

# "Análisis de Vibraciones de Bifurcaciones de un sistema de Brazo Robot Industrial con articulaciones móviles"

## Proyecto.

### Modelado y simulacion.

Edward Fabian Goyeneche Velandia  
Presentado a  
Ph.D Gustavo Adolfo Osorio Londoño

Departamento de Ingeniería Eléctrica, Electrónica y Computación  
Universidad Nacional de Colombia - Sede Manizales  
3 de Marzo 2025  
2024-I

## 1. Resumen

Este trabajo aborda el análisis de los fenómenos de vibración no lineal en el sistema de brazo de un robot industrial. El modelo matemático presentado del robot tiene en cuenta la flexibilidad de las articulaciones, que da lugar a vibraciones de baja frecuencia en el . El estudio de los fenómenos de vibración se ha llevado a cabo utilizando métodos analíticos, numéricos y experimentales. Se ha prestado especial atención a los fenómenos de bifurcación. Se ha estudiado la influencia de dos parámetros de bifurcación en el comportamiento del brazo robótico. Se demostró que la amplitud y la frecuencia de la excitación armónica crean un efecto no lineal en las amplitudes de vibración de los eslabones. En las regiones de bifurcación, las amplitudes de vibración pueden incluso diferir varias veces dependiendo de la dirección de los cambios en el parámetro de bifurcación. En general, los resultados indican que, contrariamente a la práctica común, merece la pena prestar atención a los fenómenos no lineales al analizar las vibraciones de los robots

## 2. Introducción

Las bifurcaciones en sistemas mecánicos han sido ampliamente estudiadas en la dinámica no lineal, con énfasis en péndulos, sistemas aeroelásticos, placas y vigas. Sin embargo, su análisis en robots industriales ha sido limitado, a pesar de la relevancia de la conformidad de las articulaciones en su comportamiento dinámico.

Este trabajo busca llenar ese vacío mediante el estudio de las vibraciones de baja frecuencia en un robot industrial, específicamente en el brazo del IRB 1600. Se analizan modelos matemáticos considerando la elasticidad de las articulaciones, lo que introduce no linealidades en el sistema. Se comparan soluciones analíticas lineales con un análisis numérico completo, centrándose en la bifurcación de las soluciones bajo diferentes condiciones de forzamiento armónico.

La investigación contribuye al estudio de la influencia de los parámetros de bifurcación en las vibraciones del robot, con aplicaciones prácticas en la mejora de la precisión y estabilidad en procesos industriales. Este trabajo amplía investigaciones previas sobre resonancia en robots industriales, incorporando un análisis detallado de fenómenos no lineales.

### 3. Modelo Matemático del robot

El modelo matemático del robot, se plantea que se puedan describir las vibraciones de baja frecuencia. Estas vibraciones se deben a la flexibilidad de las articulaciones y consisten en las oscilaciones rotacionales de los eslabones con respecto a las articulaciones. Para tenerlas en cuenta, puede suponerse que cada coordenada de configuración del brazo  $q_i$  puede expresarse como la suma de dos valores angulares

$$q_i = \beta_i + \alpha_i \quad (1)$$

donde  $\beta_i$  es una variable que describe la posición del eslabón  $i$ -ésimo del manipulador, con respecto a la cual se producen las oscilaciones de este, expresadas por la variable  $\alpha_i$  (Figura 1). En el caso ideal, cuando no hay vibraciones,  $\beta_i$  es idéntica a la coordenada de configuración  $\beta_i$ . Si hay conformidad en las articulaciones, el ángulo  $\beta_i$  es un valor que cambia rápidamente en relación con los fenómenos de vibración. Por otro lado,  $\beta_i$  es un valor que cambia lentamente y cuyo cambio es consecuencia de la ejecución de la trayectoria de movimiento, o puede ser un valor constante si el eslabón se encuentra en una posición fija.

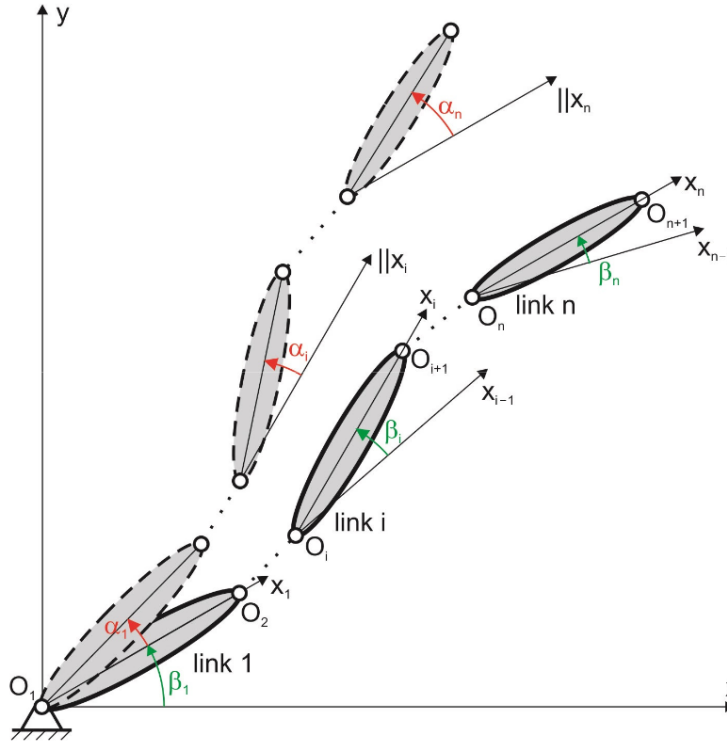


Figura 1: Coordenadas de configuración del brazo robótico n-link

Los movimientos vibratorios de los elementos descritos por las variables  $(\alpha_i)$  se consideraron en relación con las posiciones de los elementos descritos por las coordenadas  $\beta_i$ , que se trataron como constantes. En otras palabras, las vibraciones de la cadena cinemática en relación con la posición supuesta definida por las coordenadas  $(\beta_i)$  son el objeto del análisis. Este enfoque se justifica por el hecho de que, durante el movimiento, los cambios en  $\alpha_i$  son muchas veces más lentos que los cambios en  $\beta_i$ . Por lo tanto, basándose en la ecuación (1), las velocidades angulares de los elementos se expresan de la siguiente manera:

$$\dot{q}_i = \dot{\alpha}_i \quad (2)$$

La ecuación que describe las vibraciones del robot en la posición seleccionada del brazo, en el caso sin restricciones, puede escribirse de la siguiente forma:

$$M(\alpha, \beta) \ddot{\alpha} + C(\alpha, \dot{\alpha}, \beta) \dot{\alpha} + D \dot{\alpha} + K \alpha = u + \tau_{ext} \quad (3)$$

donde  $\alpha \in R^n$  un vector de coordenadas que representa las vibraciones de los eslabones del ,tal que  $\alpha = [\alpha_1 \dots \alpha_i \dots \alpha_n]^T$ ;  $\beta = const. \in R^n$  un vector de coordenadas representa la posición del brazo del robot, de forma que  $\beta = [\beta_1 \dots \beta_i \dots \beta_n]^T$ ;  $M(\alpha, \beta) \in R^{n \times n}$  una matriz de inercia;  $C(\alpha, \dot{\alpha}, \beta) \dot{\alpha} \in R^n$  un vector de fuerzas centrífugas y de Coriolis (momentos de fuerzas);  $D \in R^{n \times n}$  una matriz de amortiguamiento de las articulaciones;  $K \in R^{n \times n}$  una matriz de rigidez de las articulaciones;  $u \in R^n$  un vector de entrada de control;  $\tau_{ext} \in R^n$  un vector de excitación externa. La ecuación (3) es un sistema de ecuaciones diferenciales acopladas no lineales de segundo orden.

La ecuación (3) define la estructura general de las ecuaciones dinámicas que describen las vibraciones de los eslabones en relación con la configuración definida por el vector  $\beta$ . La ecuación de movimiento del brazo robótico en la forma para el robot seleccionado puede obtenerse utilizando diversos formalismos matemáticos. El resto de esta sección presenta un enfoque basado en el formalismo de Lagrange para un fragmento de un brazo robótico industrial con dos grados de libertad. Las derivaciones detalladas de las ecuaciones de movimiento se presentan , donde se presenta un modelo matemático sin tener en cuenta el amortiguamiento viscoso y un vector de excitación. Por esta razón, este artículo se limita a presentar la información más importante sobre el modelo matemático del brazo robótico con dos grados de libertad.

En la figura 2 se muestra el diagrama del manipulador. El modelo tiene en cuenta la conformidad de las articulaciones en los puntos  $A$  y  $b$ . La rigidez de las articulaciones en los puntos  $A$  y  $B$  está representada por los coeficientes  $k_1$  y  $k_2$ , respectivamente. Los coeficientes de amortiguamiento viscoso en las articulaciones son  $d_1$  y  $d_2$ . Las longitudes de los eslabones 1 y 2 son  $l_1$  y  $l_2$ , respectivamente. Las masas de los eslabones son  $m_1$  y  $m_2$ , respectivamente, el momento de inercia del eslabón 1 respecto al punto  $A$  es  $I_A^{(1)}$  y el momento de inercia del eslabón 2 respecto al punto  $S_2$  es  $I_{S_2}^{(2)}$ . Puntos  $S_1$  y  $S_2$  son los centros de masa de los eslabones, definidos con respecto a las articulaciones  $A$  y  $B$  por los valores  $I_{c1}$  y  $I_{c2}$ , respectivamente. Los momentos que hacen vibrar el brazo son  $u_1$  y  $u_2$ , y  $F_{ext}$  es un vector de fuerza externa.

Las ecuaciones de movimiento del manipulador se formularon utilizando el formalismo de Lagrange, basado en el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial \alpha_i} = Q_i \quad (4)$$

donde  $L = E - V$  es la función de Lagrange, que es la diferencia entre la energía cinética y potencial y  $Q_1$  es la fuerza generalizada.

La energía potencial del sistema es la suma de la energía potencial de las masas de los eslabones  $V_{g1}$  y  $V_{g2}$  y de la energía potencial de las articulaciones elásticas  $V_{k1}$  y  $V_{k2}$ :

$$V = V_{k1} + V_{k2} + V_{g1} + V_{g2}, \quad (5)$$

donde

$$V_{k1} = \frac{1}{2} k_1 (\alpha_1 + \alpha_{1st})^2, \quad (6)$$

$$V_{k2} = \frac{1}{2} k_2 (\alpha_2 + \alpha_{2st})^2, \quad (7)$$

$$V_{g1} = m_1 g l_{c1} \sin(\beta_1 + \alpha_1), \quad (8)$$

$$V_{g2} = m_2 g [l_1 \sin(\beta_1 + \alpha_1) + l_2 \sin(\beta_1 + \beta_2 + \alpha_1 + \alpha_2)], \quad (9)$$

donde  $\alpha_{1st}$  y  $\alpha_{2st}$  representan deformaciones estáticas de las articulaciones bajo la influencia de momentos resultantes de las fuerzas gravitatorias de las articulaciones. Se aplicaron expansiones del

tipo  $\text{sen}(a+b) = \text{sen } a \cos b + \cos a \text{sen } b$  a los senos de las sumas de los ángulos que aparecen en las ecuaciones (8) y (9). Manteniendo la hipótesis de que las coordenadas angulares  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  que describen las vibraciones tienen valores pequeños, se supuso que  $\text{sen}\alpha_1 = \alpha_1$ ,  $\cos\alpha_1 = 1$ ,  $\text{sen}(\alpha_1+\alpha_2) = \alpha_1+\alpha_2$  y  $\cos(\alpha_1+\alpha_2) = 1$ . A continuación, utilizando el criterio de Dirichlet, se determinaron las deformaciones estáticas de las articulaciones que se producen en la posición de equilibrio estático en condiciones en las que  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ . Teniendo en cuenta las deformaciones estáticas e ignorando  $\alpha_{1st}^2$  y  $\alpha_{2st}^2$  como valores pequeños de orden superior a  $\alpha_{1st}$  y  $\alpha_{2st}$ , la energía potencial se obtenida de la siguiente :

$$V = \frac{1}{2}k_1\alpha_1^2 + \frac{1}{2}k_2\alpha_2^2 + m_1gl_{c1} \text{sen}\beta_1 + m_2gl_1 \text{sen}\beta_1 + m_2gl_{c2} \text{sen}(\beta_1 + \beta_2). \quad (10)$$

0

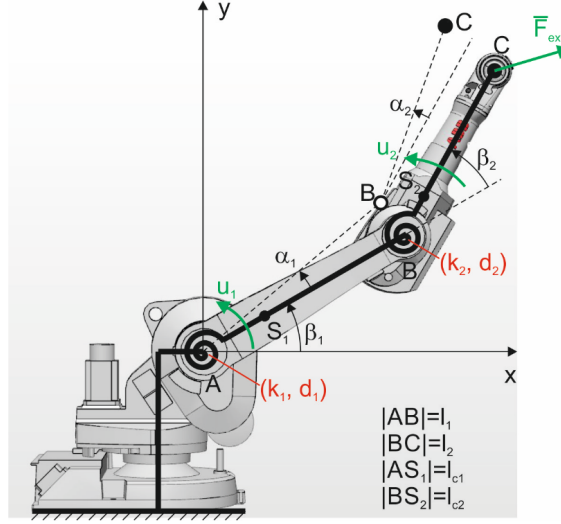


Figura 2: Manipulador planar de dos eslabones con articulaciones flexibles.

La energía cinética del sistema es la suma de la energía cinética del eslabón 1 en rotación y del eslabón 2 en movimiento plano

$$E = \frac{1}{2}I_A^{(1)}\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_{S2}^2 + \frac{1}{2}I_{S2}^{(2)}(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2, \quad (11)$$

donde  $v_{S2}$  es la velocidad del centro de masa del eslabón 2. Su valor se definió como  $v_{S2} = \sqrt{\dot{x}_{S2}^2 + \dot{y}_{S2}^2}$  donde las componentes de la velocidad son derivadas de las coordenadas del punto  $S2$  en el sistema de coordenadas  $xy$ , dado por el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} X_{S2} = l_1\cos(q_1) + l_{c2}\cos(q_1 + q_2) \\ Y_{S2} = l_1\sin(q_1) + l_{c2}\sin(q_1 + q_2) \end{cases} \quad (12)$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones (1) y (2) en la ecuación cinemática (12), se obtuvo una ecuación que determina la energía cinética del sistema de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} E = \frac{1}{2} \left[ I_A^{(1)} + m_2l_1^2 + m_2l_{c2}^2 + m_2l_1l_{c2} \cos(\beta_1 + \alpha_2) \right] \dot{\alpha}_1^2 \\ + \left[ m_2l_{c2}^2 + m_2l_1l_{c2} \cos(\beta_2 + \alpha_2) + I_{S2}^{(2)} \right] \dot{\alpha}_1\dot{\alpha}_2 \\ + \frac{1}{2} \left( m_2l_{c2}^2 + I_{S2}^{(2)} \right) \dot{\alpha}_2^2. \end{aligned} \quad (13)$$

las fuerzas generalizadas se determinaron utilizando el principio del trabajo virtual. El trabajo virtual de las fuerzas no potenciales  $dW$  es igual al trabajo virtual de la fuerza generalizada  $Q_id\alpha_i$ , por lo que.

$$dW = F_id\alpha_i - \frac{\partial R}{\partial \dot{\alpha}_i} = Q_id\alpha_i. \quad (14)$$

donde  $F_i$  fuerzas externas para el eslabón  $i$ ;  $R$  -función de disipación de energía;  $i = 1, 2$ . La función de disipación de energía se da de la siguiente forma:

$$R = \frac{1}{2}d_1\dot{\alpha}_1^2 + \frac{1}{2}d_2\dot{\alpha}_2^2. \quad (15)$$

la fuerza externa es la siguiente:

$$F_i = u_i + \tau_{ext}i. \quad (16)$$

donde  $u_{(i)}$  entrada de control para el eslabón  $i$ ;  $_{ext}$  (i)-el par de cualquier fuerza que actúe sobre el efector final del . Teniendo en cuenta las ecuaciones (14)-(16), la fuerza generalizada  $Q_i$  se escribe de la siguiente manera

$$Q_1 = u_1 + \tau_{ext}i - d_i\dot{\alpha}_i^2. \quad (17)$$

utilizando la Ecuación (4), las ecuaciones de movimiento del sistema se obtuvieron en la forma general de la Ecuación (3), donde los vectores y matrices tienen la siguiente forma:

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}, \quad (18)$$

$$M(\alpha, \beta) = \begin{bmatrix} a_1 + 2a_2\cos(\beta_2 + \alpha_2) & a_3 + a_2\cos(\beta_2 + \alpha_2) \\ a - 2 + a_2\cos(\beta_2 + \alpha_2) & a_3 \end{bmatrix}, \quad (19)$$

$$C(\alpha, \dot{\alpha}) = \begin{bmatrix} -a_2\sin(\beta_2\alpha_2)\dot{\alpha}_2 & -a_2\sin(\beta_2 + \alpha_2)(\dot{\alpha}_1 + \dot{\alpha}_2) \\ a_2\sin(\beta_2 + \alpha_2)\dot{\alpha}_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (20)$$

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix}, \quad (21)$$

$$K = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}, \quad (22)$$

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \quad (23)$$

$$\tau_{ext} = \begin{bmatrix} \tau_{ext} 1 \\ \tau_{ext} 2 \end{bmatrix} = J_a^T(\alpha, \beta)F_{ext}. \quad (24)$$

los parámetros  $a_i$  resultan de los siguientes coeficientes:

$$\begin{cases} a_1 = I_A^{(1)} + l_{S2}^{(2)} + m_2l_{c2}^{(2)} \\ a_2 = m_2l_1l_{c2} \\ a_3 = I_{S2}^{(2)} + m_2l_{c2}^{(2)} \end{cases} \quad (25)$$

los valores de los parámetros del modelo se indican en la Tabla 1. El método para determinarlos se describe en el artículo [30]. La ecuación (24) tiene en cuenta la relación entre el vector de fuerzas

externas  $F_{ext}$  aplicadas al efector final del robot y el momento de estas fuerzas  $_{ext}$  que actúan sobre los eslabones del mediante la Jacobiana analítica  $J_a(\alpha, \beta)$ . Dado que la relación cinemática entre las coordenadas del efector final del robot (punto C) y las coordenadas angulares viene dada por el sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} X_C = l_1 \cos(\beta_1 + \alpha_1) + l_2 \cos(\beta_1 + \beta_2 + \alpha_2 + \alpha_2) \\ X_C = l_1 \sin(\beta_1 + \alpha_1) + l_2 \sin(\beta_1 + \beta_2 + \alpha_2 + \alpha_2) \end{cases}, \quad (26)$$

el Jacobiano analítico tiene la siguiente forma:

$$J_a(\alpha, \beta) = \begin{bmatrix} -l_1 \sin(\beta_1 + \alpha_1) - l_2 \sin(\beta_1 + \beta_2 + \alpha_1 + \alpha_2) & -l_2 \sin(\beta_1 + \beta_2 + \alpha_1 + \alpha_2) \\ l_1 \cos(\beta_1 + \alpha_1) + l_2 \cos(\beta_1 + \beta_2 + \alpha_1 + \alpha_2) & l_2 \cos(\beta_1 + \beta_2 + \alpha_1 + \alpha_2) \end{bmatrix} \quad (27)$$

Coeeficientes	Unidad	Valot
$I_A^{(1)}$	$kg \cdot m^2$	0.55
$I_{S_2}^{(2)}$	$kg \cdot m^2$	0.0009
$l^2$	$m$	0.63
$l^2$	$m$	0.1
$k^1$	$N \cdot m/rad$	555.000
$k^2$	$N \cdot m/rad$	128.000
$d^1$	$N \cdot m \cdot s/rad$	0.9
$d^2$	$N \cdot m \cdot s/rad$	0.9

Cuadro 1: Valores de los coeficientes utilizados en el modelo del robot

## 4. Vibraciones naturales de un sistema lineal

Realizando el análisis sobre las vibraciones presentan curvas de resonancia que reflejan cómo las frecuencias de resonancia varían según la posición del brazo robótico. Estas curvas se obtienen a partir de pruebas modales en las que la vibración se genera mediante un impacto con un martillo. En estos experimentos, el robot, en una posición específica, se considera como un sistema lineal, lo que implica que no se abordan fenómenos de bifurcación.

Para comparar los modelos no lineales con estos análisis fundamentales, inicialmente se plantea el uso de las ecuaciones simplificadas del movimiento del robot. Con el fin de determinar las frecuencias naturales del brazo en configuraciones específicas, se descartaron los efectos de elementos no lineales, la amortiguación y la excitación externa. Como resultado de estas simplificaciones, es la siguiente expresión:

$$M(\alpha, \beta)\ddot{\alpha} + K\alpha = 0 \quad (28)$$

Siguiendo el planteamiento indicado las frecuencias naturales del brazo pueden obtenerse resolviendo la siguiente ecuación:

$$\det(-\omega_0^2 M_0 + K) = 0 \quad (29)$$

donde  $\omega_0$  representa la frecuencia natural; y  $M_0 = M(\alpha = 0, \beta)$  es la matriz de inercia evaluada despreciando la influencia de los ángulos  $\alpha_i$ , la cual permanece constante para una determinada configuración del brazo, definida por el vector de coordenadas  $\beta$ . Considerando la estructura de las matrices de inercia y rigidez establecidas en las ecuaciones (19) y (22), se obtuvieron las dos frecuencias naturales del brazo robótico,  $\omega_{01}$  y  $\omega_{02}$ :

$$\omega_{01,2} = \sqrt{\frac{a_1 k_2 + 2a_2 k_2 \cos \beta_2 + a_3 k_1 \mp \sqrt{(a_1 k_2 + 2a_2 k_2 \cos \beta_2 + a_3 k_1)^2 - 4(a_1 a_3 - a_2^2 \cos^2 \beta_2)k_1 k_2}}{2(a_1 a_3 - a_2^2 \cos^2 \beta_2)}} \quad (30)$$

A partir de la ecuación obtenido, se puede deducir que las frecuencias naturales dependen de la posición relativa del segundo eslabón respecto al primero, lo cual se expresa mediante el ángulo  $\beta_2$ . En la figura vemos cómo varían las frecuencias naturales en función de  $\beta_2$ . Además, para poder expresar las frecuencias se aplica la transformación  $f_{01,2} = \omega_{01,2}/(2\pi)$ .

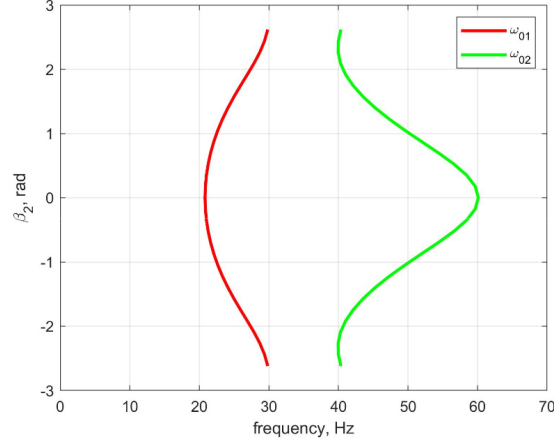


Figura 3: Variación de las frecuencias naturales del robot con respecto al ángulo  $\beta_2$ .

Realizados la simulaciones, muestra que las frecuencias naturales de vibración del brazo robótico dependen significativamente de su posición, presentando un comportamiento simétrico en torno a la configuración de brazo recto ( $\beta_2 = 0$ ). finalmente las simulaciones realizadas muestran una que los valores que se tiene en la tabla tiene concordancia, lo que sugiere que el modelo o las ecuaciones matemáticas empleadas son adecuadas para poder analizar la vibraciones en los robots.

## 5. Análisis de Bifurcación en Vibraciones Forzadas y estabilidad

El análisis muestra que los resultados de la simulación de la influencia de la frecuencia de forzamiento como parámetro de bifurcación en las características de vibración. los calculo y simulaciones se basaron en incluir el análisis mediante lorenz para poder encontrar las dinámicas del brazo , evolución ,estabilidades del sistema de bifurcaciones y encontrar las relaciones que existen para encontrar un equilibrio que no afecte al sistema y realizando un modelo matemático basado en la Ecuación (3), junto con las ecuaciones (18)-(25) y (27), empleando los parámetros del cuadro 1. El vector de forzamiento adoptado fue:

$$u = [u_{e1} \sin(\pi f_{e1} t) \ 0] \quad (31)$$

donde  $u_{e1}$  representa la amplitud de forzamiento para el eslabón 1 y  $f_{e1}$  su frecuencia. Las pruebas evaluaron vibraciones forzadas en un rango de frecuencias  $f_{e1} \in \langle 0, 80 \rangle$  Hz, tanto en barrido ascendente como descendente. Se fijó el vector de fuerzas externas en  $F_{ext} = 0$ .

El estudio consideró diversas configuraciones del brazo, definidas por el ángulo  $\beta_2 \in \langle 0, 80 \rangle$  grados. en laslas curvas de amplitud-frecuencia del eslabón 1 para posiciones seleccionadas. Se observa que, a medida que aumenta  $|\beta_2|$ , las zonas de resonancia se acercan, y la dirección del barrido influye en la amplitud de vibración, generando pendientes en las regiones de resonancia. Para ángulos pequeños de  $\beta_2$ , la curva de resonancia en la primera frecuencia natural es rígida (Figura 4b), mientras que para valores mayores se vuelve mixta. En la segunda frecuencia natural , las curvas son inicialmente blandas, pero para  $\beta_2$  grandes se tornan rígidas y se desplazan a frecuencias menores.

Las características obtenidas para valores negativos de  $\beta_2$  son equivalentes a las de valores positivos, por lo que no se incluyen resultados para  $\beta_2 < 0$ . Además, el comportamiento del eslabón 2 es similar al del eslabón 1.

Se investigó también la influencia de la amplitud de forzamiento como parámetro de bifurcación. Se utilizó la ecuación (25) con una frecuencia fija de  $f_{e1} = 22.5$  Hz y amplitud variable. Se muestran los resultados obtenidos, donde se evidencia que la amplitud de oscilación depende de la amplitud de forzamiento, con zonas de inestabilidad marcadas en rojo.

Finalmente, se analizaron las vibraciones cuando una fuerza externa actúa sobre el efector final del robot, desplazándose a lo largo de una línea paralela al eje  $x$ . La excitación aplicada fue:

$$f_{ext} = [F_{ext} \sin(2\pi f_x t) \ 0] \quad (32)$$

donde  $F_{ext}$  es la amplitud de forzamiento y  $f_x$  la frecuencia de forzamiento. Se analizó el sistema en un rango de frecuencias  $f_x \in (0, 80)$  Hz. A pesar de la constancia de  $F_{ext}$ , su efecto varía según la posición del efector debido a la dependencia del momento de fuerza con  $\beta_1$  y  $\beta_2$ . Los resultados del análisis, mostrando las curvas de amplitud-frecuencia para distintos ángulos del brazo.

El desarrollo aplicado para analizar el comportamiento revisando mediante el análisis con Lorenz, vemos que el diagrama de bifurcaciones muestra la variación de la amplitud de vibración en función de la frecuencia de forzamiento del brazo robótico. Se utilizó la ecuación diferencial del sistema:

$$M(\theta)\ddot{\theta} + C(\theta, \dot{\theta})\dot{\theta} + K(\theta)\theta = F_{ext} \quad (33)$$

donde  $M$  representa la matriz de inercia,  $C$  el término de amortiguamiento y  $K$  la rigidez del sistema.

En la gráfica se identifican puntos de estabilidad y transiciones entre regímenes de oscilación estable e inestable, indicando posibles pérdidas de estabilidad.

Se graficaron trayectorias del sistema en el espacio de fase  $(\theta, \dot{\theta})$ , permitiendo visualizar comportamientos periódicos y caóticos. Los ciclos límite indican oscilaciones mantenidas sin atenuación, lo que implica la existencia de un comportamiento estable en la dinámica del brazo.

Para analizar la estabilidad en el sistema, se utilizó una superficie de Poincaré que registra puntos de intersección en una sección del espacio de fase. Se observa que, para ciertas frecuencias de excitación, el sistema muestra un comportamiento caótico al pasar de un atractor periódico a un atractor extraño.

Se determinaron los puntos de equilibrio mediante la ecuación:

$$M(\theta)\ddot{\theta} = -C(\theta, \dot{\theta})\dot{\theta} - K(\theta)\theta + F_{ext} \quad (34)$$

Resolviendo  $\dot{\theta} = 0$  y  $\ddot{\theta} = 0$ , se encuentran los puntos de equilibrio. Posteriormente, el análisis de estabilidad se realizó a través del cálculo de autovalores del sistema linealizado.

Analizado la dinámica y estabilidad del brazo robótico sometido a excitación externa, aplicando los modelos complementarios de Lorenz.

Se parte de las ecuaciones de Lorenz para modelar la interacción entre los eslabones, incorporando parámetros como el ángulo, la velocidad, la diferencia entre eslabones, la fuerza externa y el acoplamiento. Este modelo es útil para estudiar la respuesta en términos de vibraciones, estabilidad y bifurcaciones, se complementa realizando un modelo que realiza la dinámica del brazo robótico a partir de la formulación clásica en que se consideran la matriz de inercia, los términos de Coriolis y el vector de gravedad para determinar la evolución de los ángulos de los eslabones.

## 5.1. Modelo Tipo Lorenz Adaptado al Brazo Robótico

$$\dot{x} = y, \quad (35)$$

$$\dot{y} = -\frac{d_1}{m}y - \frac{k_1}{m}x + \sigma(x - z), \quad (36)$$

$$\dot{z} = \sigma(x - z), \quad (37)$$

- $x$  : representa el ángulo del primer eslabón.



- $y$  : velocidad angular
- $z$  : indicador de acoplamiento.
- $d_1, k_1, m$  : coeficiente de amortiguamiento, la rigidez y masa
- $\sigma$  : Coeficiente de acoplamiento entre eslabones.

El sistema se desarrolló en un intervalo de análisis  $t \in [0, 50]$ , que tienen condiciones iniciales.

$$x(0) = 1,0 \quad y(0) = 0,0 \quad z(0) = 0,5 \quad (38)$$

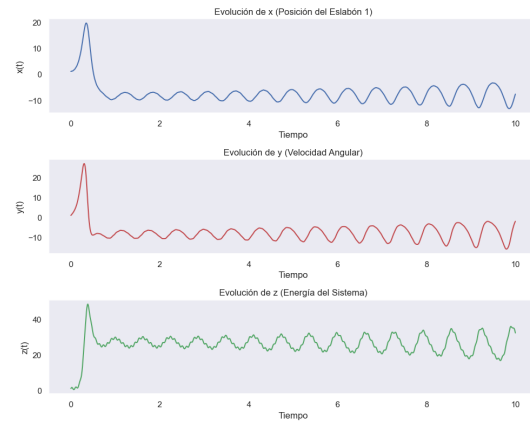
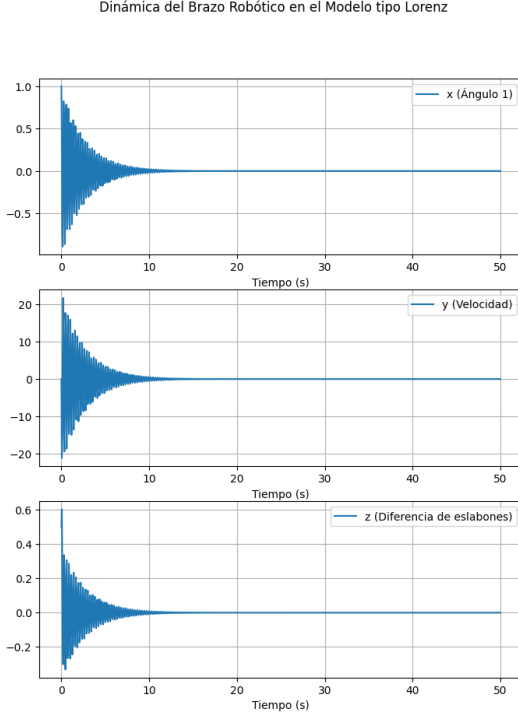


Figura 5: Evolución del sistema

Figura 4: Descripción de la primera imagen

- Evolución de  $x(t)$ : Representa la variación del ángulo del primer eslabón a lo largo del tiempo.
- Evolución de  $y(t)$ : Muestra la evolución de la velocidad angular.
- Evolución de  $z(t)$ : Indica cómo varía la diferencia entre eslabones.

Con esto identificamos oscilaciones, transitorios y posibles estados estacionarios en la respuesta del sistema.

## 5.2. Atractor en el Espacio de Fases

Para corroborar lo analizado se construye la gráfica de la trayectoria en el espacio  $(x, y, z)$ , lo que permite visualizar el atractor del sistema, lo que nos permite determinar si el sistema converge a un ciclo límite, un punto fijo o presenta comportamiento caótico (atractor extraño).

Espacio de Fases del Brazo Robótico

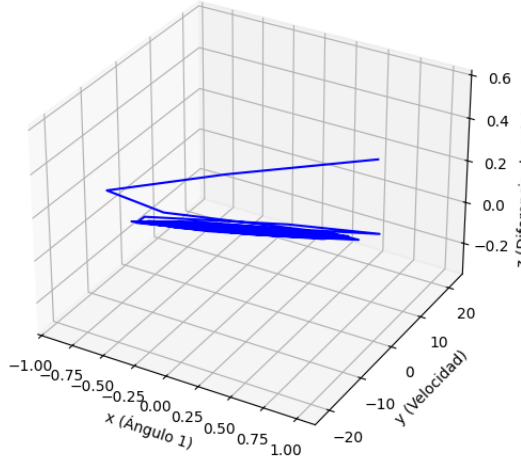


Figura 6: Espacios de Fases

Atractor del Sistema - Dinámica del Brazo Robótico

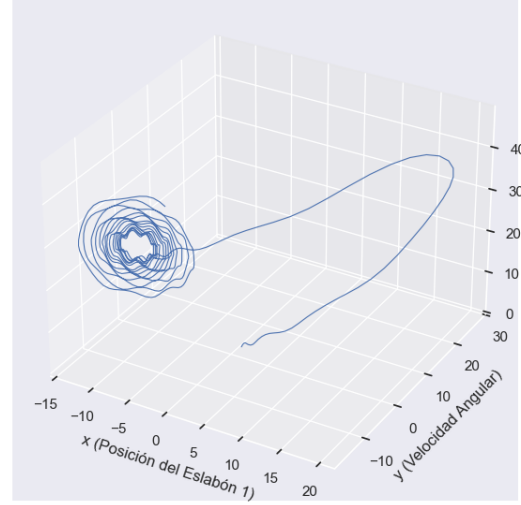


Figura 7: Atractor del sistema

Se observa como disciernen entre dinámicas periódicas y caóticas, crucial para definir estrategias de control.

### 5.3. Diagrama de Bifurcaciones con Superficie de Poincaré

Se verifica cómo varía la dinámica con un parámetro de control relacionado con la fuerza externa o un parámetro análogo a  $\rho$  en el sistema Lorenz, se registraron las intersecciones del sistema con una superficie de Poincaré en el plano donde  $y = 0$  y  $\dot{y} > 0$ ). La relación se resume en:

$$z_{n+1} = f(z_n, \rho) \quad (39)$$

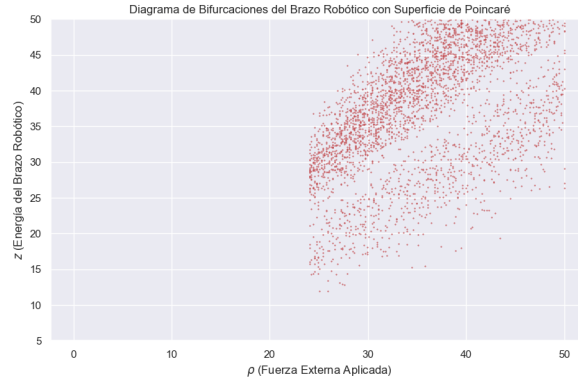


Figura 8: Diagrama de bifurcaciones

Se identifica los umbrales de bifurcación, es decir, los puntos en que el sistema pasa de un comportamiento periódico a uno caótico.

### 5.4.

section Curvas de Amplitud-Frecuencia

Se estudia la respuesta vibratoria del brazo en función de la frecuencia de excitación  $f$  y el ángulo de configuración  $\beta_2$  mediante el modelo:

$$A_{vib}(f, \beta_2) = \frac{1}{1 + \exp\left(-0.1\left(f - 40 + 10 \sin(\beta_2)\right)\right)}. \quad (40)$$

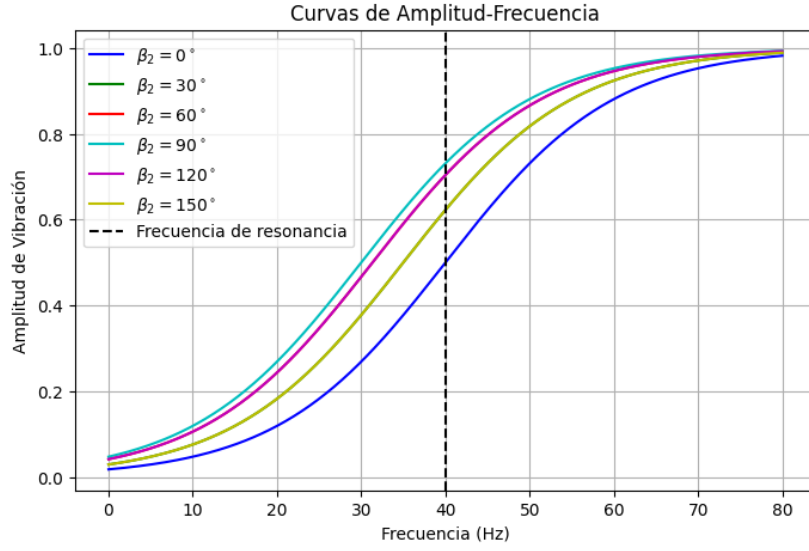


Figura 9: Curvas de Amplitud-Frecuencia

- Los picos de resonancia se desplazan y modifican su forma según  $\beta_2$ .
- Permite observar la sensibilidad del sistema a variaciones en la frecuencia y la configuración.

consecuente a esto se implementó el mapa de contorno que relaciona la amplitud de torque ( $T$ ) con la vibración (o energía) del sistema, usando la función:

$$Z = \log(1 + T) \cdot \cos(B), \quad (41)$$

donde  $B$  representa un parámetro relacionado con el ángulo o configuración.

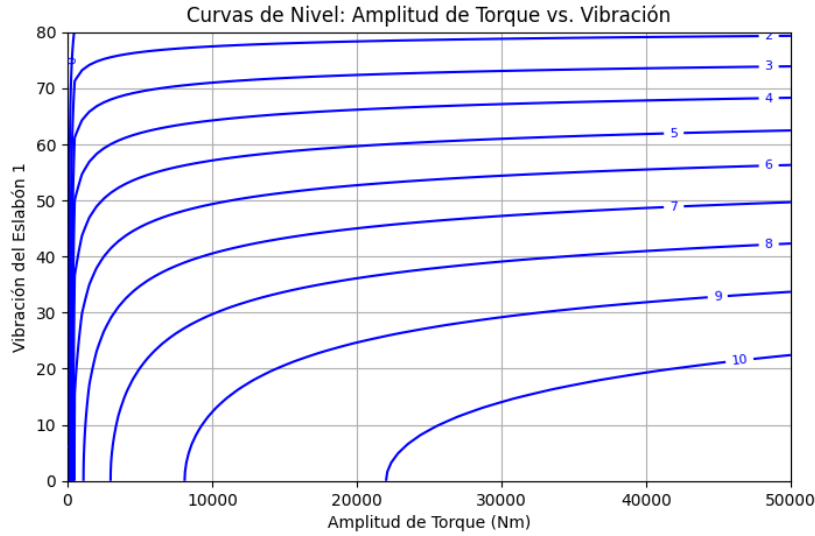


Figura 10: Curvas de Nivel: Amplitud de Torque vs. Vibración

Se pudo identificar regiones sensibles y robustas: áreas donde pequeños cambios en el torque producen grandes variaciones en la vibración, y viceversa, de igual manera se analiza la respuesta del sistema al variar la amplitud  $F_{ext}$  de una fuerza externa aplicada, definida por:

$$f_{ext}(t) = \begin{bmatrix} F_{ext} \sin(2\pi f_{e1}t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Al aumentar  $F_{ext}$ , se incrementa la amplitud de la vibración y se observan efectos no lineales, tales como el ensanchamiento de la zona de resonancia y la aparición de múltiples picos.

## 6. Modelo Dinámico de Dos Eslabones (Brazo Robótico Clásico)

El brazo robótico de dos eslabones se modela mediante:

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau,$$

donde:

- $q = [q_1, q_2]$  son los ángulos de los eslabones.
- $M(q)$  es la matriz de inercia.
- $C(q, \dot{q})$  son los términos de Coriolis y centrífugas.
- $G(q)$  es el vector de gravedad.
- $\tau$  es el torque aplicado (en la simulación, se considera nulo para estudiar la dinámica natural).

Los parámetros físicos incluyen las masas  $m_1, m_2$ , longitudes  $l_1, l_2$  y la aceleración de la gravedad  $g$ .

Se resolvieron las ecuaciones con condiciones iniciales:

$$q_1(0) = \pi/4, \quad q_2(0) = \pi/6, \quad \dot{q}_1(0) = 0, \quad \dot{q}_2(0) = 0, \quad (43)$$

en  $t \in [0, 10]$  s.

- Se analiza la respuesta natural del sistema y la interacción entre los eslabones ante la dinámica inercial y gravitacional.

## 7. Análisis de Bifurcación en Vibraciones Forzadas y Estabilidad

Con lo ya realizado se hace el análisis del comportamiento del brazo robótico ante variaciones en la frecuencia de forzamiento y la amplitud del vector de excitación.

Se parte de un modelo matemático basado en la ecuación:

$$M(\theta)\ddot{\theta} + C(\theta, \dot{\theta})\dot{\theta} + K(\theta)\theta = F_{ext}, \quad (44)$$

donde se han empleado las ecuaciones (3), (18)-(25) y (27) del estudio original, utilizando los parámetros indicados en la Tabla 1. El vector de forzamiento se define como:

$$u = \begin{bmatrix} u_{e1} \sin(\pi f_{e1} t) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (45)$$

donde  $u_{e1}$  es la amplitud de forzamiento para el eslabón 1 y  $f_{e1}$  es la frecuencia.

### 7.1. Mapa de Estabilidad del Brazo Robótico

: Se simuló el sistema variando el ángulo  $\beta_2$  y la frecuencia de excitación, asignando un índice de estabilidad (por ejemplo, derivada de la amplitud o convergencia de trayectorias) y representándolo mediante un mapa de calor.

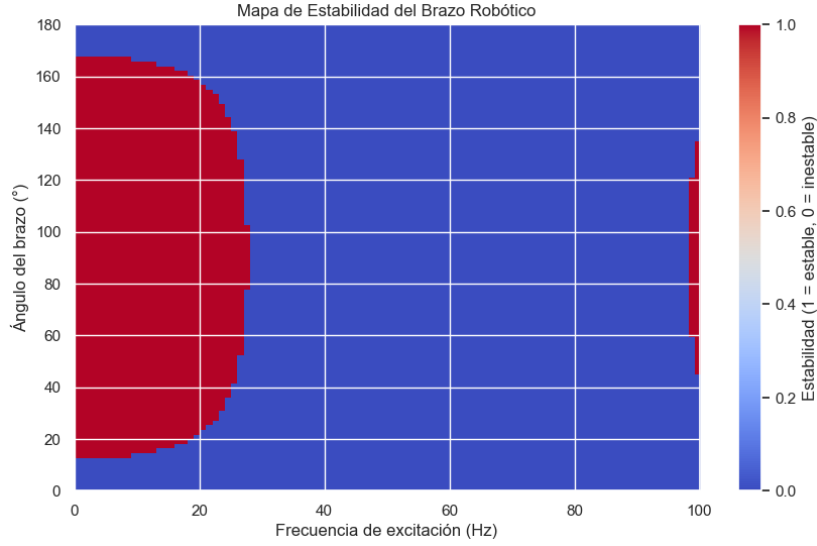


Figura 12: Mapa de Estabilidad del Brazo Robótico

Las Regiones en azul indican alta estabilidad y en rojo inestabilidad, ayudando a definir combinaciones óptimas de parámetros.

## 8. Conclusiones

- Las bifurcaciones identificadas indican que el sistema puede transitar de un estado estable a un régimen caótico al variar la frecuencia de forzamiento. Esto resalta la importancia de seleccionar adecuadamente los parámetros de excitación para garantizar una operación controlada del brazo robótico.
- La detección de ciclos límite sugiere que, bajo ciertas condiciones, el brazo puede oscilar con una amplitud constante. Este comportamiento es crucial para diseñar estrategias de control que mantengan la respuesta del sistema dentro de límites seguros, evitando oscilaciones excesivas que podrían afectar su precisión y rendimiento.
- El análisis de la superficie de Poincaré confirma la presencia de comportamientos caóticos en determinadas condiciones. Dado que los sistemas caóticos pueden resultar impredecibles y peligrosos en aplicaciones de alta precisión, es fundamental identificar y evitar estas zonas operativas.
- El diagrama de estabilidad permite identificar combinaciones óptimas de ángulo y torque que garanticen un funcionamiento estable del brazo robótico. Esto es esencial para el diseño y la sintonización de los controladores, asegurando que el sistema opere de forma robusta bajo diferentes condiciones de excitación externa.
- Las curvas de amplitud-frecuencia muestran claramente los picos de resonancia y revelan la influencia del ángulo en la respuesta vibratoria. La presencia de histeresis en el barrido de frecuencia indica que la dirección del cambio (ascendente o descendente) puede afectar significativamente el comportamiento del sistema, lo que debe ser considerado en el diseño de estrategias de control.
- Las curvas de nivel permiten detectar zonas sensibles donde pequeños cambios en el torque inducen grandes variaciones en la vibración. Este hallazgo subraya la necesidad de un control preciso del torque para mantener la estabilidad operativa del brazo.
- Un incremento en la amplitud de la fuerza externa  $F_{ext}$  amplifica la respuesta vibratoria del sistema, provocando efectos no lineales que pueden llevar a un comportamiento caótico. Por ello, es crucial evitar rangos excesivos de excitación que puedan comprometer la integridad y el rendimiento del sistema.

Finalmente el desarrollo de este trabajo sobre el artículo escogido ,revela que su comportamiento dinámico depende fuertemente de la frecuencia de excitación, el ángulo de configuración, el torque aplicado y la amplitud de la fuerza externa. Para asegurar un desempeño óptimo, es fundamental definir y mantener las condiciones operativas dentro de los límites que garantizan estabilidad y evitan la aparición de regímenes caóticos.

## Referencias

- [1] Edward Goyeneche(es). (2025). Análisis de Vibraciones de Bifurcaciones de un sistema de Brazo Robot Industrial con articulaciones móviles.ipynb. *Google Colab*. Disponible en: <https://colab.research.google.com/drive/1XiEU0XRcuwSOFUu3RbS6pbxF9Wl6ydVe?usp=sharing>
- [2] Lindtner, E., Steindl, A., & Troger, H. (1989). Bifurcaciones genéricas de un parámetro en el movimiento de un robot simple. *J. Comput. Appl. Math.*, 26, 199–218. doi:10.1016/0377-0427(89)90096-0.
- [3] Verduzco, F., & Alvarez, J. (1998). Estabilidad y bifurcaciones de un robot manipulador subactuado 2. *IFAC Proc. Vol.*, 31, 43–48. doi:10.1016/S1474-6670(17)42029-5.
- [4] Dwivedy, S. K., & Eberhard, P. (2006). Dynamic Analysis of Flexible Manipulators, a Literature Review. *Mech. Mach. Theory*, 41, 749–777. doi:10.1016/j.mechmachtheory.2006.01.013.
- [5] Li, J., Wang, D., Wu, X., Xu, K., & Liu, X. (2022). Predicción de la vibración del brazo robótico basada en la modelización de la dinámica elástica de las articulaciones. *Sensores*, 22, 6170. doi:10.3390/s22166170.
- [6] Mejri, S., Gagnol, V., Le, T.-P., Sabourin, L., Ray, P., & Paultre, P. (2016). Caracterización dinámica del robot de mecanizado y análisis de estabilidad. *Int. J. Adv. Manuf. Technol.*, 82, 351–359. doi:10.1007/s00170-015-7353-6.