1 점화식

1 점화식

1 점화식(Recurrence Relation)

- 수열의 일반항을 한 개 이상의 앞선 항들을 이용하여 나타낸 식
- 이전 항들에 반복 연산하면 다음 항이 됨 (똑같은 일을 반복)
- 수열은 원소들을 일정한 순서로 나열한 형태로 표현
- 이러한 원소들 사이에는 일정한 규칙이 있을 수 있고 원소들의 나열 대신 이 규칙으로 표현할 수도 있으며 이를 점화식이라 함

1 점화식

1 점화식(Recurrence Relation)

- 정의
  - 점화식이란 수열의 항 사이에서 성립하는 관계식

    즉, 수열 $a_1, a_2, \ldots a_{n-1}, a_n, \ldots$ 에서 항 a_n 이
    그전의 항들 $(a_1, a_2, \ldots a_{n-1})$의 함수로 나타낼 경우,
    그 함수를 수열에 관한 점화식이라고 부름
    주어진 수열에 관한 점화식을 푼다(점화식의 해를
    구한다)는 것은 수열의 일반항인 a_n 을 n에 관한
    식으로 나타내는 것을 의미

1 점화식

1 점화식(Recurrence Relation)

- 예) 1, 2, 4, 8, 16, … 와 같은 수열에서 이 수열은 앞의 항에 2를 곱하여 다음 항이 만들어짐 따라서 n번째 수열 a_n 은 앞의 항인 a_{n-1} 에 2를 곱한 형식으로 표현하여 $a_n=2a_{n-1}$

  이와 같이 수열에서 n번째 항 a_n 을 그 앞의 항인 $a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots$ 등에 의해 표현하는 형식을 점화식이라 하며 적절한 처음 몇 항이 주어지면 수열의 모든 항을 구할 수 있음

1 점화식

1 점화식(Recurrence Relation)

◆ 예)

$a_n = k_1 a_{n-1} + k_2 a_{n-2} + k_3 a_{n-3} + \cdots + k_r a_{n-r}$ (k_i는 상수)
$a_n = k a_{n-1} + f(n)$ (k는 상수)

- 점화식으로 수열의 항을 계산하기 위해서는 처음 몇 항이 주어져야 하는데 이러한 처음 몇 항을 점화식의 초기조건이라 함

- 예를 들어 점화식 $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ 을 수열 $\{a_n\}$으로 나타내려면 a_0과 a_1 의 값이 주어져야 하는데 이때 a_0과 a_1 을 이 점화식의 초기조건이라 함

1 점화식

1 점화식(Recurrence Relation)

- 예) 점화식 $a_n=2a_{n-1}$ 이 있고
  이를 수열로 나타내면 다음과 같음

(풀이)
a_1 항을 구하려면 a_0 을 알아야 함
만약 초기항 $a_0=1$ 이라는 조건이 주어지면
$a_1=2a_0$ 이므로 $a_1=2$ 라는 다음 항이 계산됨
이러한 방법으로
수열 1, 2, 4, 8, 16, … 을 얻을 수 있음

1 점화식(Recurrence Relation)

- 예) n명을 일렬로 세우는 방법의 수를 a_n 이라 하자
  a_n 을 a_{n-1} 로 나타내시오, 또 n=6까지 a_n 의 값을 계산하시오

(풀이)
명백하게 a_1 =1, n명을 일렬로 세우기 위해서는 n명 중에
1명을 맨 앞자리에 세우고 나머지 (n-1)명을 그 뒤에 일렬로 세우면 됨.
n명 중에 1명을 맨 앞자리에 세우는 방법의 수는 n이고 나머지 (n-1)명을
그 뒤에 일렬로 세우는 방법의 수는 a_{n-1} 이므로 곱의 법칙에 의하여 $a_n = na_{n-1}$ 임
따라서 n=6까지 a_n 의 값은 다음과 같음

n	1	2	3	4	5	6
$a_n = na_{n-1}$	1	$2\times1=2$	$3\times2=6$	$4\times6=24$	$5\times24=120$	$6\times120=720$

1 점화식

1 점화식(Recurrence Relation)

- 예) 1과 2로 이루어진 n 자릿수 중 1이 연속으로
  나오지 않는 수의 개수를 a_n 이라 할 때 a_n 에 대한
  점화식을 구하시오

(풀이)
1이 연속으로 나오지 않는 한 자릿수는 1, 2이므로
$\mathbf{a_1=2}$ 이고 두 자릿수 12, 21, 22 뿐이므로 $\mathbf{a_2=3}$

일반적으로 처음의 숫자에 따라 다음과 같은
두 가지 경우가 있음

1 점화식(Recurrence Relation)

- 예) 1과 2로 이루어진 n 자릿수 중 1이 연속으로 나오지 않는 수의 개수를 a_n 이라 할 때 a_n 에 대한 점화식을 구하시오.

(풀이)

① 처음의 숫자가 1인 경우

: 1이 연속으로 나올 수 없기 때문에
두 번째 숫자는 2이며 나머지는
1이 연속으로 나오지 않는 (n-2) 자릿수임
그러므로 1이 연속으로 나오지 않으며
처음의 숫자가 1인 경우의 수는 a_{n-2}

1 점화식(Recurrence Relation)

- 예) 1과 2로 이루어진 n 자릿수 중 1이 연속으로 나오지 않는 수의 개수를 a_n 이라 할 때 a_n 에 대한 점화식을 구하시오.

(풀이)

② 처음의 숫자가 2인 경우

: 처음의 숫자를 제외한 나머지는 1이 연속으로 나오지 않는 (n-1) 자릿수이므로 그 개수는 a_{n-1}

1 점화식(Recurrence Relation)

- 예) 1과 2로 이루어진 n 자릿수 중 1이 연속으로 나오지 않는 수의 개수를 a_n 이라 할 때 a_n 에 대한 점화식을 구하시오.

(풀이)
①과 ②는 동시에 일어나지 않으므로
합의 법칙에 의하여

$a_n = a_{n-2} + a_{n-1}(n \geq 3)$, $a_1=2$, $a_2=3$

1 점화식(Recurrence Relation)

- 예) 연금리 8%인 저축상품에 현금 1,000원을 저축하였다. a_n 을 n년 후 원리금이라 할 때 이를 점화식으로 나타내시오.

  (풀이)
  연금리가 8%이므로 1년 후에는 전년도의 1.08배가 됨, n년 후에는 n-1년의 점화식 a_{n-1}에 1.08을 곱하면 됨, 또 최초 1,000원을 갖고 있으므로 초깃값은 1000이 됨

  원리금 $a_n = 1.08a_{n-1}$
  초깃값 $a_0 = 1000$

2 피보나치 수열 점화식

2 피보나치 수열 점화식

1 피보나치 수열 점화식

- 앞의 두 수의 합이 바로 뒤의 수가 되는 수의 배열
- 점화식을 이용한 대표적인 예로
  $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, $a_0 = 1$, $a_1 = 1$ 같이 나타내는
  피보나치 수열이 있음
- n번째의 피보나치 수를 구하는데
  (n-1)번째 값과 (n-2)번째 값을 활용

2 피보나치 수열 점화식

2 피보나치 수열을 이용한 점화식의 예

- 예) 갓 태어난 1쌍의 새끼토끼가 있다.
  새끼토끼 1쌍은 2달 후부터는 매달 암수 1쌍의
  토끼를 낳는다고 가정하자. 1년 후에는 토끼가
  모두 몇 쌍이나 되는지 생각해보고 n번째 달의
  토끼 쌍의 수를 점화식으로 나타내시오
  (단, 모든 토끼는 죽지 않는다고 가정)

2 피보나치 수열 점화식

2 피보나치 수열을 이용한 점화식의 예

- (풀이)
  맨 처음에는 새끼토끼 1쌍이 있었으므로 a_0=1
  1달 후에는 새끼토끼가 자라지만, 새끼토끼는
  2달 후부터 새끼를 낳을 수 있다고 했으므로
  여전히 a_1=1

  다시 1달 후는 비로소 새끼를 낳을 수 있으므로
  1쌍을 낳아 a_2=2가 됨, 같은 방법으로 다시 1달 후에
  어미토끼가 1쌍의 새끼 토끼를 낳지만 이전 달에 낳은
  새끼토끼는 아직 새끼를 낳을 수 없으므로 a_3=3

2 피보나치 수열을 이용한 점화식의 예

- (풀이)
  이를 그림으로 표현하면 다음과 같음

개월	토끼 쌍(새끼토끼(○), 어른토끼(●))	토끼 쌍의 수
시작	○	1
1개월	●	1
2개월	● ○	2
3개월	● ○ ●	3
4개월	● ○ ● ● ○	5
5개월	● ○ ● ● ○ ● ○ ●	8
6개월	● ○ ● ● ○ ● ○ ● ● ○ ● ● ○	13

2 피보나치 수열 점화식

2 피보나치 수열을 이용한 점화식의 예

- (풀이)
  토끼 쌍의 수는 다음과 같은 피보나치 수열로 증가함
  1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ⋯

  n달 후의 토끼 쌍의 수를 a_n이라 할 때

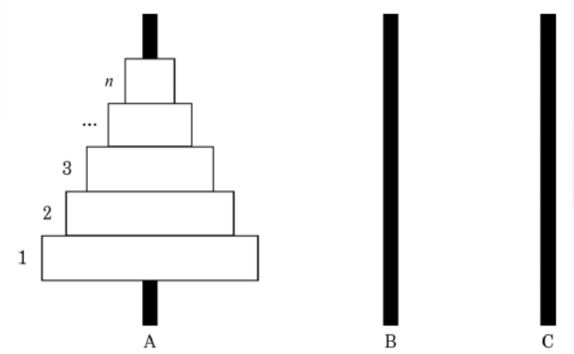
  점화식을 구하면 $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ 이며
  초깃값 $a_0 = 1$, $a_1 = 1$

3 하노이 탑을 이용한 점화식의 예

- 예) **하노이 탑**

크기가 서로 다른 n개의 원판이 크기 순서대로
막대기 A에 끼워져 있다. 다른 2개의 막대기
(B, C)를 이용하여 이 n개의 원판을 다른 막대기
C로 옮길 때 필요한 최소 이동 횟수를 a_n 이라 하자

a_1, a_2 의 값과 a_n 에 대한 점화식을 구하시오
(단, 한 번에 1개의 원판만을 옮길 수 있으며
어떤 원판 위에도 그것보다 큰 원판을 놓지 못함)

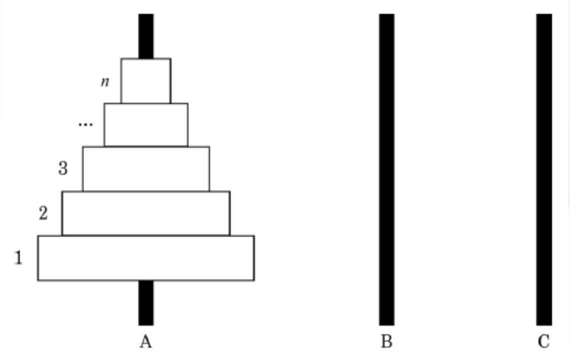


※출처: 이산수학, 류금한, 지식과미래

2 피보나치 수열 점화식

3 하노이 탑을 이용한 점화식의 예

- (풀이)
명백하게 $a_1=1$
n=2라면 위의 작은 원판을 B로 옮긴 다음
남은 큰 원판을 C로 옮기고 다시 B에 있는
원판을 C에 있는 원판 위에 놓으면 되므로 $a_2=3$

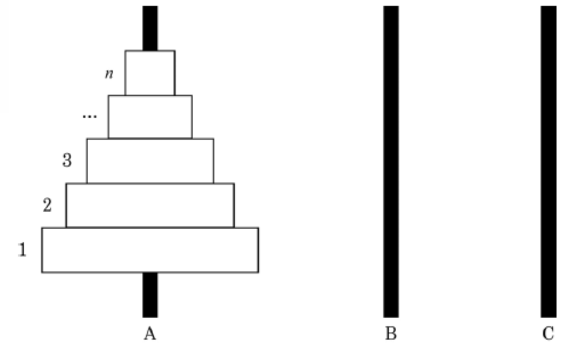


※출처: 이산수학, 류금한, 지식과미래

2 피보나치 수열 점화식

3 하노이 탑을 이용한 점화식의 예

- (풀이) 일반적으로 3단계로 나누어 생각할 수 있음
  ① A에 있는 가장 큰 원판만을 제외하고 나머지 n-1개의 원판을 B로 옮김, 이때 필요한 최소 이동 횟수는 a_{n-1}
  ② A에 남은 가장 큰 원판을 C로 옮김, 물론 필요한 이동 횟수는 1
  ③ B에 있는 n-1개의 원판을 C로 옮김, 이때 최소 이동 횟수는 a_{n-1}



그러므로 n개의 원판을 다른 막대기로 옮길 때 필요한 최소 이동 횟수 a_n은 $\mathbf{a_1 = 1,\ a_n = 2a_{n-1} + 1}$

※출처: 이산수학, 류금한, 지식과미래

3 점화식의 해

3 점화식의 해

1 점화식의 해

- 점화식은 다양한 형태로 나타낼 수 있으며
  문제에 따라 독특한 방법으로 표현하여 해결하기도 함
- 점화식의 해를 구하는 방법에는
  반복법과 상수계수의 선형동차점화식 등이 있음

3 점화식의 해

2 반복법

- 점화식에서 가장 많이 이용되는 방법
- 해를 구하기 위해 앞의 항을 반복적으로 나타내는 방법
- 예를 들어 n번째 항 a_n 의 점화식을 반복법으로 해결하기 위해서는 앞의 항인 a_{n-1}, a_{n-2} , ⋯ 등에 의해 표현하게 되고 a_{n-1}은 다시 a_{n-2}, a_{n-3}, ⋯ 등에 의해 반복적으로 표현함

3 점화식의 해

2 반복법

- 예) 점화식이 $a_n = 3a_{n-1}$, $a_0 = 1000$과 같을 때
  해를 구하시오

(풀이)
점화식의 반복법을 이용하면 다음과 같음

$a_n = 3a_{n-1} = 3^2 a_{n-2} = 3^3 a_{n-3} = \cdots = 3^n a_0$

$a_0 = 1000$ 이므로

$a_n = 3^n a_0 = 3^n \times 1000$

2 반복법

- 예) 다음과 같은 점화식이 있을 때 반복법으로 해를 구하시오

  ① $a_n + 4a_{n-1} = 0,\ a_0=2$

  ② $a_n = a_{n-1} + n,\ a_0=1$

(풀이)

① $a_n = -4a_{n-1}$

$= (-4)^2 a_{n-2}$

$\cdots$

$= (-4)^n a_0$

$=2\,(-4)^n$

② $a_n = a_{n-1} + n$

$= a_{n-2} + (n-1)+n$

$\cdots$

$= a_0 +1+2+3+ \cdots +n$

$= 1 +1+2+3+ \cdots +n$

$= 1+ \dfrac{(n+1)n}{2}$

3 점화식의 해

3 상수계수의 선형동차점화식

- $pa_{n+2} + qa_{n+1} + ra_n = 0$

p+q+r ≠ 0일 때
특성 방정식을 풀어줌

- $px^2 + qx + r = 0$ 의 형태로 변형가능
(이 방정식을 특성 방정식이라 함)

3

점화식의 해

3 상수계수의 선형동차점화식

- $px^2 + qx + r = 0$ 은
이차방정식의 근의 공식을 이용해 근을 구할 수 있음

이차방정식의 두 근을 α, β 라 하면 두 근은 다음과 같음

$$\boxed{\alpha + \beta = -\frac{q}{p},\ \alpha\beta = \frac{r}{p}}$$

$pa_{n+2} + qa_{n+1} + ra_n = 0$

$a_{n+2} + \frac{q}{p}a_{n+1} + \frac{r}{p}a_n = 0$ (p로 나눠줌)

$a_{n+2} + (-\alpha - \beta)a_{n+1} + \alpha\beta a_n = 0$

$\underline{a_{n+2} - \alpha a_{n+1}} = \beta\underline{(a_{n+1} - \alpha a_n)}$

b_{n+2} 로 치환하면

b_{n+1} 이 됨

3 점화식의 해

3 상수계수의 선형동차점화식

- $px^2 + qx + r = 0$ 은
  이차방정식의 근의 공식을 이용해 근을 구할 수 있음

  이차방정식의 두 근을 α, β 라 하면 두 근은 다음과 같음

$$\boxed{\alpha + \beta = -\frac{q}{p},\ \alpha\beta = \frac{r}{p}}$$

$pa_{n+2} + qa_{n+1} + ra_n = 0$

$a_{n+2} + \frac{q}{p}a_{n+1} + \frac{r}{p}a_n = 0$ (p로 나눠줌)

$a_{n+2} + (-\alpha - \beta)a_{n+1} + \alpha\beta a_n = 0$

$a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n)$

b_{n+2} 로 치환하면

b_{n+1} 이 됨

따라서
$b_{n+2} = \beta b_{n+1}$ 의 형태가 됨

(등비수열의 형태로 풀 수 있음)

3 상수계수의 선형동차점화식

◆ 등비수열 점화식의 풀이 방법

$$a_{n+1} = a_n \times f(n)$$

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= \cancel{a_n} \times f(n) \\
\cancel{a_n} &= \cancel{a_{n-1}} \times f(n-1) \\
\cancel{a_{n-1}} &= \cancel{a_{n-2}} \times f(n-2) \\
\cancel{a_{n-2}} &= \cancel{a_{n-3}} \times f(n-3) \\
&\vdots \\
\times)\ \cancel{a_2} &= a_1 \times f(1) \\
\hline
a_{n+1} &= a_1 \times \{f(1) \times f(2) \times \ldots \times f(n)\}
\end{aligned}$$

3 점화식의 해

3 상수계수의 선형동차점화식

- 이렇게 특성 방정식을 이용하면 복잡한 형태의 점화식에 대해서도 일반항을 구할 수 있음