Projet de Thèse Edward Coto, par Francesco Lemma

Le projet de thèse d'Edward Coto, concerne des questions soulevées par les conjectures de Tate et Beilinson pour certains motifs associés à des formes automorphes endoscopiques et apparaissant dans la cohomologie du produit d'une variété de Siegel de dimension 3 et d'une courbe modulaire, dans le prolongement de ma publication [Le18]. Ce dernier travail étudie des formes automorphes cohomologiques de poids minimal et on aimerait étudier des questions analogues en poids supérieur, éventuellement sur un corps totalement réel. L'espoir est que le fait de travailler en poids supérieur, bien qu'engendrant plusieurs difficultés techniques, devrait pouvoir permettre d'obtenir un résultat plus abouti que dans [Le18] grâce notamment aux résultats de [HK92] qui ne sont démontrés que pour un poids suffisamment régulier. Par ailleurs, alors que le résultat principal de [Le18] doit être considéré comme un simple analogue automorphe d'un cas particulier de la conjecture de Beilinson, il est très intéressant de noter que le fait de passer en poids supérieur permet d'aborder la conjecture en elle même puisqu'il existe des motifs de Grothendieck associés aux formes automorphes cohomologiques de GL(2) [S90] et des motifs associés aux formes automorphes de GSp(4) de poids régulier [Wi17]. Rappelons pour commencer l'énoncé des conjectures dont il s'agit.

Soit X une variété algébrique projective et lisse sur $\mathbb{Q}$ et soit $n \geq 1$ un entier. La fonction L de Hasse-Weil $L(s, H^{2n-2}(X))$ associée à la cohomologie de X en degré $2n-2$ est définie par un produit eulérien absolument convergent pour $\mathrm{Re}(s) > n$ et, conjecturalement, possède un prolongement méromorphe à tout le plan complexe, avec un seul pôle possible en $s = n$. Soit $N^{n-1}(X)$ le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel des cycles de codimension $n-1$ dans X à équivalence homologique près.

Conjecture. (Tate)

$$\dim N^{n-1}(X) = -\mathrm{ord}_{s=n} L(s, H^{2n-2}(X)).$$

Le conjecture de Beilinson donne une interprétation arithmétique du premier terme non-nul $L^*(n, H^{2n-2}(X))$ du développement de Taylor de $L(s, H^{2n-2}(X))$ en $s = n$. Soit $H^{2n-1}_{\mathcal{M}}(X, \mathbb{Q}(n))_{\mathbb{Z}}$ et $H^{2n-1}_{\mathcal{D}}(X/\mathbb{R}, \mathbb{R}(n))$ la partie intégrale de la cohomologie motivique et la cohomologie de Deligne-Beilinson réelle et soit

$$r_{\mathcal{D}} : H^{2n-1}_{\mathcal{M}}(X, \mathbb{Q}(n))_{\mathbb{Z}} \oplus N^{n-1}(X) \longrightarrow H^{2n-1}_{\mathcal{D}}(X/\mathbb{R}, \mathbb{R}(n))$$

le régulateur. Soit $\mathcal{D}(n, H^{2n-2}(X))$ la $\mathbb{Q}$-structure de Deligne dans la puissance extérieure maximale de $H^{2n-1}_{\mathcal{D}}(X/\mathbb{R}, \mathbb{R}(n))$.

Conjecture. (Beilinson)

i. L'application $r_{\mathcal{D}}$ induit un isomorphisme

$$(H^{2n-1}_{\mathcal{M}}(X, \mathbb{Q}(n))_{\mathbb{Z}} \oplus N^{n-1}(X)) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \simeq H^{2n-1}_{\mathcal{D}}(X/\mathbb{R}, \mathbb{R}(n)),$$

ii. $\mathrm{ord}_{s=n-1} L(s, H^{2n-2}(X)) = \dim H^{2n-1}_{\mathcal{M}}(X, \mathbb{Q}(n))_{\mathbb{Z}}$,

iii. $\det(\mathrm{Im}\, r_{\mathcal{D}}) = L^*(n, H^{2n-2}(X))\mathcal{D}(n, H^{2n-2}(X))$.

Ces conjectures ont un sens et sont formulées plus généralement par Beilinson en remplaçant $H^{2n-2}(X)$ par un motif de Chow de poids pair [Be85].

Soit $\mathbb{A}$ l'anneau des adèles de $\mathbb{Q}$, soit π une représentation automorphe cuspidale de $\mathrm{GSp}(4,\mathbb{A})$. On suppose que la partie archimédienne de π est cohomologique par rapport à la représentation algébrique irréductible $F_{k,k'}$ de $\mathrm{GSp}(4)$ de plus haut poids $k \geq k' \geq 0$ et de caractère central trivial. Soit σ une représentation automorphe cuspidale de $\mathrm{GL}(2,\mathbb{A})$ dont la partie archimédienne est cohomologique par rapport à la représentation algébrique irréductible G_l de $\mathrm{GL}(2)$ de plus haut poids $l \geq 0$ et de caractère central trivial. Autrement dit, la représentation automorphe σ correspond à une forme modulaire classique de poids $l+2$. Soit $M(\pi)$, resp. $M(\sigma)$, le motif de Grothendieck associé à π, resp. σ, par [Wi17], resp. [S90]. On se propose d'étudier les conjectures de Tate et Beilinson pour le motif $M = M(\pi) \otimes M(\sigma) \otimes \mathbb{Q}(k+3)$ dans le cas où π est globalement générique et où la fonction L de degré huit $L(s, \pi \times \sigma)$ a un pôle en $s = 1$. Cette dernière condition équivaut à l'existence d'une factorisation en deux fonctions L de degré 4 de la forme

$$L(s, \pi \times \sigma) = L(s, \pi_1 \times \sigma) L(s, \pi_2 \times \sigma)$$

où π_1 et π_2 sont des représentations automorphes de $\mathrm{GL}(2)$ de poids $r > s > 0$ avec $s = k - k'$. De plus π_2 est équivalente à la contragrédiente $\check{\sigma}$, on a donc nécessairement $l = k - k'$. La fonction $L(s, \pi_2 \times \sigma)$ a un pôle simple en $s = 1$ alors que $L(s, \pi_1 \times \sigma)$ est holomorphe en $s = 1$. Le calcul de la fonction L de M découle du travail [Mo08], [Mo11] (voir aussi [We05], [We09]) et des résultats analogues désormais classiques pour $\mathrm{GL}(2)$ dûs à Eichler, Shimura, Ihara et Deligne. Lorsqu'on suppose que π est générique, on trouve à un décalage et aux places de mauvaise réduction près que $L(s, M)$ est une puissance positive de $L(s, \pi_2 \times \sigma)$. La conjecture de Tate prédit donc l'existence d'une classe de cycle non-nulle

$$Z \in H^5_{\mathcal{D}}(M/\mathbb{R}).$$

Ce dernier $\mathbb{R}$-espace vectoriel est canoniquement et fonctoriellement isomorphe à $(M(-1)_B \cap M^{0,0})^+$, l'ensemble des vecteurs de type de Hodge $(0,0)$ et invariants par conjugaison complexe dans la réalisation de Betti $M(-1)_B$. Donnons les idées de la construction d'un candidat d'un tel élément Z. On remarquera que la condition $l = k - k'$ qui vient de l'existence du pôle de la fonction L automorphe est nécessaire pour mener à bien la construction géométrique qui suit !

Notons H le groupe $\mathrm{GL}(2) \times_{\mathrm{GL}(1)} \mathrm{GL}(2)$, où l'on fibre sur le déterminant, et notons $\iota : H \longrightarrow \mathrm{GSp}(4)$ le plongement défini par

$$\iota\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a & & b & \\ & a' & & b' \\ c & & d & \\ & c' & & d' \end{pmatrix}.$$

Soit S_K la variété modulaire de Siegel de dimension 3 en niveau $K \subset \mathrm{GSp}(4, \mathbb{A}_f)$ et soit Y_L la courbe modulaire affine en niveau $L \subset \mathrm{GL}(2, \mathbb{A}_f)$. Si L est bien choisi par rapport à K, le plongement ι induit une immersion fermée

$$Y_L \times Y_L \xrightarrow{\iota} S_K$$

dont l'image est le lieu où la fibre de la surface abélienne universelle est un produit de deux courbes elliptiques. On en déduit une immersion fermée

$$Y_L \times Y_L \xrightarrow{\iota'} S_K \times Y_L$$

où la composée de la flèche horizontale inférieure et de la projection $S_K \times Y_L \longrightarrow Y_L$ est la deuxième projection $Y_L \times Y_L \longrightarrow Y_L$. Considérons la cohomologie de Betti à supports compacts à coefficients rationnels $H_c^4(S_K \times Y_L, \check{F}_{k,k'} \boxtimes \check{G}_l)$ où $\check{F}_{k,k'}$ et $\check{G}_l$ désignent les représentations contragrédientes. En calculant la restriction $\iota^*\check{F}_{k,k'}$ à H, on montre que la variation de structures de Hodge $\iota'^*(\check{F}_{k,k'} \boxtimes \check{G}_l)$ contient la variation de Tate $\mathbb{Q}(-k)$ en facteur direct si et seulement si $l = k - k'$, ce que l'on suppose dorénavant. On en déduit un morphisme de structures de Hodge mixtes

$$H_c^4(S_K \times Y_L, \check{F}_{k,k'} \boxtimes \check{G}_l) \longrightarrow \mathbb{Q}(-2-k) \tag{1}$$

en composant la restriction $\iota'^* : H_c^4(S_K \times Y_L, \check{F}_{k,k'} \boxtimes \check{G}_l) \to H_c^4(Y_L \times Y_L, \iota'^*(\check{F}_{k,k'} \boxtimes \check{G}_l))$, la projection $H_c^4(Y_L \times Y_L, \iota'^*(\check{F}_{k,k'} \boxtimes \check{G}_l)) \to H_c^4(Y_L \times Y_L, \mathbb{Q}(-k))$ et du morphisme trace $tr : H_c^4(Y_L \times Y_L, \mathbb{Q}(-k)) \to \mathbb{Q}(-2-k)$. En dualisant le morphisme (1) on obtient un morphisme

$$\mathbb{Q}(0) \longrightarrow H^4(S_K \times Y_L, F_{k,k'} \boxtimes G_l)(2+k). \tag{2}$$

En projetant sur la $(\pi \times \sigma)$-partie on en déduit l'élément Z cherché. Par construction Z est l'image de la classe du cycle de $Y_L \times Y_L$ dans $H^4(S_K \times Y_L, \mathbb{Q}(2))$ par l'inclusion $H^4(S_K \times Y_L, \mathbb{Q}(2)) \to H^4(S_K \times Y_L, F_{k,k'} \boxtimes G_l)(2+k)$.

Comme dans [Le18], nous espérons pouvoir relier Z au résidu en 1 de la fonction L de degré huit $L(s, \pi \times \sigma)$ via la représentation intégrale de Novodvorsky [M09]. et notons Z_H le centre de H. En prenant le résidu en $s = 1$ de l'intégrale de Novodvorsky on obtient une égalité de la forme

$$\mathrm{Res}_{s=1} L(s, \pi \times \sigma) = \int_{H(\mathbb{Q})Z_H(\mathbb{A})\backslash H(\mathbb{A})} \Psi(h_1, h_2)\Phi(h_2)dh_1 dh_2$$

où Ψ, resp. Φ, est une forme cuspidale dans l'espace de la représentation π, resp. σ, convenablement normalisée. Dans un premier temps, nous nous proposons d'écrire l'intégrale ci-dessus comme l'accouplement de Poincaré entre la classe Z et une forme différentielle à valeurs vectorielles sur $S_K \times Y_L$ associée à $\Psi \times \Phi$. Une des difficultés pour mener à bien ce travail est le calcul explicite de la projection $\iota'^*(\check{F}_{k,k'} \boxtimes \check{G}_l) \to \mathbb{Q}(-k)$, un problème en apparence élémentaire de la théorie des représentations algébriques de $\mathrm{GSp}(4)$.

Dans un deuxième temps, nous nous proposons de claculer explicitement l'analogue en poids supérieur de la période de de Rham-Whittaker $p(\pi \times \sigma)$ qui apparaît dans le résultat principal de [Le18]. Cette période est un nombre complexe qui mesure la différence entre l'algébricité en cohomologie cohérente des formes automorphes $\Psi \times \Phi \in \pi \times \sigma$ et l'algébricité de leurs coefficients de Fourier par rapport au Borel, ou coefficients de Whittaker. Rappelons que dans le cas où la fonction $L(s, \pi \times \sigma)$ a un pôle en $s = 1$, la représentation cuspidale π est obtenue comme un theta-lift $\Theta(\pi_1, \pi_2)$ à partir de deux représentations cuspidales inéquivalentes de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{A})$ avec $\pi_2 \simeq \check{\sigma}$, où $\check{\sigma}$ dénote la contragrédiente de σ. Nous pensons que le calcul explicite de $p(\pi \times \sigma)$ dans ce cas est possible étant donné les résultats de Harris-Kudla sur l'algébricité de la correspondance theta [HK92], de Howe et Piatetski-Shapiro [HPS83] calculant les fonctions de Whittaker de $\Theta(\pi_1, \pi_2)$ en fonction de celles de π_1 et π_2 (dans le cas de Sp_4), et le fait que pour π_1 et π_2, l'algébricité en cohomologie cohérente est essentiellement équivalente à celle du modèle de Whittaker par le principe de q-développement.

Références

[Be85] A. A. Beilinson, *Higher regulators and values of L-functions*, Journal of Soviet Mathematics, 30 (1985), 2036-2070.

[Bl1] D. Blottière, *Réalisation de Hodge du polylogarithme d'un schéma abélien*, Journal of the Inst. of Math. Jussieu 8 (1), (2009), 1-38.

[Bl2] D. Blottière, *Les classes d'Eisenstein des variétés de Hilbert-Blumenthal*, Int. Math. Res. Not. 17, (2009), 3236-3263.

[De98] C. Deninger, *Some analogies between number theory and dynamical systems on foliated spaces*, Doc. Math. J. DMV, Extra Volume ICM I, (1998), 23-46.

[De02] C. Deninger, *On the nature of explicit formulas in analytic number theory, a simple example*, Number theoretic methods (Izuka 2001), Dev. Math. 8, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, (2002), 97-118.

[HK92] M. Harris, S. Kudla, *Arithmetic automorphic forms for the nonholomorphic discrete series of* $\mathrm{GSp}(2)$, Duke Math. J. 66, no. 1, (1992), 59-121.

[Hi81] H. Hida, *Congruence of cusp forms and special values of their zeta functions*, Invent. Math. 63, (1981), no. 2, 225-261.

[HPS83] R. Howe, I. I. Piatetski-Shapiro, *Some examples of automorphic forms on* Sp_4, Duke Math. J. 50 (1983), no. 1, 55-106.

[Le18] F. Lemma, *Algebraic cycles and residues of degree 8 L-functions of* $\mathrm{GSp}(4) \times \mathrm{GL}(2)$, Int. Math. Res. Not., à paraître.

[M09] T. Moriyama, *L-functions for* $\mathrm{GSp}(2) \times \mathrm{GL}(2)$ *: archimedean theory and applications*, Canad. J. Math. 61 (2), (2009), 395-426.

[Mo08] S. Morel, *Complexes pondérés sur les compactifications de Baily-Borel : le cas des variétés de Siegel*, J. Amer. Math. Soc. 21 (2008), no. 1, 23-61.

[Mo11] S. Morel, *Cohomologie d'intersection des variétés modulaires de Siegel, suite*, Compos. Math. 147 (2011), no. 6, 1671-1740.

[S90] A. J . Scholl, *Motives for modular forms*, Invent. Math. 100 (1990), no. 2, 419-430.

[We05] R. Weissauer, *Four dimensional Galois representations*, Astérisque 302, (2005), 67-150.

[We09] R. Weissauer, *Endoscopy for* $\mathrm{GSp}(4)$ *and the cohomology of Siegel modular threefolds*, Lecture Notes in Mathematics 1968, Springer-Verlag, Berlin, (2009), xviii+368.

[Wi17] J. Wildeshaus, *On the intersection motive of certain Shimura varieties : the case of Siegel threefolds*, preprint, 34 p., (2017), arXiv :1706.02743v2.