1 합성함수

1 합성함수

1 합성함수

- 두 개 이상의 함수를 합성한 것
- 하나의 함수의 치역이 다른 함수의 정의역이 됨

1 합성함수

1 합성함수

정의

- 함수 $f: A \to B, g: B \to C$가 있을 때 A의 임의의 원소 a에 대하여 f에 의한 B의 원소 $f(a)$를 대응시키고 다시 $f(a)$에 대하여 g에 의한 C의 원소 $g\big(f(a)\big)$를 대응시킬 때 이 함수를 f와 g의 합성함수라 함

$$(g \circ f)(a) = g\big(f(a)\big)$$

1 합성함수

합성함수의 성질

- $f \circ g \neq g \circ f$
- $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$

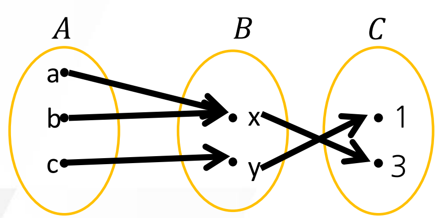
1 합성함수

1 합성함수

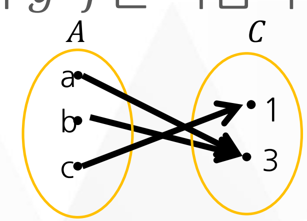
예시 1

$A = \{a, b, c\}$, $B = \{x, y\}$, $C = \{1, 3\}$ 이 있을 때
A에서 B로의 함수 $f = \{(a, x), (b, x), (c, y)\}$ 와
B에서 C로의 함수 $g = \{(x, 3), (y, 1)\}$ 이 있을 때
A에서 C로의 합성함수 $g \circ f$를 구하시오.

[풀이]
f와 g 함수를 그림으로 표현하면
다음과 같음



다시 $g \circ f$는 다음과 같음



따라서 $g \circ f = \{(a, 3), (b, 3), (c, 1)\}$임

1 합성함수

예시 2

실수 x에 대하여 두 함수 $f: R \to R$일 때
$f(x) = x + 3, g(x) = x^2 - 1$일 때
$g \circ f(x)$와 $f \circ f(x)$를 구하시오.

[풀이]

$$
\begin{aligned}
g \circ f(x) &= (x+3)2 - 1 \\
&= x^2 + 6x + 9 - 1 \\
&= x^2 + 6x + 8 \\
f \circ f(x) &= (x+3) + 3 \\
&= x + 6
\end{aligned}
$$

2 계승함수 및 나머지 함수

2 계승함수 및 나머지 함수

1 계승함수(Factorial)

- 1부터 n개의 양의 정수를 모두 곱한 것으로 n계승이라 하고 n!로 표현
- 계승은 그 값의 증가가 대단히 빠름
- 계승의 값을 계산할 때는 이전에 사용되었던 계승 결과를 이용하므로 자기 자신을 다시 호출하여 사용하는 재귀 알고리즘을 많이 사용

$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots\cdots \times (n-1) \times n$

$n! = n \times (n - 1)!$

$1! = 1 \times 0!$

$0! = 1$

2 계승함수 및 나머지 함수

1 계승함수(Factorial)

정의

- n : 음이 아닌 정수

$$n\,! = \begin{cases} 1 & (n = 0) \\ \displaystyle\prod_{k=1}^{n} k & (n \geq 1) \end{cases}$$

$$= 1 \times 2 \times \cdots \times n$$

$$= n \times (n-1)!$$

2 계승함수 및 나머지 함수

1 계승함수(Factorial)

0! = 1
1! = 1
2! = 2
3! = 6
4! = 24
5! = 120
6! = 720
7! = 5040
8! = 40320
9! = 362880
10! = 3628800
100! = 9.33262154439441526816992388562657 X 10^{157}
1000! = 4.02387260077093773543702433923 X 10^{2567}

2 계승함수 및 나머지 함수

1 계승함수(Factorial)

예시

다음 수식을 간단히 표현하시오.

① $\frac{7!}{6!}$

② $\frac{(n-1)!}{(n-2)!}$

2 계승함수 및 나머지 함수

1 계승함수(Factorial)

예시

다음 수식을 간단히 표현하시오.

① $\frac{7!}{6!} = \frac{7 \times 6!}{6!} = 7$

② $\frac{(n-1)!}{(n-2)!} = \frac{(n-1)\times(n-2)!}{(n-2)!} = (n-1)$

2 나머지 함수(Mod)

- 나눗셈을 한 결과에서 나머지 값만을 구하는 함수
- 숫자를 제수로 나눈 나머지를 반환
- 일반적인 나누기 연산에서 7을 2로 나누면 3.5이지만 Mod 함수를 사용하면 결과는 나머지 값인 1이 됨

정수 n을 양의 정수 m으로 나눈 나머지를 n mod m으로 표기함

2 나머지 함수(Mod)

사용 예

- 십진수를 이진수 변환시 2로 나눈 나머지 취함
- 어떤 수가 홀수인지 짝수인지를 계산할 때
  2로 나눈 나머지가 0인지 아닌지에 의해 판별
- Mod 함수는 컴퓨터과학 분야에서
  매우 유용하게 사용

2 나머지 함수(Mod)

예시

f를 mod 6 함수라 할 때 다음을 계산하시오.

① f(15)

② f(28)

③ f(2108)

④ f(310)

2 나머지 함수(Mod)

- 예시

f를 mod 6 함수라 할 때 다음을 계산하시오.

① f(15) = 15 mod 6 = 3

② f(28) = 28 mod 6 = 4

③ f(2108) = 2108 mod 6 = 2

④ f(310) = 310 mod 6 = 4

3 바닥함수 및 천정함수

3 바닥함수 및 천정함수

1 바닥함수(Floor Function)

- 임의의 실수 x의 바닥 함수는 x보다 크지 않은 최대의 정수를 구하는 함수
- $\lfloor x \rfloor$와 같이 표시
- 최대정수함수(Greatest Integer Function)라고도 하며 Floor(x)와 같이 표현하기도 함

3 바닥함수 및 천정함수

1 바닥함수(Floor Function)

◆ 예시

$$\lfloor 3.7 \rfloor = 3$$
$$\lfloor -3.7 \rfloor = -4$$

$$\lfloor 2.6 \rfloor = 2$$
$$\lfloor -2.6 \rfloor = -3$$

※ 함수를 계산하다 보면 임의의 수의 근삿값을
구해야 하는 경우가 있음
이때 바닥함수(Floor Function)나
천정함수(Ceiling Function)를 사용할 수 있음

3 바닥함수 및 천정함수

2 천정 함수(Ceiling Function)

- 임의의 실수 x의 천정 함수는 x보다 작지 않은 최소의 정수를 구하는 함수
- $\lceil x \rceil$와 같이 표시
- 최소정수함수(Least Integer Function)라고 하며 Ceiling(x)와 같이 표현

2 천정 함수(Ceiling Function)

- 예시 1

$$\lceil -3.2 \rceil = -3$$
$$\lceil 3.2 \rceil = 4$$

$$\lceil 2.6 \rceil = 3$$
$$\lceil -2.6 \rceil = -2$$

2 천정 함수(Ceiling Function)

예시 2

다음을 구하시오.
① $\lfloor 3.5 \rfloor$, $\lfloor -2.9 \rfloor$, $\lfloor 10.6 \rfloor$, $\lfloor \pi \rfloor$

[풀이]

$\lfloor 3.5 \rfloor = 3$,
$\lfloor -2.9 \rfloor = -3$,
$\lfloor 10.6 \rfloor = 10$,
$\lfloor \pi \rfloor = 3$

2 천정 함수(Ceiling Function)

예시 2

다음을 구하시오.
② $\lceil 3.5 \rceil$, $\lceil -2.9 \rceil$, $\lceil 10.6 \rceil$, $\lceil \pi \rceil$

[풀이]

$\lceil 3.5 \rceil = 4$,
$\lceil -2.9 \rceil = -4$,
$\lceil 10.6 \rceil = 11$,
$\lceil \pi \rceil = 4$

2 천정 함수(Ceiling Function)

예시 2

다음을 구하시오.

③ $\left\lceil \frac{35}{4} \right\rceil$, $\left\lceil \lfloor -2.9 \rfloor + \left\lceil \frac{78}{7} \right\rceil \right\rceil$, $\left\lceil \frac{1}{2} + \left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor \right\rceil$, $\left\lfloor \frac{1}{2} + \left\lceil \frac{1}{2} \right\rceil \right\rfloor$

[풀이]

$$\left\lceil \frac{35}{4} \right\rceil = \left\lceil 8 + \frac{3}{4} \right\rceil = 9,$$

$$\left\lceil \lfloor -2.9 \rfloor + \left\lceil \frac{78}{7} \right\rceil \right\rceil = \left\lceil -3 + \left\lceil 11 + \frac{1}{7} \right\rceil \right\rceil = \lceil -3 + 12 \rceil = 9$$

2 천정 함수(Ceiling Function)

예시 2

다음을 구하시오.

③$\left\lceil \frac{35}{4} \right\rceil$, $\left\lceil \lfloor -2.9 \rfloor + \left\lceil \frac{78}{7} \right\rceil \right\rceil$, $\left\lceil \frac{1}{2} + \left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor \right\rceil$, $\left\lfloor \frac{1}{2} + \left\lceil \frac{1}{2} \right\rceil \right\rfloor$

[풀이]

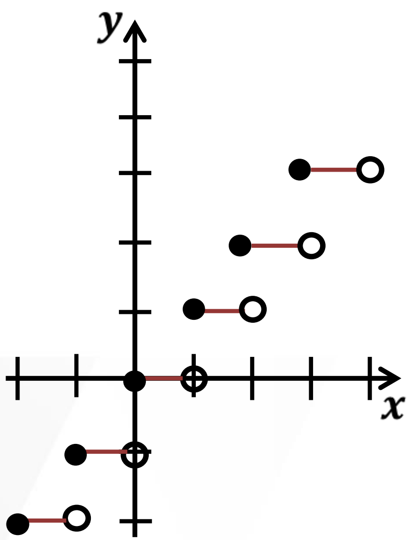
$$\left\lceil \frac{1}{2} + \left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor \right\rceil = \left\lceil \frac{1}{2} + 0 \right\rceil = 1,$$

$$\left\lfloor \frac{1}{2} + \left\lceil \frac{1}{2} \right\rceil \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1}{2} + 1 \right\rfloor = 1$$

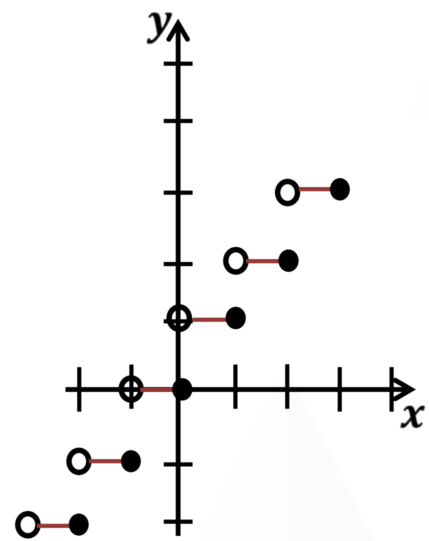
3 바닥함수와 천정함수의 특징

- $x-1<\lfloor x\rfloor\le x\le\lceil x\rceil\le x+1$
  $\lfloor -x\rfloor=-\lceil x\rceil,\lceil -x\rceil=\lfloor x\rfloor$
  $\lfloor x\rfloor=n\Leftrightarrow n\le x\le n+1\Leftrightarrow x-1<n\le x$
  $\lceil x\rceil=n\Leftrightarrow n-1<x\le n\Leftrightarrow x\le n<x+1$

4 바닥함수와 천정함수



(a) $y = \lfloor x \rfloor$



(b) $y = \lceil x \rceil$