



深度解析 Hurst 模型的打开方式

金融工程研究

主要观点

理想与现实

诸多市场异象的发现使得人们对有效市场假说的质疑愈发深重，这些异象主要集中在：收益分布正态性、波动率与时间长度幂率关系、市场记忆性等方面。而分形市场理论则与之不同，它具备两个明显特征：长记忆性（长程相关性）和标度不变性。

分数布朗运动

Peters 在系统性提出分形市场理论的同时，还用分数布朗运动来描述金融市场的运行。所谓分数布朗运动实际是由标准布朗运动扩展而来，具有自相似性，其序贯极差亦服从 T^H 定律。同时，由分数布朗运动性质，不难发现使用 Hurst 模型的理论基础。

Hurst 模型的打开方式

金融市场中大多数时间序列的波动往往表现为非周期性循环，重标极差分析法从标度不变性角度出发，不仅能有效计算非周期性循环的平均循环长度（避免传统谱分析弊端），而且还能分析周期性循环的固定周期。

对于重标极差法下计算 Hurst 指数，为保证结果稳定性与准确性，将子区间长度 N 的上限确定为非周期性循环的平均循环长度极有必要，而平均循环长度的计算有赖于重标极差分析。

此外，由于分形市场理论并不以正态分布为前提，因此，传统的算术平均和标准差形式并不适用于 Hurst 指数的期望和标准差的计算公式。

Hurst 模型在指数择时上的应用

利用时变 Hurst 指数制作多空择时策略，对于上证综指，在 10 年半的时间内，Hurst 模型共发出 20 次信号（反转信号共 7 次），共获得累计 33.72 倍的收益，年化收益 39.80%，最大回撤-18.54%。而对于上证 50，在过去 4 年半的时间内，Hurst 模型共发出 13 次信号（其中反转信号共 3 次），累计收益达 78.37%，年化收益 13.72%，最大回撤-16.19%。对于沪深 300 指数，在过去 3 年半的时间内，Hurst 模型共发出 10 次信号（其中反转信号共 4 次），累计收益 191.15%，年化收益 35.71%，最大回撤为-18.06%。

最新观点

今年以来，基于周频数据的上证综指 Hurst 指数已先后两次进入反转区域（2017.3.17~2017.5.5、2017.6.16 至今），并分别于 2017.4.7、2017.7.21 发出由涨转跌的反转信号。

丁鲁明

dingluming@csc.com.cn

021-68821623

执业证书编号：S1440515020001

王赞杰

wangyunjie@csc.com.cn

021-68821600*822

执业证书编号：S1440516070001

发布日期：2017 年 8 月 2 日

相关研究报告

- 17.7.21 基于成分股动量反转效应的均线择时研究——以深次新股指数为例
- 17.7.11 基于 Black-Litterman 思想的多策略资产配置
- 17.5.10 量化事件看本轮消费板块行情还能走多远——以白酒、家电为案例的量化基本面分析
- 17.3.13 管窥市场：从残差波动率角度看涨跌



目录

主要观点	1
一) 理想与现实	3
1.1 市场异象	3
1.2 分形市场与有效市场	5
二) 分数布朗运动	6
三) Hurst 模型的打开方式	8
3.1 Hurst 指数计算步骤	8
3.2 关于 R/S 分析法	9
3.3 关于 Hurst 指数期望值与方差	12
四) Hurst 模型在指数择时上的应用	13
4.1、Hurst 模型在指数择时上的应用	13
4.2、Hurst 模型在指数择时上的业绩表现	14
4.2.1 Hurst 模型在上证综指择时上的业绩表现	14
4.2.2 Hurst 模型在其他指数择时上的业绩表现	15

图表目录

图 1: 过去十年来上证综指日收益分布图 (截至 2017-6-9)	3
图 2: 过去十年来上证综指周收益分布图 (截至 2017-6-9)	3
图 3: 上证综指对数波动率-对数时间示意图 (截至 2008-1-23)	4
图 4: 随机模拟后双对数示意图 (对数波动率-对数时间)	4
图 5: 沪深 300 指数日收益自相关系数 (最大滞后阶数: 20)	5
图 6: 沪深 300 指数日收益自相关系数 (最大滞后阶数: 100)	5
图 7: 应用谱分析方法拟合 PPI 同比数据	9
图 8: 应用谱分析方法拟合中证 500 指数	9
图 9: 上证综指收益序列 R/S 分析	10
图 10: $y=\sin(2\pi i/1000)$, $i=1, \dots, 10000$	11
图 11: $y=\sin(2\pi i/1000)$ 的 $\lg(R/S)-\lg N$ 图	11
图 12: 子区间长度上限 N 偏小对 Hurst 值影响	11
图 13: 子区间长度上限 N 偏小的影响	11
图 14: 子区间长度上限 N 偏大对 Hurst 值影响	12
图 15: 子区间长度上限 N 偏大的影响	12
图 16: $E[(R/S)_n]$ 与时间长度 n 的关系 (Peters, 1994)	13
图 17: Hurst 指数期望值 E(H) 随记忆长度 N 的变化	13
图 18: 上证综指收益序列 R/S 分析 (2006.12.29-2017.06.30)	14
图 19: Hurst 模型多空择时策略净值表现	15
图 20: Hurst 模型多空择时不同策略的净值表现	15



图 21: 上证 50 及相应 Hurst 指数表现 (截至 2017-06-30)	16
图 22: Hurst 模型在上证 50 上多空择时策略业绩表现	16
图 23: 沪深 300 及相应 Hurst 指数表现 (截至 2017-06-30)	17
图 24: Hurst 模型在沪深 300 上多空择时策略业绩表现	17
表 1: 过去十年以来国内股票市场收益率统计值 (截至 2017-6-9)	3
表 2: 有效市场假说与分形市场假说区别	6
表 3: Hurst 指数期望值 $E[(R/S)^n]$ 计算公式	12
表 4: Hurst 择时策略在上证综指上表现 (2006. 12. 29-2017. 06. 30)	15
表 5: Hurst 择时策略在上证 50 上表现 (2012. 12. 28-2017. 06. 30)	16
表 6: Hurst 择时策略在沪深 300 上表现 (2013. 12. 27-2017. 06. 30)	16

一）理想与现实

1.1 市场异象

有效市场假说是金融市场研究的一个重要概念，其核心思想是，任何时刻证券的价格都完全并正确反映了所有可获取的信息，它对应于一种理想的市场结构，即：收益率序列具有独立（或短期记忆性）、线性、有限方差等特征，并服从正态分布。然而，近年来，诸多市场异象的发现使得人们对有效市场理论的质疑声愈发深重。

1) 老调重弹的尖峰厚尾

考察过去十年来股票市场的统计特性，无论从日收益还是从周收益的角度看，其偏度和峰度两个统计量均显著异于正态情况下的值（正态分布下的偏度和峰度值分别为 0 和 3），且 J-B 统计量均大于 5% 临界值，说明其具有显著的尖峰厚尾特征。

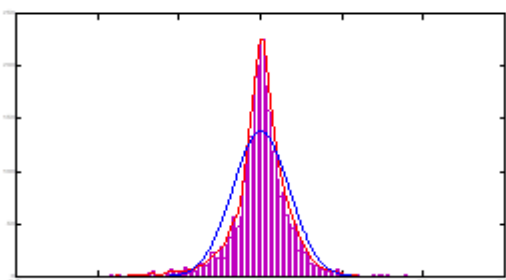
表 1：过去十年以来国内股票市场收益率统计值（截至 2017-6-9）

	均值	标准差	偏度	峰度	J-B 检验	J-B 检验临界值
上证综指日收益	-2.41×10^{-5}	0.0164	-0.6155	7.5238	2004.8	5.9657
深成指日收益	-6.50×10^{-5}	0.0188	-0.5818	5.9681	927.02	5.9657
上证综指周收益	-1.15×10^{-4}	0.0349	-0.5139	5.4629	136.80	5.8467
深成指周收益	-3.09×10^{-4}	0.0404	-0.5572	5.3164	126.92	5.8467

资料来源：Wind，中信建投证券研究发展部

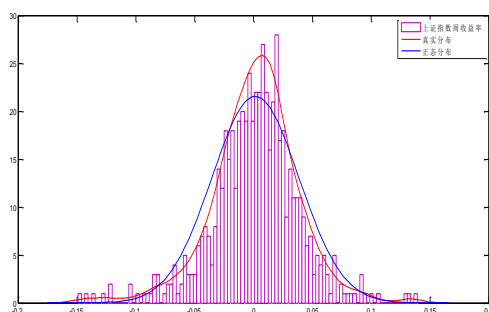
同时，尖峰厚尾现象在相关指数收益分布图上亦得到明显的印证：

图 1：过去十年来上证综指日收益分布图（截至 2017-6-9）



数据来源：wind、中信建投证券研究发展部

图 2：过去十年来上证综指周收益分布图（截至 2017-6-9）



数据来源：wind、中信建投证券研究发展部

究其原因，在于投资者不仅根据自身对股票价格和价值的判断来进行投资决策，同时，其决策也往往受股价波动趋势的影响：在一个连续的上涨（或下跌）趋势得到确认后，投资者会相信新一轮上涨（或下跌）行情的到来；因此，在市场的一轮上涨（或下跌）趋势得到确认后，往往紧跟着连续的上涨（或下跌），这便会导致收益分布在两个尾部要比正态分布“厚”。同时，由于投资者对于趋势的确定存在一个阈值效应（只有波动超过一定阈值，投资者才会作出相应反应），因此，在收益分布中，峰部和尾部占优更大的比重。

2) 神奇的 1/2 法则？致命的 1/2 法则？

在股市收益满足随机运动和正态分布的假设前提下，股市收益率序列的标准差是有限的，因此可用于测度股市收益的不确定性，且标准差具有如下标度关系：

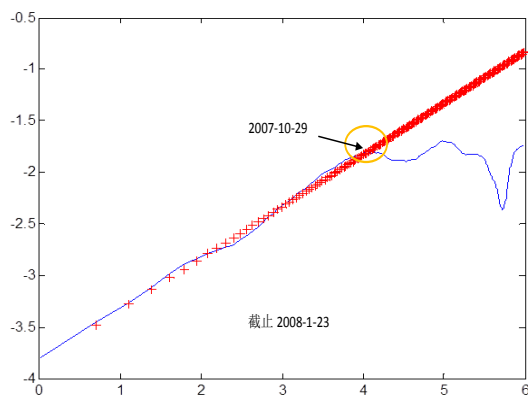
$$\sigma(T\tau) = T^{\frac{1}{2}}\sigma(\tau)$$

这就是著名的 1/2 法则，意味着标准差依时间的平方根而呈现规模变化，同时，这也指出了计算波动率的另一种方式，即：以日波动率乘以时间长度的平方根来计算一段时间内的累计波动率。如果对以上等式两边取对数，不难发现，在双对数图上， $(\log(\sigma(T\tau)), \log(T))$ 是斜率为 1/2 的直线。

$$\log(\sigma(T\tau)) = \frac{1}{2} \times \log(T) + \log(\sigma(\tau))$$

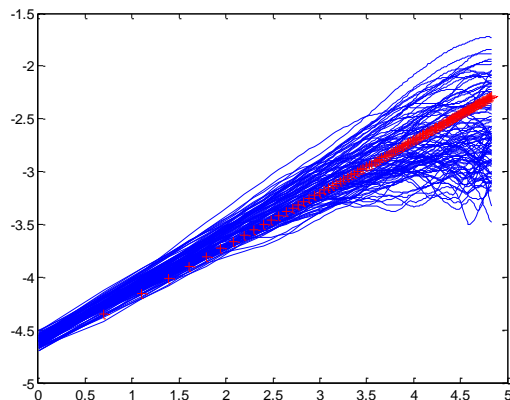
但事实是否果真如此？我们对国内股票市场（上证综指）进行测试，不难发现，短期内，上证综指实际波动率值与理论波动率值（即：通过 1/2 法则计算得到的波动率）较为接近（通常实际波动率值略高），但存在一个转折点 N，当时间长度大于 N 后，实际波动率与理论波动率间将开始出现较大偏差（实际波动率远低于理论波动率）。

图 3：上证综指对数波动率-对数时间示意图（截至 2008-1-23）



数据来源：wind、中信建投证券研究发展部

图 4：随机模拟后双对数示意图（对数波动率-对数时间）



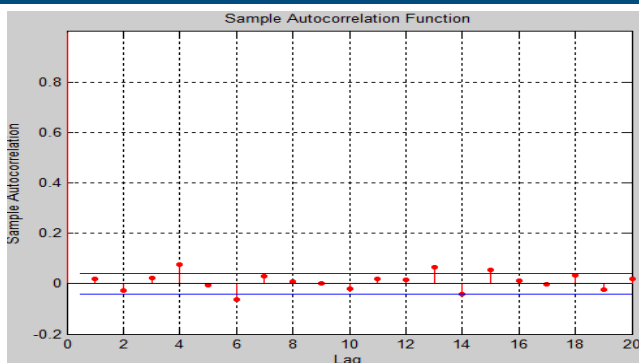
数据来源：wind、中信建投证券研究发展部

以图 3 为例，我们测试了截至 2008-1-23 不同时间长度的波动率。从波动率-时间的双对数图（ $\ln \sigma - \ln T$ 图）上不难发现，当时间长度大于 61 天后，理论波动率与时间波动率间出现较大偏差，而当时间长度小于 61 天时，实际波动率和理论波动率间值亦非严格相等（大多数情况下，波动率是以比时间的平方根略高的速率在增加）。而若我们使用相同的市场参数重新进行随机模拟，则不难发现，在平均的意义下，波动率和时间长度间能够较好地遵循 1/2 法则，即：1/2 法则能够很好地适用于随机运动，但却不适合股市。

3) 自相关性

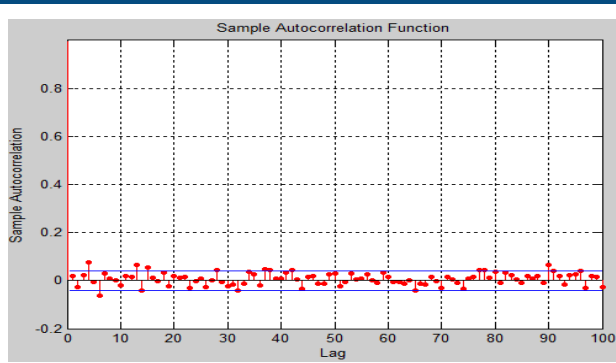
随机游走和有效市场假说假设证券收益的时间序列中不存在相关性，市场对过去是无记忆的。但越来越多的研究表明，金融市场收益序列的相关性始终存在，除了早已为人所熟知的马氏短记忆效应外，市场往往具有长程相关性（当我们将时间滞后期拉长后，我们往往可从 ACF 图得到相应的证据）。

图 5：沪深 300 指数日收益自相关系数（最大滞后期数：20）



数据来源：wind、中信建投证券研究发展部

图 6：沪深 300 指数日收益自相关系数（最大滞后期数：100）



数据来源：wind、中信建投证券研究发展部

究其原因在于，传统有效市场理论认为金融市场自相关函数是以指数幂率 n^{-k} （ k 为滞后期）的方式进行衰减，而实际上，市场自相关函数通常是以双曲幂率 $k^{-\gamma}$ （ k 为滞后期）的速度衰减，衰减速度远低于有效市场假设所认为的指数幂率方式，因此，从 ACF 图上看，虽然滞后期不断变大，但市场的自相关性远未达到可以被忽略不计的地步。

1.2 分形市场与有效市场

由于有效市场假说一直被看作是资本市场理论的主要基石，因此受到比任何一种经济理论都要广泛的实证检验。如前所述，大量经验数据对其正确性提出了质疑，这些与理论不同的检验主要集中在：对 EMH 正态性假定的检验、对易变性（即：波动率与时间长度幂率关系）的研究、市场记忆性等诸多方面。传统 EMH 的理论框架是基本线性的市场假设，并在实证分析过程中，主要通过运用标准布朗运动来衡量市场是否有效；但实际市场并不如有效市场理论假设得那么简练，而是经常表现为有偏的随机游走，而这恰恰是 EMH 分析所忽视的地方。

与有效市场理论相对应的是分形市场理论。上世纪六十年代，美国科学家 Mandelbrot 提出股票市场收益分布并不遵循正态分布，而是具有尖峰胖尾效应。上世纪九十年代，Peters 在此基础上，提出了分形市场假设，即金融市场本质上是一个复杂的非线性动态系统：

1) 资本市场由数目众多的投资者组成，而且每一个投资者具有不同的投资期限，这就决定了市场受不同投资行为和投资周期的影响；

2) 不同的市场信息对投资者产生不同的影响，短期投资者更注重历史信息，而长期投资者更关注基本信息；

3) 市场的稳定性主要取决于其流动性，只有当市场是由处于不同投资期限和不同投资水平的众多投资者组成时，流动性才能得以实现；

4) 市场价格不仅反映了市场中基于技术分析所作的短期交易，而且反映了基于基本分析对市场所作的长期估价；

5) 若市场与整体经济循环无关，则市场本身并无长期趋势可言，其波动主要由交易量、流动性和短期信息决定；若相关，则随着经济周期循环的确定，风险将逐步的降低。

表 2：有效市场假说与分形市场假说区别

	有效市场理论 (EMH)	分形市场理论 (FMH)
价格序列	标准 Brown 运动 $B(t)$ ($H=0.5$)	分数 Brown 运动 $B_H(t)$ ($0 < H < 1$)
协方差	$E[B(t) - B(s)]^2 = C_1 t - s $	$E[B(t) - B(s)]^2 = C_2 t - s ^{2H}$
自相关函数	$Y_k \sim C_3 n^{-k}$ ($0 < n < 1$) 负指数幂率衰减	$Y_k \sim C_4 k^{2H-2}$ 双曲幂率衰减
对应离散时间序列	白噪声序列	分数噪声序列
两者间关系	$H=1/2$ 时, $B_H(t)$ 退化为 $B(t)$	

资料来源：中信建投证券研究发展部

它具有诸多不同于 EMH 的特点，其中最明显的两个特征是：1) 长记忆性（长程相关性），即：过去的信息将对未来产生长期的影响，从自相关性角度看，表现为自相关函数衰减方式的不同（以负指数幂率还是双曲幂率方式衰减）；2) 标度不变性，即：不同时间标度下具有相似或相同的统计规律，从易变性角度看，表现 T^H 准则。

二）分数布朗运动

由于发现实际金融市场太复杂，无法通过理想的简单高斯马尔科夫模型进行建模，Edgar（1991）在提出分形市场概念的同时，还指出用分数布朗运动可以更准确地刻画金融市场的波动，Peters 在此基础上，系统性地提出分形市场假说，并用分数布朗运动来描述金融市场的运行。所谓分数布朗运动（Fractional Brownian Motion, FBM），实际是由标准布朗运动扩展而来：

一个随机过程 $B_H(t)$ 被称为分形布朗运动（FBM），若它满足以下定义：

$$B_H(t) - B_H(0) = \frac{1}{\Gamma(H + \frac{1}{2})} \int_{-\infty}^t K(t-s)^{H-\frac{1}{2}} dB(s)$$

其中， $0 < H < 1$ ， $B_H(0) = b_0 \in R$ ， $\Gamma(\cdot)$ 为伽马函数， $B(s)$ 为标准布朗运动，而 $K(t-s)$ 满足：



$$K(t-s) = \begin{cases} (t-s)^{H-1/2}, & 0 \leq s \leq t \\ (t-s)^{H-1/2} - (-s)^{H-1/2}, & s \leq 0 \end{cases}$$

实际上, 根据其定义, 不难发现, 分数布朗运动 $B_H(t)$ 实则是 $dB(t)$ 的加权平均, 其权函数即为记忆核函数 K 。同时, 当 $H=1/2$ 时, $B_H(t)$ 退化为标准布朗运动; 当 $H>1/2$ 时, 由于记忆核函数随幂率缓慢衰减, 此时 $B_H(t)$ 的运动因此而具有持久性或长期记忆性; 而当 $H<1/2$ 时, 情形恰恰相反, 导致 $B_H(t)$ 的运动具有反持续性。从这个意义上说, 分数布朗运动实际是标准布朗运动这一特殊情形的推广 (将 H 值从特殊值 $1/2$ 扩展到 $0<H<1$)。

此外, 对于指数为 H 的分形布朗运动 $X(t)$, 可定义其序贯极差:

$$R(t, T) = \sup_{t \leq s \leq t+T} [X(s) - X(t)] - \inf_{t \leq s \leq t+T} [X(s) - X(t)]$$

若 $X(t)$ 有限, 则其序贯极差通常可写作:

$$R(t, T) = \max_{t \leq s \leq t+T} [X(s) - X(t)] - \min_{t \leq s \leq t+T} [X(s) - X(t)]$$

由于分数布朗运动具有自相似性 (即满足: $f(\lambda t) = \lambda^H f(t)$), 则此时其序贯极差亦服从 T^H 定律, 即:

$$f(R(T, t)) = f(T^H R(1, t))$$

基于重标极差的 Hurst 指数计算方法的理论来源即基于此标度不变性理论。

不仅如此, 分数布朗运动的时间增量还具有如下性质:

1) 分数布朗运动的增量均值为 0, 即:

$$E[B_H(T) - B_H(0)] = 0$$

2) 分数布朗运动的增量方差与时间间隔呈幂率关系, 即:

$$\text{Var}[B_H(T) - B_H(0)] = E[B_H(T) - B_H(0)]^2 = T^{2H}$$

3) 分数布朗运动增量间的相关性满足:

$$C(T) = \frac{E\{[B_H(0) - B_H(-T)][B_H(T) - B_H(0)]\}}{E[B_H(T) - B_H(0)]^2} = 2^{2H-1} - 1$$

当 $H=1/2$ 时, $C(T)=0$, 即: 未来增量与过去增量不相关; 当 $H<1/2$ 时, $C(T)<0$, 未来增量与过去增量间负相关, 即: 过去价格增加 (或减少) 预示着未来价格的减少 (或增加), 未来市场大概率将出现反转; 当 $H>1/2$ 时, $C(T)>0$, 未来增量与过去增量间正相关, 即: 市场大概率将延续过去一段时间中的上涨 (或下跌) 趋势。而我们对 Hurst 模型应用的理论基础通常便来自于此。



三) Hurst 模型的打开方式

3.1 Hurst 指数计算步骤

Hurst 是一位英国的水文学家，二十世纪初他在尼罗河参与水坝工程（水库控制）工作——需要确定每年水库的放水量，避免因过多（或过少）放水导致水库水位降低到危险程度（或溢出）。构建模型时，一个自然的想法是假定不可控部分（雨水）流入量遵循随机游走，但由于尼罗河地区的生态系统具有较大的自由度（受诸多因素影响），随后 Hurst 发现其并不遵循随机游走，并由此提出重标极差法，用于描述分数布朗运动中的参数 H 。此后，Mandelbrot 和 Wallis 对 Hurst 理论（尤其是 R/S 分析方法）作了较为系统的研究，并给出严格的数学描述。上世纪九十年代，Peters 则将该方法引入资本市场领域，并取得了较为明显的效果。

对于 Hurst 指数的计算方法（重标极差法），其计算流程一般分为三步：

1、将长度为 N 的时间序列（通常为收益率序列）划分为长度为 n 的 A 个连续子区间 I_a ($a=1, \dots, A$)， I_a 中每一点记作 $R_{k,a}$ ；

2、针对不同的子区间长度 n ，计算 A 个子区间的平均重标极差： $(R/S)_n = \frac{1}{A} \sum_{k=1}^A (R/S)_k$ 。其中每个子区间上重标极差的计算步骤：

1) 对每个长度为 n 的子区间，在对相应时间序列作零均值化处理后，计算其累计离差： $X_{N,a} =$

$$\sum_{k=1}^N (R_{k,a} - \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N R_{k,a});$$

2) 定义单个子区间上的极差： $R_a = \max(X_{k,a}) - \min(X_{k,a}), k = 1, 2, \dots, n;$

3) 计算各子区间上的重标极差值（即：对子区间上极差重新标度）： $(R/S)_a = R_a/S_a$ ，其中，

$$S_i = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (R_{k,i} - \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N R_{k,a})^2}, i = 1, 2, \dots, A;$$

3、由于样本的平均重标极差值与样本长度之间存在标度关系，即：

$$(R/S)_n = c \times n^H$$

因此，对不同时间尺度（即：不同划分长度 n ）重复以上过程，并将所得的平均重标极差值 $(R/S)_n$ 对 n 进行双对数回归：

$$\log(R/S)_n = \log(C) + H \cdot \log(n)$$

可得到相应的 Hurst 指数。

3.2 关于 R/S 分析法

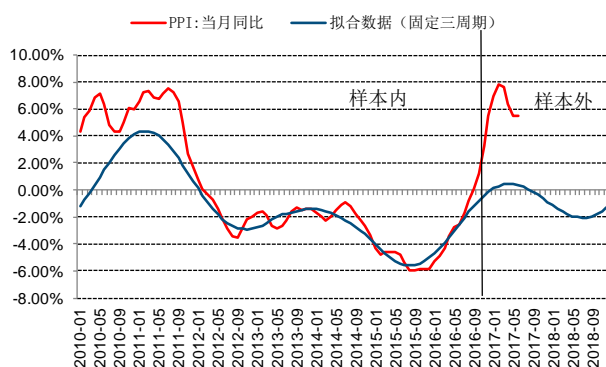
3.2.1 关于周期

所谓的周期性仅仅是我们强加于市场的一个幻相？还是真实存在于金融市场的时间序列（无论是价格指数还是经济数据）中？若周期性存在，周期长度是否固定且唯一？

在金融市场上，关于时间序列周期（或者说循环长度）的分析一直是个十分重要但却始终悬而未决的问题。在传统的有效市场假说中，金融市场价格波动通常被认为遵循随机游走；但后来大量实证研究（Debondt & Summers）表明，金融市场（尤其是股票市场）中大多数时间序列（包括：价格、经济数据等）的波动并不遵循随机游走原则，而是表现为一种均值回复的特性，即：金融市场中大多数时间序列（包括：价格、经济数据等）存在着不断起伏的循环过程。

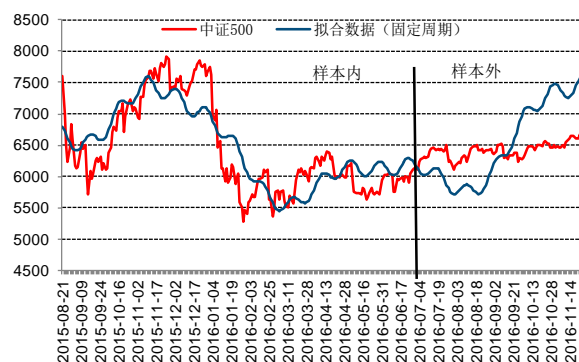
然而，不同于自然界中的日月交替、四季变化等具有固定周期的周期性循环，金融市场中大多数时间序列（包括：价格、经济数据等）波动（涨跌）往往表现为非周期性循环（即：并无精确固定的频率<或者说具有时变性>，而往往表现为一个平均的频率）。这一事实早已在各类涉及谱分析（或周期分析）理论的信号处理或计量经济学建模过程中得到印证：在使用各式各样谱分析方法（无论是经典谱估计方法，还是诸如参数型、非参数型的现代谱估计）来解构历史数据，并由此获得若干个固定周期后，通过应用具有相应周期的正弦函数可在样本内获得较好的拟合效果，平均拟合优度甚至可超过 70%，但样本外预测效果却往往差强人意。以 PPI 数据为例，我们可以很轻易地使用现代谱分析方法获取样本内历史 PPI 数据所包含的所谓周期，并通过引入正弦函数获得良好的样本内拟合效果，而一旦对该模型作外推，则预测误差成倍放大。

图 7：应用谱分析方法拟合 PPI 同比数据



数据来源：wind、中信建投证券研究发展部

图 8：应用谱分析方法拟合中证 500 指数



数据来源：wind、中信建投证券研究发展部

更为不幸的是，早期人们对金融市场价格波动循环的研究，却还主要集中在规则的周期性循环上：上世纪六十年代，Granger 等人即提出可以通过谱分析理论来研究部分周期性金融时间序列，并发现对于具有显著周期性的时间序列，其功率谱函数在基频及其谐频上的峰值所对应频率的倒数即为其周期。对于谱分析方法，除了其本身具有一定程度的缺陷（存在诸如：频谱泄露、谱线分裂、虚假峰值、分辨率低等一系列问题），它还预设了一个前提，即：假设了涉及经济、价格数据的各类时间序列均由诸多具备不同频率和振幅的正弦波合成。可遗憾的是，目前为止没有任何直观的理由使人相信，金融市场的循环与正弦波或其他周期循环有关，而大多数用于谱分析的时间序列亦不满足可傅里叶展开的前提假设。同时，当周期性时间序列的信噪比较低或时间序列

不存在固定周期时，谱分析方法也会变得无能为力。

有鉴于此，近年来，随着系统科学在金融市场中的广泛应用，大量研究发现，金融市场的价格波动实际存在着一种非周期性循环。自上世纪九十年代以来，越来越多的人（Lo, Peters, Cheung, Corazza 等）通过引入 R/S 分析法（Rescaled Range Analysis，重标极差法）来研究金融市场的非周期性循环特征。

3.2.2 R/S 分析法 (Rescaled Range Analysis)

针对金融市场上的波动聚集性问题，传统的 ARCH 族模型可以对之进行很好的描述。但是这类模型建立的基础是假定所研究的系统是随机且其分布满足正态性要求，当系统是介于随机性和确定性之间的非线性系统时，这些标准的统计方法就不再有效，此时便不得不诉诸于非参数统计方法。

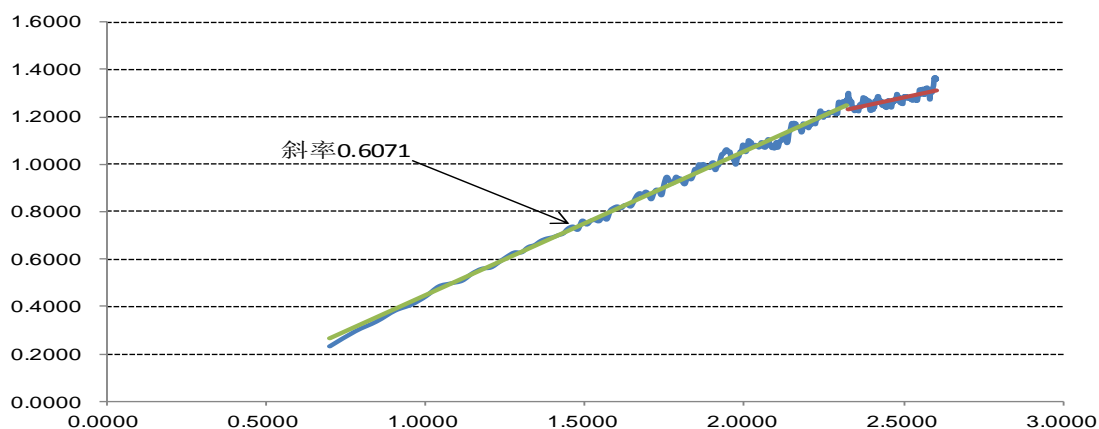
R/S 分析方法就是这样一种已得到广泛运用的非参数统计方法。R/S 分析法是由英国水文学家 Hurst 在上世纪五十年代考察尼罗河流量变化时发现，并被 Peters 将其推广至资本市场。其主要思想是分析重标度的累积均值离差的标度行为（对于一个在一维时间轴上游走的质点，其累积均值离差实际就是质点随时间偏离起始点的距离）。该方法的最大优点在于它不必假设所测度的时间序列的分布特征：无论是正态分布还是非正态分布，R/S 分析结果的稳健性均不受影响。

由分数布朗运动的性质和 Hurst 指数的计算过程，不难发现，R/S 分析法的实质是利用了重标极差值的标度不变性，通过回归得到其在双对数 ($\log(R/S)_N - \log N$) 图上的斜率，并以此作为 Hurst 指数值。所谓标度不变性：

$$f(\lambda t) = \lambda^H f(t)$$

对于具有循环（无论是周期性循环还是非周期性循环）特性的时间序列，当时间长度达到循环长度时，恰恰是标度不变性现象消失的开始。在 $\log(R/S)_N - \log N$ 图上，直观的表现时间为时间序列的循环长度（无论是周期性循环还是非周期性循环）等于偏离幂率轨迹的突变点所对应的时间长度。R/S 分析法可用于分析非周期性循环的平均循环长度的依据即在于此。

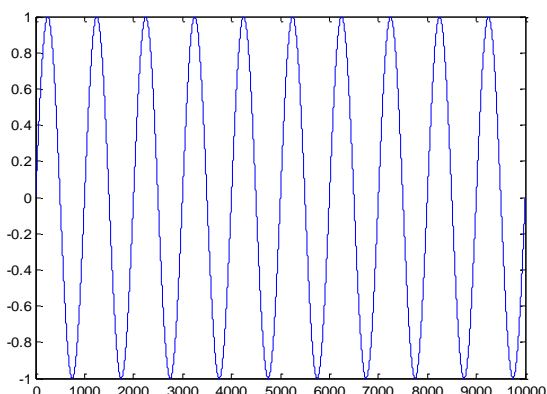
图 9：上证综指收益序列 R/S 分析



数据来源：wind 资讯，中信建投证券研究发展部

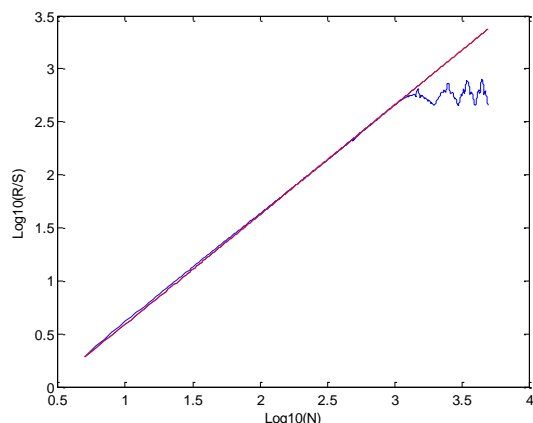
而实际上，R/S 分析法不仅在检测非周期性循环时具有显著的优越性，而且对于周期性时间序列，仍然能得到相应的周期长度。例如，由周期函数得到的离散时间序列 $y=\sin(2\pi i/1000)$ ，可根据 R/S 分析，得到其重标极差序列 $(R/S)_n$ ，由于该时间序列是由确定性周期函数出发所得（图像上表现为光滑曲线），其 Hurst 理论值应为 1，随着取样频率的增加，Hurst 指数逐渐趋于 1。同时，在 $\text{Log}(R/S)_N\text{-Log}N$ 图中，偏离幂率的突变点所对应的时间长度即是周期性循环的循环长度（或者说是该时间序列的周期）为 1000。

图 10: $y=\sin(2\pi i/1000)$, $i=1,\dots,10000$



数据来源: wind、中信建投证券研究发展部

图 11: $y=\sin(2\pi i/1000)$ 的 $\lg(R/S)\text{-}\lg N$ 图

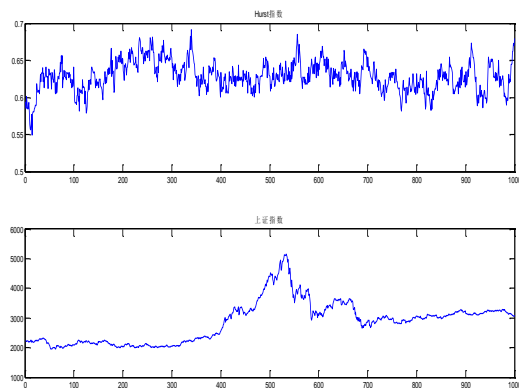


数据来源: wind、中信建投证券研究发展部

3.2.3 重标极差法下的 Hurst 指数计算

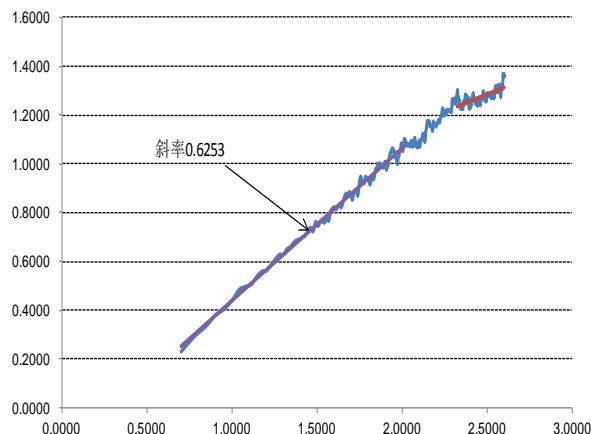
回顾 § 3.1 中的双对数回归公式，不难发现，Hurst 指数实际指的是当重标极差值与时间长度间呈幂率关系时在双对数图上所对应的斜率值，最终通过回归所得的 Hurst 指数值与回归所需的数据长度（即：子区间长度上限 N ）休戚相关：当 N 过小时，由于回归所需样本（时间标度）过少，导致回归所得斜率项极易受噪声扰动而出现频繁波动（如图 12 所示）；当 N 过大（超出非周期性循环的平均记忆长度，即包含幂率效应消失的时间点），将导致回归所得斜率项因无记忆数据的引入而产生较严重偏差（如图 14 所示）。

图 12: 子区间长度上限 N 偏小对 Hurst 值影响



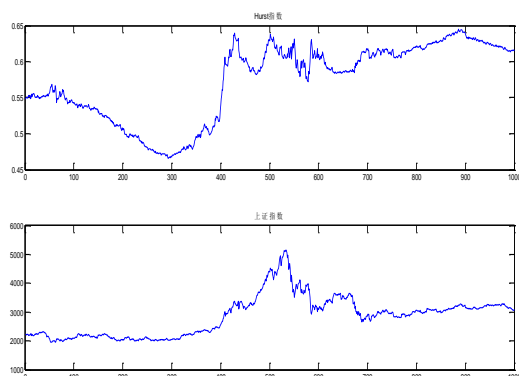
数据来源: wind、中信建投证券研究发展部

图 13: 子区间长度上限 N 偏小的影响



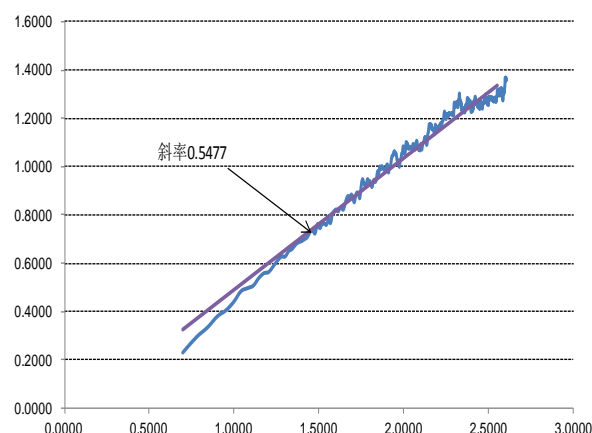
数据来源: wind、中信建投证券研究发展部

图 14：子区间长度上限 N 偏大对 Hurst 值影响



数据来源：wind、中信建投证券研究发展部

图 15：子区间长度上限 N 偏大的影响



数据来源：wind、中信建投证券研究发展部

因此，对于重标极差法下计算 Hurst 指数，为保证适当的样本数量（时间标度足够），将子区间长度 N 的上限确定为非周期性循环的平均循环长度，是极为必要的。

3.3 关于 Hurst 指数期望值与方差

由 § 3.1 中第三步，不难发现，所对应指数平均记忆长度的时变性和起始点选取的可变性决定了，通过双对数回归得到的 Hurst 指数值大小实际是受起点和终点影响。同时，为了鉴别具有显著分形效应的区域，我们引入 Hurst 指数期望值和方差的概念。

由于分形市场理论并不以正态分布为前提，因此，传统的算术平均和标准差形式并不适用于 Hurst 指数的期望和标准差的计算公式。为此，Peters 曾在上世纪九十年代得到过关于 Hurst 指数期望值和方差的经典表达式：

表 3：Hurst 指数期望值 $E[(R/S)_n]$ 计算公式

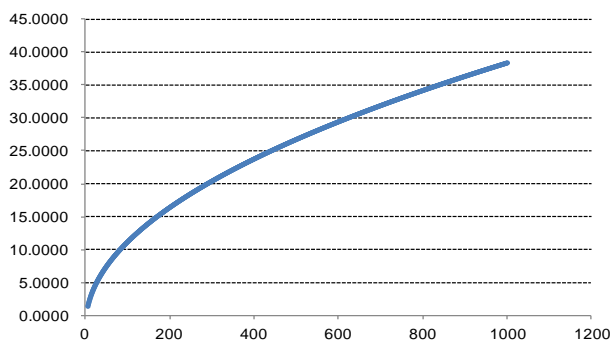
	$E[(R/S)_n]$ 计算公式	适用性
Feller (1951)	$E[(R/S)_n] = (n\pi/2)^{1/2}$	对较小 n 存在一致性偏差
Anis, Lloyd (1976)	$E[(R/S)_n] = \frac{\Gamma(\frac{n-1}{2})}{\sqrt{\pi} \times \Gamma(\frac{n}{2})} \times \sum_{k=1}^{n-1} \sqrt{(n-k)/k}$	对 n 较小或较大情形不适用
Sterling	$E[(R/S)_n] = \sqrt{n\pi/2} \times \sum_{k=1}^{n-1} \sqrt{(n-k)/k}$	适合于对 n 较大情形进行简化计算
Peters (1994)	$E[(R/S)_n] = \frac{n-1/2}{n} \times \frac{1}{\sqrt{n\pi/2}} \times \sum_{k=1}^{n-1} \sqrt{(n-k)/k}$	对所有 n 有效，接近 MC 模拟结果

资料来源：中信建投证券研究发展部

在计算随机游走序列 Hurst 指数的期望值时，必须采用与计算实际重标极差值时相同的 n 来计算对应的重标极差期望值，然后根据平均重标极差期望值对 n 进行双对数回归，得到关于 Hurst 指数的期望值 $E(H)$ 。

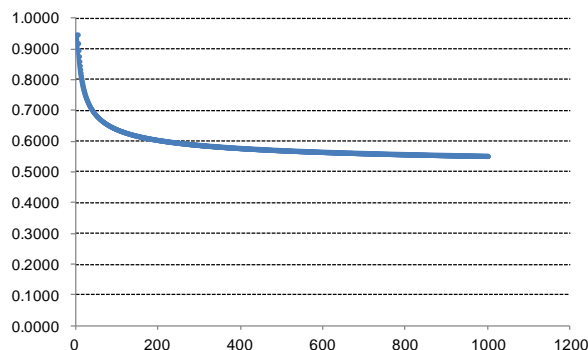


图 16: $E[(R/S)^n]$ 与时间长度 n 的关系 (Peters,1994)



数据来源: wind、中信建投证券研究发展部

图 17: Hurst 指数期望值 $E(H)$ 随记忆长度 N 的变化



数据来源: wind、中信建投证券研究发展部

同时, Peters 也给出了 Hurst 指数方差的计算公式:

$$\text{Var}(H)_n = 1/N$$

其中, N 为样本观测数目。

四) Hurst 模型在指数择时上的应用

一般情况下, 对于 Hurst 指数的学术研究总是假定它在所研究的时间序列段中是不变的, 显然, 一段时间内市场整体 Hurst 指数对投资决策的实时制定并无实际帮助。而实际上, 由于在时间序列的每一个时点, 都会存在一个与之对应的 Hurst 指数, 因此, 我们通过引入时变 Hurst 指数, 用于对相应指数进行择时判断。

4.1、Hurst 模型在指数择时上的应用

- (1) 数据选取: 我们以相应指数的历史周收益率数据为基础;
- (2) 模型构建: 依据相应指数的周收益数据, 计算时变 Hurst 指数 (计算流程见 § 3.1);
- (3) 多空择时策略开平仓信号:
 - 1) 反转开仓条件: 当时变 Hurst 指数值 $H < \text{LBound}$ 且 $|\text{Resid}| < \kappa\sigma$ 时, 反转信号出现;
 - 2) 趋势开仓条件: 当时变 Hurst 指数值 $H > \text{TBound}$ 时, 趋势信号出现;
 - 3) 反转平仓条件: 当时变 Hurst 指数值 $H > E(H)$ 时, 反转信号结束;

4) 趋势平仓条件 (以下三条件满足其中之一即可):

α) 时变 Hurst 指数值 $H < E(H)$;

β) 当市场为趋势下跌时, 时变 Hurst 指数值 $H > TBound$ 且 $Resid > \theta\sigma$;

γ) 当市场为趋势上涨时, 时变 Hurst 指数值 $H > TBound$ 且 $Resid < -\theta\sigma$;

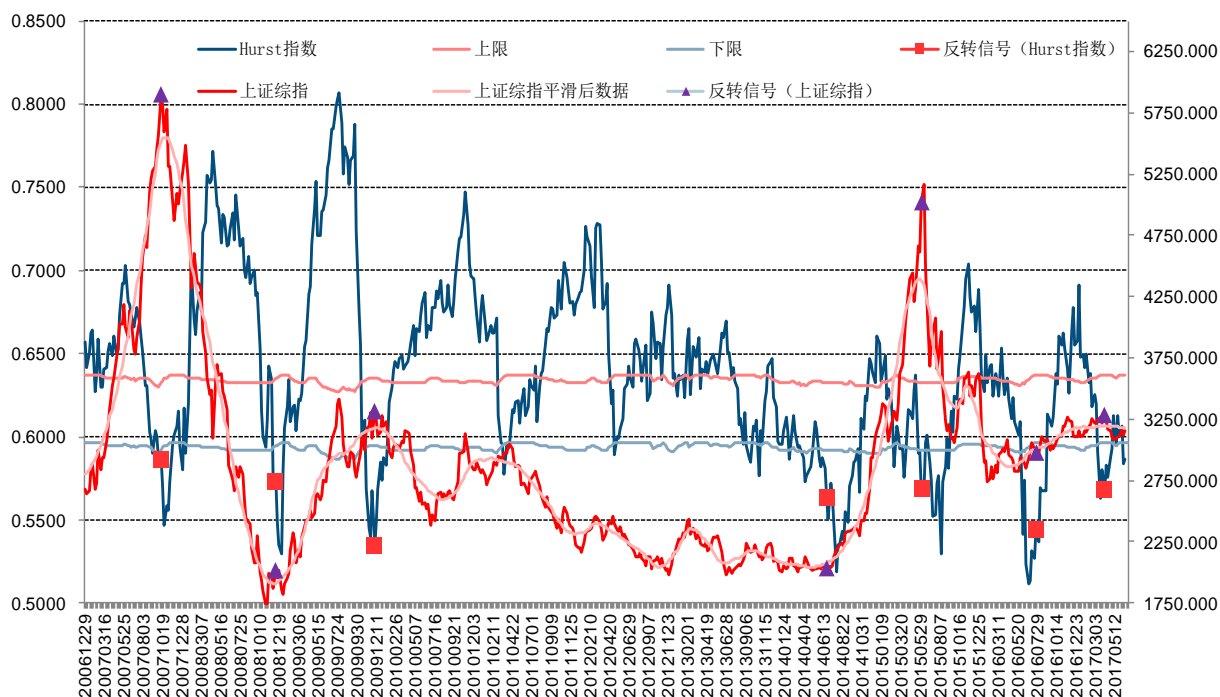
其中, $TBound = E(H) + \sigma(H) \times \delta_1$, $LBound = E(H) - \sigma(H) \times \delta_2$, $Resid$ 为相应指数周收益数据自回归模型的残差项。

4.2、Hurst 模型在指数择时上的业绩表现

4.2.1 Hurst 模型在上证综指择时上的业绩表现

对于上证综指, 我们以上证综指周收盘价数据为基础, 考察其自 2006 年 12 月 31 日至 2017 年 6 月 30 日间 Hurst 指数的表现, 并利用时变 Hurst 指数制作多空择时策略, 在 10 年半的时间内, Hurst 模型共发出 20 次信号, 其中有 7 次反转信号。平均每次信号的持续时间 16.1 周, 共获得累计 33.72 倍的收益, 年化收益 39.80%, 而该策略的最大回撤为-18.54%。

图 18: 上证综指收益序列 R/S 分析 (2006. 12. 29-2017. 06. 30)



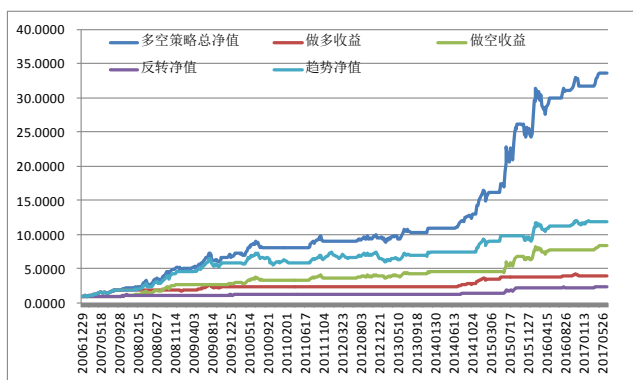
数据来源: wind 资讯, 中信建投证券研究发展部

表 4: Hurst 择时策略在上证综指上表现 (2006.12.29-2017.06.30)

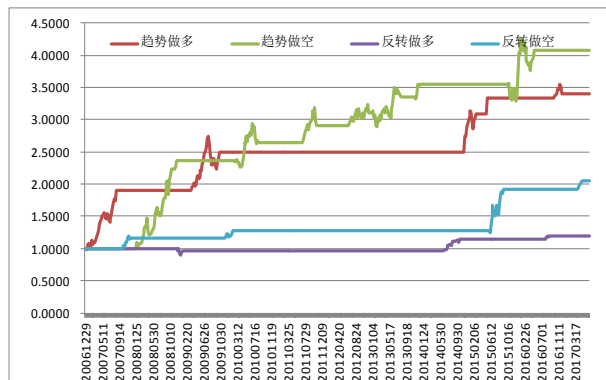
	累计净值	累计收益	年化收益	最大回撤	Sharp 率	交易次数	平均持续时间 (周)	平均每次盈利
多空策略	33.72	3272%	39.80%	-18.54%	1.73	20	16.1	163.60%
反转类	2.43	143%	8.82%	-12.46%	0.63	7	9.57	11.00%
趋势类	13.88	1288%	28.49%	-18.54%	1.37	13	19.62	183.94%
做多类	4.04	304%	14.22%	-18.54%	1.00	8	15.4	37.99%
做空类	8.35	735%	22.40%	-18.20%	1.10	12	17.17	61.23%
趋势做多	3.40	240%	12.35%	-18.54%	0.91	5	17.2	47.94%
趋势做空	4.08	308%	14.34%	-18.20%	0.78	8	21.13	38.56%
反转做多	1.19	19%	1.66%	-9.80%	-0.07	3	10	6.30%
反转做空	2.04	104%	7.04%	-9.78%	0.51	4	9.25	26.10%

资料来源: Wind, 中信建投证券研究发展部

细分之下, 不难发现, 该策略主要收益来源于趋势收益 (趋势收益累计达 1288%, 而反转收益仅 143%), 究其原因, 过去十年半时间内, 市场大级别反转出现次数有限, 而每次反转持续时间有限, 因此来自市场反转所获得的收益较为有限 (共出现 8 次反转信号, 累计收益 143%)。同时, 如果从多空收益角度看, 8 次做多累计收益达 304%, 而 12 次做空累计收益则达 735%, 原因在于国内股票市场普遍存在涨跌收益不平衡现象, 从数据上看周收益数据的偏度小于零, 而在分布上表现为明显的右偏结构。

图 19: Hurst 模型多空择时策略净值表现


数据来源: wind、中信建投证券研究发展部

图 20: Hurst 模型多空择时不同策略的净值表现


数据来源: wind、中信建投证券研究发展部

4.2.2 Hurst 模型在其他指数择时上的业绩表现

1) Hurst 模型在上证 50 指数择时上的应用

对于上证 50 指数, 我们以上证 50 周收盘价数据为基础, 考察其自 2012 年 12 月 28 日至 2017 年 6 月 30 日

间 Hurst 指数的表现, 并利用时变 Hurst 指数制作多空择时策略, 在 4 年半的时间内, Hurst 模型共发出 13 次信号(其中反转信号共 3 次), 平均每次信号的持续时间 12.15 周, 共获得 78.37% 的累计收益, 最大回撤为-16.19%。

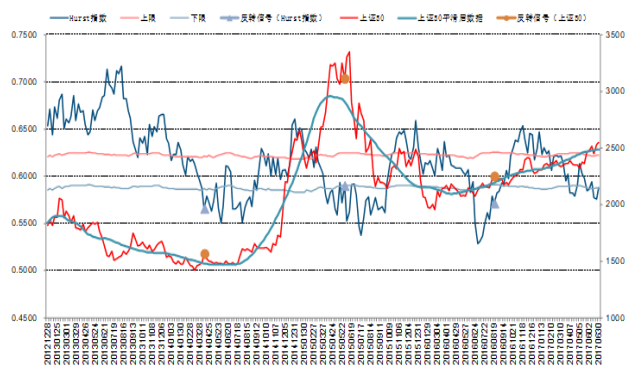
表 5: Hurst 择时策略在上证 50 上表现 (2012.12.28-2017.06.30)

	累计净值	累计收益	年化收益	最大回撤	Sharp 率	交易次数	平均持续时间 (周)	平均每次盈利
多空策略	1.78	78.37%	13.72%	-16.19%	0.56	13	12.15	6.03%
反转类	1.32	32.08%	6.38%	-12.25%	0.31	4	12.25	8.02%
趋势类	1.35	35.04%	6.90%	-16.19%	0.32	9	12.11	3.89%
做多类	1.15	15.40%	3.23%	-12.35%	0.14	7	8.71	2.20%
做空类	1.55	54.58%	10.16%	-16.46%	0.43	6	16.17	9.10%

资料来源: Wind, 中信建投证券研究发展部

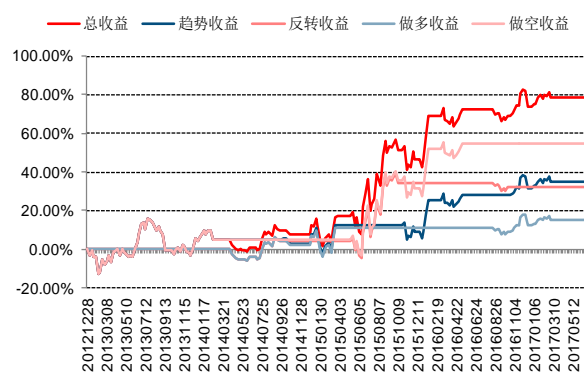
其中, 累计 35.04% 的收益来自趋势判断, 而 32.08% 的收益来自于反转判断。如果从多空收益角度看, 6 次做空累计收益则达 54.58%, 而 7 次做多累计收益 15.40%

图 21: 上证 50 及相应 Hurst 指数表现 (截至 2017-06-30)



数据来源: wind、中信建投证券研究发展部

图 22: Hurst 模型在上证 50 上多空择时策略业绩表现



数据来源: wind、中信建投证券研究发展部

2) Hurst 模型在沪深 300 指数择时上的应用

对于沪深 300 指数, 我们以沪深 300 周收盘价数据为基础, 考察其自 2013 年 12 月 27 日至 2017 年 6 月 30 日间 Hurst 指数的表现, 并利用时变 Hurst 指数制作多空择时策略, 在过去 3 年半的时间内, Hurst 模型共发出 10 次信号(其中反转信号共 4 次), 平均每次信号的持续时间 11.60 周, 共获得 191.15% 的累计收益, 年化收益 35.71%, 最大回撤为-18.06%。

表 6: Hurst 择时策略在沪深 300 上表现 (2013.12.27-2017.06.30)

	累计净值	累计收益	年化收益	最大回撤	Sharp 率	交易次数	平均持续时间 (周)	平均每次盈利
--	------	------	------	------	---------	------	---------------	--------

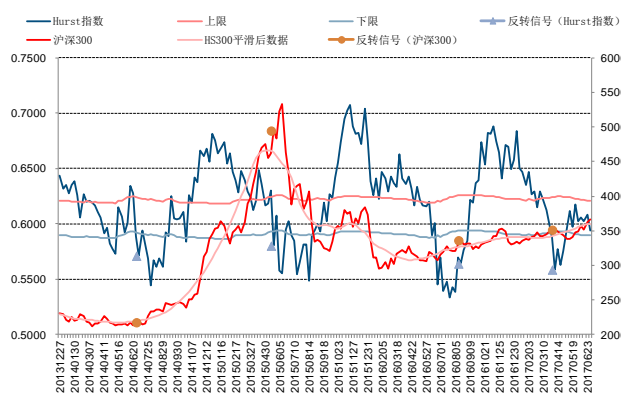


多空策略	2.91	191.15%	35.71%	-18.06%	1.48	10	12	19.12%
反转类	1.61	61.41%	14.66%	-7.27%	0.85	4	9	15.35%
趋势类	1.80	80.38%	18.36%	-18.06%	0.93	6	14	13.40%
做多类	1.98	98.40%	21.60%	-8.88%	1.52	4	12.75	24.60%
做空类	1.47	46.86%	11.60%	-18.05%	0.50	6	11.50	7.81%

资料来源: Wind, 中信建投证券研究发展部

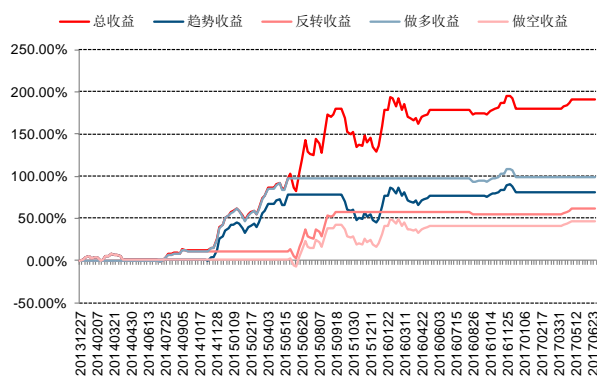
其中, 累计 80.38% 的收益来自趋势判断, 而 54.94% 的收益来自于反转判断。如果从多空收益角度看, 6 次做空累计收益则达 40.97%, 而 4 次做多累计收益达 98.40%。

图 23: 沪深 300 及相应 Hurst 指数表现 (截至 2017-06-30)



数据来源: wind、中信建投证券研究发展部

图 24: Hurst 模型在沪深 300 上多空择时策略业绩表现



数据来源: wind、中信建投证券研究发展部

分析师介绍

丁鲁明：同济大学金融数学硕士，中国准精算师，现任中信建投证券研究发展部金融工程方向负责人，首席分析师。9 年证券从业，历任海通证券研究所金融工程高级研究员、量化资产配置方向负责人；先后从事转债、选股、高频交易、行业配置、大类资产配置等领域的量化策略研究，对大类资产配置、资产择时领域研究深入，创立国内“量化基本面”投研体系。多次荣获团队荣誉：新财富最佳分析师 2009 第 4、2012 第 4、2013 第 1、2014 第 3 等；水晶球最佳分析师 2009 第 1、2013 第 1 等。

王赞杰：上海交通大学数学博士，5 年证券从业经历，2016 年加入中信建投金融工程团队，先后从事衍生品套利、基金产品、选股等方面研究。

研究服务

社保基金销售经理

彭砚苹 010-85130892 pengyanping@csc.com.cn

姜东亚 010-85156405 jiangdongya@csc.com.cn

机构销售负责人

赵海兰 010-85130909 zhaohailan@csc.com.cn

北京非公募组

张博 010-85130905 zhangbo@csc.com.cn

朱燕 010-85156403 zhuyan@csc.com.cn

李祉瑶 010-85130464 lizhiyao@csc.com.cn

李静 010-85130595 lijing@csc.com.cn

赵倩 010-85159313 zhaoqian@csc.com.cn

周瑞 18611606170 zhourui@csc.com.cn

刘凯 010-86451013 liukaizgs@csc.com.cn

北京公募组

黄玮 010-85130318 huangwei@csc.com.cn

黄杉 010-85156350 huangshan@csc.com.cn

任师蕙 010-85159274 renshihui@csc.com.cn

王健 010-65608249 wangjianyf@csc.com.cn

罗刚 15810539988 luogang@csc.com.cn

上海地区销售经理

陈诗泓 021-68821600 chenshihong@csc.com.cn

邓欣 021-68821600 dengxin@csc.com.cn

黄方禅 021-68821615 huangfangchan@csc.com.cn

戴悦放 021-68821617 daiyuefang@csc.com.cn

李岚 021-68821618 lilan@csc.com.cn

肖垚 021-68821631 xiaoyao@csc.com.cn

吉佳 021-68821600 jijia@csc.com.cn

朱丽 021-68821600 zhuli@csc.com.cn

杨晶 021-68821600 yangjingzgs@csc.com.cn

谈祺阳 021-68821600 tanqiyang@csc.com.cn

翁起帆 021-68821600 wengqifan@csc.com.cn

深广地区销售经理

胡倩 0755-23953859 huqian@csc.com.cn

张苗苗 020-38381071 zhangmiaomiao@csc.com.cn

许舒枫 0755-23953843 xushufeng@csc.com.cn

王留阳 0755-22663051 wangliuyang@csc.com.cn

廖成涛 0755-22663051 liaochengtao@csc.com.cn



评级说明

以上证指数或者深证综指的涨跌幅为基准。

买入：未来 6 个月内相对超出市场表现 15% 以上；

增持：未来 6 个月内相对超出市场表现 5—15%；

中性：未来 6 个月内相对市场表现在-5—5%之间；

减持：未来 6 个月内相对弱于市场表现 5—15%；

卖出：未来 6 个月内相对弱于市场表现 15% 以上。

重要声明

本报告仅供本公司的客户使用，本公司不会因接收人收到本报告而视其为客户。

本报告的信息均来源于本公司认为可信的公开资料，但本公司及研究人员对这些信息的准确性和完整性不作任何保证，也不保证本报告所包含的信息或建议在本报告发出后不会发生任何变更，且本报告中的资料、意见和预测均仅反映本报告发布时的资料、意见和预测，可能在随后会作出调整。我们已力求报告内容的客观、公正，但文中的观点、结论和建议仅供参考，不构成投资者在投资、法律、会计或税务等方面的最终操作建议。本公司不就报告中的内容对投资者作出的最终操作建议做任何担保，没有任何形式的分享证券投资收益或者分担证券投资损失的书面或口头承诺。投资者应自主作出投资决策并自行承担投资风险，据本报告做出的任何决策与本公司和本报告作者无关。

在法律允许的情况下，本公司及其关联机构可能会持有本报告中提到的公司所发行的证券并进行交易，也可能为这些公司提供或者争取提供投资银行、财务顾问或类似的金融服务。

本报告版权仅为本公司所有。未经本公司书面许可，任何机构和个人不得以任何形式翻版、复制和发布本报告。任何机构和个人如引用、刊发本报告，须同时注明出处为中信建投证券研究发展部，且不得对本报告进行任何有悖原意的引用、删节和/或修改。

本公司具备证券投资咨询业务资格，且本文作者为在中国证券业协会登记注册的证券分析师，以勤勉尽责的职业态度，独立、客观地出具本报告。本报告清晰地反映了作者的研究观点。本文作者不曾也将不会因本报告中的具体推荐意见或观点而直接或间接收到任何形式的补偿。

股市有风险，入市需谨慎。

地址

北京 中信建投证券研究发展部

中国 北京 100010

东城区朝内大街 2 号凯恒中心 B 座 12 层

电话：(8610) 8513-0588

传真：(8610) 6518-0322

上海 中信建投证券研究发展部

中国 上海 200120

浦东新区浦东南路 528 号上海证券大厦北塔 22 楼 2201 室

电话：(8621) 6882-1612

传真：(8621) 6882-1622