1 최소 신장 트리

1 최소 신장 트리

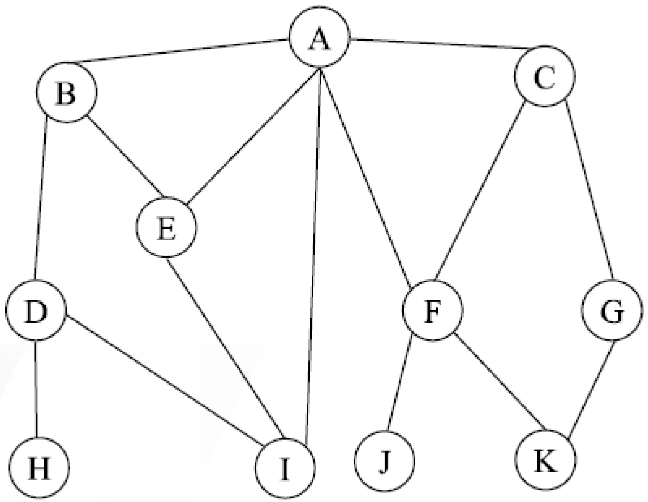
1 신장 트리(Spanning Tree)의 조건

1. 모든 정점을 포함해야 함
2. 모든 정점은 직접, 간접적으로 연결되어야 함
3. 트리의 속성을 만족해야 함

1 최소 신장 트리

2 신장 트리(Spanning Tree)

- 그래프 G의 모든 정점을 노드로 포함하는 트리



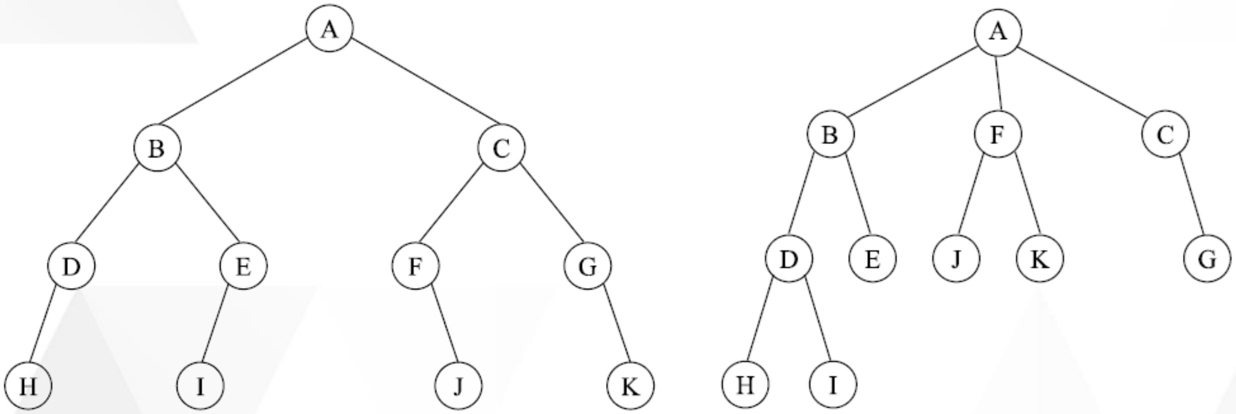
그래프 G

※출처: 컴퓨팅 사고력을 키우는 이산수학, 박주미, 한빛아카데미

1 최소 신장 트리

2 신장 트리(Spanning Tree)

- 그래프 G에 대한 신장 트리의 예



※출처: 컴퓨팅 사고력을 키우는 이산수학, 박주미, 한빛아카데미

1 최소 신장 트리

3 최소 신장 트리(Minimal Spanning Tree)

- 무향 가중치 그래프에서 **신장 트리를 구성하는 간선들의 가중치 합이 최소인 신장 트리**
- 프림(Prim) 알고리즘과 크루스칼(Kruskal) 알고리즘이 대표적
- 신장 트리의 비용을 최소로 만드는 것은 실제 응용 분야에서 경제성이나 효율성 등을 고려할 때 매우 중요한 문제가 됨
- 최소 비용 신장 트리의 해는 유일하지 않음 (여러개 일 수 있음)

3 최소 신장 트리(Minimal Spanning Tree)

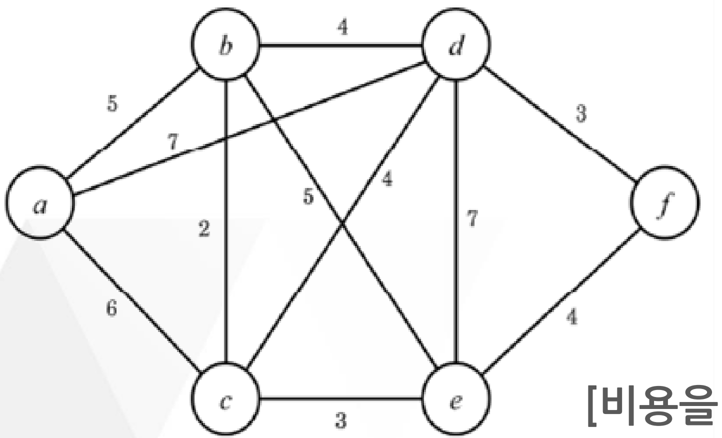
- 예) 본사와 각 지역에 있는 지점의 통신 네트워크를 구성하고자 할 때 네트워크를 어떤 방법으로 구성하느냐에 따라 통신 비용이 달라질 수 있음

3 최소 신장 트리(Minimal Spanning Tree)

- 정의
  - 그래프 G의 모든 변의 가중치의 합을
    총 가중치(Total Weight)라고 했을 때,
    G의 신장 트리 중에서
    총 가중치가 가장 작은 신장 트리를
    최소 신장 트리 (Minimum Spanning Tree)라 함

3 최소 신장 트리(Minimal Spanning Tree)

- 신장 트리의 비용은 트리에 포함된 모든 간선의 가중치를 합한 값이며 최소 신장 트리는 비용이 최소가 되는 신장 트리

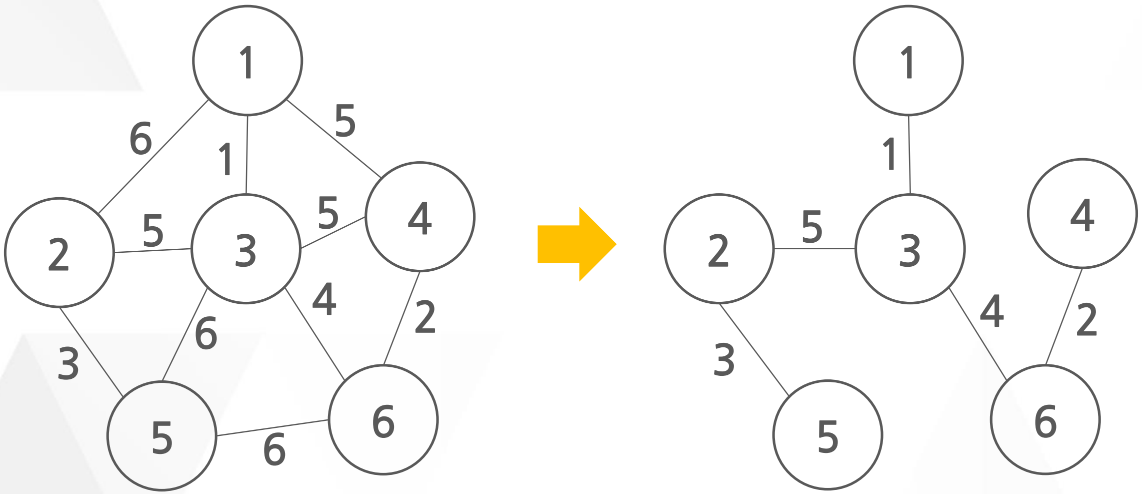


[비용을 가중치로 나타낸 그래프]

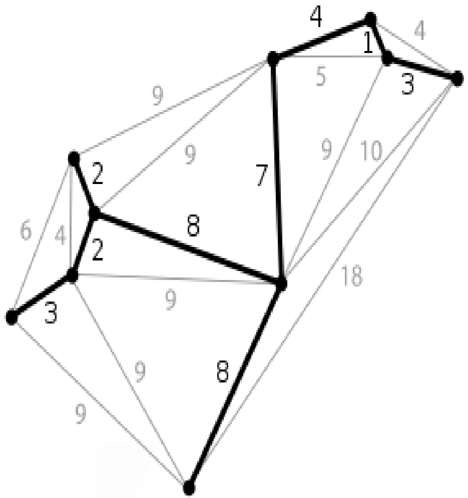
※출처: 이산수학, 류금한, 지식과미래

1 최소 신장 트리

4 최소 신장 트리 예



4 최소 신장 트리 예



- 최소 신장 트리는 정점 간 연결성을 보장하면서 정점 사이를 잇는 거리, 비용 등을 최소로 하는 그래프를 의미하기 때문에 응용 범위가 넓음

※출처: 알기 쉽게 해설한 이산수학, 손진곤, 이한미디어

2 크루스칼(Kruskal) 알고리즘

2 크루스칼(Kruskal) 알고리즘

1 크루스칼 알고리즘

- 사이클을 만들지 않는 범위에서 최소 비용 간선을 하나씩 더해가면서 최소 신장 트리를 만듦
- 이 간선과 연결되어 있지 않은 간선이라도 가중치가 작은 간선을 순서대로 신장 트리에 추가
- 가중치를 기준으로 간선을 정렬한 후에 최소 신장 트리가 될 때까지 하나씩 선택
- 분석 대상 정점에 연결된 간선 가운데 가중치가 최소인 간선을 고르되, 이렇게 추가된 간선으로 그래프가 트리 속성이 깨지지 않는지 여부를 체크하는 방식으로 작동

2 크루스칼(Kruskal) 알고리즘

1 크루스칼 알고리즘

- 가중치가 가장 작은 간선을 차례로 선택하여 정점들을 연결(이 간선과 연결되어 있지 않은 간선이라도 가중치가 가장 작은 간선을 순서대로 신장 트리에 추가)
- 가중치가 같은 간선은 임의로 선택
- 선택된 간선에 의해 사이클이 형성되는 경우는 선택하지 않음
- n개의 정점에 대하여 n-1개의 간선이 연결되면 종료

2 크루스칼(Kruskal) 알고리즘

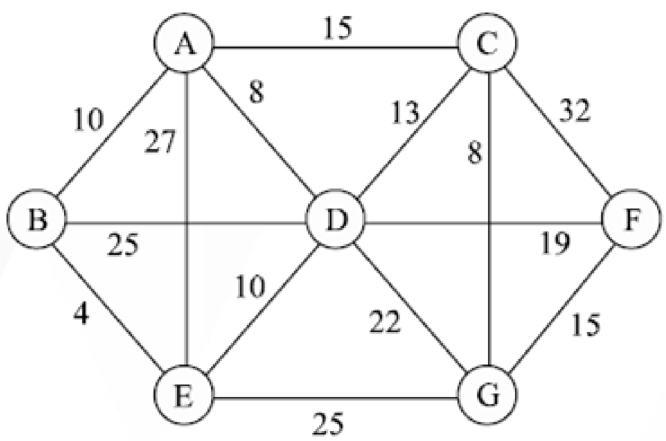
1 크루스칼 알고리즘

```
Kruskal (G, r)
{
    1. T ← Φ ; ▷ T : 신장트리
    2. 단 하나의 정점만으로 이루어진 n개의 집합을 초기화한다;
    3. 간선 집합 Q(=E)를 가중치가 작은 순으로 정렬한다;
    4. while (T의 간선수 < n-1) {
            Q에서 최소비용 간선 (u, v)를 제거한다;
            정점 u와 정점 v가 서로 다른 집합에 속하면 {
                    두 집합을 하나로 합친다;
                    T ← T∪{(u, v)};
            }
    }
}
```

2 크루스칼(Kruskal) 알고리즘

2 크루스칼 알고리즘의 예

- 예) 다음 그래프 G를 보고 크루스칼 알고리즘을 이용해 최소 신장 트리를 작성하고 트리의 가중치를 구하라 (부여된 가중치는 비용임)

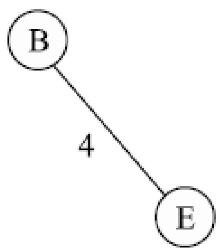


※출처: 컴퓨팅 사고력을 키우는 이산수학, 박주미, 한빛아카데미

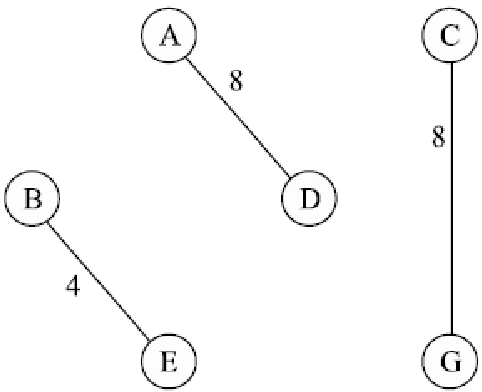
2 크루스칼(Kruskal) 알고리즘

2 크루스칼 알고리즘의 예

- (풀이)
  가중치가 가장 낮은
  정점의 연결은 B-E임



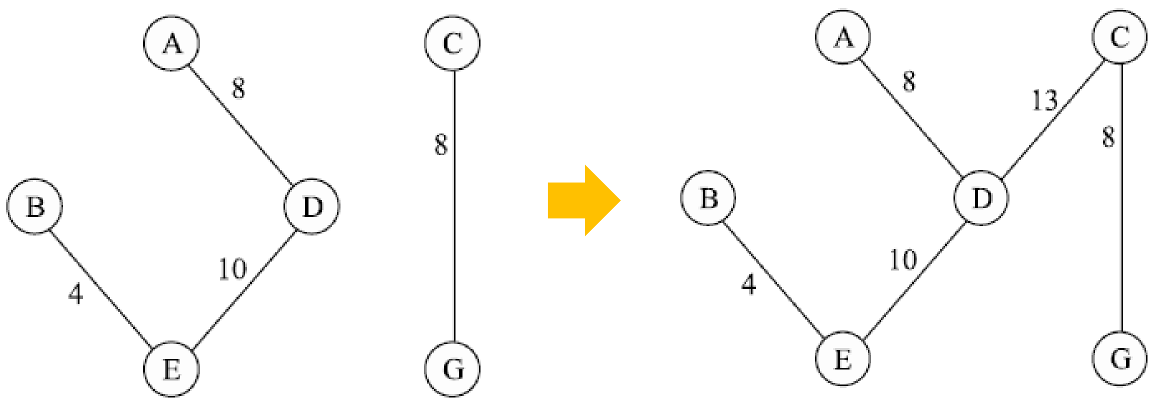
- 두번째로 가중치가 낮은 정점의 연결은 A-D, C-G



※출처: 컴퓨팅 사고력을 키우는 이산수학, 박주미, 한빛아카데미

2 크루스칼 알고리즘의 예

- (풀이) 나머지에 대해서도 다음과 같이 선택해 감



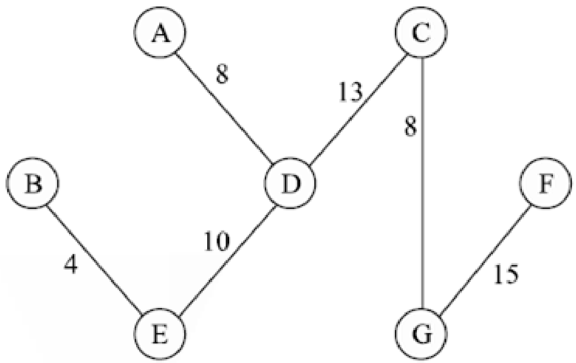
※출처: 컴퓨팅 사고력을 키우는 이산수학, 박주미, 한빛아카데미

2 크루스칼(Kruskal) 알고리즘

2 크루스칼 알고리즘의 예

(풀이)

[최소 신장 트리]

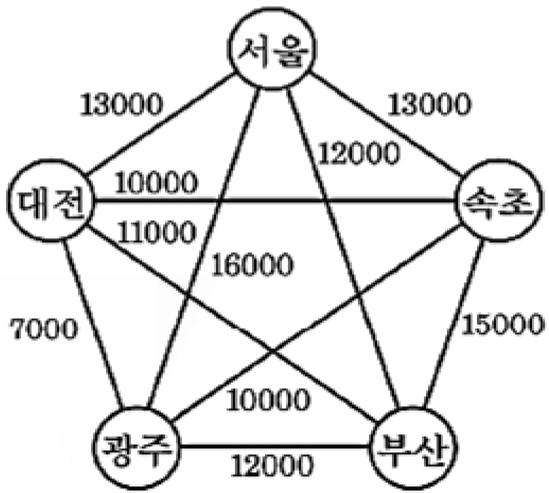


- 최소 신장 트리의 비용 : 4+10+8+13+8+15=58

※출처: 컴퓨팅 사고력을 키우는 이산수학, 박주미, 한빛아카데미

2 크루스칼 알고리즘의 예

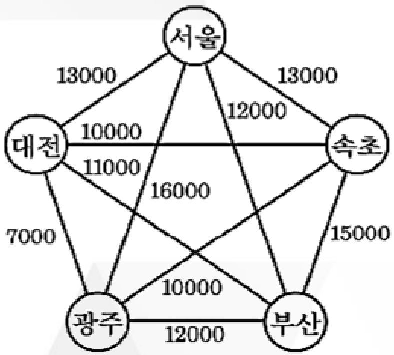
- 예) 크루스칼 알고리즘을 이용하여
  다음 그래프의 최소 신장 트리를 구하시오



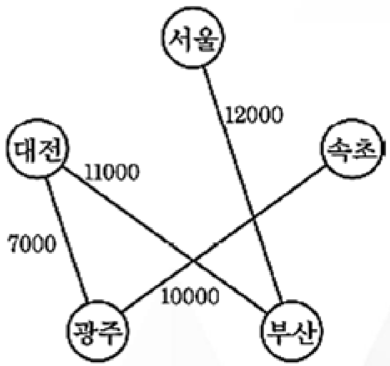
※출처: 이산수학, 류금한, 지식과 미래

2 크루스칼 알고리즘의 예

◆ (풀이)



가중치	간선
7000	{대전, 광주}
10000	{광주, 속초}
10000	{대전, 속초}
11000	{대전, 부산}
12000	{광주, 부산}
12000	{서울, 부산}
13000	{서울, 대전}
13000	{서울, 속초}
15000	{속초, 부산}
16000	{서울, 광주}



※출처: 이산수학, 류금한, 지식과 미래

3 프림(Prim) 알고리즘

3 프림(Prim) 알고리즘

1 프림 알고리즘

- 정점 하나를 기준으로 삼아 연결된 다른 정점으로 갈 때 가장 적은 비용이 드는 정점과 간선으로 이어주며 진행해 나가는 알고리즘

- 맨 처음 정점을 제외하고는 정점을 하나 더할 때마다 간선이 하나씩 확정됨

- 연결된 정점들과 연결된 모든 간선들 중 가중치가 가장 작은 간선을 선택

- 프림 알고리즘과 크루스칼 알고리즘을 통해서 서로 다른 최소 신장 트리가 만들어질 수 있지만 가중치의 합은 둘 다 동일한 최소의 값을 가짐

프림(Prim) 알고리즘

1 프림 알고리즘

- 가중치가 가장 작은 간선을 선택
- 연결된 정점들과 연결된 모든 간선들 중
가중치가 가장 작은 간선을 선택
- 선택된 간선에 의해 사이클이 형성되는 경우는
선택하지 않음
- n개의 정점에 대하여 n-1개의 간선이 연결되면 종료

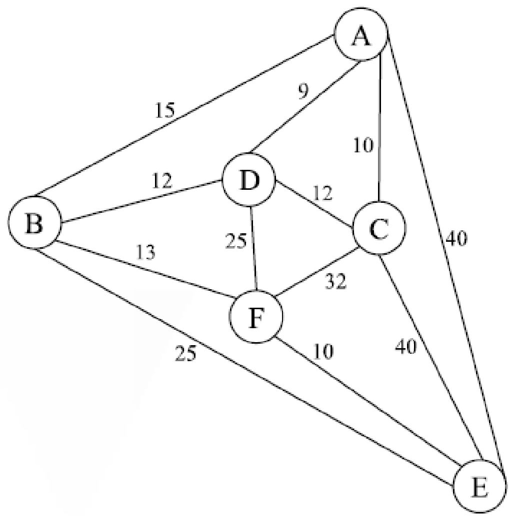
3 프림(Prim) 알고리즘

1 프림 알고리즘

```
Prim(G, r)      ▷ G=(V, E): 주어진 그래프,  ▷ r: 시작으로 삼을 정점
{
      S ← Φ ;                   ▷ S : 정점 집합
      for each u∈V
            d_u ← ∞ ;
      d_r ← 0 ;
      while (S≠V){              ▷ n회 순환된다
            u ← extractMin(V-S, d) ;
            S ← S ∪ {u};
            for each v∈L(u)  ▷ L(u) : u로부터 연결된 정점들의 집합
                  if (v∈V-S and w_uv< d_v) then d_v ←  w_uv ;
      }
}
extractMin(Q, d)
{
      집합 Q에서 d값이 가장 작은 정점 u를 리턴한다 ;
}
```

2 프림 알고리즘의 예

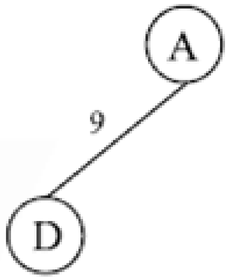
- 예) 다음 그래프의 최소 신장 트리를
  프림 알고리즘을 이용하여 구하시오



※출처: 컴퓨팅 사고력을 키우는 이산수학, 박주미, 한빛아카데미

2 프림 알고리즘의 예

- (풀이)
  간선에 부여된 가중치 중 가장 작은 9를 선택하면
  정점 A와 D가 연결됨

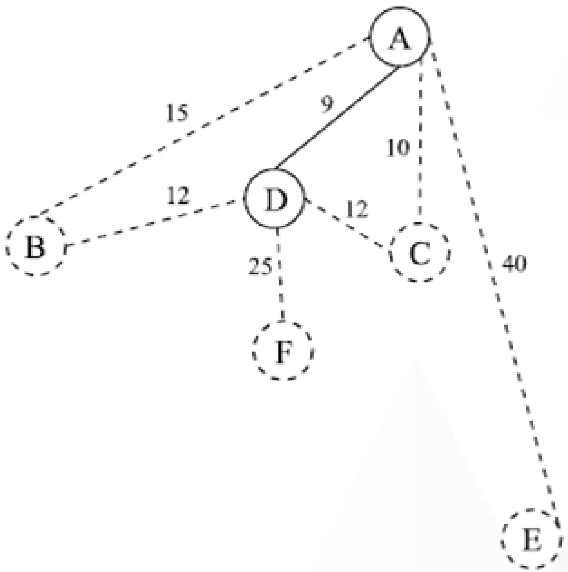


※출처: 컴퓨팅 사고력을 키우는 이산수학, 박주미, 한빛아카데미

2 프림 알고리즘의 예

- (풀이)
  정점 A와 D에 연결된 간선들과 정점들은 점선으로 표시된 것과 같음

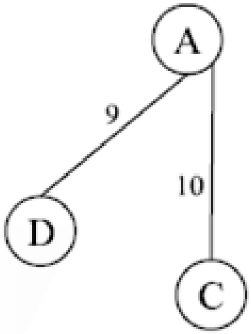
  그 중 가중치가 가장 작은 10을 선택함



※출처: 컴퓨팅 사고력을 키우는 이산수학, 박주미, 한빛아카데미

2 프림 알고리즘의 예

- (풀이)
  다음과 같이 간선이 선택됨

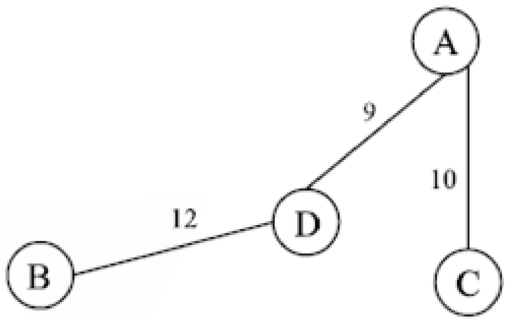


※출처: 컴퓨팅 사고력을 키우는 이산수학, 박주미, 한빛아카데미

3 프림(Prim) 알고리즘

2 프림 알고리즘의 예

- (풀이)
  가중치가 가장 작은 12를 선택함
  (같은 가중치를 갖는 간선이 여러개 일 경우 임의로 선택)

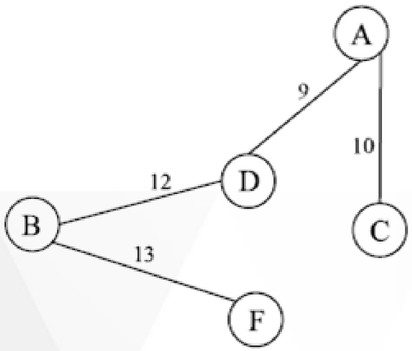


※출처: 컴퓨팅 사고력을 키우는 이산수학, 박주미, 한빛아카데미

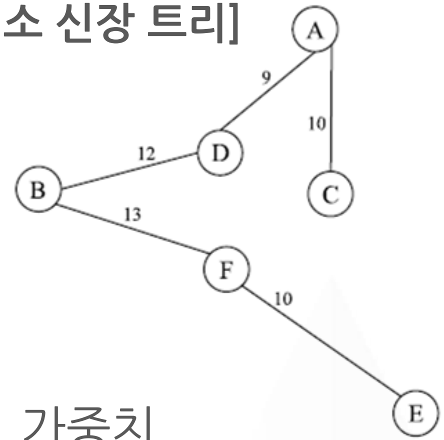
3 프림(Prim) 알고리즘

2 프림 알고리즘의 예

- (풀이)
  나머지에 대해서도 다음과 같이 간선이 선택됨



[최소 신장 트리]



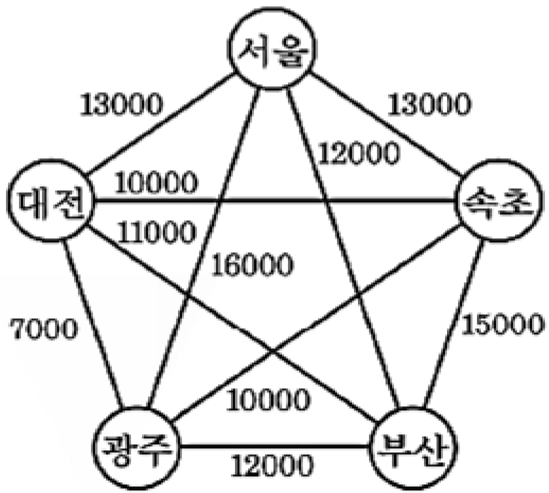
- 가중치
  : 9+10+12+13+10=54

※출처: 컴퓨팅 사고력을 키우는 이산수학, 박주미, 한빛아카데미

3 프림(Prim) 알고리즘

2 프림 알고리즘의 예

- 예) 프림 알고리즘을 이용하여
  다음 그래프의 최소 신장 트리를 구하시오

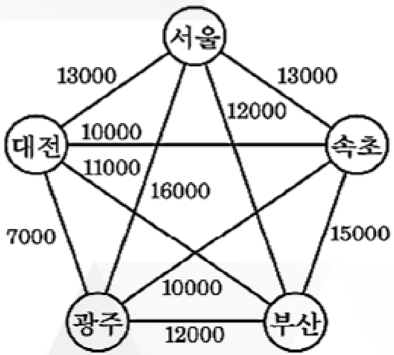


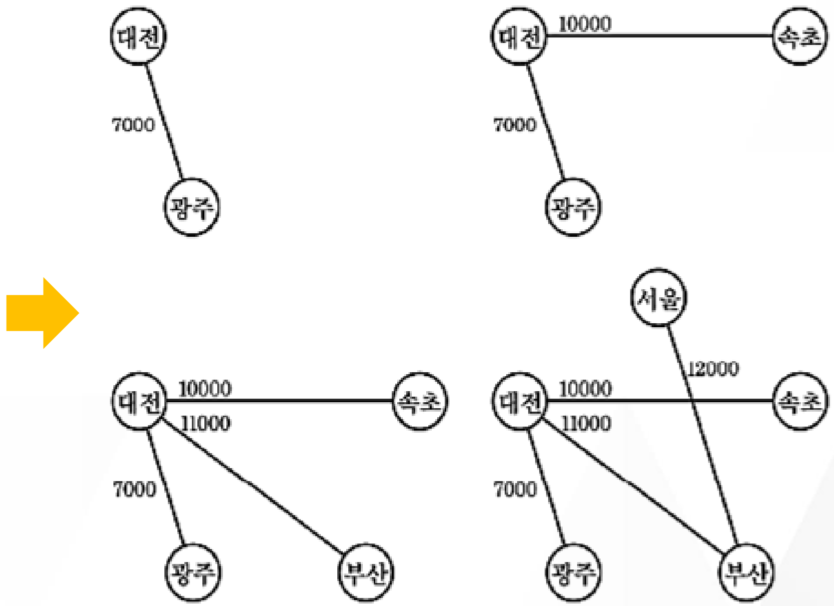
※출처: 이산수학, 류금한, 지식과 미래

3 프림(Prim) 알고리즘

2 프림 알고리즘의 예

- (풀이)





※출처: 이산수학, 류금한, 지식과 미래