1 특수한 그래프

1 특수한 그래프

1 평면 그래프(Planar Graph)

- 그래프 G=(V, E)를 평면에 그릴 때 정점이 아닌 곳에서는 어떤 간선도 교차하지 않는 그래프
- 그래프의 모든 변을 서로 교차하지 않게 그릴 수 있는 그래프

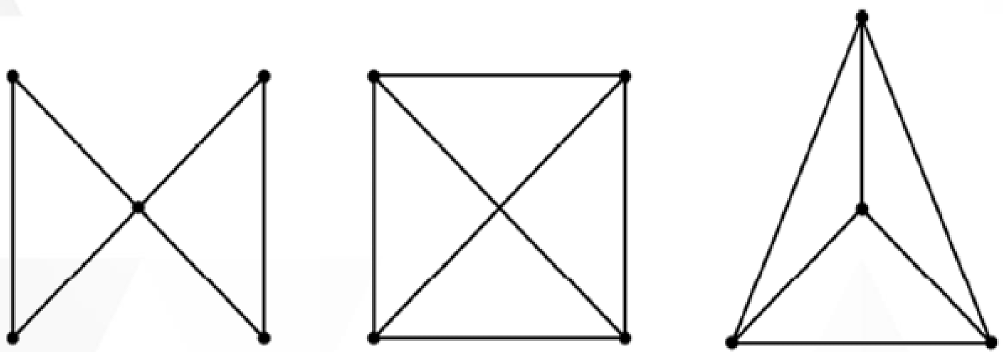
※ 평면 그래프

- 교차하는 간선이 존재하지 않는 그래프를 평면 그래프라고 하고, 교차하는 간선이 존재하는 그래프를 비평면 그래프라고 함

1 특수한 그래프

1 평면 그래프(Planar Graph)

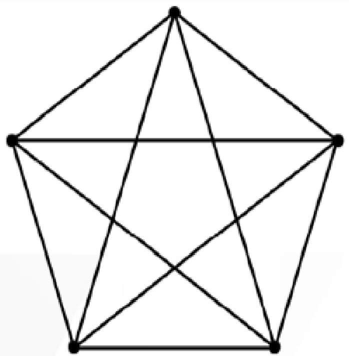
평면 그래프의 예

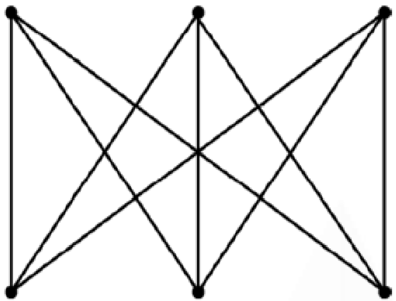


1 특수한 그래프

1 평면 그래프(Planar Graph)

평면 그래프가 아닌 예



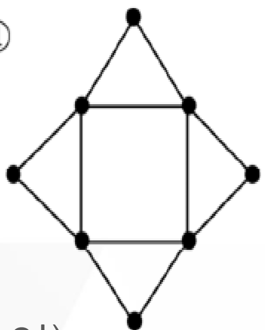


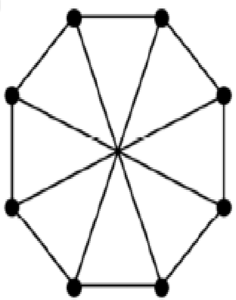
1 특수한 그래프

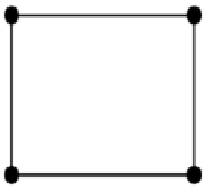
1 평면 그래프(Planar Graph)

예시 1

다음에서 평면 그래프를 모두 찾으시오.

①


②


③


(풀이)
①, ③ 그래프는 정점 이외의 위치에서는 교차하는 간선이 없으므로 평명 그래프이며 ② 그래프는 교차하는 간선이 존재하므로 평면 그래프가 아님

1 특수한 그래프

2 오일러의 공식

- 그래프 G가 평면 그래프일 때 정점의 수를 v,
  간선의 수를 e, 그래프 G에 의해 평면상에 형성되는
  영역의 수를 r라고 하면 다음이 성립

- $r = e - v + 3$

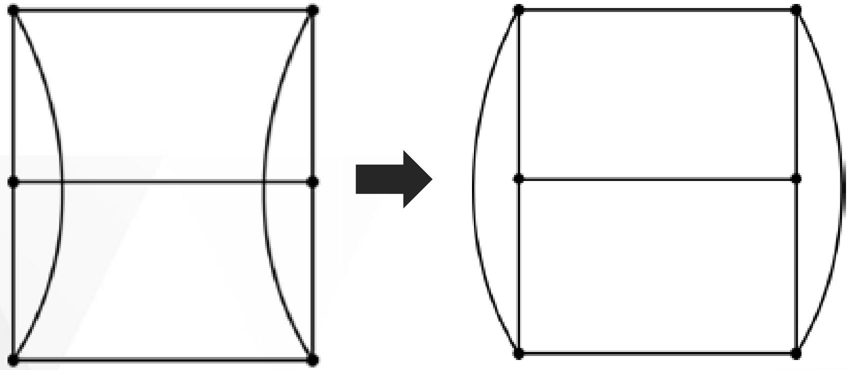
  이를 오일러 공식이라고 함

1 특수한 그래프

2 오일러의 공식

◆ 예시 1

다음 그래프가 평면 그래프인지 판별하고
오일러의 공식이 성립하는지 증명하시오.

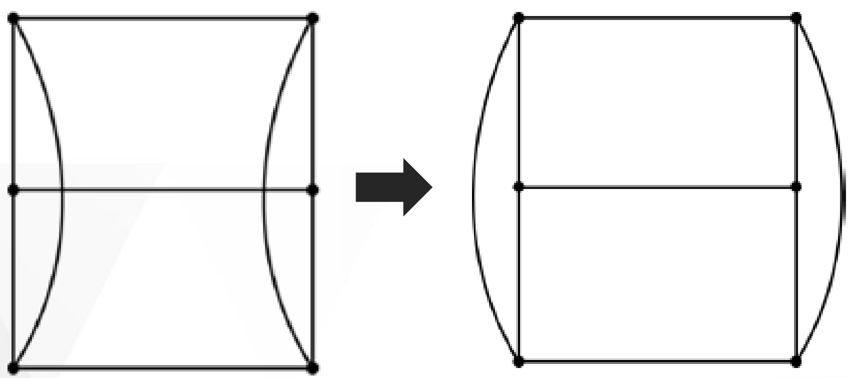


(풀이)
주어진 그래프는 다음과 같은
그래프로 변경할 수 있는데
간선이 교차하는 부분이 없으므로
평면 그래프

2 오일러의 공식

예시 1

다음 그래프가 평면 그래프인지 판별하고
오일러의 공식이 성립하는지 증명하시오.



(풀이)
오일러 공식은 r=e-v+2인데
주어진 그래프의 정점의 수 v=6,
간선의 수 e=9, 영역의 수 r=5이므로
5=9-6+2

그러므로 5=5가 되어 오일러 공식 성립

1 특수한 그래프

3 정규 그래프(Regular Graph)

※ 정규 그래프

- 그래프 G=(V, E)에 대하여,
  모든 정점의 차수가 같으면 정규 그래
- $\deg(v_1) = \deg(v_2) = , \cdots , = \deg(v_n) = r$

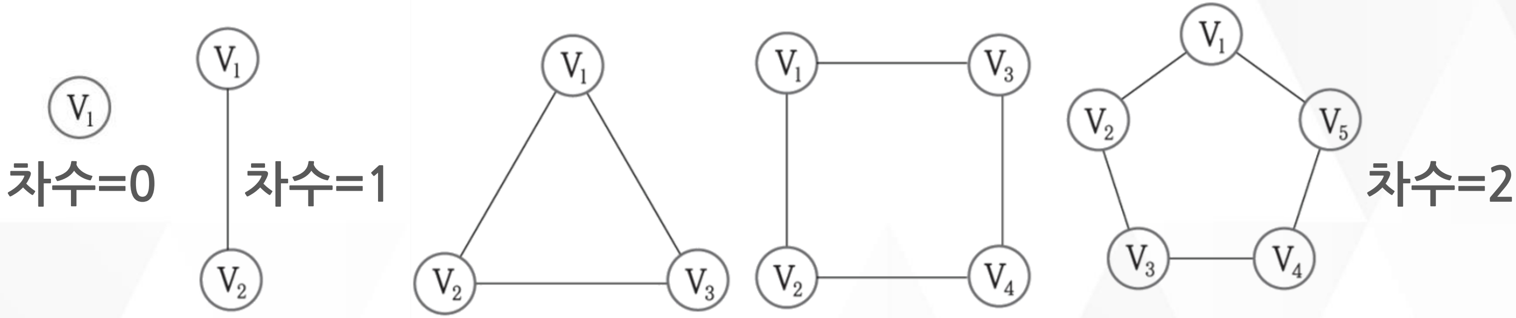
◆ n개의 정점을 갖는 정규 그래프 G는
N=$\frac{1}{2}(r + r + r + \ \ldots + r) = \frac{1}{2}nr$ 을 만족하며,
이때 정규 그래프의 차수를 r 이라고 함

1 특수한 그래프

3 정규 그래프(Regular Graph)

◆ 예시 1

차수가 0, 1, 2인 정규 그래프를 나타내면 다음과 같다.



➡ 차수가 2인 정규 그래프는 정점의 개수에 따라 무수히 많음

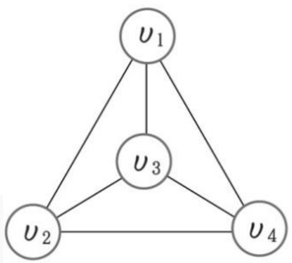
4 입체 그래프(Cubic Graph)

- 차수가 3인 정규 그래프를 입체 그래프라 함

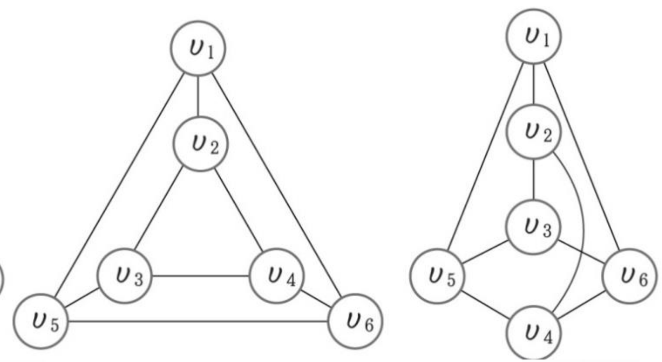
4 입체 그래프(Cubic Graph)

◆ 예시 1

정점의 개수가 4, 6, 12인 경우 입체 그래프



정점이 4



정점이 6

➡ 입체 그래프의 정점의 개수는 짝수개

1 특수한 그래프

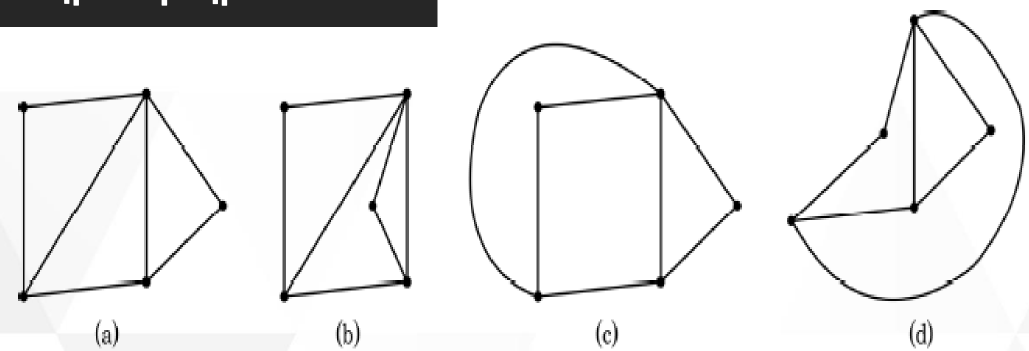
5 동형 그래프(Isomorphic Graph)

- 모양과 생김새는 다르지만 두 그래프가 똑같은 정점과 똑같은 간선으로 구성되어 있는 그래프
- 그래프를 구성하는 정점과 간선이 같다면 다양한 형태의 동형 그래프가 존재 가능
- 두 그래프가 동형 그래프가 되려면 정점의 개수, 간선의 개수, 정점의 차수, 사이클의 길이 등이 같아야 함

5 동형 그래프(Isomorphic Graph)

- 그래프 $G = (V, E)$가 있을 때
  $G' = (V', E')$에 대해 함수 $f : V \rightarrow V'$가 u, v ∈ V에
  대해 (u, v)∈ $E \leftrightarrow (f(u), f(v)) \in E'$인 전단사함수일 때
  그래프 $G = (V, E)$와 $G' = (V', E')$는 동형 그래프

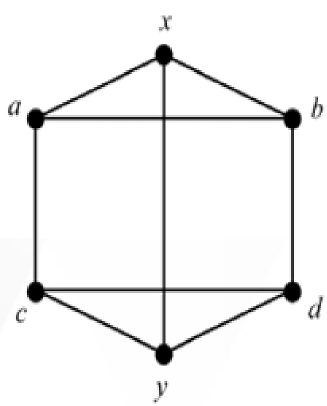
동형 그래프의 예



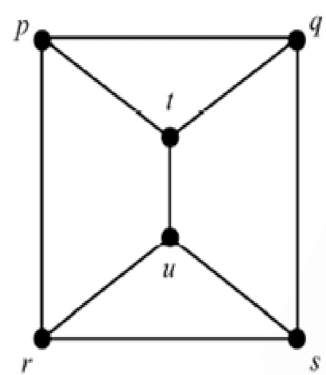
5 동형 그래프(Isomorphic Graph)

예시 1

다음 두 그래프 G와 H가 동형 그래프인지 식별하시오.



$G = (V, E)$



$H = (W, F)$

5 동형 그래프(Isomorphic Graph)

예시 1

다음 두 그래프 G와 H가 동형 그래프인지 식별하시오.

(풀이)
동형 그래프는 근본적으로 동일한 구조를 갖는 그래프는 말하는데 일단 그래프의 모양만 보면 서로 다른 그래프라고 생각하지만 각 정점들의 차수를 정리한 후 차수가 같은 값들 사이를 간선으로 고려하여 대응시키면서 다음과 같은 함수 f를 정의할 수 있음

$$f(a) = p, f(b) = q, f(c) = r,$$
$$f(d) = s, f(x) = t, f(y) = u$$

5 동형 그래프(Isomorphic Graph)

예시 1

다음 두 그래프 G와 H가 동형 그래프인지 식별하시오.

(풀이)
이때 함수 f는 전단사함수이므로 E에 속하는 임의의 간선을 선택했을 때 그 간선에 대응하게 되는 간선의 쌍이 F에 존재함

예를 들어
$(\mathrm{a},\mathrm{b}) \in E$이면 $(f(a), f(b)) = (p, q) \in F$이고 그 역도 성립

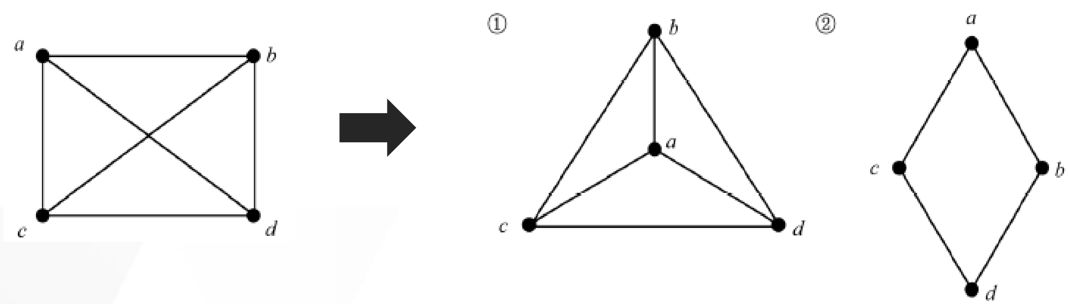
따라서 두 그래프 G와 H는 서로 동형 그래프

1 특수한 그래프

5 동형 그래프(Isomorphic Graph)

예시 2

다음 그래프가 ①, ②의 그래프와 동형 그래프인지 구분하시오.



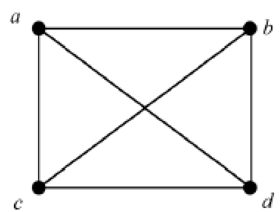
(풀이) ① 동형 그래프
두 그래프는 모두 정점의 개수 4개,
간선의 개수 6개이며 정점의 차수도 동일함

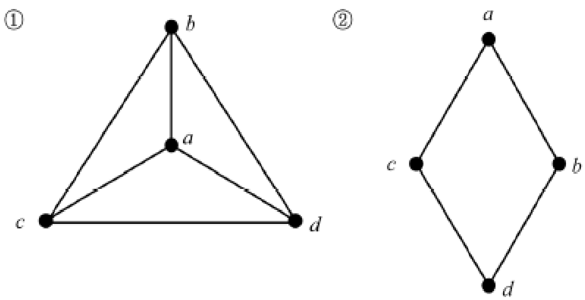
1 특수한 그래프

5 동형 그래프(Isomorphic Graph)

◆ 예시 2

다음 그래프가 ①, ②의 그래프와 동형 그래프인지 구분하시오.





(풀이) ② 동형 그래프가 아님
두 그래프는 정점의 개수는 4개로 같지만
간선의 수는 서로 다르므로 동형 그래프가 아님

2 오일러 사이클

1 오일러 경로(Eulerian Path)

- 그래프 G=(V, E)에서 각 간선을 정확하게 한 번씩만 경유해서 그래프의 모든 간선을 지날 수 있는 경로가 존재한다면 그래프 G는 **오일러 경로**를 갖는다고 함

- 그래프의 정점 v에서 시작해 모든 간선을 꼭 한 번씩 지나 v로 돌아오는 경로를 **오일러 사이클**이라고 함

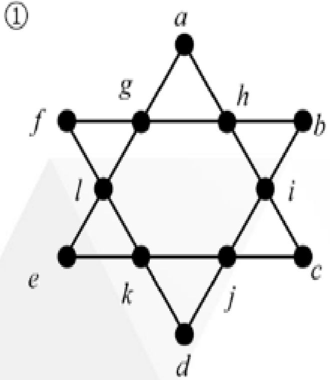
2 오일러 그래프(Eulerian Graph)

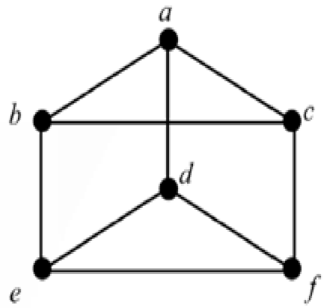
- 오일러 사이클을 포함하는 그래프 G=(V, E)
- 오일러 경로, 오일러 사이클에서는 정점에 상관없이 모든 간선을 반드시 한 번씩 지나야 함
- 그래프 G가 오일러 경로를 갖기 위한 필요충분조건은 그래프 G가 연결 그래프이고 홀수 차수의 정점이 0 또는 2개인 것임

2 오일러 그래프(Eulerian Graph)

예시 1

다음 그래프가 오일러 경로나 오일러 사이클을
갖고 있는지 설명하시오.

① 

② 

(풀이)

① 각 정점의 차수는 다음과 같음

$\mathrm{d}(a) = d(b) = d(c) = d(d) = d(e) = d(f) = 2$

$\mathrm{d}(g) = d(h) = d(i) = d(j) = d(k) = d(l) = 4$

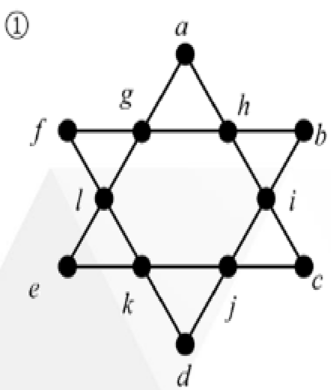
각 정점의 차수는 짝수이고 오일러 사이클을 갖는 오일러 그래프

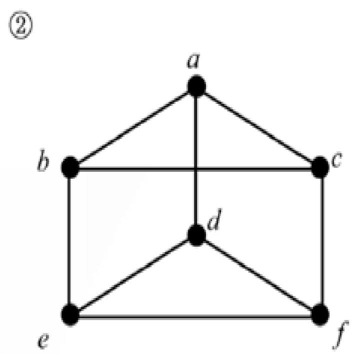
예) $a - h - b - i - c - j - d - k - e - l - f - g - l - k - j - i - h - g - a$

2 오일러 그래프(Eulerian Graph)

예시 1

다음 그래프가 오일러 경로나 오일러 사이클을
갖고 있는지 설명하시오.





(풀이)

② 각 정점의 차수는 다음과 같음

$d(a) = d(b) = d(c) = d(d) = d(e) = d(f) = 3$

따라서 각 정점의 차수는 홀수이고 오일러 경로와 오일러 사이클을 갖지 않음

3 그래프 이론에서 가장 중요한 문제

- 주어진 그래프에서 어떻게 원하는 경로나 사이클 등을 찾느냐 하는 방법
- 모든 도시를 방문해야 하는 판매원의 경우 각 도시를 한 번씩만 거칠 때 가장 경제적임

  - 이러한 문제 해결을 위해 그래프가 각 정점을 정확히 한 번만 경유하는 경로를 갖고 있는지 여부를 알 수 있다면 매우 유용
  - 즉, 방문할 도시들은 정점으로 표현할 수 있으며 각 도시를 정확히 한 번만 경유하는 최적의 방문 경로를 찾는 데 목적이 있음

3 해밀턴 경로와 해밀턴 사이클

3 해밀턴 경로와 해밀턴 사이클

1 해밀턴 경로(Hamilton Path)

- 어떤 두 정점에 인접하는 간선이 존재하지 않더라도 다른 정점들과 간선들을 통해 두 정점이 연결되면 두 정점 간의 경로가 존재하는 것임
- 그래프 G=(V, E)가 주어진 모든 정점들을 정확하게 한 번만 경유하는 하나의 경로가 있는 그래프를 해밀턴 경로가 존재한다고 함

  - 만약 G=(V,E)가 $n \geq 3$인 정점을 갖는 단순 그래프라고 할 때, 서로 인접하지 않은 두 정점 u와 v사이에 $\deg(u)+\deg(v) \geq n$이 성립하면 그래프 G는 해밀턴 경로를 갖음

3 해밀턴 경로와 해밀턴 사이클

2 해밀턴 사이클(Hamilton Cycle)

- 연결된 그래프가 각 정점을 정확히 한 번만 경유하는 경로인 사이클
- 그래프에서 모든 정점들을 포함하는 사이클

※ 해밀턴 그래프

- 해밀턴 사이클을 갖는 모든 그래프

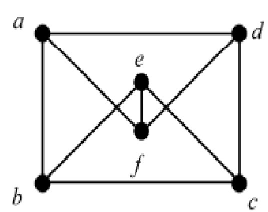
3 해밀턴 경로와 해밀턴 사이클

3 해밀턴 경로와 해밀턴 사이클 예시 문제

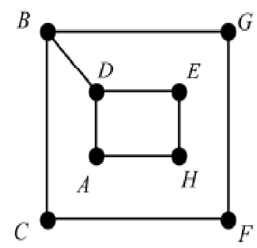
예시 1

다음 그래프에서 해밀턴 경로나 해밀턴 사이클이 있는지 구하시오.

①



②



(풀이) ① 해밀턴 경로의 예 : a-b-e-f-d-c
해밀턴 사이클의 예 : a-f-d-c-e-b-a
따라서 해밀턴 경로와 해밀턴 사이클 모두 존재함

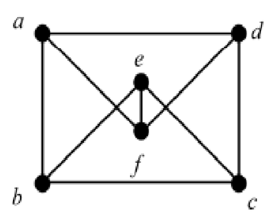
3 해밀턴 경로와 해밀턴 사이클

3 해밀턴 경로와 해밀턴 사이클 예시 문제

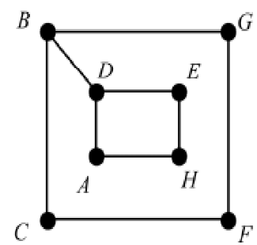
- 예시 1

다음 그래프에서 해밀턴 경로나 해밀턴 사이클이 있는지 구하시오.

①



②



(풀이) ② 해밀턴 경로의 예 : C-F-G-B-D-A-H-E
해밀턴 사이클은 B 또는 D를 두 번씩 지나야 하므로 존재하지 않음, 따라서 해밀턴 경로만 존재함