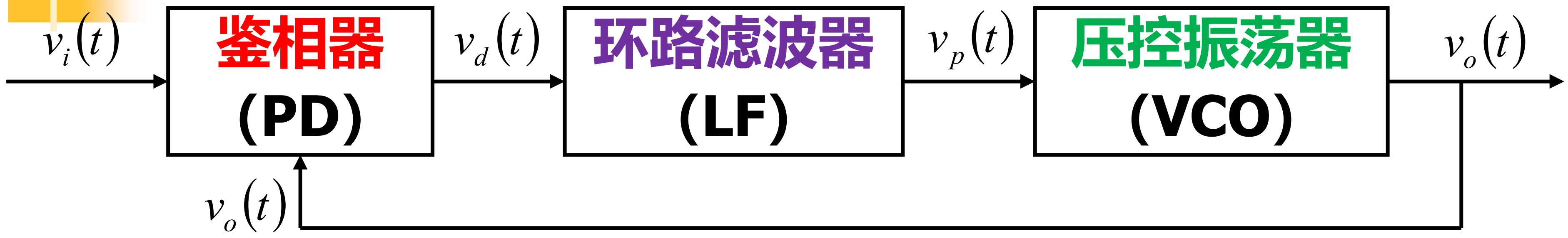
这就是锁相环的基本原理：如果期望更好的滤波效果，中间需要添加电压滤波器

二、锁相环基本原理



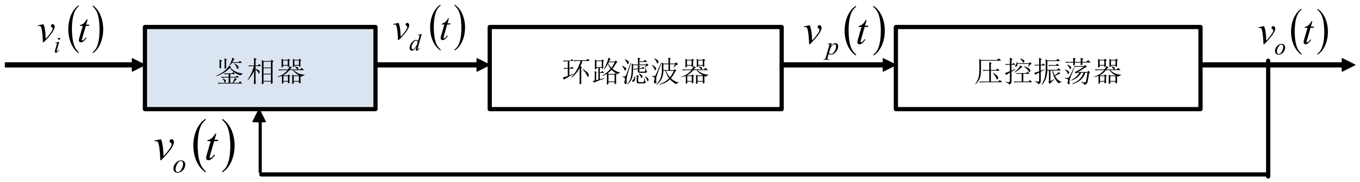
- 锁相环
  - PLL：Phase Locked Loop
    - 输出相位锁定输入相位
      - 如果输入相位变化频率落在相位滤波器通带之内：输入相位怎么变化，输出则随之变化：调制跟踪锁相环
      - 如果输入相位变化频率落在相位滤波器通带之外：输出中心频率严格等于输入中心频率：载波跟踪锁相环
- 锁相环原理框图
- 锁相环基本构件数学模型
- 锁相环闭环环路方程分析
  - 非线性动态系统的交直流分析

锁相环原理框图



- 三个基本构件组成：鉴相器，环路滤波器和压控振荡器
- 基本工作原理
  - 鉴相器将输入和输出信号的相位差鉴别出来后，转化为电压信号
  - 对电压信号进行低通滤波处理，将相位中的高频噪声滤除，相位中的低频分量和直流分量用于控制压控振荡器的频率输出
  - 压控振荡器在经过低通滤波后的控制电压的作用下，其输出信号的相位跟踪输入信号的相位变化
    - 如果是窄带跟踪环，输出频率严格等于输入信号中心载频
    - 如果是调制跟踪环，输出信号相位跟踪输入信号通带内相位变化

2.1 基本构件的数学模型



PD：Phase Detector　　**LF：Loop Filter**　　**VCO：Voltage Controlled Oscillator**

鉴相器数学模型

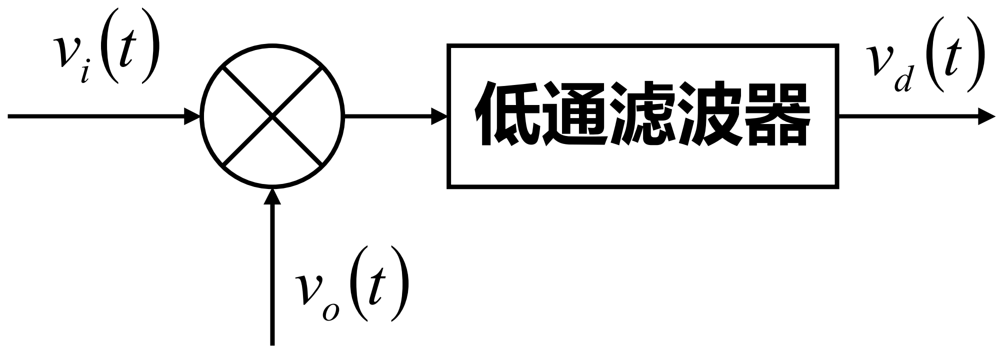
$$v_d(t) = f[\varphi_i(t) - \varphi_o(t)] = f[\varphi_e]$$

$$v_d(t) = f[\varphi_e] = K_d\varphi_e$$

理想鉴相器具有线性鉴相功能

鉴相电压　　**鉴相灵敏度**　　**误差相位**

用乘法器实现的鉴相功能



$$v_i(t) = V_{im}\sin[\omega_{i0}t + \theta_i(t)] = V_{im}\sin\varphi_i(t)$$

$$v_o(t) = V_{om}\cos[\omega_{o0}t + \theta_o(t)] = V_{om}\cos\varphi_o(t) = V_{om}\sin\left(\varphi_o(t) + 90°\right)$$

乘法器实现的鉴相功能，相位差中默认存在一个90°的直流分量

$$v_d(t) = \frac{1}{2}KV_{im}V_{om}\sin\left(\varphi_i(t) - \varphi_o(t)\right) = K_d\sin\varphi_e(t)$$

乘法器实现的是正弦鉴相功能

瞬时相位

$$v_i(t)=V_{im}\sin[\omega_{i0}t+\theta_i(t)]=V_{im}\sin\varphi_i(t)$$

$$v_o(t)=V_{om}\cos[\omega_{o0}t+\theta_o(t)]=V_{om}\cos\varphi_o(t)$$

- **输入参考信号$v_i(t)$的中心角频率为ω_{i0}，$\theta_i(t)$为以$\omega_{i0}t$为参考相位的瞬时相位**
  - **如果输入信号为单频正弦波，那么$\theta_i(t)$为常数；如果输入是一个调相波，那么$\theta_i(t)$按调制信号$v_f(t)$的规律线性变化**
- **压控振荡器输出信号$v_o(t)$的中心角频率为ω_{o0}，$\theta_o(t)$为以$\omega_{o0}t$为参考相位的瞬时相位**
  - **ω_{o0}是VCO的自由振荡角频率（控制电压$v_p(t)=0$时的振荡频率，是压控特性的中心频率点）**

统一参考相位

- 至少在锁相环刚刚闭环时，鉴相器输入端两个信号的频率是不同的
  - 一个是ω_{i0}，一个是ω_{o0}
- 形成闭环后，负反馈控制作用导致VCO频率越来越接近输入频率，当PLL最终锁定后，振荡器输出中心频率严格等于输入中心频率
- 为了便于**建立简单模型**以考察**从开始的未锁定到最终锁定**的全过程，统一以VCO的自由振荡相位$\omega_{o0}t$为参考相位

$$\varphi_i(t)=\omega_{i0}t+\theta_i(t)=\omega_{o0}t+\underline{\underline{(\omega_{i0}-\omega_{o0})t}}+\theta_i(t)=\omega_{o0}t+\underline{\underline{\theta_1}}(t)$$

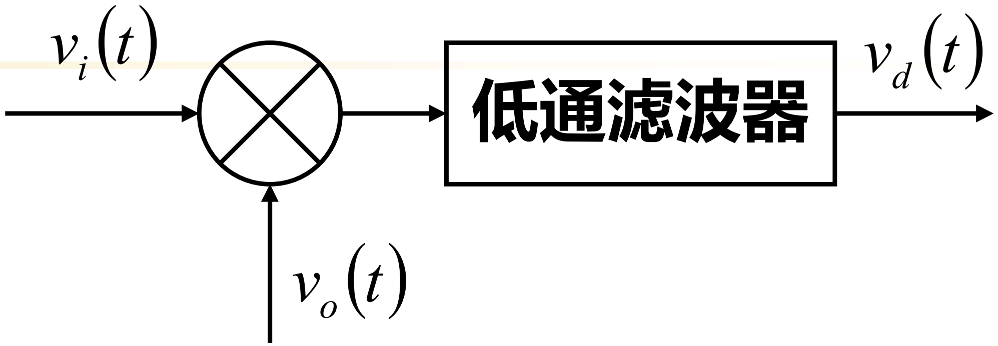
$$\varphi_o(t)=\omega_{o0}t+\underline{\underline{\theta_o}}(t)=\omega_{o0}t+\underline{\underline{\theta_2}}(t)$$

鉴相器输出是误差相位的函 数：$v_d(t)=f[\varphi_e(t)]$

$$\varphi_e(t)=\varphi_i(t)-\varphi_o(t)=\theta_1(t)-\theta_2(t)=\theta_e(t)$$

正弦鉴相特性

线性鉴相



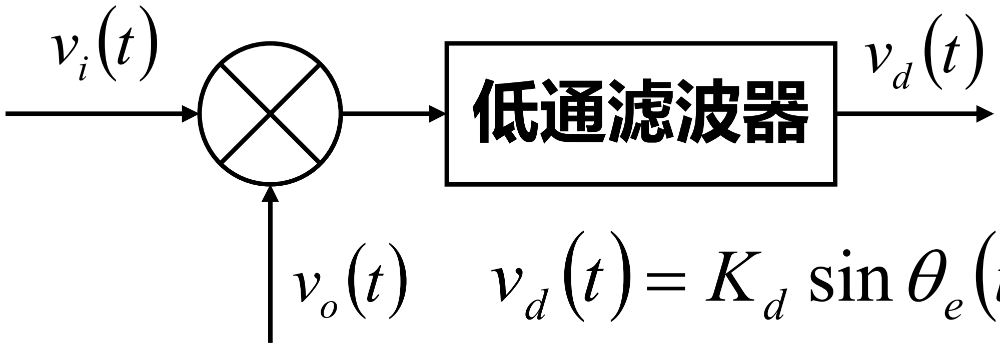
$$v_d(t)=\frac{1}{2}KV_{im}V_{om}\sin(\varphi_i(t)-\varphi_o(t))=K_d\sin\varphi_e(t)$$

$$v_d(t)=K_d\sin\varphi_e(t)=K_d\sin\theta_e(t)$$

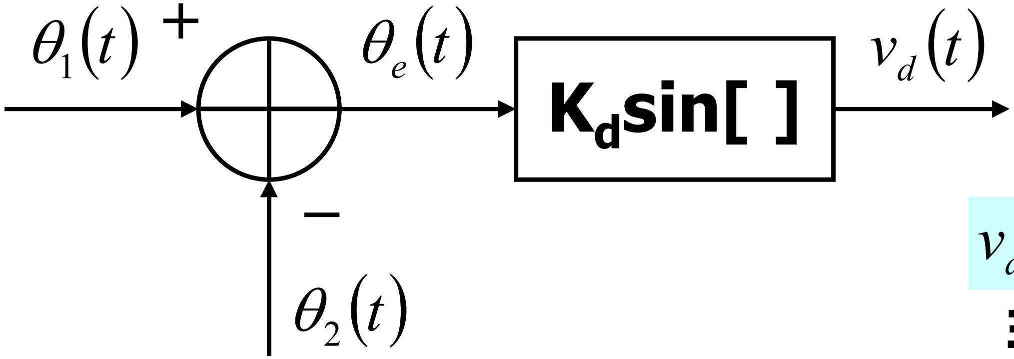
如果相位差$|\varphi_e|<\pi/6$，

正弦鉴相特性可以近似为线性鉴相特性：$v_d(t)\approx K_d\varphi_e(t)$

正弦鉴相器数学模型



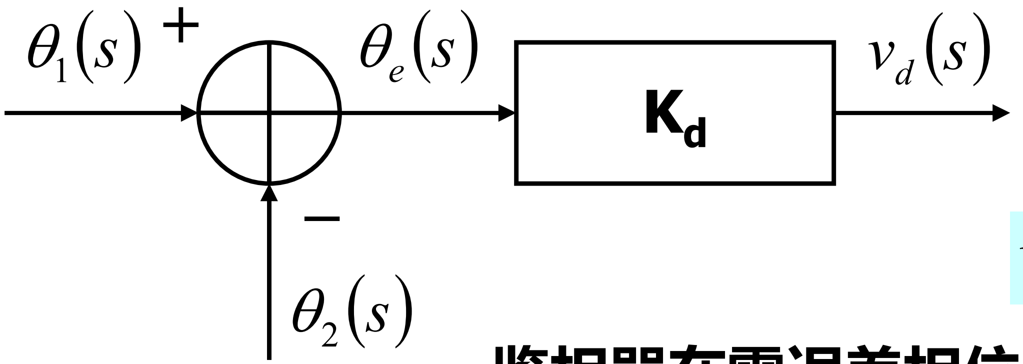
$$v_d(t)=K_d\sin\theta_e(t)$$



$$v_d(t)=K_d\,\mathbf{sin}\,\theta_e(t)$$

非线性鉴相特性

- **如果采用线性模型，则有复频域模型如下**

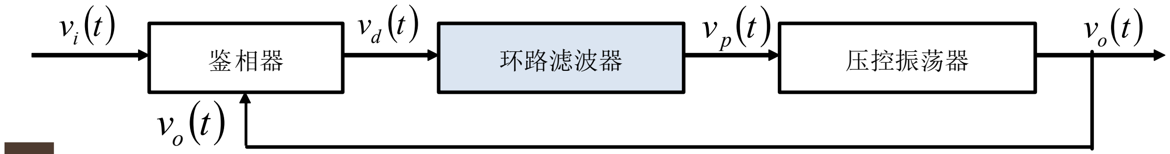


如果相位差$|\varphi_e|<\pi/6$，

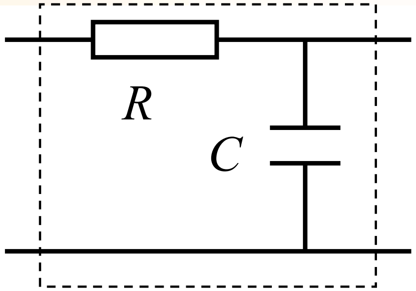
正弦鉴线性范围内：$v_d(t)\approx K_d\theta_e(t)$

$$v_d(s)=K_d\theta_e(s)$$

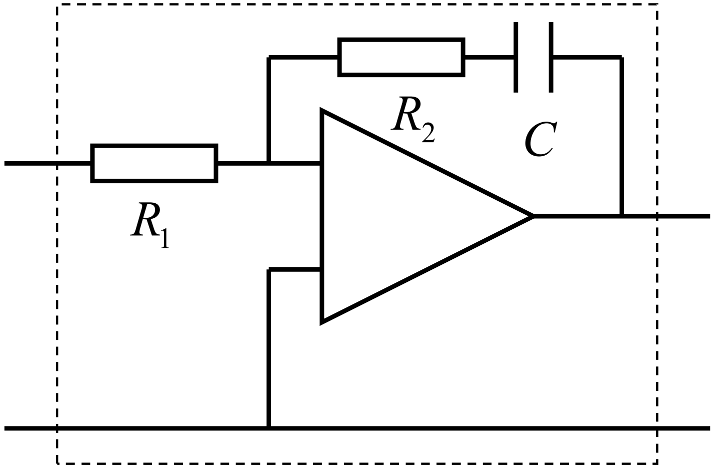
鉴相器在零误差相位附近的线性化模型

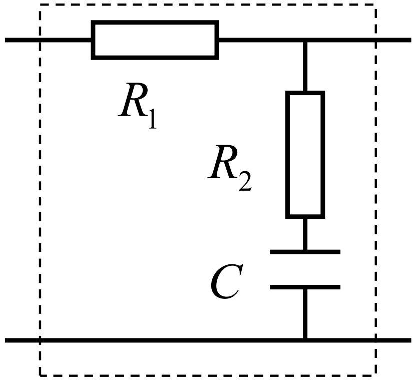


环路滤波器



$\tau = RC$





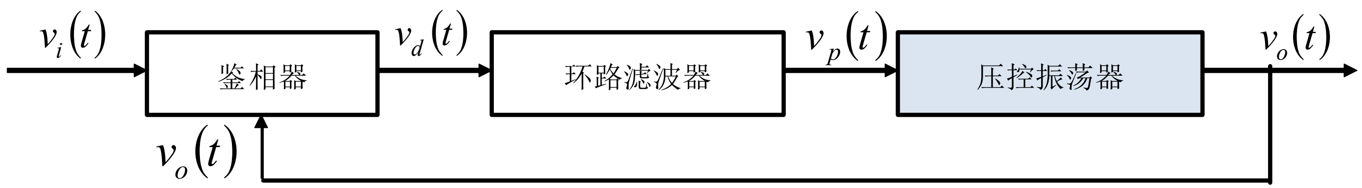
直通：$H_F(s)=1$

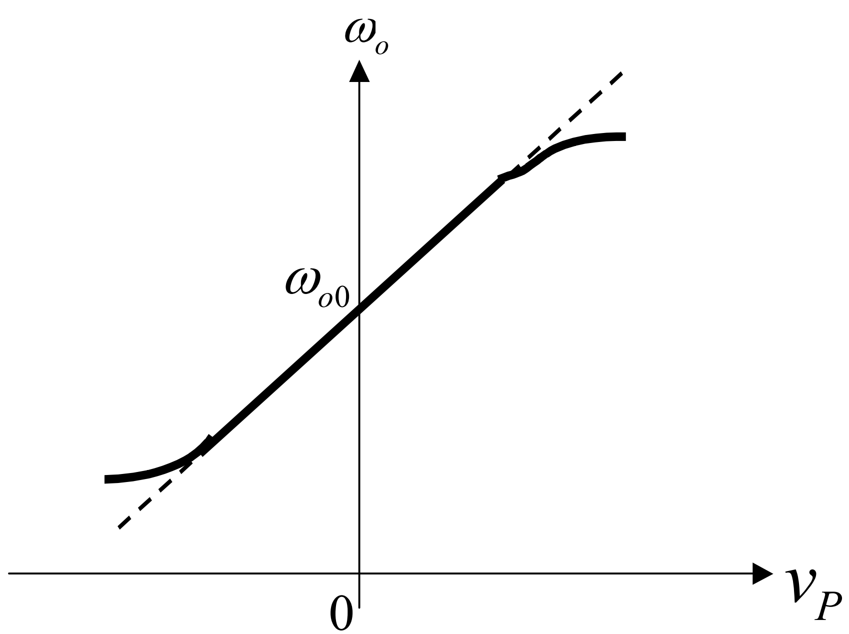
RC积分滤波器：$H_F(s)=\dfrac{1}{1+s\tau}$

无源比例积分滤波器：$H_F(s)=\dfrac{1+s\tau_2}{1+s(\tau_1+\tau_2)}$

有源比例积分滤波器：$H_F(s)=-\dfrac{1+s\tau_2}{s\tau_1}$(理想)

压控振荡器





$$\omega_o(t) = \omega_{o0} + g[v_P(t)]$$

$$\omega_o(t) = \omega_{o0} + K_\omega v_p(t)$$

PLL中，频率调制器中，都希望压控特性是线性特性

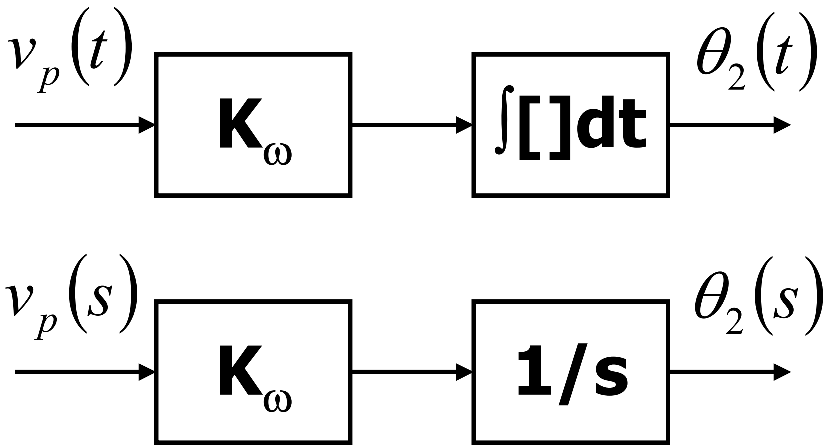
在中心频点附近做线性化处理

压控振荡器数学模型

$$\omega_o(t)=\omega_{o0}+K_\omega v_p(t)$$

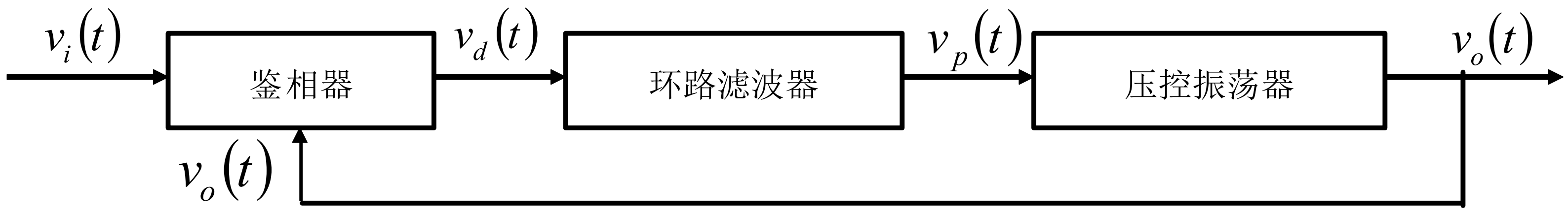
- 在锁相环路中，压控振荡器的输出对鉴相器起作用的不是瞬时角频率而是它的**瞬时相位**

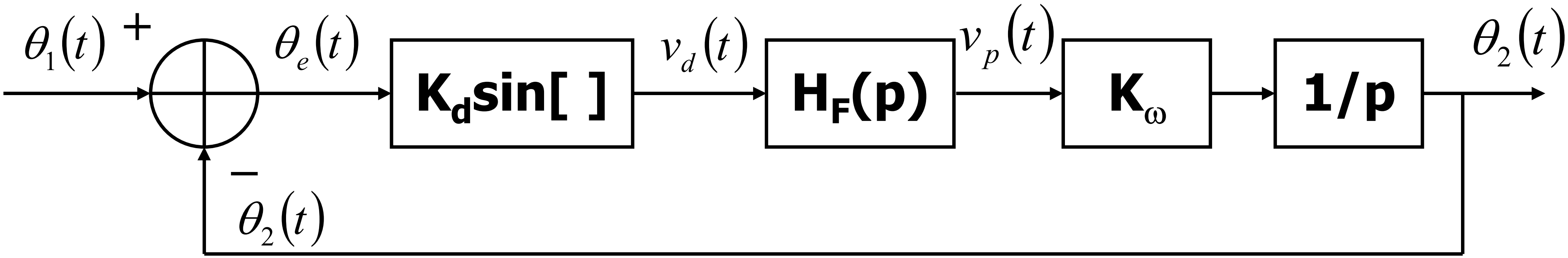
$$\varphi_o(t)=\int_0^t \omega_o(t)dt=\omega_{o0}t+K_\omega\int_0^t v_p(t)dt=\omega_{o0}t+\theta_2(t)$$



- 表征VCO输出相位的$\theta_2(t)$与输入控制电压$v_p(t)$关系的数学模型是一个理想积分器，因此也称VCO是锁相环路中的固有积分环节
  - 锁相环锁定的是相位（鉴相器鉴别的是相位差），而VCO线性受控输出的是频率，因而必然存在一个内在的积分环节

2.2 PLL相位数学模型





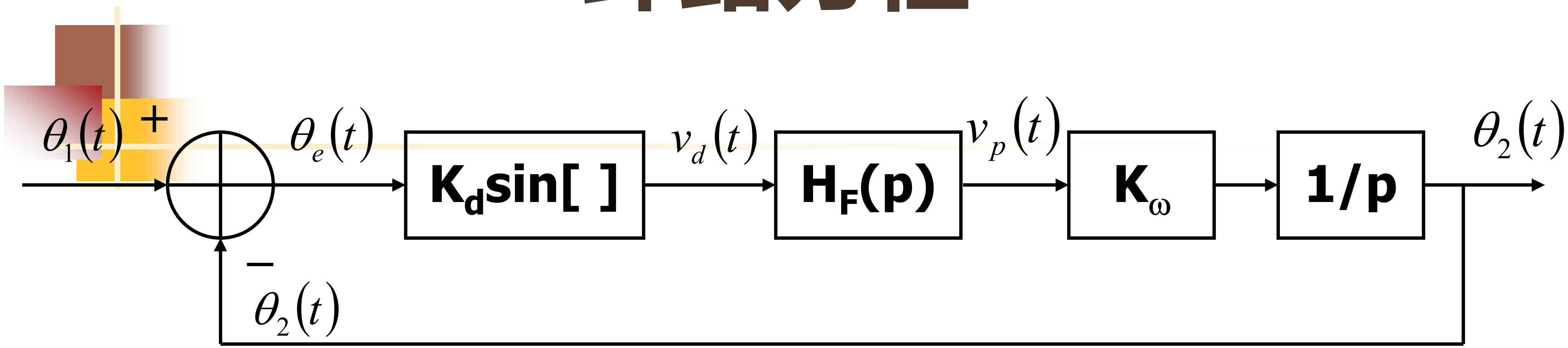
$$p = \frac{d}{dt}$$

微分算子

$$\frac{1}{p} = \int \cdot dt$$

积分算子

环路方程



$$\theta_2(t)=\frac{K_\omega}{p}\bullet\left(H_F(p)\bullet\left(K_d\sin\theta_e(t)\right)\right)$$

$$\theta_e(t)=\theta_1(t)-\theta_2(t)=\theta_1(t)-\frac{K_\omega}{p}\bullet\left(H_F(p)\bullet\left(K_d\sin\theta_e(t)\right)\right)$$

$$p\bullet\theta_e(t)=p\bullet\theta_1(t)-K_dK_\omega\left(H_F(p)\bullet\left(\sin\theta_e(t)\right)\right)$$

$$\frac{d\theta_e(t)}{dt}=\frac{d\theta_1(t)}{dt}-K_P\left(H_F(p)\bullet\left(\sin\theta_e(t)\right)\right)$$

方便表述起见，积分和微分运算用算子符号表示：点乘形式只是方便表述，说明的是时域信号通过系统作用后的时域输出信号

$$v_p(t)=H_F(p)\bullet v_d(t)=h_f(t)*v_d(t)$$

$$K_P=K_dK_\omega$$

环路方程：瞬时频差+控制频差＝输入固有频差

$$\frac{d\theta_e(t)}{dt}+\frac{d\theta_2(t)}{dt}=\frac{d\theta_1(t)}{dt}$$

环路方程各项代表的是频差关系

$$\frac{d\theta_e(t)}{dt}=\frac{d\theta_1(t)}{dt}-K_P\left(H_F(p)\bullet\left(\sin\theta_e(t)\right)\right)$$

非线性动态系统
非线性微分方程

$$\frac{d\theta_e(t)}{dt}=\frac{d\varphi_e(t)}{dt}=\frac{d\varphi_i(t)}{dt}-\frac{d\varphi_o(t)}{dt}=\omega_i(t)-\omega_o(t)=\Delta\omega_e(t):\text{瞬时频差}$$

$$\theta_1(t)=(\omega_{i0}-\omega_{o0})t+\theta_i(t)$$

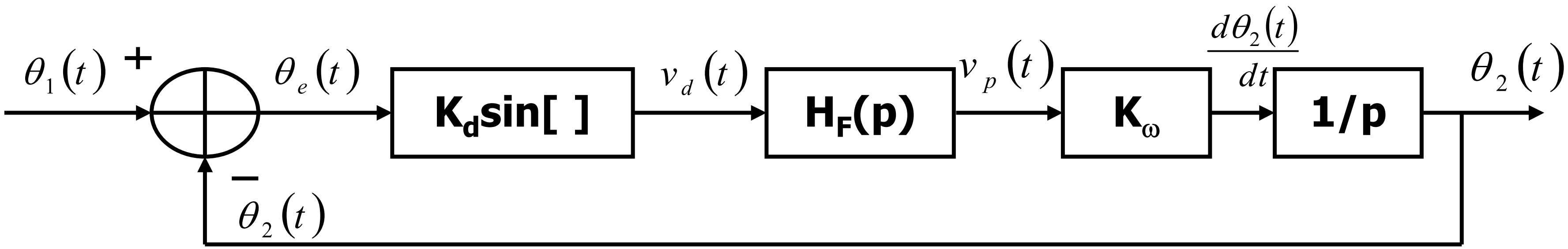
$$\frac{d\theta_1(t)}{dt}=\left(\omega_{i0}-\omega_{o0}\right)+\frac{d\theta_i(t)}{dt}:\text{输入固有频差}$$

由起始工作状态决定

$$\frac{d\theta_2(t)}{dt}=K_\omega v_p(t)=\omega_o(t)-\omega_{o0}:\text{控制频差}$$

$$\omega_o(t)=\omega_{o0}+K_\omega v_p(t)$$

压控振荡器在VCO控制电压的作用下，所产生的角频率变化量



非线性动态系统

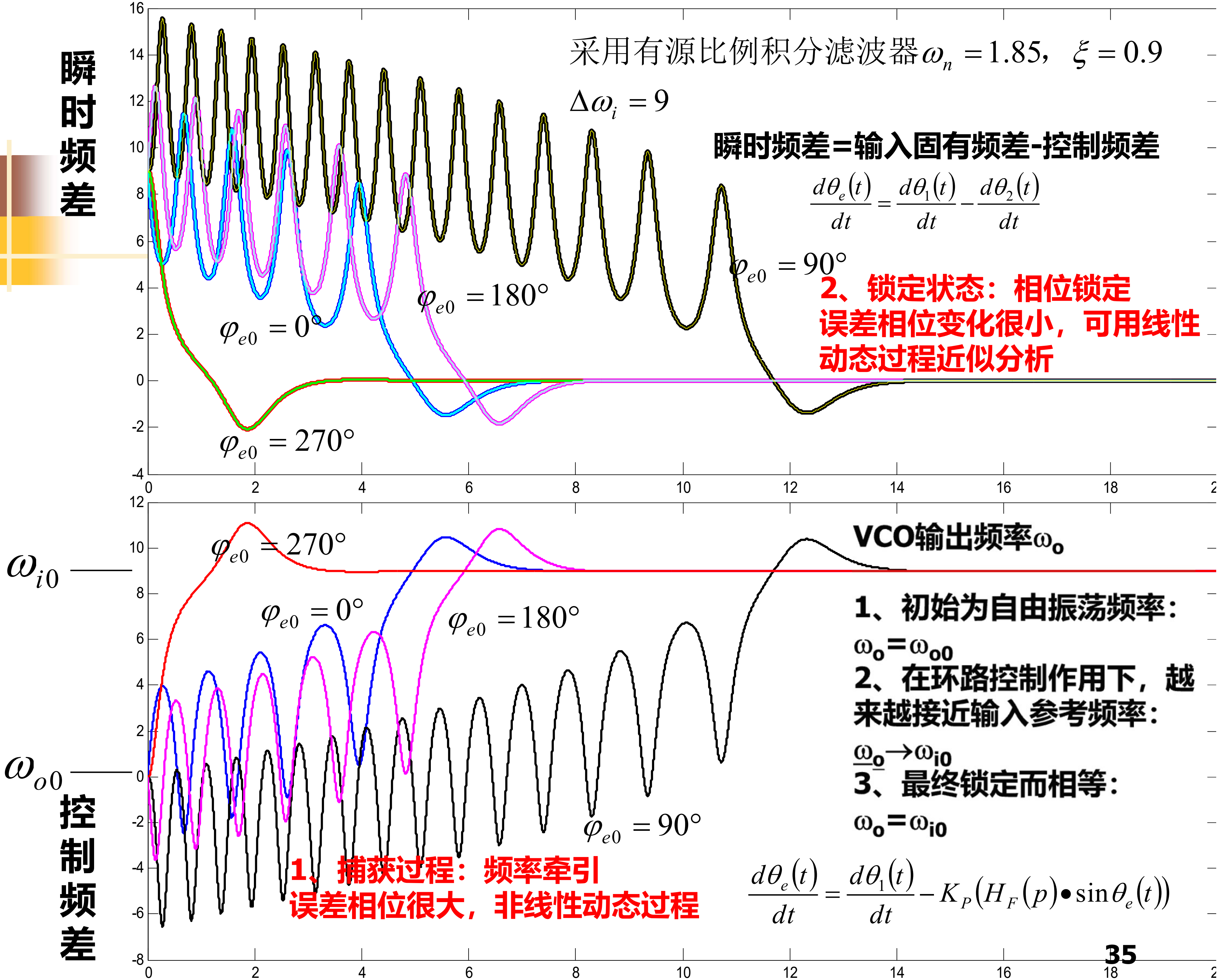
$$\frac{d\theta_e(t)}{dt}=\frac{d\theta_1(t)}{dt}-K_P\left(H_F(p)\bullet\sin\theta_e(t)\right)$$

- 环路方程表示环路中动态角频率的平衡关系，即闭环环路在任何时刻都满足
  - 瞬时频差=输入固有频差-控制频差

$$\frac{d\theta_1(t)}{dt}=\left(\omega_{i0}-\omega_{o0}\right)+\frac{d\theta_i(t)}{dt}=\left(\omega_{i0}-\omega_{o0}\right)$$

- 如果输入固有频差是固定的（例如参考信号源为稳定度很高的晶振），随着环路的控制过程，控制频差越来越大，瞬时频差（整体趋势上）越来越小，直至瞬时频差为0，进入锁定状态
  - 在锁定状态，控制频差等于输入固有频差，瞬时频差为0（输出频率严格等于输入频率，但存在一个常数瞬时相差）

瞬时频差越来越小



瞬时频差
采用有源比例积分滤波器$\omega_n=1.85$，$\xi=0.9$
$\Delta\omega_i=9$
瞬时频差=输入固有频差-控制频差
$\frac{d\theta_e(t)}{dt}=\frac{d\theta_1(t)}{dt}-\frac{d\theta_2(t)}{dt}$
$\varphi_{e0}=90°$
$\varphi_{e0}=180°$
$\varphi_{e0}=0°$
$\varphi_{e0}=270°$
2、锁定状态：相位锁定
误差相位变化很小，可用线性动态过程近似分析
VCO输出频率ω_o
ω_{i0}
ω_{o0}
$\varphi_{e0}=270°$
$\varphi_{e0}=0°$
$\varphi_{e0}=180°$
$\varphi_{e0}=90°$
1、初始为自由振荡频率：
$\omega_o=\omega_{o0}$
2、在环路控制作用下，越来越接近输入参考频率：
$\omega_o\to\omega_{i0}$
3、最终锁定而相等：
$\omega_o=\omega_{i0}$
1、捕获过程：频率牵引
误差相位很大，非线性动态过程
$\frac{d\theta_e(t)}{dt}=\frac{d\theta_1(t)}{dt}-K_P(H_F(p)\bullet\sin\theta_e(t))$
控制频差

2.3 环路方程分析

- 环路方程是一个非线性微分方程
  - 求解极为麻烦

$$\frac{d\theta_e(t)}{dt}=\frac{d\theta_1(t)}{dt}-K_P\left(H_F(p)\bullet\sin\theta_e(t)\right)$$

- 起始阶段
  - 捕获：当系统开始工作时，压控振荡器的频率朝着接近输入信号频率的方向变化的**频率牵引**过程被称为是**捕获**
    - 非线性过程：瞬时相差变化很大，超出正弦鉴相特性的线性范围

- 锁定阶段
  - 跟踪： VCO跟踪输入信号频率变化与相位变化的过程
    - 可近似为线性过程
      - 假设相差变化很小，正弦鉴相特性化简为线性鉴相特性

$$\frac{d\theta_e(t)}{dt}=\frac{d\theta_1(t)}{dt}-K_P\left(H_F(p)\bullet\sin\theta_e(t)\right)$$

2.3.1 平衡点分析：直流分析

- 非线性动态捕获过程放在下节讨论
  - 可能捕获并锁定，也可能无法锁定
- 假设已经锁定，先求得平衡点
  - 平衡点：系统从该点开始，如果输入不变，那么在将来的任何时刻仍然在该点不动，则为平衡点
    - 对非线性动态电路系统而言，就是电容开路、电感短路状态，也就是直流工作点
      - PLL处理的是相位，不存在电容、电感，PLL的直流分析指的是输入相位不变为常量且系统已经锁定（动态系统进入稳态）后的情况
  - 直流工作点分析：假设输入相位为常数（直流）

$$\varphi_i(t)=\omega_{i0}t+\theta_i(t)=\omega_{i0}t+\theta_{i0}$$

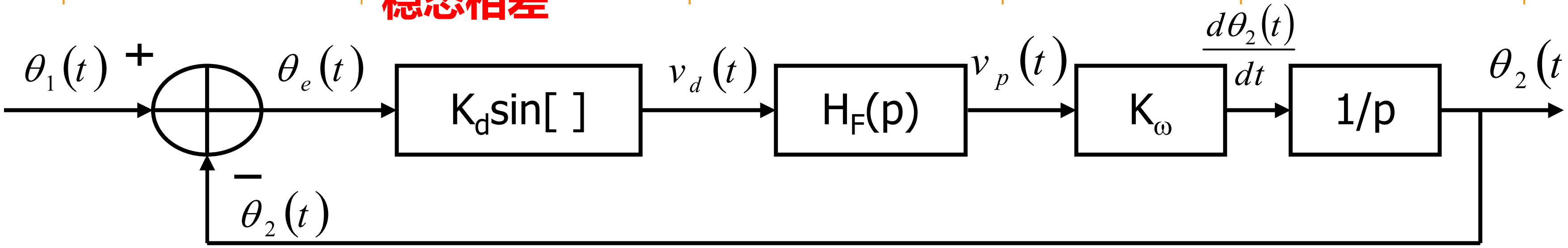
$$\frac{d\theta_1(t)}{dt}=(\omega_{i0}-\omega_{o0})=\Delta\omega_0$$

平衡点分析

$$\theta_2(t)=(\omega_{i0}-\omega_{o0})t+\theta_{i0}-\varphi_{e\infty}$$
$$=(A_{F0}K_P\sin\varphi_{e\infty})t+\theta_{20}$$

$\theta_1(t)=(\omega_{i0}-\omega_{o0})t+\theta_{i0}$ $\quad\varphi_{e\infty}$ $\quad K_d\sin\varphi_{e\infty}$ $\quad A_{F0}K_d\sin\varphi_{e\infty}$ $\quad A_{F0}K_P\sin\varphi_{e\infty}$

稳态相差



$$0=\frac{d\theta_e(t)}{dt}=\frac{d\theta_1(t)}{dt}-K_P\left(H_F(p)\bullet\left(\sin\theta_e(t)\right)\right)$$

$$\lim_{t\to\infty}\theta_e(t)=\varphi_{e\infty}$$

$$\omega_{i0}-\omega_{o0}=\frac{d\theta_1}{dt}=\frac{d\theta_2}{dt}=\omega_{o\infty}-\omega_{o0}$$
$$=K_\omega v_{p\infty}=K_\omega V_{p0}=K_\omega H_F(0)K_d\sin\varphi_{e\infty}=K_PA_{F0}\sin\varphi_{e\infty}$$

$$\varphi_{e\infty}=\arcsin\frac{\omega_{i0}-\omega_{o0}}{K_PA_{F0}}$$

稳态相差使得输出频率严格等于输入频率

$$\varphi_{e\infty} = \arcsin\frac{\omega_{i0} - \omega_{o0}}{K_P A_{F0}} \qquad \omega_{i0} - \omega_{o0} = K_P A_{F0} \sin\varphi_{e\infty}$$

同步带

$$\omega_{o0} - K_P A_{F0} < \omega_{i0} < \omega_{o0} + K_P A_{F0}$$

$$\Delta\omega_H = K_P A_{F0}$$

输入频率必须在这个范围内才有可能锁定，超出这个范围则一定无法锁定
这个范围被称为同步带

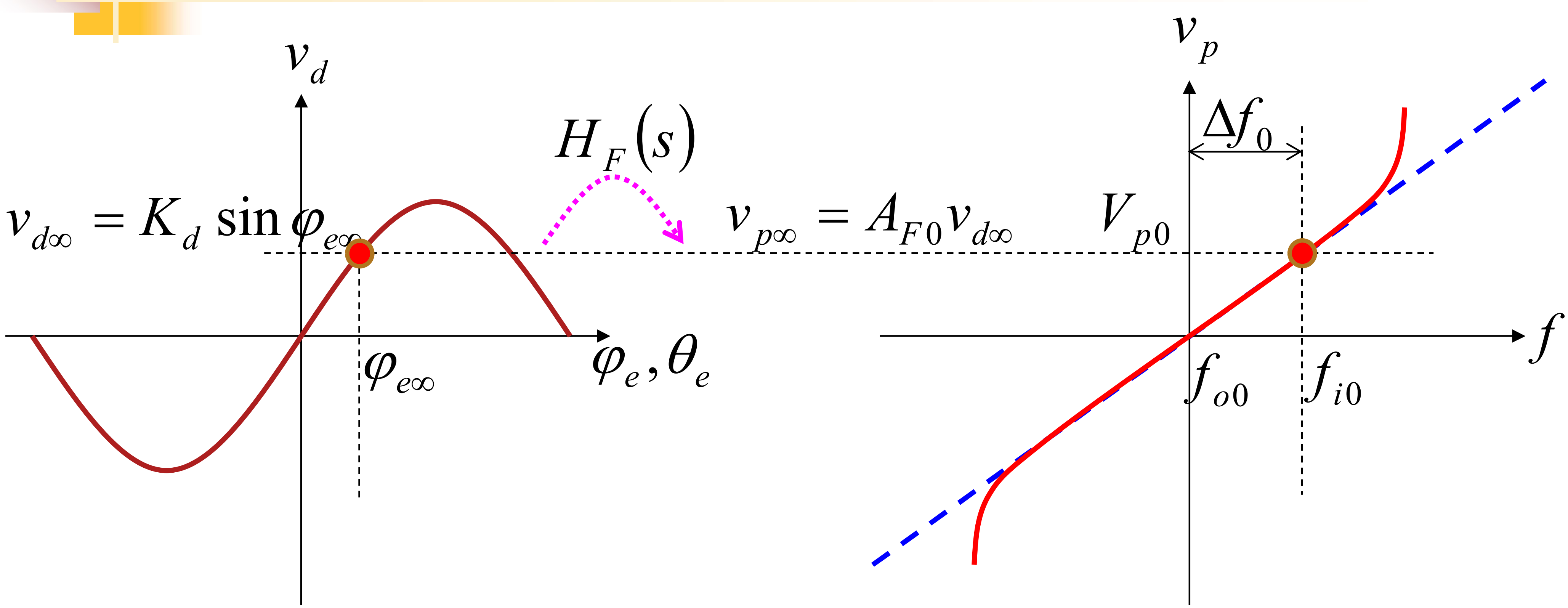
- **假设输入频率在同步带内，输入相位为常数，那么环路锁定后，输出频率等于输入频率，同时有一个相差**

$$v_i(t) = V_{im}\sin(\omega_{i0}t + \theta_{i0})$$

$$v_{o,\infty}(t) = V_{om}\cos(\omega_{i0}t + \theta_{i0} - \varphi_{e\infty})$$

$$\varphi_{e\infty} = \arcsin\frac{\omega_{i0} - \omega_{o0}}{K_P A_{F0}}$$

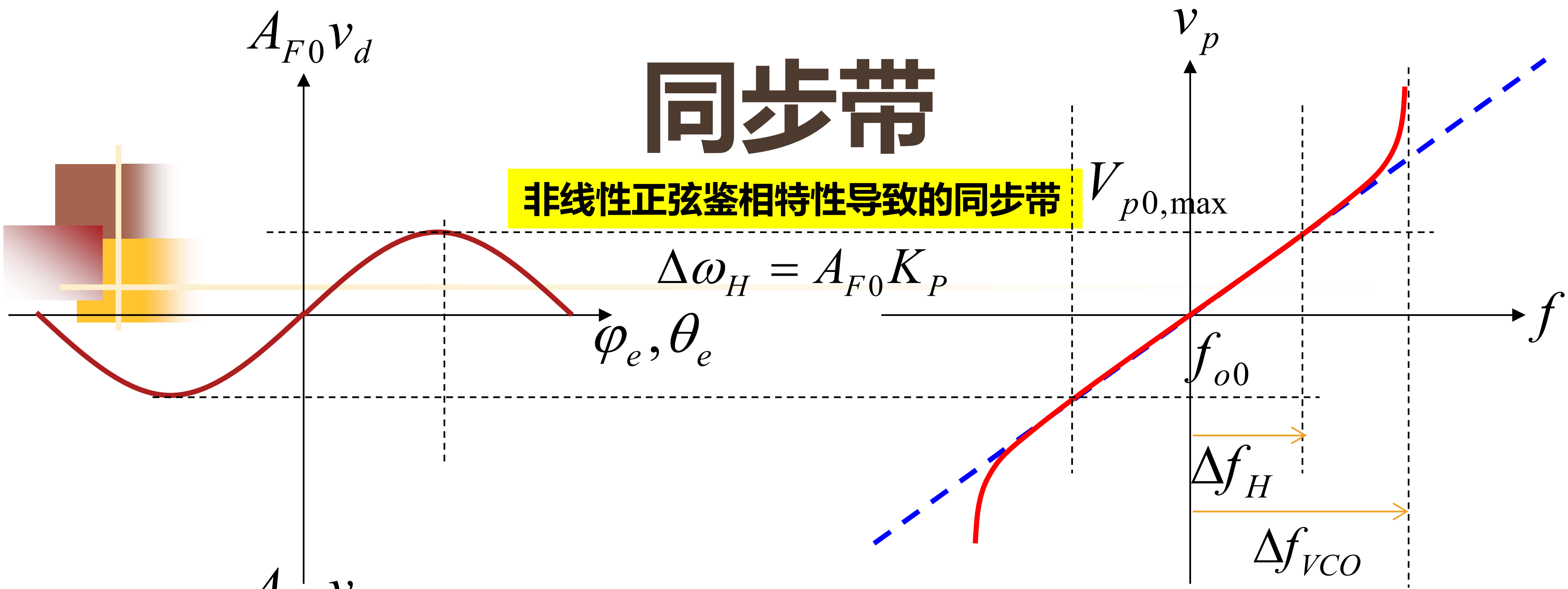
平衡点

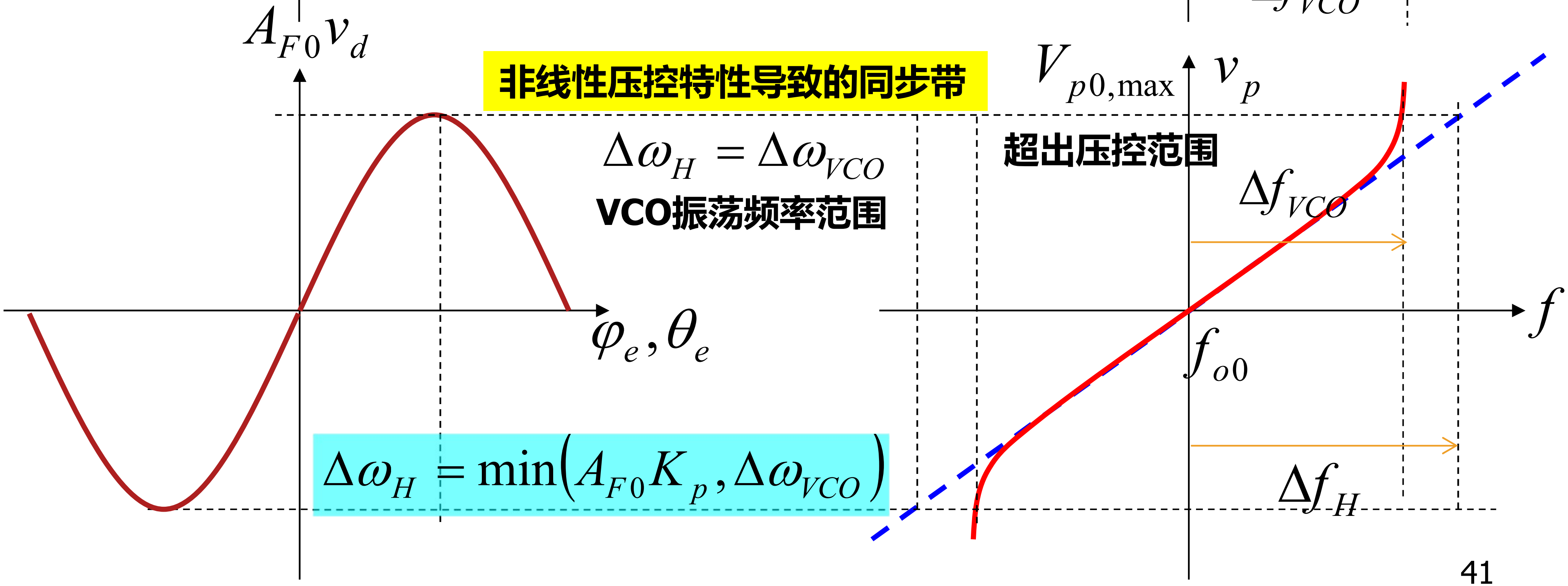


正弦鉴相特性　　**线性压控特性**

稳态相差维持VCO的输出频率，使其严格等于输入频率

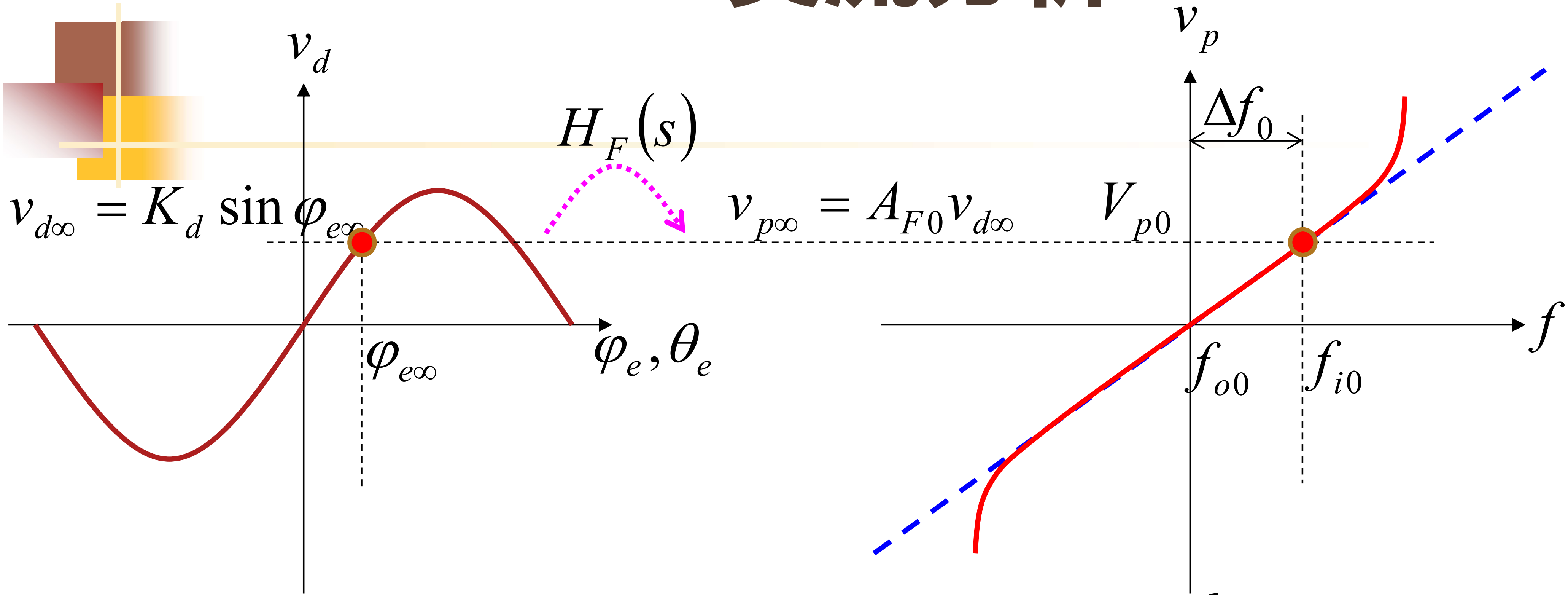
同步带





$$\Delta\omega_H = \min\left(A_{F0}K_p, \Delta\omega_{VCO}\right)$$

2.3.2 交流分析



$$\varphi_i(t) = \omega_{i0} t + \theta_{i0}$$

$$\omega_i(t) = \frac{d}{dt}\varphi_i(t) = \omega_{i0}$$

直流分析结果

$$\varphi_o(t) = \omega_{i0} t + \theta_{i0} - \varphi_{e\infty}$$

$$\omega_o(t) = \frac{d}{dt}\varphi_o(t) = \omega_{i0}$$

交流小信号分析为直流工作点上的微分斜率分析

交流小信号相位稳态分析

$$\varphi_i(t)=\underline{\omega_{i0}t+\theta_{i0}}+\underline{\theta_{im}\sin\Omega t}$$

直流分析

$H(s)$

交流小信号线性分析

$$\omega_i(t)=\frac{d}{dt}\varphi_i(t)=\omega_{i0}+\theta_{im}\Omega\cos\Omega t$$

$H(s)$

$$\varphi_o(t)=\underline{\omega_{i0}t+\theta_{i0}-\varphi_{e\infty}}+\underline{\theta_{om}\sin(\Omega t+\psi)}$$

直流分量严格相等中心频率严格锁定

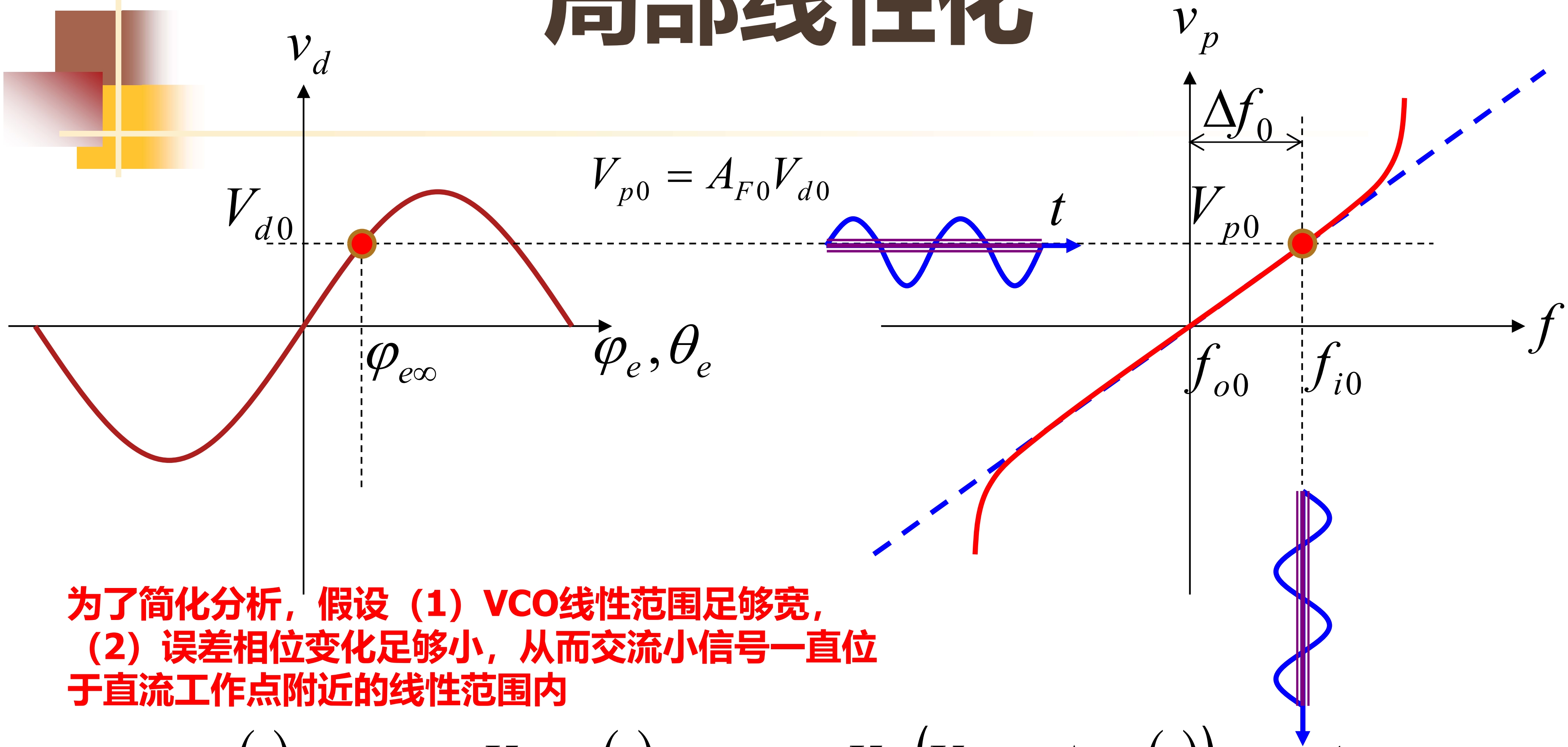
交流分量有频率响应

$$\frac{\theta_{om}}{\theta_{im}}=|H(j\Omega)|$$

$$\psi=angle(H(j\Omega))$$

$$\omega_o(t)=\frac{d}{dt}\varphi_o(t)=\omega_{i0}+\theta_{om}\Omega\cos(\Omega t+\psi)$$

局部线性化



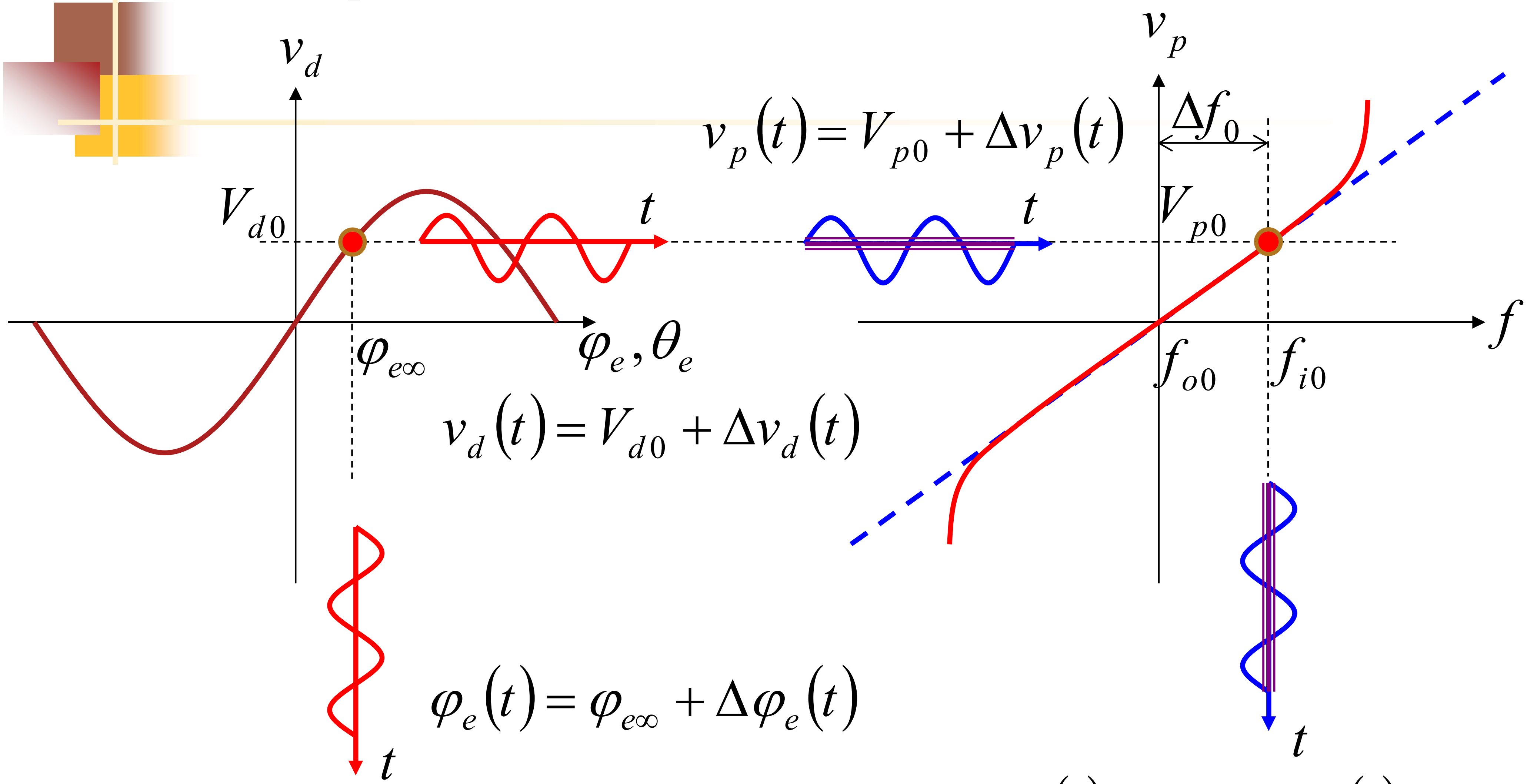
为了简化分析，假设（1）VCO线性范围足够宽，（2）误差相位变化足够小，从而交流小信号一直位于直流工作点附近的线性范围内

$$\omega_o(t) = \omega_{o0} + K_\omega v_p(t) = \omega_{o0} + K_\omega\left(V_{p0} + \Delta v_p(t)\right)$$

$$= \omega_{o0} + K_\omega V_{p0} + K_\omega \Delta v_p(t) = \omega_{i0} + \Delta\omega_o(t)$$

局部线性化

$$V_{p0} = A_{F0}V_{d0}$$



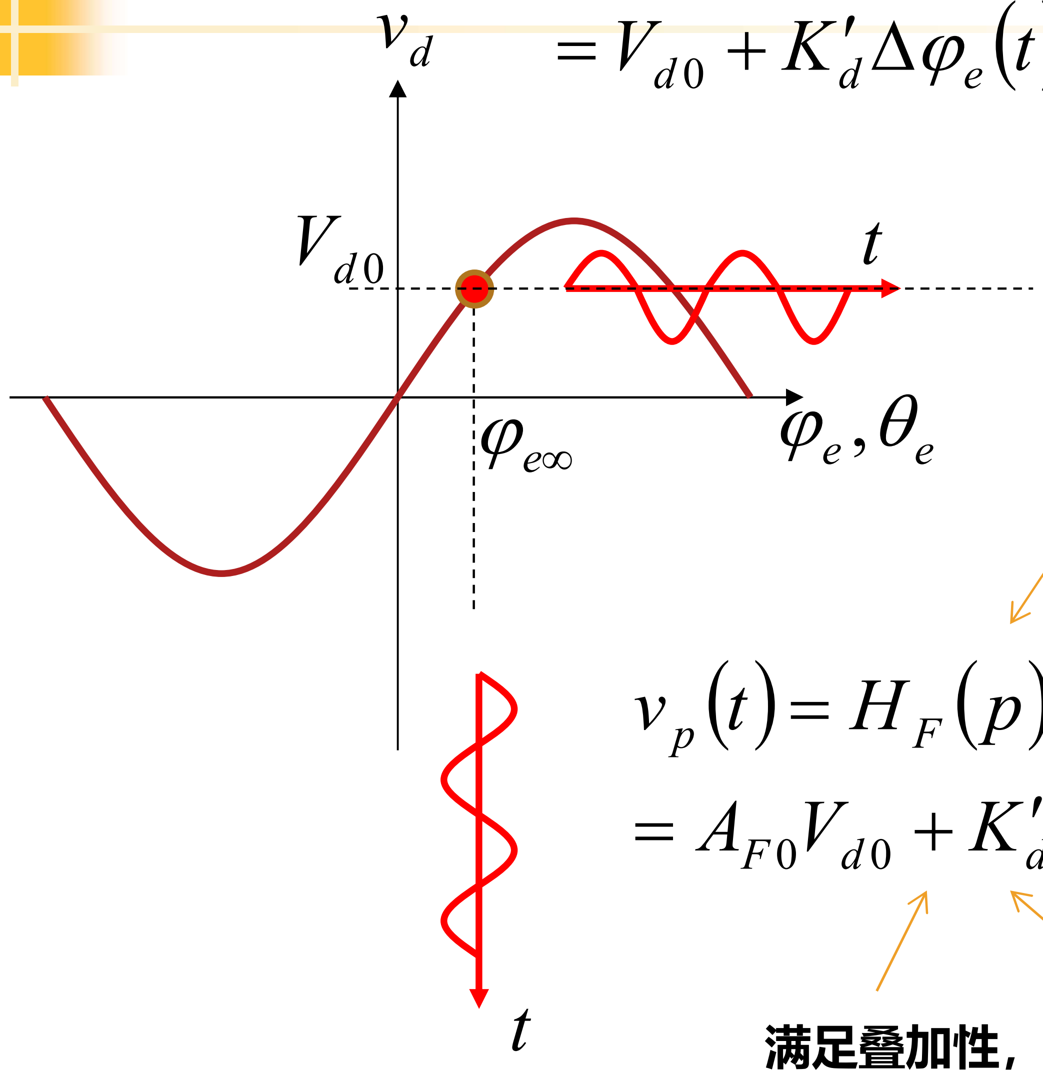
假设（1）VCO线性范围足够宽，（2）误差相位足够小。从而交流分析可用近似线性化

调频或调相导致的频率变化

正弦鉴相特性局部线性化

$$v_d(t)=K_d\sin\varphi_e(t)=K_d\sin\left(\varphi_{e\infty}+\Delta\varphi_e(t)\right)$$
$$=K_d\sin\varphi_{e\infty}\cos\Delta\varphi_e(t)+K_d\cos\varphi_{e\infty}\sin\Delta\varphi_e(t)$$
$$\approx K_d\sin\varphi_{e\infty}+\left(K_d\cos\varphi_{e\infty}\right)\Delta\varphi_e(t)$$
$$=V_{d0}+K_d'\Delta\varphi_e(t)$$

平衡点上进行局部线性化处理



滤波器：线性系统

$$v_p(t)=H_F(p)\bullet v_d(t)$$
$$=A_{F0}V_{d0}+K_d'H_F(p)\bullet\Delta\varphi_e(t)$$

满足叠加性，均匀性

环路受控交直流分析

$$\varphi_e(t)=\varphi_{e\infty}+\Delta\varphi_e(t)$$

非线性鉴相特性直流工作点的微分斜率

$$v_d(t)=V_{d0}+K'_d\Delta\varphi_e(t)\approx K_d\sin\varphi_{e\infty}+K_d\cos\varphi_{e\infty}\Delta\varphi_e(t)$$

$$v_p(t)=V_{p0}+\Delta v_p(t)=H_F(p)\bullet v_d(t)=A_{F0}V_{d0}+K'_dH_F(p)\bullet\Delta\varphi_e(t)$$

$$\Delta\omega_o(t)=K_\omega v_p(t)=K_\omega V_{p0}+K_\omega\Delta v_p(t)=(\omega_{i0}-\omega_{o0})+K_\omega K'_dH_F(p)\bullet\Delta\varphi_e(t)$$

$$\omega_o(t)=\omega_{o0}+\Delta\omega_o(t)=\omega_{i0}+K_\omega K'_dH_F(p)\bullet\Delta\varphi_e(t)$$

$$\varphi_o(t)=\omega_{i0}t+\theta_{i0}-\varphi_{e\infty}+K_\omega K'_d\frac{1}{p}\bullet H_F(p)\bullet\Delta\varphi_e(t)$$

$$\varphi_i(t)=\omega_{i0}t+\theta_{i0}+\Delta\varphi_i(t)$$

$$\varphi_e(t)=\varphi_i(t)-\varphi_o(t)$$

$$=\varphi_{e\infty}+\Delta\varphi_i(t)-K_\omega K'_d\frac{1}{p}\bullet H_F(p)\bullet\Delta\varphi_e(t)$$

$$\Delta\varphi_e(t)=\Delta\varphi_i(t)-K_\omega K'_d\frac{1}{p}\bullet H_F(p)\bullet\Delta\varphi_e(t)$$

微分线性模型

交流小信号线性方程

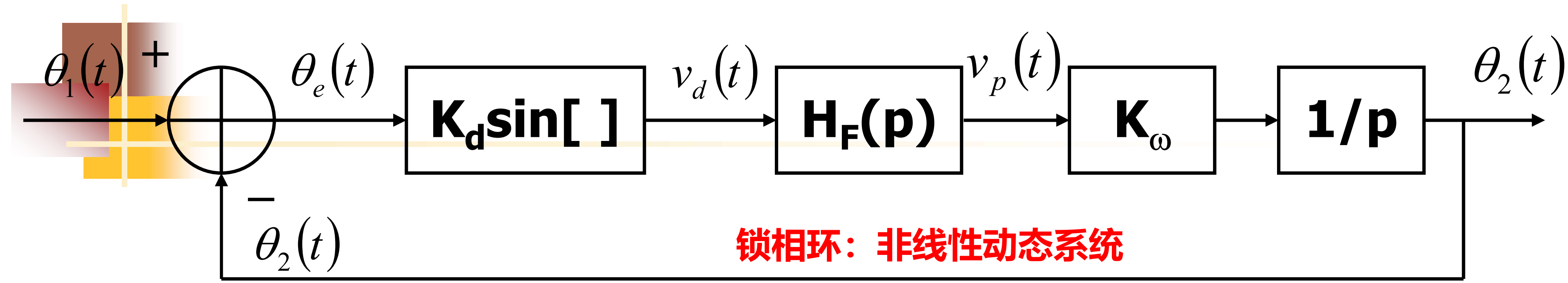
$$\Delta\varphi_e(t)=\Delta\varphi_i(t)-K_\omega K_d'\frac{1}{p}\bullet H_F(p)\bullet\Delta\varphi_e(t)$$

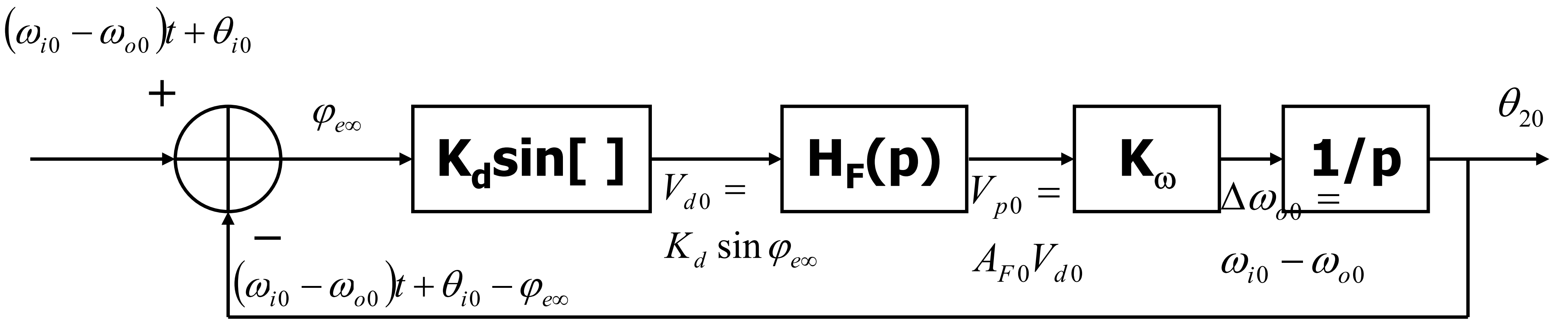
$$\Delta\varphi_e(s)=\Delta\varphi_i(s)-K_\omega K_d'\frac{1}{s}H_F(s)\Delta\varphi_e(s)$$

$$\Delta\varphi_e(s)\left(1+K_\omega K_d'\frac{1}{s}H_F(s)\right)=\Delta\varphi_i(s)$$

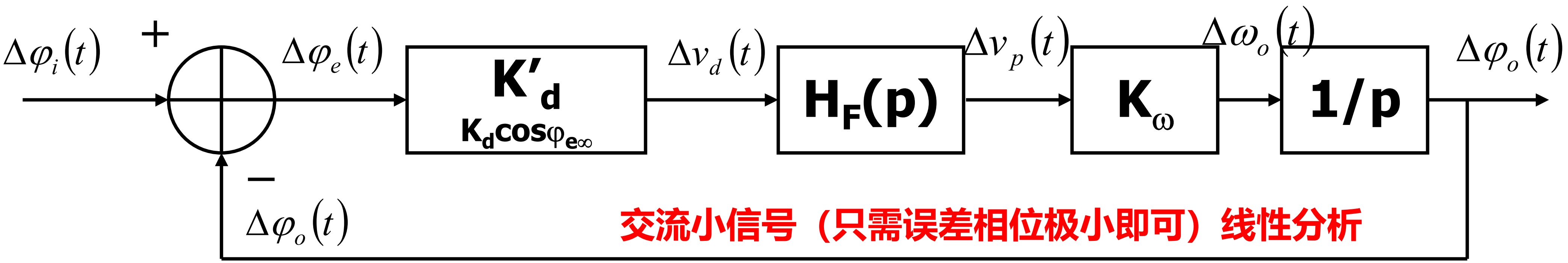
$$H_e(s)=\frac{\Delta\varphi_e(s)}{\Delta\varphi_i(s)}=\frac{1}{1+K_\omega K_d'\frac{1}{s}H_F(s)}=\frac{s}{s+K_\omega K_d' H_F(s)}$$

锁相环的数学模型

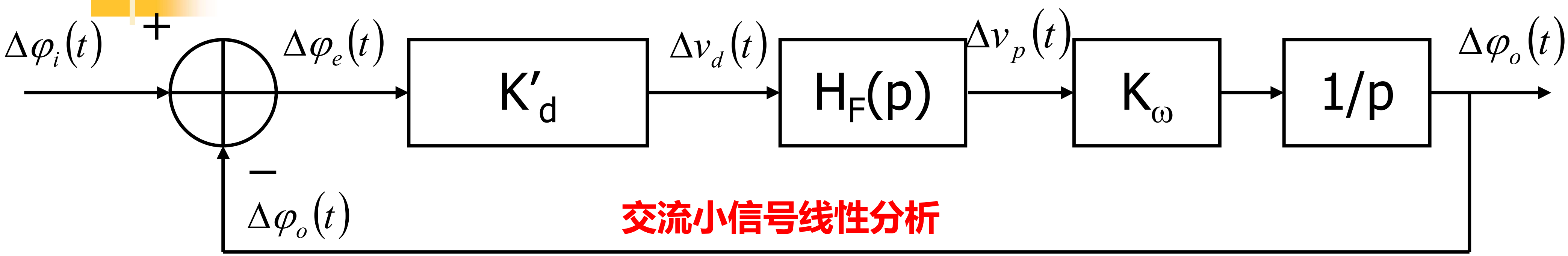




直流分析（平衡点分析）



交流小信号线性分析



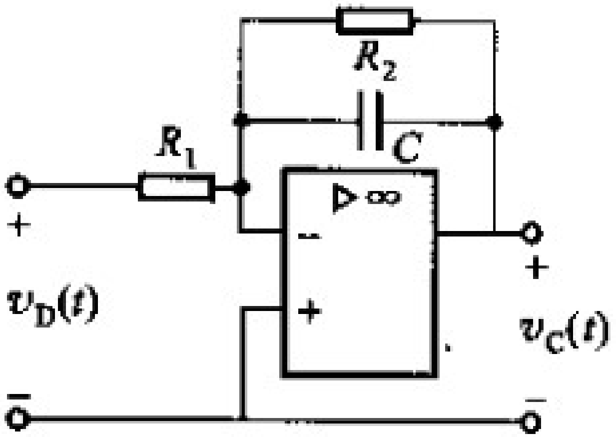
开环传递函数：$A_o(s)=\dfrac{\Delta\varphi_o(s)}{\Delta\varphi_e(s)}=\dfrac{K_pH_F(s)}{s}$ $\quad K_p=K'_dK_\omega$

闭环传递函数：$H(s)=\dfrac{\Delta\varphi_o(s)}{\Delta\varphi_i(s)}=\dfrac{A_o(s)}{1+A_o(s)\cdot 1}=\dfrac{K_pH_F(s)}{s+K_pH_F(s)}$ **低通滤波由此而来**

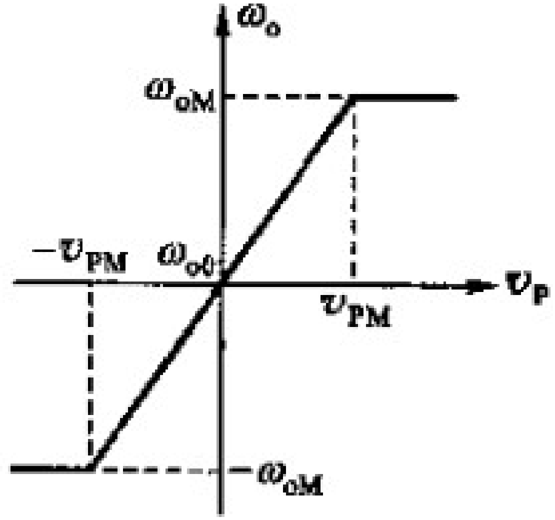
误差传递函数：$H_e(s)=\dfrac{\Delta\varphi_e(s)}{\Delta\varphi_i(s)}=\dfrac{\Delta\varphi_i(s)-\Delta\varphi_o(s)}{\Delta\varphi_i(s)}=1-H(s)=\dfrac{s}{s+K_pH_F(s)}$

作业

7－1　求题图 7.1 所示低通滤波器的复频域传递函数。



题图 7.1



题图 7.2

7－3　假定 PLL 已处于锁定状态，然后缓慢变化输入信号的频率，若压控振荡器控制特性如题图 7.2 所示。试说明输入信号频率变化到何值时，PLL 将失锁。