1 함수의 개념

1 함수의 개념

1 함수

집합을 구성하는 모든 원소가 다른 집합의 원소에 각각 한번씩만 대응(Mapping)되는 관계

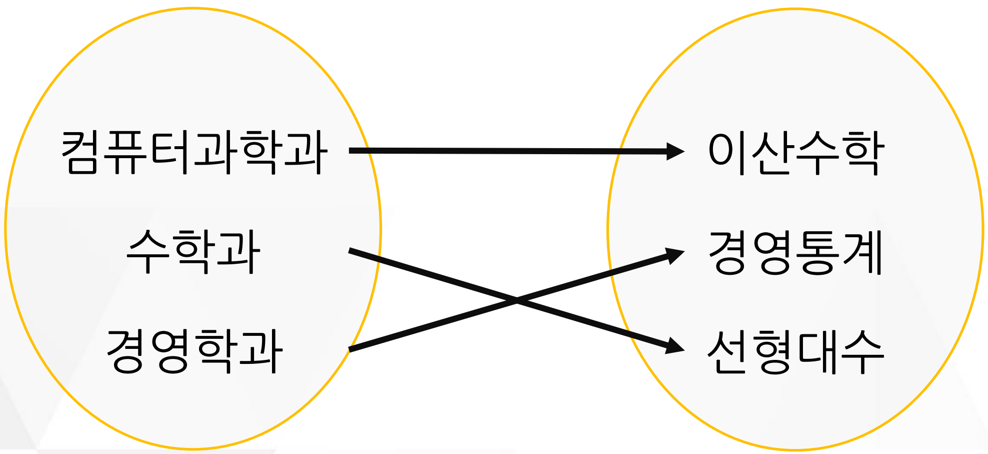
- 함수는 컴퓨터로 복잡한 문제를 해결할 때 사용할 수 있으며 세부적으로 응용되는 범위가 넓기 때문에 컴퓨터과학 분야에서 매우 중요함

1 함수의 개념

1 함수

- 함수의 정의역과 공변역의 대응 관계에 따라 단사 함수, 전사함수, 전단사함수로 나눔

- 함수의 예



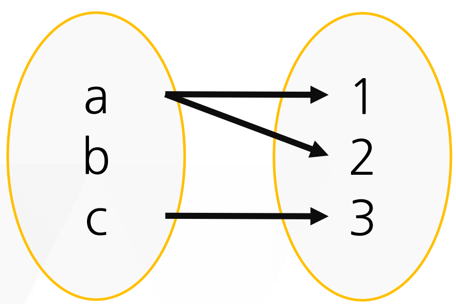
1 함수의 개념

1 함수

◆ 예시 1

다음 그림이 나타내는 대응관계를 보고 함수인지
아닌지 구분하시오.

①



① 함수가 아님
이유는 집합 A의 원소 a가 집합 B의 원소 1과 2에 두 번 대응 되었기 때문임. 또한 정의역인 집합 A의 원소 b는 집합 B의 원소에 대응되지 않았기 때문임

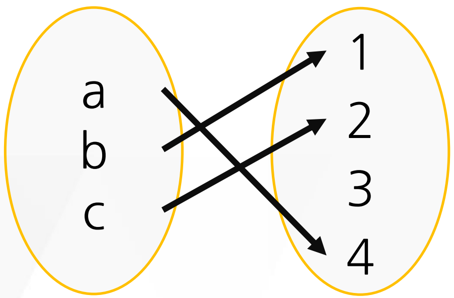
1 함수의 개념

1 함수

예시 1

다음 그림이 나타내는 대응관계를 보고 함수인지 아닌지 구분하시오.

②



② **함수임**
집합 A의 모든 원소가 집합 B의 원소에 한 번씩 대응되었기 때문임

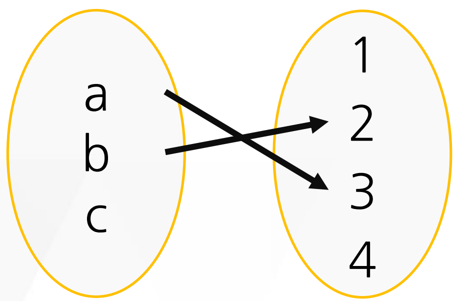
1 함수의 개념

1 함수

◆ 예시 1

다음 그림이 나타내는 대응관계를 보고 함수인지 아닌지 구분하시오.

③



③ 함수가 아님
정의역인 집합 A의 원소 c는 집합 B의 원소에 대응되지 않았기 때문임

1 함수의 개념

1 함수

예시 2

집합 $A = \{x, y, z\}$, 집합 $B = \{a, b\}$ 일 때 다음이 함수인지 구분하시오.

① $\{(x, a), (z, b)\}$

[풀이]

함수가 아님
집합 A의 원소 y가 대응되는 집합 B의 원소가 없기 때문임

1 함수의 개념

1 함수

예시 2

집합 $A = \{x, y, z\}$, 집합 $B = \{a, b\}$ 일 때 다음이 함수인지 구분하시오.

② $\{(x, a), (y, b), (z, b)\}$

[풀이]

함수임

집합 A의 모든 원소가 집합 B의 원소에 대응됨

1 함수

◆ 예시 2

집합 $A = \{x, y, z\}$, 집합 $B = \{a, b\}$ 일 때 다음이 함수인지 구분하시오.

③ $\{(x,\ b),\ (y,\ a),\ (y,\ b),\ (z, a)\}$

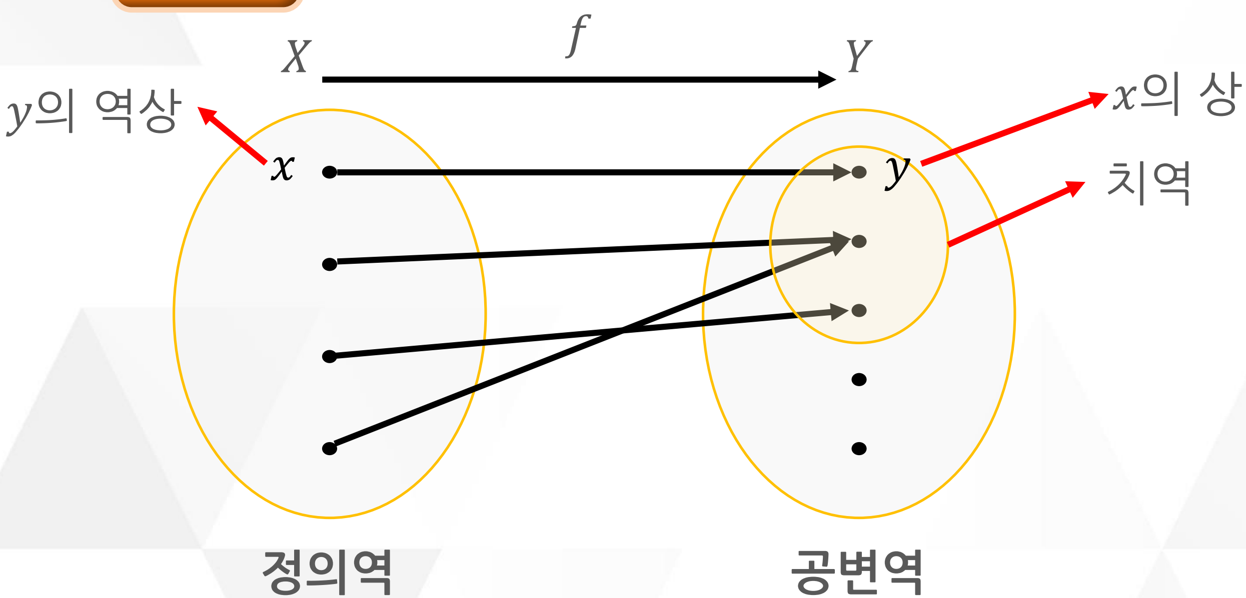
[풀이]

함수가 아님
집합 A의 원소 y가 대응되는 집합 B의 원소가 2개이기 때문임

1 함수의 개념

1 함수

정의



1 함수의 개념

1 함수

정의

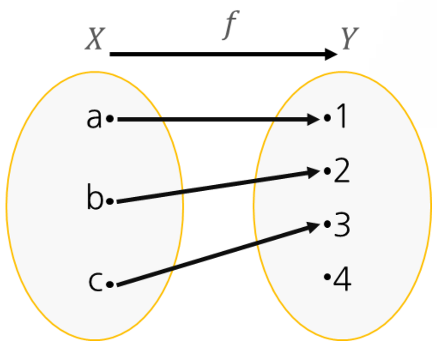
- 상수함수
  - 정의역의 값에 관계없이 항상 동일한 값이 나오는 함수
  - $f : X \to Y,\ \forall x \in X,\ f(x) = c$ (c는 상수)
- 항등함수
  - 어떠한 값을 입력하든 그대로의 값이 나오는 함수
  - $f : X \to X,\ \forall x \in X,\ f(x) = x$
  - I_X

1 함수의 개념

1 함수

◆ 예시 3

다음 물음에 답하시오.
$X=\{a,b,c\}$, $Y=\{1,2,3,4\}$
$f:X\rightarrow Y$가 함수



① f의 정의역과 공변역은?

[풀이]

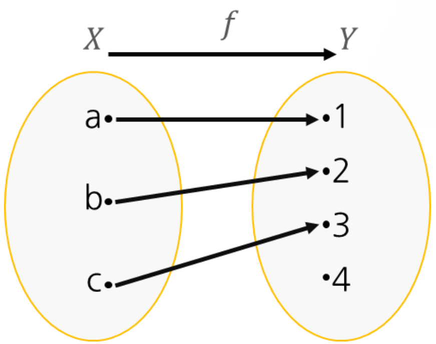
f의 정의역={a, b, c},
공변역={1, 2, 3, 4}

1 함수

◆ 예시 3

다음 물음에 답하시오.
$X=\{a,b,c\}$, $Y=\{1,2,3,4\}$
$f:X\rightarrow Y$가 함수

② 함수 f 의 치역은?



[풀이]

f의 치역={1, 2, 3}

1 함수의 개념

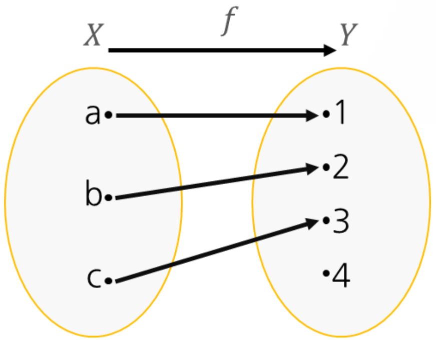
1 함수

예시 3

다음 물음에 답하시오.

$X=\{a,b,c\}$, $Y=\{1,2,3,4\}$

$f:X\rightarrow Y$가 함수



③ $f(a)$, $f(b)$는 각각 무엇인가?

[풀이]

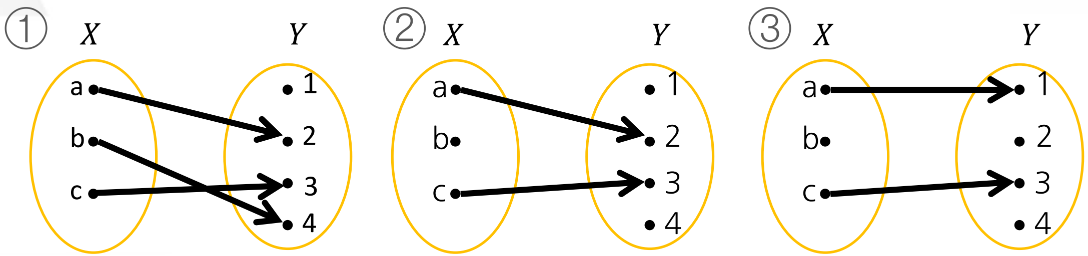
$f(a)=1$, $f(b)=2$

1 함수의 개념

1 함수

예시 4

다음 관계 중 함수인 것을 고르시오.



[풀이]

①만 함수임 ②는 b에 대응되는 원소가 없기 때문에 함수가 아니고, ③는 a에 대응되는 원소가 두 개이기 때문에 함수가 아님

1 함수

예시 5

다음 관계 중 함수를 고르시오.

$A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$

① $R = \{(a, 1), (a, 2), (b, 4)\}$

② $S = \{(a, 2), (b, 4)\}$

③ $T = \{(a, 4), (b, 4), (c, 2)\}$

[풀이]

각각의 관계를 화살표 도표로 나타내면 쉽게
이해할 수 있음. ③번의 관계 T는 함수임
①, ②는 함수의 정의에 위배되므로 함수가 아님

1 함수의 개념

1 함수

예시 6

두 함수 f와 g의 정의역이 X이고,
$f(x) = x^2 - 1$, $g(x) = 8$일 때, $f = g$가 되는 공집합이 아닌 X를 찾으시오.

[풀이]

$$\left(f(x) = g(x)\right) \Rightarrow x^2 - 1 = 8$$
$$\Rightarrow x = \pm 3$$

정의역 X는 $\{3\}, \{-3\}, \{-3, 3\}$ 중 하나

1 함수의 개념

2 함수의 상등

정의

- 정의역과 공변역이 같고 정의역의 모든 원소 x에 대하여 $f(x) = g(x)$의 값이 같을 때, 두 함수 f와 g는 **'상등하다'**라고 함($f = g$로 표시)

2 단사함수, 전사함수, 전단사함수

2 단사함수, 전사함수, 전단사함수

1 단사함수

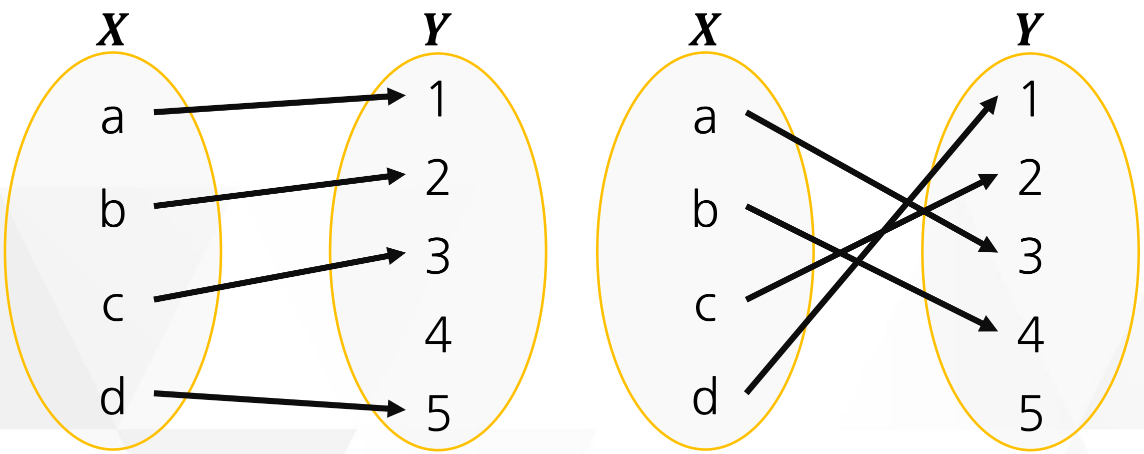
- 일대일 함수
- 정의역의 원소와 대응되는 공변역 원소는 하나 뿐임
- 정의역에 속하는 모든 원소가 서로 다른 공변역의 대응 원소를 가짐

2 단사함수, 전사함수, 전단사함수

1 단사함수

- 정의역의 원소는 공변역의 원소 개수보다 적거나 같고
  치역 원소도 공변역의 원소 개수보다 적거나 같아야 함

- 단사함수의 예



2 단사함수, 전사함수, 전단사함수

1 단사함수

정의

- 함수 $f : X \longrightarrow Y$가 단사함수(Injective Function)

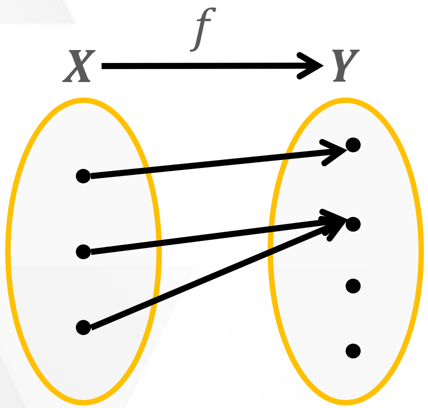
  $\Leftrightarrow \ \forall a, \forall b \in X, \ \ f(a) = f(b) \ \ \Rightarrow a = b$

  $\Leftrightarrow \ \forall a, \forall b \in X, \ \ a \neq b \Rightarrow \ \ f(a) \neq f(b)$

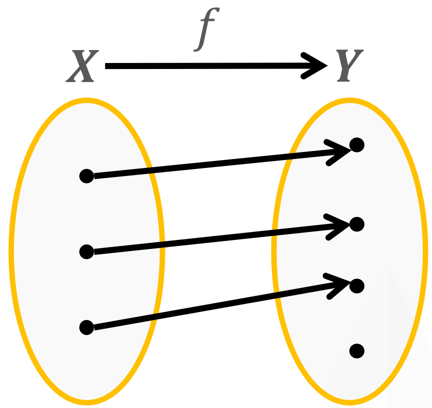
2 단사함수, 전사함수, 전단사함수

1 단사함수

정의



(단사함수가 아님)



(단사함수)

2 단사함수, 전사함수, 전단사함수

1 단사함수

◆ 예시

집합 $A = \{$이산수학, 자바, 자료구조$\}$, 집합 $B = \{30$명

2 단사함수, 전사함수, 전단사함수

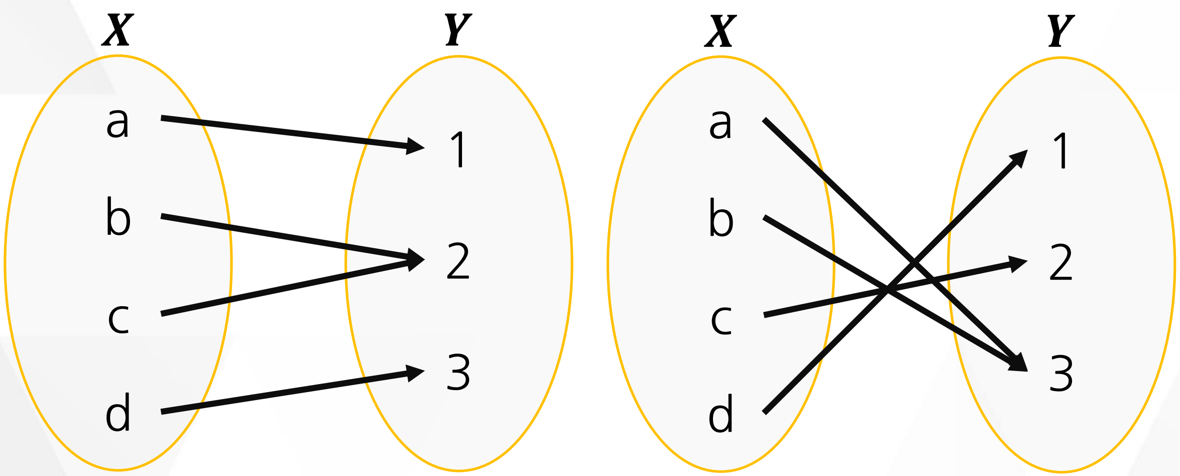
2 전사함수

- 치역과 공변역이 같으며 공변역의 모든 원소가 대응
- 공변역의 모든 원소는 정의역의 원소와 대응
- 하나의 공변역 원소는 두 개 이상의 서로 다른 정의역 원소와 대응될 수도 있음

2 단사함수, 전사함수, 전단사함수

2 전사함수

전사함수의 예



2 단사함수, 전사함수, 전단사함수

2 전사함수

정의

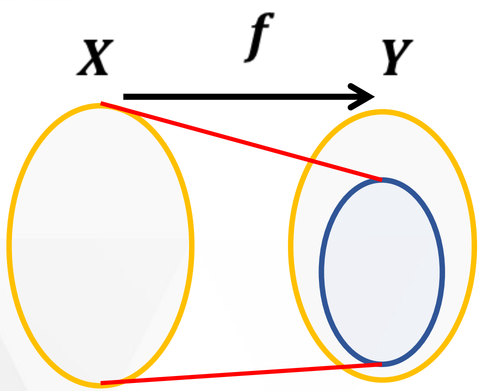
- 함수 $f: X \longrightarrow Y$가 전사함수(Surjective Function)

  $\Leftrightarrow\ \forall y \in Y,\ \exists x \in X,\ f(x) = y$

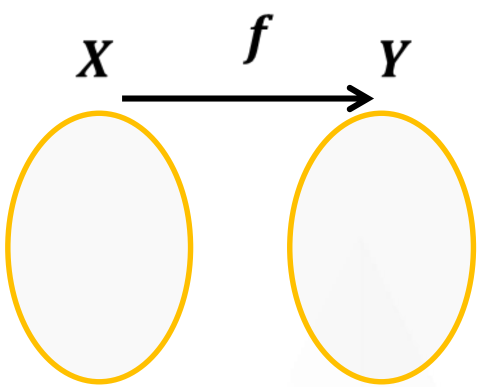
2 단사함수, 전사함수, 전단사함수

2 전사함수

정의



(전사함수가 아님)



(전사함수)

2 단사함수, 전사함수, 전단사함수

2 전사함수

◆ 예시

집합 $A = \{a, b, c, d\}$, 집합 $B = \{x, y, z\}$가 있을 때
함수 f가 $f(a) = x, f(b) = y, f(c) = y, f(d) = z$일 때
이 함수가 전사함수인지 구분하시오.

(풀이) 전사함수임
치역과 공변역이 같으며 공변역 B의 모든 원소가
대응되기 때문임

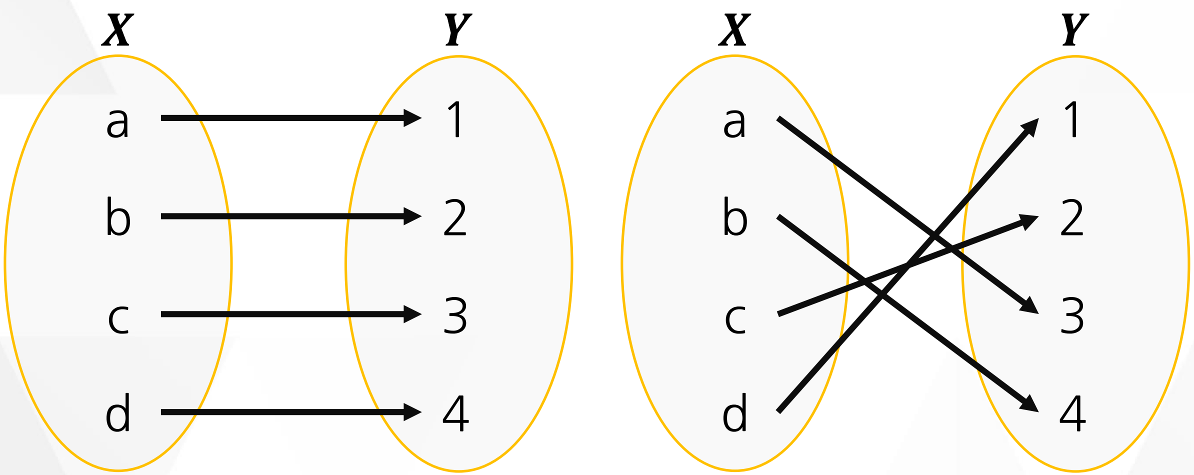
2 단사함수, 전사함수, 전단사함수

3 전단사함수

- 단사함수이면서 전사함수인 함수
- 하나의 정의역 원소가 하나의 공변역 원소와 서로 대응
- 정의역의 원소 개수, 공변역의 원소 개수, 치역의 원소 개수가 같아야 함

3 전단사함수

◆ 전단사함수의 예



3 전단사함수

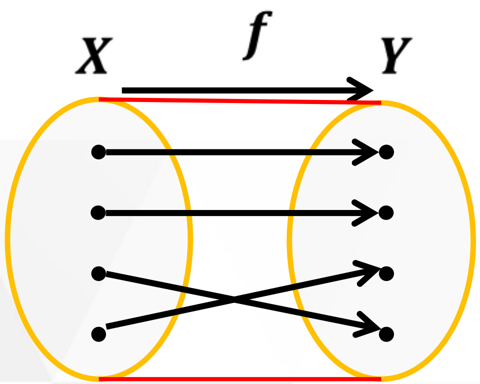
정의

- 함수 $f : X \longrightarrow Y$가 전단사함수(Bijective Function)
  $\Leftrightarrow f$가 전사함수 $\wedge$ f가 단사함수

3 전단사함수

정의

- 전단사함수의 예



3 전단사함수

예시

집합 $A = \{x, y, z\}$ 일 때 $f: A \to A$ 일 때 $f = \{(x, x), (y, y), (z, z)\}$ 일 때 이 함수가 전단사함수인지 구분하시오.

[풀이]

전단사함수임

함수 f는 $f(x) = x, f(y) = y, f(z) = z$이며 정의역의 원소와 대응되는 공변역 원소는 하나뿐이며 일대일함수라 할 수 있으므로 단사함수임

3 전단사함수

◆ 예시

집합 $A = \{x, y, z\}$ 일 때 $f: A \to A$ 일 때 $f = \{(x, x), (y, y), (z, z)\}$ 일 때 이 함수가 전단사함수인지 구분하시오.

[풀이]

또 치역과 공변역이 같으며 공변역의 모든 원소가 대응되므로 전사함수임

따라서 단사함수이면서 전사함수이므로
이 함수는 전단사함수임

3 역함수

3 역함수

1 역함수 f^{-1}

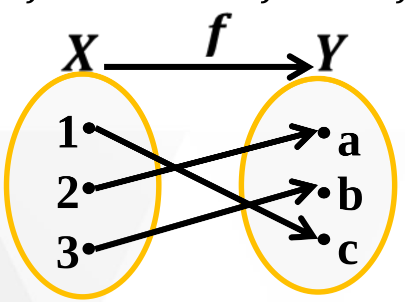
A에서 B로의 함수 $f: A \to B$가 전단사함수이면 역관계는 $\{(b, a) | (a, b) \in f\}$는 B에서 A로의 함수가 되며 f의 역함수 f^{-1} 라 함

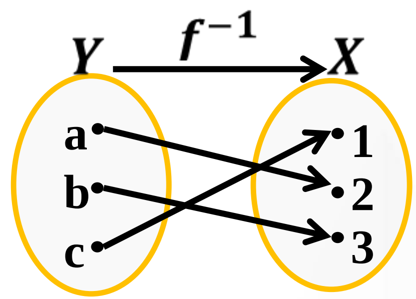
3 역함수

1 역함수 f^{-1}

정의

- 함수 $f: X \longrightarrow Y$가 **전단사함수**일 때
  f의 역관계 f^{-1}를 f의 **역함수**(Inverse Function)





※ 정리 : $(f^{-1})^{-1} = f$

3 역함수

1 역함수 f^{-1}

예시 1

함수 $f: R \longrightarrow R,\ \ f(x) = x - 2$일 때
f의 역함수를 구하시오.

[풀이]

$f(x)$의 값을 y 라 하면,
다음과 같이 x 를 y 로 나타낼 수 있음
$x = y + 2$

따라서 역함수 $f^{-1}(y) = y + 2$ 임

3 역함수

1 역함수 f^{-1}

예시 2

$f: A \longrightarrow B$를 $f(a) = 2a - 3$일 때
역함수 f^{-1}를 구하시오.

[풀이]
$f(a) = 2a - 3$을 $b = 2a - 3$으로 놓음
그럼 다음 a와 b를 서로 바꿔주면 $a = 2b - 3$이
되는데 이를 b에 대한 함수로 변환하면
$2b = a + 3$이며 다시 $b = \frac{a+3}{2}$이 됨
따라서 $f^{-1}(a) = \frac{a+3}{2}$이 됨