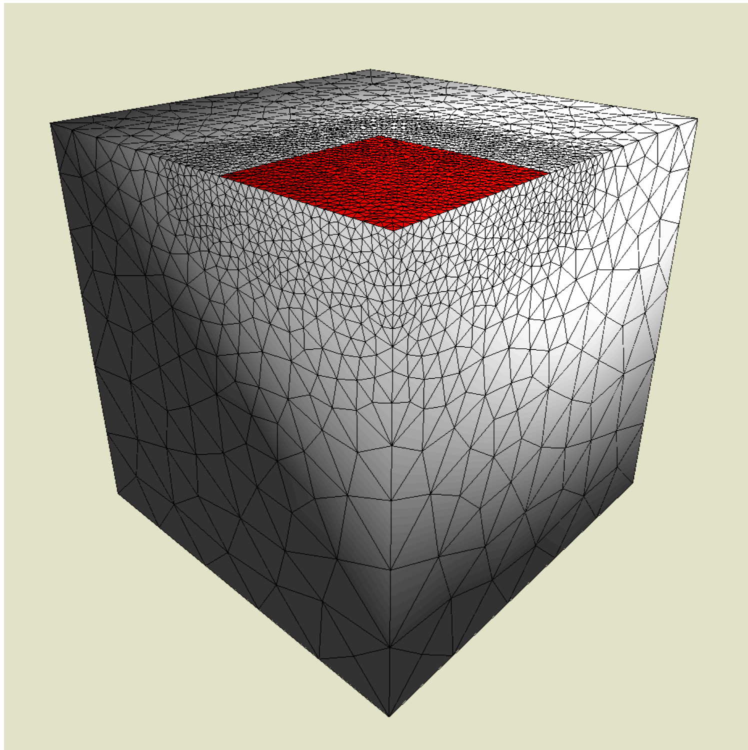
1 Modélisation des déformations d'un solide élastique



L'objectif du projet est de vous initier aux difficultés de la mise au point et de la certification d'une application numérique. Rassurez-vous : il ne s'agit nullement de vous transformer en experts de l'architecture de grandes applications numériques ! Nous nous limiterons à l'écriture d'un tout petit programme C pour simuler les déplacements d'un solide élastique soumis à une déformation spécifique.

Vous faites partie d'un bureau d'études dont la spécialité est de concevoir des joints d'étanchéité en caoutchouc, silicone ou autre matériau approprié que vous proposerez. Vu vos capacités à travailler vite et bien, vos nouveaux clients vous demandent maintenant de proposer un joint de forme cubique qui puisse résister à l'appui d'une colonne sur un quart de la face supérieure. Il s'agit de déterminer le champ de déplacement au sein du cube et d'en déduire si les déformations observées restent acceptables.

Le problème consiste à calculer le champ du vecteur déplacement

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \Big(u(x,y,z), v(x,y,z), w(x,y,z)\Big)$$

au sein du joint dont une partie de la face supérieure sera soumise à déplacement prescrit en raison du poids de la colonne. Le champs de déplacement permet donc de déduire la déformation du joint et relie donc la position de chaque point matériel du joint avec et après la déformation.

Si le joint est un cube d'arête L, le domaine de résolution est défini par

$$\Omega = \{(x,y,z) \mid 0 \leq x \leq L,\ 0 \leq y \leq L,\ 0 \leq z \leq L\}\,.$$

Le joint est positionné dans le coin d'une pièce. Par conséquent, trois des faces du cube ne subissent aucun déplacement normal (la face inférieure reposant sur le sol et les deux faces situées contre les murs formant le coin de la pièce). Ces faces peuvent par contre subir un glissement le long de ces parois.

L'origine du système d'axe dans le coin inférieur du joint coincé entre les deux murs. L'axe z est orienté verticalement, tandis que les axes x et y sont parallèles aux deux murs.

La colonne repose sur le facette indiquée en rouge sur la figure et définie par

$$\Gamma = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq 4L/10,\ 0 \leq y \leq 4L/10,\ z =\leq L\}.$$

1.1 Les équations à résoudre...

La formulation forte du problème consiste à trouver $\big(u(x,y,z), v(x,y,z), w(x,y,z)\big)$ tel que

$$\left\{\begin{array}{lcl}
\dfrac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \dfrac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} & = & 0 \\[2ex]
\dfrac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \dfrac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} & = & 0 \\[2ex]
\dfrac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \dfrac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} & = & 0
\end{array}\right.$$

où les composantes du tenseur des contraintes sont données par :

$$\begin{array}{lcl}
\sigma_{xy} = \sigma_{yx} & = & \dfrac{E}{(1+\nu)}\,\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x}\right) \\[2ex]
\sigma_{xz} = \sigma_{zx} & = & \dfrac{E}{(1+\nu)}\,\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial x}\right) \\[2ex]
\sigma_{yz} = \sigma_{zy} & = & \dfrac{E}{(1+\nu)}\,\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial y}\right) \\[2ex]
\sigma_{xx} & = & \dfrac{E}{(1+\nu)}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right) + \dfrac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z}\right) \\[2ex]
\sigma_{yy} & = & \dfrac{E}{(1+\nu)}\left(\dfrac{\partial v}{\partial y}\right) + \dfrac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z}\right) \\[2ex]
\sigma_{zz} & = & \dfrac{E}{(1+\nu)}\left(\dfrac{\partial w}{\partial z}\right) + \dfrac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z}\right)
\end{array}$$

Les symboles E et ν sont les paramètres matériels qui caractérisent un matériau : il s'agit respectivement du module de Young et du coefficient de Poisson. Le module de Young est toujours un réel positif et le coefficient de Poisson est théoriquement compris entre -1 et 0.5. Les valeurs expérimentales obtenues pour un matériau quelconque sont souvent voisines de 0.3... Il faut signaler l'existence de matériaux à coefficient de Poisson voisin de zéro, et on a même pu réaliser artificiellement des matériaux à coefficient de Poisson négatif.

On voit donc bien que nous avons une équation pour chaque composante du déplacement et qu'il est donc possible de calculer ces déplacements. En incorporant les expressions des composantes du tenseur des contraintes dans les trois équations aux dérivées partielles, on obtient un système d'équations elliptiques du second ordre. C'est d'une certaine manière une sorte de généralisation vectorielle de l'équation de Poisson :-) On peut donc utiliser les mêmes principes et la même approche que pour le problème de la conduction thermique.

il reste finalement à déterminer les conditions aux limites sur les facettes du cubes. Sur les deux murs et le sol, on impose que le déplacement normal à la facette est nul et que les dérivées normales des autres composantes sont nulles. Sur la facette Γ qui soutient la colonne, on impose les trois composantes du déplacement $(u, v, w) = (0, 0, \alpha)$ où α correspond à l'insertion de la colonne dans le joint. Sur tout le reste de la frontière, on impose uniquement que les dérivées normales des trois composantes de déplacement s'annulent. Toutes les conditions frontières en termes de dérivées d'une composante de déplacement correspond à l'absence de la même composante de la force de contact sur la frontière. Le bloc glisse donc sur le sol et le long des murs. Les autres surfaces sont libres de toute entrave et de toute force de contact, à l'exception de la facette sur lequel l'insertion de la colonne impose une force.

Les conditions en termes de dérivées correspondent à des conditions naturelles homogènes, tandis que les conditions en termes de composantes de déplacement sont des conditions essentielles. En dérivant une formulation faible, on impose automatiquement toutes les conditions naturelles homogènes et le problème est donc vraiment simple à résoudre.

Les grandes étapes du projet

Il s'agit de résoudre les équations -ci dessus- en utilisant la méthode de Galerkin continue uniquement avec des fonctions de forme de degré un. Votre programme doit être capable de fonctionner pour des éléments tétrahédriques. Vos clients sont relativement exigeants et souhaitent obtenir beaucoup d'information, notamment de nature théorique. Le cahier des charges est le suivant.

1. Expliquer comment on dérive les formulations faible et discrète du problème en partant de la formulation forte. Dans quels espaces fonctionnels travaillez-vous ? Est-ce que la formulation obtenue est optimale ?
2. Résoudre le problème en déplacement par éléments finis en utilisant des tétraèdres linéaires. Résoudre le problème en prenant différentes valeurs pour le déplacement imposé $\alpha = -L/10, -L/5, -L/2$.
3. Ecrire un rapport de maximum 5 pages.

1.2 Ce que vous devrez réaliser !

L'objet du projet est de réaliser un petit code d'éléments finis permettant de prédire le tsunami et de valider votre code avec une solution analytique : il s'agit d'un petit laboratoire numérique où vous allez être confrontés à des comportements numériques un petit peu inhabituels et où il s'agira de les interpréter correctement : il y a peu à programmer et beaucoup à comprendre !

Votre programme consistera d'un unique fichier avec la fonction

```
void cubeCompute(double alpha, double E, double nu,
          const char *meshFileName, double *U, double *V, double *W);
```

On spécifie la valeur du déplacement de la colonne, le module de Young, le coefficient de Poisson, on fournit le nom du fichier contenant le maillage, ainsi que les pointeurs des vecteurs dans lesquels il faudra mettre la solution du problème. Ces vecteurs seront alloués avant l'appel de la fonction et auront la taille adéquate.

Il vous est demandé :

1. De concevoir un programme permettant la simulation de la déformation du cube avec des fonctions de forme linéaires continues sur un tétrahèdres.
2. D'optimiser votre programme afin qu'il soit le plus rapide possible pour des maillages de grande taille : la partie critique consiste évidemment à résoudre le système linéaire discret.
3. D'optimiser votre programme afin qu'il minimise l'espace mémoire alloué pour les variables de votre fonction.
4. De rédiger une note de synthèse d'au maximum 5 pages pour le Service de Certification des Joints Mal Foutus. Fournir une estimation de l'ordre de précision du résultat obtenu en expliquant comment vous avez validé votre code numérique. Produire quelques illustrations pertinentes pour l'analyse de la solution. Expliquer comment vous avez optimisé votre programme afin qu'il soit le plus rapide possible. Ne pas recopier les développements théoriques du syllabus, ne pas recopier l'énoncé du problème, ne pas fournir des diagrammes incompréhensibles, ne pas donner des tableaux de chiffres indigestes. L'orthographe, le soin et la présentation seront conformes à celles d'une note fournie par un bureau d'études professionnel.

L'entièreté de votre code sera inclus dans un unique fichier `cube.c` qui sera compilé avec le programme `main.c` fourni. Il vous est loisible de reprendre tout ce que vous souhaitez dans les codes fournis dans les 8 devoirs. Votre programme doit toutefois être écrit en pur C et devra être compilé sur le serveur. Lors de la soumission, un calcul avec un maillage de toute petite taille sera effectué.

Pour vous aider, on vous fournit un code permettant de visualiser les maillages et faisant appel à votre fonction de calcul. Ce code peut vous être utile pour réaliser les illustrations de vos résultats.

Toutes les soumissions seront soumises à un logiciel anti-plagiat. En cas de fraude flagrante, les cas de plagiat seront soumis au Jury des examens. Vous êtes invités à consulter la page web de l'Université pour avoir une petite idée des sanctions possibles dans ce cas !

1.3 Evaluation du projet

L'évaluation du projet se fera sur la base suivante sur un total de 20 points :

Programme qui fonctionne	6
Précision des résultats	3
Rapidité du code de calcul	3
Frugalité des exigences de mémoire requise	3
Rapport	5

1.4 Grand Prix International 2015 de l'Elément le Plus Fini

Le programme correct le plus rapide recevra le Grand Prix de l'Elément le Plus Fini d'un montant de 100 euros. Ce prix a été rendu possible grâce à la contribution anonyme d'un ancien étudiant soucieux de promouvoir la qualité de la formation. La proclamation des résultats se fera sur le web avant le 15 juin 2015. Les gagnants du prix seront invités à prendre contact avec le titulaire du cours. La mesure de la rapidité du programme sera effectuée par deux tests indépendants avec le maillage le plus raffiné et des éléments cubiques. Le résultat final sera la moyenne des deux mesures. En cas de timings aberrants ou manifestement parasites, des runs complémentaires seront effectués.

1.5 Le projet peut être réalisé à deux :-)

Vous pouvez effectuer le projet avec UN autre étudiant inscrit au cours (ou éventuellement le faire tout seul). Par contre, il n'est pas permis de former des groupes de plus de deux étudiants. Il suffit qu'un seul des deux étudiants du groupe soumette le projet et que les deux noms des étudiants soient clairement indiqués sur le rapport.
La deadline de remise électronique du projet est le vendredi 15 mai à 23h59.