

# 1

## 부울함수의 대수적 간소화

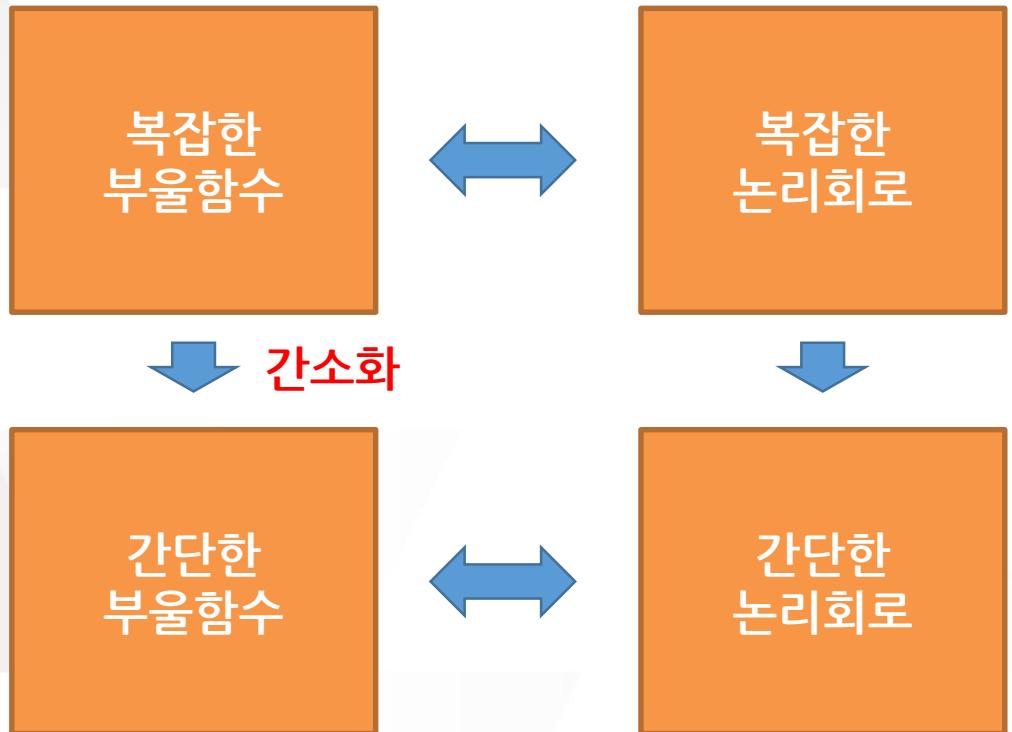
# 부울함수의 대수적 간소화

## 1 논리회로의 간소화

- ◆ 부울대수의 간소화를 통해 논리회로를 구성하는 게이트 수와 입력 변수의 수를 줄일 수 있음
- ◆ 논리회로를 직접 간소화하는 것은 어렵기 때문에 논리회로를 논리식으로 표현한 뒤에 부울대수의 기본 규칙을 이용하여 간소화함
- ◆ 부울대수의 대수법칙을 이용하여 간소화,  
카르노맵 이용하여 간소화

# 부울함수의 대수적 간소화

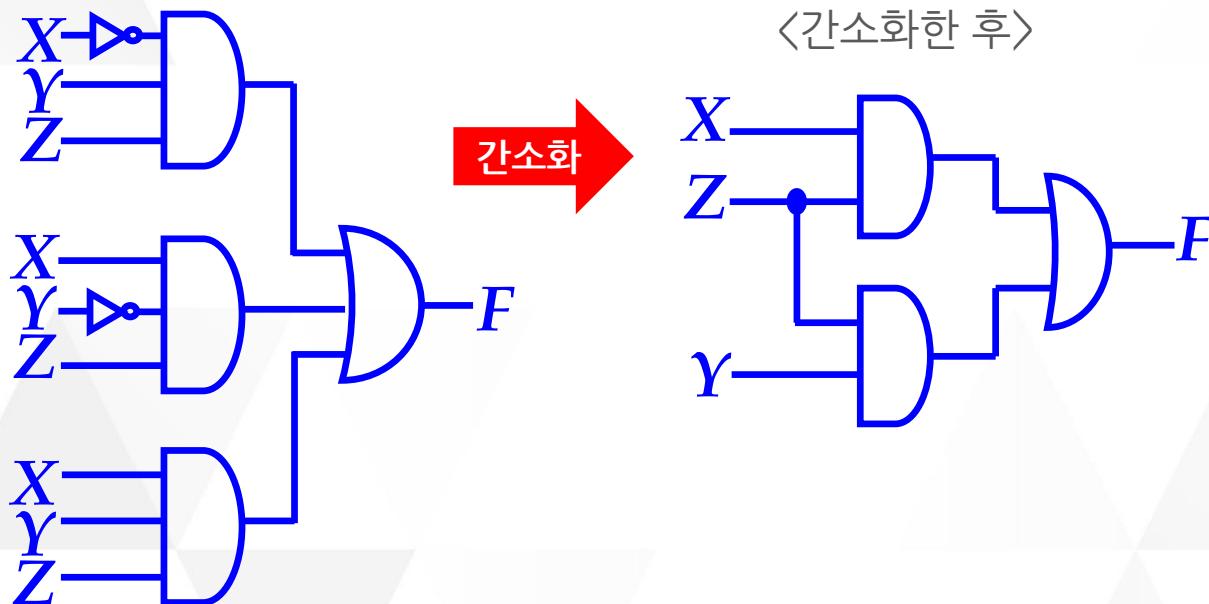
## 간소화 목적



# 1 부울함수의 대수적 간소화

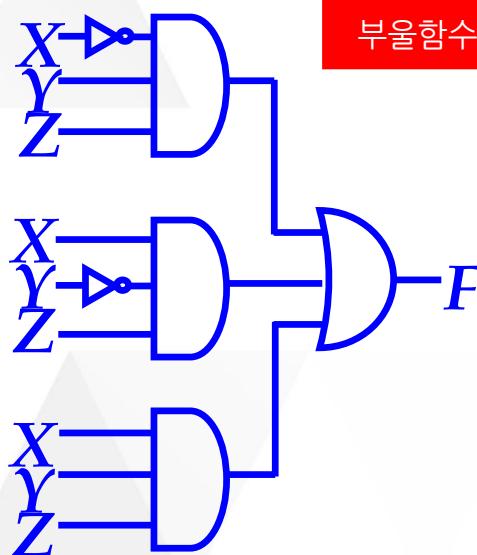
## 2 간소화 목적

<간소화하기 전>



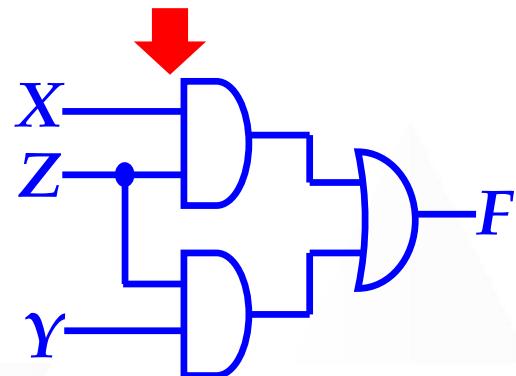
# 1 부울함수의 대수적 간소화

## 2 간소화 목적



부울함수 간소화

$$\begin{aligned}F &= \bar{X}YZ + X\bar{Y}Z + XYZ \\&= \bar{X}YZ + X\bar{Y}Z + XYZ + XYZ \\&= \bar{X}YZ + XYZ + X\bar{Y}Z + XYZ \\&= YZ(\bar{X} + X) + XZ(\bar{Y} + Y) \\&= YZ + XZ\end{aligned}$$



# 부울함수의 대수적 간소화

## 3 부울함수의 대수적 간소화

- ▶ 주어진 부울함수에 대하여 부울대수의 정리를 이용하여 변환한 다음 변환된 여러 함수 중에서 가장 간단한 형태의 함수를 찾아내는 것

# 부울함수의 대수적 간소화

## 4 대수적 간소화 방법

### ① 항결합

- ◆ 두 개의 항을 결합하여 하나의 항으로 만드는 방법
- ◆ 예시
  - $XY + X\bar{Y} = X(Y + \bar{Y}) = X \cdot 1 = X$
  - $F = X\bar{Y} + XYZ + \bar{X}YZ = X\bar{Y} + YZ(X + \bar{X})$   
 $= X\bar{Y} + YZ$

# 부울함수의 대수적 간소화

## 4 대수적 간소화 방법

### ② 문자 소거

◆ 충복된 문자를 제거하는 방법

◆ 예시

- $X + \bar{X}Y = X + Y$   
 $\therefore X + \bar{X}Y = (X + \bar{X})(X + Y) = X + Y$
  
- $X(\bar{X} + Y) = XY$   
 $\therefore X(\bar{X} + Y) = X \cdot \bar{X} + XY = XY$

# 부울함수의 대수적 간소화

## 4 대수적 간소화 방법

### ③ 중복항 첨가

◆ 주어진 함수식의 의미가 변하지 않도록 하면서  
간소화를 위해 적절한 항을 함수식에 첨가시키는 방법

◆ 예시

$$\begin{aligned} F &= X\bar{Y}Z + XYZ + \bar{X}YZ \\ &= X\bar{Y}Z + XYZ + XYZ + \bar{X}YZ \\ &= XZ(\bar{Y} + Y) + YZ(X + \bar{X}) \\ &= XZ + YZ \end{aligned}$$

# 부울함수의 대수적 간소화

## 4 대수적 간소화 방법

### ④ 합의 정리를 활용하는 방법

#### ◆ 합의 정리(Consensus Theorem)

- $XY + \bar{X}Z + YZ = XY + \bar{X}Z$

#### ◆ (증명)

- $$\begin{aligned} XY + \bar{X}Z + YZ &= XY + \bar{X}Z + (X + \bar{X})YZ \\ &= XY + \bar{X}Z + XYZ + \bar{X}YZ \\ &= XY + XYZ + \bar{X}Z + \bar{X}YZ \\ &= XY(1 + Z) + \bar{X}Z(1 + Y) \\ &= XY + \bar{X}Z \end{aligned}$$

# 부울함수의 대수적 간소화

## 4 대수적 간소화 방법

◆ 예시 1

$F = (\bar{X} + Y)(X + Z)$ 를 간소화하시오.

$$\begin{aligned}(풀이) F &= X\bar{X} + \bar{X}Z + YX + YZ \\&= \bar{X}Z + XY + YZ \\&= \bar{X}Z + XY + YZ \\&= XY + \bar{X}Z\end{aligned}$$

# 부울함수의 대수적 간소화

## 4 대수적 간소화 방법

### ▶ 예시 2

다음 부울대수를 간소화하시오.

- ①  $x + x'y$
- ②  $x(x' + y)$
- ③  $xy + x'z + yz$

(풀이)

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad x + x'y &= x \times 1 + x'y + 0 \\ &= x(1 + y) + x'y + xx' \\ &= x + xy + x'y + xx' \\ &= x(x + x') + y(x + x') \\ &= (x + x')(x + y) \\ &= 1(x + y) \\ &= x + y \end{aligned}$$

# 부울함수의 대수적 간소화

## 4 대수적 간소화 방법

### ▶ 예시 2

다음 부울대수를 간소화하시오.

- ①  $x + x'y$
- ②  $x(x' + y)$
- ③  $xy + x'z + yz$

(풀이)

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad x(x' + y) &= xx' + xy \\ &= 0 + xy \\ &= xy \end{aligned}$$

# 부울함수의 대수적 간소화

## 4 대수적 간소화 방법

### ▶ 예시 2

다음 부울대수를 간소화하시오.

- ①  $x + x'y$
- ②  $x(x' + y)$
- ③  $xy + x'z + yz$

(풀이)

$$\begin{aligned} \textcircled{3} \ xy + x^{\wedge'} z + yz &= xy + x''' z + yz(x + x''') \\ &= xy + x' z + xyz + x'yz \\ &= xy(1 + z) + x'z(1 + y) \\ &= xy + x'z \end{aligned}$$

# 부울함수의 대수적 간소화

## 4 대수적 간소화 방법

### ▶ 예시 3

다음 논리식을 간소화하시오.

- ①  $XY + XY'$
- ②  $(X + Y)(X + Y')$
- ③  $XYZ + X'Y + XYZ'$
- ④  $XZ + X'YZ$

(풀이)

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad XY + XY' &= X(Y + Y') \\ &= X \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad (X + Y)(X + Y') &= XX + XY' + XY + YY' \\ &= X(1 + Y + Y') \\ &= X \end{aligned}$$

# 부울함수의 대수적 간소화

## 4 대수적 간소화 방법

### ▶ 예시 3

다음 논리식을 간소화하시오.

- ①  $XY + XY'$
- ②  $(X + Y)(X + Y')$
- ③  $XYZ + X'Y + XYZ'$
- ④  $XZ + X'YZ$

(풀이)

$$\begin{aligned} \textcircled{3} \quad XYZ + X'Y + XYZ' &= XY(Z + Z') + X'Y \\ &= Y(X + X') \\ &= Y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{4} \quad XZ + X'YZ &= Z(X + XY) \\ &= Z(X + Y) \end{aligned}$$

# 부울함수의 대수적 간소화

## 4 대수적 간소화 방법

### ▶ 예시 4

다음 논리식을 간소화하시오.

- |                   |                     |
|-------------------|---------------------|
| ① $A + A \cdot B$ | ② $A + A' \cdot B$  |
| ③ $A(A + B)$      | ④ $(A + B)(A + B')$ |

(풀이)

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad A + A \cdot B &= A \cdot 1 + A \cdot B \\ &= A \cdot (1 + B) \\ &= A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad A + A' \cdot B &= (A + A')(A + B) \\ &= A + B \end{aligned}$$

# 부울함수의 대수적 간소화

## 4 대수적 간소화 방법

### ▶ 예시 4

다음 논리식을 간소화하시오.

- |                   |                     |
|-------------------|---------------------|
| ① $A + A \cdot B$ | ② $A + A' \cdot B$  |
| ③ $A(A + B)$      | ④ $(A + B)(A + B')$ |

(풀이)

$$\begin{aligned} \textcircled{3} \quad A(A + B) &= A \cdot A + A \cdot B \\ &= A + A \cdot B \\ &= A \cdot 1 + A \cdot B \\ &= A(1 + B) = A \end{aligned}$$

# 부울함수의 대수적 간소화

## 4 대수적 간소화 방법

### ▶ 예시 4

다음 논리식을 간소화하시오.

- |                   |                     |
|-------------------|---------------------|
| ① $A + A \cdot B$ | ② $A + A' \cdot B$  |
| ③ $A(A + B)$      | ④ $(A + B)(A + B')$ |

(풀이)

$$\begin{aligned} ④ (A + B)(A + B') &= A \cdot A + A \cdot B' + B \cdot A + B \cdot B' \\ &= A \cdot 1 + A \cdot B' + B \cdot A \\ &= A(1 + B' + B) \\ &= A \end{aligned}$$

# 2 카르노맵

## 1 카르노맵(karnaugh map)

- ◆ 부울변수들에 대한 최소항들을 도표로 그려서 인접한 항들을 서로 묶은 후 최소화하는 방법
- ◆ 돈케어(don't care) 조건
  - 각 셀의 값이 0, 1에 상관없이 같은 값을 갖음
  - 카르노맵의 셀에  $d$ 로 표시
  - 돈케어에 해당하는 셀은 카르노맵 간소화시 0이나 1 중 유리한 방향으로 사용

## 2 카르노맵을 이용하여 최소화하는 방법

- ◆ n차 불 함수에 대응하는 n변수 카르노 맵을 선택함
- ◆ 불 함수에 있는 항들 각각에 대응하는 카르노 맵 항에 1을 표시함
- ◆ 인접하는 1들을  $2^n, 2^{n-1}, 2^{n-2}, \dots$  순으로 묶음
- ◆ 묶음에 있는 공통변수를 찾아 논리합으로 묶음

### 3 정규합형(Disjunctive Normal Form)

- ▶ 변수의 곱을 합한 형태
- ▶ 변수의 곱항을 민텀(Minterm)이라 함

※ 민텀(최소항)

- 진리표에서 함수값이 1인 행

#### 4 정규곱형(Conjunctive Normal Form)

- ▶ 변수의 합을 곱한 형태
- ▶ 변수의 합항을 맥스텀(Maxterm)이라 함

※ 맥스텀(최대항)

- 진리표에서 함수값이 0인 행

- ▶ 예를 들어,  $(x+y+z)(x+y+z')(x'+y+z')$ 와 같은 정규곱형이 있을 때  $(x+y+z)$ ,  $(x+y+z')$ ,  $(x'+y+z')$ 는 각각 맥스텀임

## 5 2변수, 3변수, 4변수 카르노 맵

## ◆ 2변수 카르노 맵

	x	y	0	1
0		00	01	
1		10	11	

## ◆ 3변수 카르노 맵

	x	yz	00	01	11	10
0		000	001	011	010	
1		100	101	111	110	

## 5 2변수, 3변수, 4변수 카르노 맵

## ◆ 4변수 카르노 맵

	yz 00	01	11	10
x 00	0000	0001	0011	0010
01	0100	0101	0111	0110
11	1100	1101	1111	1110
10	1000	1001	1011	1010

## 5 2변수, 3변수, 4변수 카르노 맵

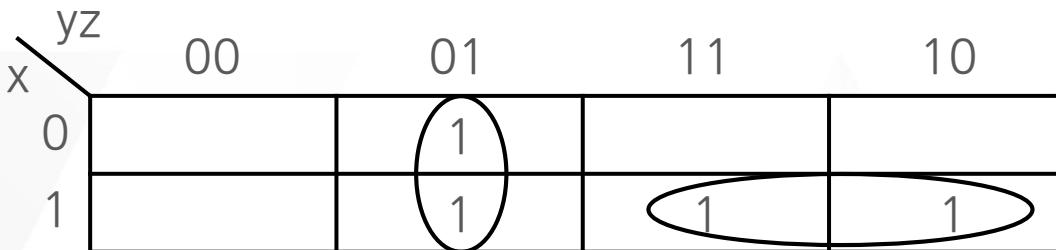
## ◆ 예시1

다음 부울식에 대한 카르노맵을 작성하고 최소화하시오.

- ①  $xyz + xyz' + xy'z + x'y'z$
- ②  $xyz + xyz' + x'yz + x'yz' + x'y'z$

(풀이)

①



$$xyz + xyz' + xy'z + x'y'z = y'z + xy$$

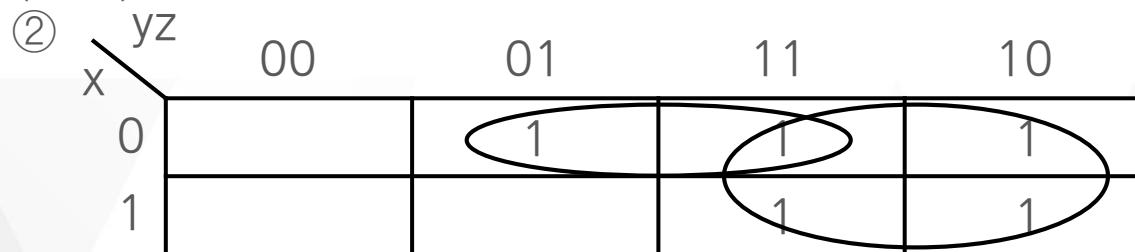
## 5 2변수, 3변수, 4변수 카르노 맵

## ◆ 예시1

다음 부울식에 대한 카르노맵을 작성하고 최소화하시오.

- ①  $xyz + xyz' + xy'z + x'y'z$
- ②  $xyz + xyz' + x'yz + x'yz' + x'y'z$

(풀이)



$$xyz + xyz' + x'yz + x'yz' + x'y'z = x'z + y$$

## 5 2변수, 3변수, 4변수 카르노 맵

## ◆ 예시 2

카르노맵으로 표현한 다음 부울식을 최소화하시오.

①

		00	01	11	10
		0	1		
x	yz	0			
1	d	1	1	d	

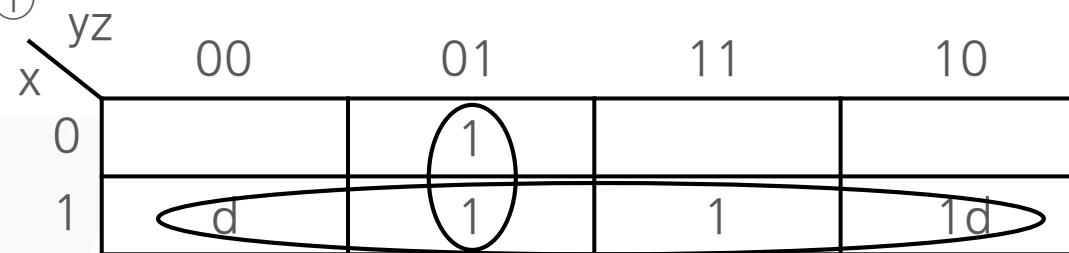
## 5 2변수, 3변수, 4변수 카르노 맵

## ◆ 예시 2

카르노맵으로 표현한 다음 부울식을 최소화하시오.

(풀이)

①



$$F = x + y'z$$

## 5 2변수, 3변수, 4변수 카르노 맵

## ◆ 예시 2

카르노맵으로 표현한 다음 부울식을 최소화하시오.

② yz

x

		00	01	11	10
		00		1	1
		01	1	1	
		11		d	d
		10		d	d

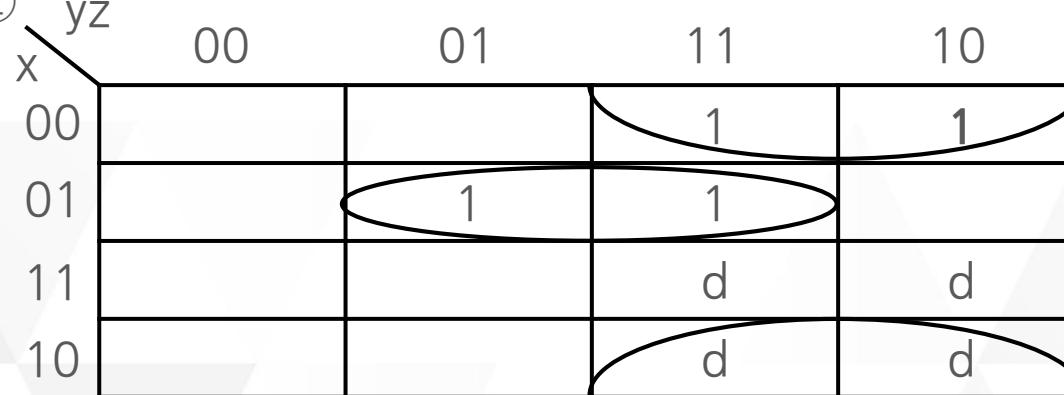
## 5 2변수, 3변수, 4변수 카르노 맵

## ◆ 예시 2

카르노맵으로 표현한 다음 부울식을 최소화하시오.

(풀이)

②



$$F = x'y + w'xz$$

## 5 2변수, 3변수, 4변수 카르노 맵

## ◆ 예시 2

카르노맵으로 표현한 다음 부울식을 최소화하시오.

③

		00	01	11	10
		00	1		d
		01		d	d
		11		1	1
x	yz	10	d		1

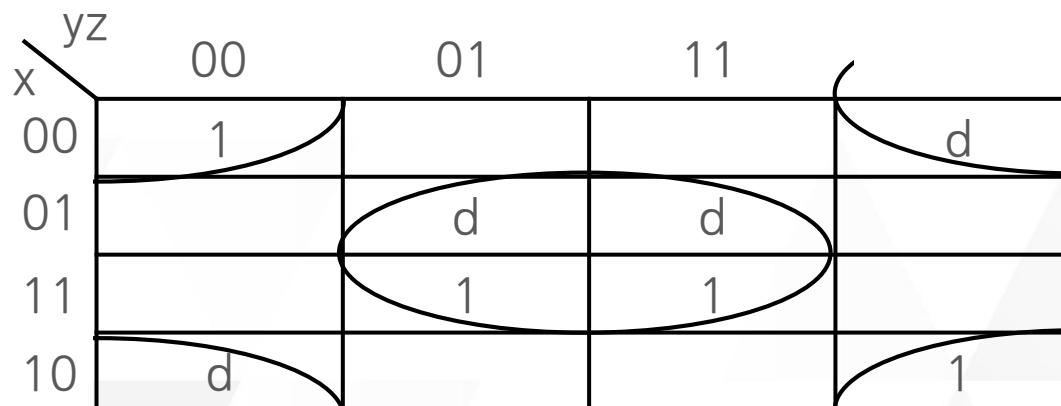
## 5 2변수, 3변수, 4변수 카르노 맵

## ◆ 예시 2

카르노맵으로 표현한 다음 부울식을 최소화하시오.

(풀이)

③



$$F = xz + x'z'$$