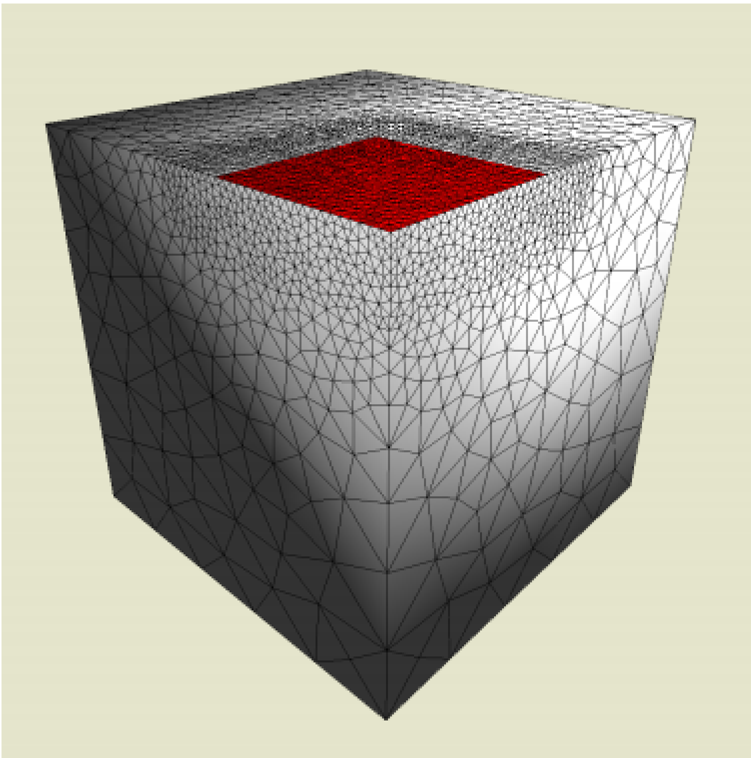
École Polytechnique de Louvain
Université Catholique de Louvain

LMECA 1120 : Introduction au méthodes d'éléments finis

Projet final : élasticité linéaire tridimensionnelle



Boigelot Simon
Nicol Edward

Professeur : Vincent Legat

Mai 2015

Obtention de la formulation faible

Nous ne considèrerons dans ce rapport que la première équation donnée dans l'énoncé du projet. Il suffit d'appliquer exactement la même démarche aux deux dernières équations.
La méthode d'éléments finis est une méthode de résidus pondérés. La technique de Galerkin consiste à prendre les fonction de formes comme poids. Ainsi, l'équation peut être réecrite :

$$< \phi_i \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} > + < \phi_i \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} > + < \phi_i \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} >= 0$$

En procédant à une intégration par partie, nous obtenons :

$$< \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \sigma_{xx} > + < \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \sigma_{xy} > + < \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \sigma_{xz} >= \ll \phi_i n_x \sigma_{xx} \gg + \ll \phi_i n_y \sigma_{xy} \gg + \ll \phi_i n_z \sigma_{xz} \gg$$

Le terme de droite étant nul vu les conditions homogènes que nous imposons dans le problème. En remplacant σ_{xx}, σ_{xy}, σ_{xz} par leur expression respective donnée dans l'énoncé et en posant $A = \frac{E}{1+\nu}$, $B = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$, $C = \frac{E}{2(1+\nu)}$ nous obtenons maintenant :

$$A < \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} > + B < \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) > + C < \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) > + C < \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) >= 0$$

En tenant maintenant compte du fait qu'en toute généralité, $\frac{\partial a}{\partial x} = \sum_{j=1}^{4} A_j \frac{\partial \phi_j}{\partial x}$, nous pouvons réecrire l'équation ci-dessus sous sa forme finale :

$$\begin{gathered}
\sum_{j=1}^{4} U_j \left[(A+B) < \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} > + C < \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \frac{\partial \phi_j}{\partial y} > + C < \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \frac{\partial \phi_j}{\partial z} > \right] \\
+ \\
\sum_{j=1}^{4} V_j \left[B < \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_j}{\partial y} > + C < \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} > \right] \\
+ \\
\sum_{j=1}^{4} W_j \left[B < \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_j}{\partial z} > + C < \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} > \right] \\
= \\
0
\end{gathered}$$

En procédant exactement de la même manière avec les deux dernières équations du problème, nous avons pu déterminer entièrement la formulation discrète du problème.