# 1 관계의 개념

# 1 관계의 개념

## 1 관계

- 서로 다른 집합에 있는 원소들 사이의 관련성
- 원소들 간의 순서를 고려한 순서쌍의 형태로 표현
- 이러한 순서쌍의 집합을 이항관계라 함

## 1 관계

### 정의

- 집합 X 에서 집합 Y 로의 **(이항)관계 ((binary) relation)** R은 X × Y 의 부분집합
- $(x, y) \in R$
  ⇒ x는 y와 R의 관계가 있음
  ⇒ $_{x}R_{y}$ 로 표기

# 1 관계의 개념

## 1 관계

◆ 예시 1

두 집합 A= {1, 2, 3, 4} , B= {1, 3, 5, 7} 에 대한 이항관계 R에서 $_aR_b$ 를 a+2=b라고 할 때 R의 순서쌍으로 나타내시오

(풀이) 첫 번째 원소에 2를 더한 값이 두 번째 원소가 되는 순서쌍의 집합임
R={(1, 3), (3, 5)}

## 1 관계

### 예시 2

다음과 같은 학생집합 X와 과목집합 Y 가 있을 때
수강관계 R을 표현하시오

학생집합 X = {연아, 태연, 백현, 수영}
과목집합 Y = {이산수학, 알고리즘, 선형대수, 미적분}

| | 이산수학 | 알고리즘 | 선형대수 | 미적분 |
|---|---|---|---|---|
| 연아 | O | O | O | |
| 태연 | | O | | O |
| 백현 | | O | O | |
| 수영 | O | | O | O |

# 1 관계의 개념

## 1 관계

◆ 예시 2

(풀이)

$\Rightarrow$ 수강관계 R = {(연아, 이산수학), (연아, 알고리즘), (연아, 선형대수), (태연, 알고리즘), (태연, 미적분), (백현, 알고리즘), (백현, 선형대수), (수영, 이산수학), (수영, 선형대수), (수영, 미적분)}

# 1 관계의 개념

## 1 관계

◆ 예시 3

집합 A={4, 5, 6}, B={이산수학, C언어} 일 때
이 두 집합 사이에 가능한 관계 R을 구하시오

(풀이)
관계 R={(4, 이산수학), (4, C언어), (5, 이산수학),
(5, C언어), (6, 이산수학), (6, C언어)}

# 1 관계의 개념

## 2 곱집합

### 정의

- 집합 A, B의 **곱집합(Cartesian Product)** A × B는 A의 원소와 B의 원소의 모든 **순서쌍(Ordered Pair)들의 집합**
- $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$

## 3 정의역, 공변역, 치역

- 정의역(Domain), 공변역(Codomain), 치역(Range)
  - 정의역
    - 집합 A에서 집합 B로 가는 이항관계 R에 속한 순서쌍의 첫 번째 원소가 포함되어 있는 집합
    즉, 집합 A
    $dom(R) = \{a \mid a \in A\}$
  - 공변역
    - 집합 A에서 집합 B로 가는 이항관계 R에 속한 순서쌍의 두 번째 원소가 포함되어 있는 집합
    즉, 집합 B
    $codom(R) = \{b \mid b \in B\}$

## 3 정의역, 공변역, 치역

- 정의역(Domain), 공변역(Codomain), 치역(Range)
  - 치역
    - 집합 A에서 집합 B로 가는 이항관계 R에 속한 순서쌍의 두 번째 원소들을 모아놓은 집합
    즉, 공변역의 부분집합
    $\mathrm{ran}(R) = \{b \mid (a, b) \in R\} \subseteq B$

# 1 관계의 개념

## 3 정의역, 공변역, 치역

◆ 예시 1

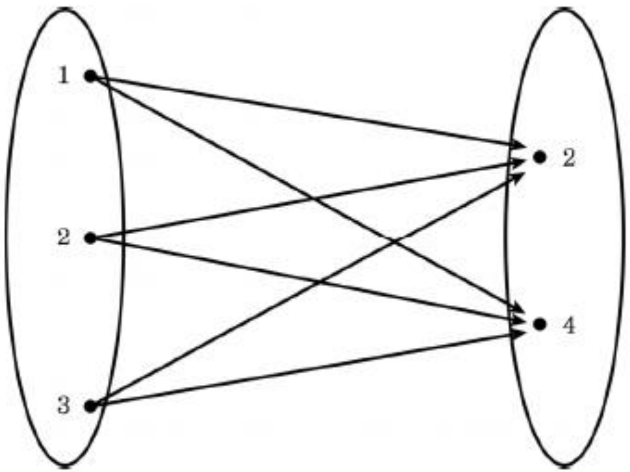
집합 $A = \{x \mid 1 \le x \le 3,\ x\text{는 정수}\}$ ,
$B = \{x \mid 1 \le x \le 5,\ x\text{는 짝수}\}$ 일 때 A에서 B로
가는 관계 R의 순서쌍을 나타내고 정의역, 공변역,
치역을 구하시오

(풀이)
$A = \{1, 2, 3\}$ , $B = \{2, 4\}$ 임, 따라서
관계 $R = \{(1, 2), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 2), (3, 4)\}$
정의역 $dom(R) = A = \{x \mid 1 \le x \le 3,\ x\text{는 정수}\}$
공변역 $codom(R) = B = \{x \mid 1 \le x \le 5,\ x\text{는 짝수}\}$
치역 $ran(R) = \{2, 4\}$

## 3 정의역, 공변역, 치역

◆ 예시 1

(풀이)



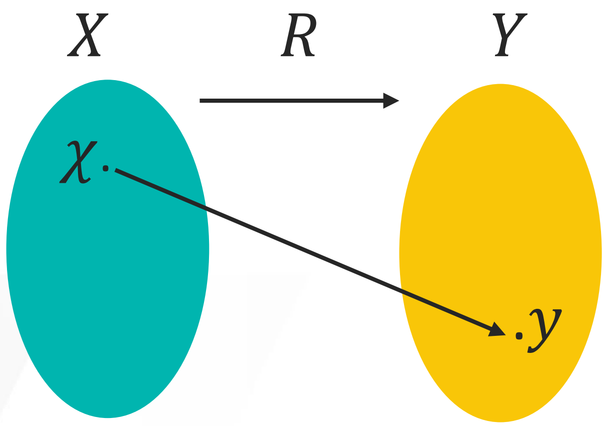

[관계 그래프]

# 2 관계의 표현

# 2 관계의 표현

## 1 화살표 도표

- $x \in X,\ y \in Y,\ (x, y) \in R$

$\Leftrightarrow$ 

## 1 화살표 도표

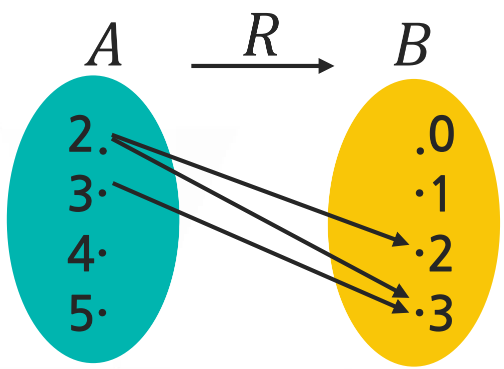
◆ 예시

$A = \{2, 3, 4, 5\}$ , $B = \{0, 1, 2, 3\}$

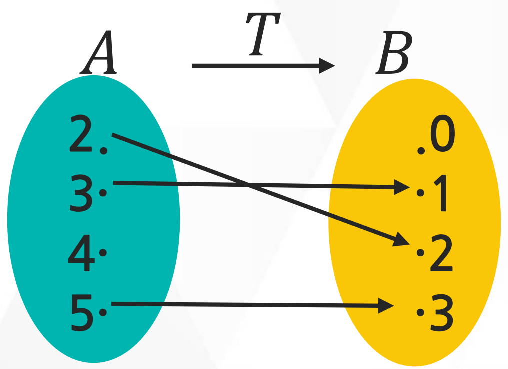
(1) $(a, b) \in A \times B$에 대해, $(a, b) \in R$이기 위한 필요충분조건은 $a \le b$

(2) $T = \{(2, 2), (3, 1), (5,3)\}$

(풀이)




(1)




(2)

## 2 부울행렬

- $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_m\}$ , $Y = \{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$
  $(x_i, y_j) \in R$

  $\Leftrightarrow$ m × n 부울행렬 $M_R = (a_{ij})$

  $$a_{ij} = \begin{cases} 0 \ ((x_i, y_j) \notin R) \\ 1 \ ((x_i, y_j) \in R) \end{cases}$$

# 2 관계의 표현

## 2 부울행렬

◆ 예시 1

집합 A={a, b, c, d}, B={1, 2, 3, 4}일 때 A에서 B로의 관계가
R={(a. 2), (a, 3), (b, 1), (b, 4), (c, 2), (c, 3), (d, 2)}일 때
관계 R을 부울행렬로 나타내시오

(풀이)
A에서 B로의 관계이므로 행에는 A 집합의 원소를,
열에는 B 집합의 원소를 대응시키면 됨

따라서 1행에는 a, 2행에는 b, 3행에는 c,
4행에는 d를 대응시키고 1열에는 1,
2열에는 2, 3열에는 3, 4열에는 4를 대응시킴

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

[관계 행렬]

## 2 부울행렬

◆ 예시 2
관계 T를 부울행렬로 나타내시오

A = {1, 2, 3}
T = {(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2)}

(풀이)

$$M_T = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

# 3 관계의 성질/역관계/합성관계

# 3 관계의 성질/역관계/합성관계

## 1 관계의 성질

### 정의

- 집합 A에서의 관계 R이

(1) 반사성(Reflexive)

$$\forall \mathbf{a} \in \mathbf{A}, (\mathbf{a}, \mathbf{a}) \in \mathbf{R}$$

(2) 대칭성(Symmetric)

$$\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{A}, (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \mathbf{R} \Longrightarrow (\mathbf{b}, \mathbf{a}) \in \mathbf{R}$$

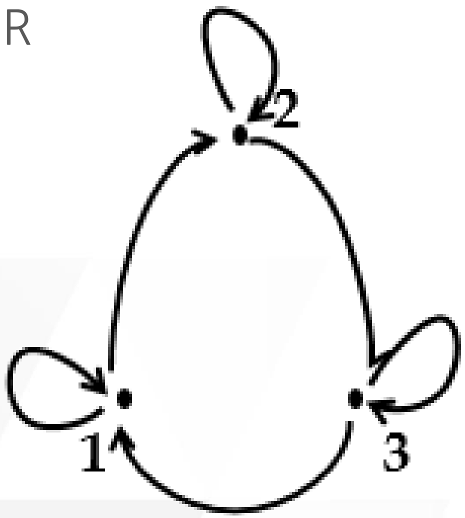
(3) 추이성(Transitive)

$$\big((\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \mathbf{R} \wedge (\mathbf{b}, \mathbf{c}) \in \mathbf{R}\big) \Longrightarrow (\mathbf{a}, \mathbf{c}) \in \mathbf{R}$$

## 1 관계의 성질

- 예시
  다음 관계 R, T의 성질을 확인하시오

(1) R

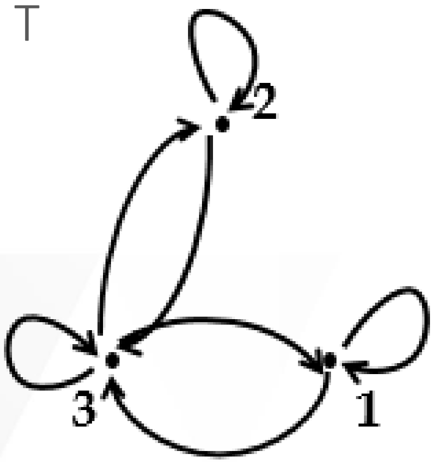



(풀이) ① 반사성이 있다
② 대칭성이 없다
③ 추이성이 없다

## 1 관계의 성질

- 예시
  다음 관계 R, T의 성질을 확인하시오

(2) T




(풀이) ① 반사성이 있다
② 대칭성이 있다
③ 추이성이 없다

## 2 역관계

- 역관계 $R^{-1}$은 관계 R이 존재할 때만 만들 수 있음

- 관계 R의 정의역은 $R^{-1}$의 치역이 되고
  관계 R의 치역은 $R^{-1}$의 정의역이 됨

## 2 역관계

집합 A에서 B로의 관계 R에 대한 역관계는
B에서 A로의 관계를 말함

- 관계 R의 순서쌍의 앞, 뒤 원소를 바꾸면 역관계가 되며 $R^{-1}$ 로 나타내고 다음과 같이 정의함

$$R^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in R\}$$

# 3 관계의 성질/역관계/합성관계

## 2 역관계

- 예시 1
  두 집합 A = {1, 3, 5} , B = {3, 7, 9} 일 때
  관계 R = {(1, 3), (3, 7), (3, 9), (5, 1), (5, 9)} 이면
  관계 R의 역관계 $R^{-1}$은 무엇인지 구하시오

  (풀이)
  역관계는 원래 관계에서 순서쌍의 앞, 뒤 순서를
  바꾸면 됨

  $R^{-1}$ = {(3, 1), (7, 3), (9, 3), (1, 5), (9, 5)}

## 2 역관계

- 예시 2
  집합 A = {1, 2, 3, 4} 일 때 A X A에 대하여
  (a, b) ∈ R인 관계 R가 성립하려면 a+b가 5로 나누어 떨어져야 한다

  ① R, R의 정의역, R의 치역을 구하시오
  ② $R^{-1}$, $R^{-1}$의 정의역, $R^{-1}$의 치역을 구하시오

  (풀이)

  ① R = {(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)}
  R의 정의역 dom(R) = {1, 2, 3, 4}
  R의 치역 ran(R) = {1, 2, 3, 4}

  ② $R^{-1}$ = {(4, 1), (3, 2), (2, 3), (1, 4)}
  $R^{-1}$의 정의역 dom(R) = {1, 2, 3, 4}
  $R^{-1}$의 치역 ran(R) = {1, 2, 3, 4}

# 3 관계의 성질/역관계/합성관계

## 2 역관계

예시 3
집합 A에서 B로의 관계 R이 다음과 같이 정의되었을 때
R의 역관계를 구하시오

$\mathrm{A} = \{1, 2, 3, 4\}, \mathrm{B} = \{-1, 0, 1, 2\}$
$\mathrm{R} = \{(x, y) \mid y = x - 2, x \in A,\ y \in B\}$

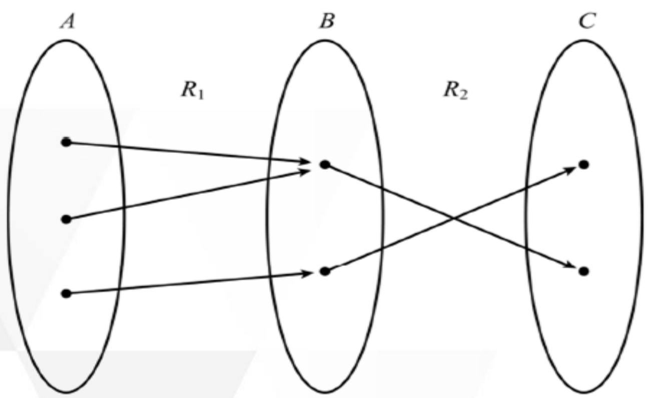
(풀이)

$$\begin{aligned} \mathrm{R}^{-1} &= \{(y, x) \mid y = x - 2, x \in A, y \in B\} \\ &= \{(-1, 1), (0, 2), (1, 3), (2, 4)\} \end{aligned}$$

## 4 합성관계(Composition Relation)

- $R_1$은 A에서 B로의 관계이고 $R_2$는 B에서 C로의 관계일 때 합성관계 $R_2 \cdot R_1$은 $R_1$을 적용한 후 $R_2$를 적용하여 A에서 C로의 관계를 만든 것임

- $R_2 \cdot R_1 = \{(a, c) \mid$ 어떤 b는 $(a, b) \in R_1$이고 $(b, c) \in R_2\}$




<합성관계 $R_2 \cdot R_1$ >

## 4 합성관계(Composition Relation)

- 예시 1
  집합 $A = \{a, b, c\}, B = \{1, 2\}, C = \{c, d\}$일 때
  $R_1 = \{(a, 1), (b, 2), (c, 1)\}$,
  $R_2 = \{(1, d), (2, c)\}$일 때 합성관계 $R_2 \cdot R_1$를 구하시오.

  (풀이)
  (a, 1)과 (1, d)에서 (a, d), (b, 2)와 (2, c)에서 (b, c),
  (c, 1)과 (1, d)에서 (c, d)를 구할 수 있음

  따라서 $R_2 \cdot R_1 = \{(a, d), (b, c), (c, d)\}$임

## 4 합성관계(Composition Relation)

- 예시 2
  집합 A에서 집합 B로의 관계가 R이고, 집합 B에서
  집합 C로의 관계가 S 일 때 S·R을 구하시오.

  $A = \{a, b, c, d\}, \quad B = \{1, 2, 3, 4\}, \quad C = \{x, y, z, w\}$
  $R = \{(a, 2), (b, 1), (c, 4), (d, 3)\}$
  $S = \{(1, x), (2, z), (3, y), (4, w)\}$

  (풀이)

  $S \cdot R = \{(a, z), (b, x), (c, w), (d, y)\}$

## 5 반순서(Partial Ordering)

- 집합 A에 대한 관계 R가 반사성, 반대칭성, 추이성이 성립하면 관계 R를 반순서 관계라고 함

$_aR_a$ (반사성)

$_aR_b$이고 $_bR_a$이면 $a = b$ (반대칭성)

$_aR_b$이고 $_bR_c$이면 $_aR_c$ (추이성)

## 5 반순서(Partial Ordering)

◆ 예시 1

집합 $A = \{1,2,3\}$ 일 때 다음 관계 R은 반순서 관계인지 판별하시오.

$$R = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,2),(2,3),(3,3)\}$$

(풀이) 반순서 관계가 성립하려면 반사성, 반대칭성, 추이성이 모두 존재해야 함

- 반사성 : (1, 1), (2, 2), (3, 3)이므로 반사성이 성립
- 반대칭성 : 관계의 순서쌍이 같은 값으로 이루어진 것을 제외하면 (a, b)와 (b, c)가 존재하지 않으므로 반대칭성이 성립함

## 5 반순서(Partial Ordering)

- 예시 1
  집합 $A = \{1, 2, 3\}$ 일 때 다음 관계 R는 반순서 관계인지 판별하시오

$R = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,2),(2,3),(3,3)\}$

(풀이) - 추이성 성립 : (1, 1), (1, 2) → (1, 2)
(1, 1), (1, 3) → (1, 3)
(1, 2), (2, 2) → (1, 2)
(1, 2), (2, 3) → (1, 3)
(1, 3), (3, 3) → (1, 3)
(2, 2), (2, 3) → (2, 3)
(2, 3), (4, 3) → (2, 3)

## 5 반순서(Partial Ordering)

- 예시 1
  집합 $A = \{1, 2, 3\}$ 일 때 다음 관계 R는 반순서 관계인지 판별하시오

$$R = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,2), (2,3), (3,3)\}$$

(풀이) - 추이성 성립 : 
(1, 1), (1, 2) → (1, 2)
(1, 1), (1, 3) → (1, 3)
(1, 2), (2, 2) → (1, 2)
(1, 2), (2, 3) → (1, 3)
(1, 3), (3, 3) → (1, 3)
(2, 2), (2, 3) → (2, 3)
(2, 3), (4, 3) → (2, 3)

=> 반사성, 반대칭성, 추이성이 모두 존재하므로 반순서 관계임

## 6 동치관계(Equivalence Relation)

- 관계 R이 반사성, 대칭성, 추이성을 갖는 경우
  집합 A에 속하는 두 원소 a, b가 $_aR_b$이면 a와 b는
  그 관계하에서 동치, 즉 같은 것이라고 할 수 있음