1 오일러 사이클

1 오일러 사이클

1 그래프 이론

- 유한개의 정점과 간선의 결합 방법에 대한 이론
- 어떤 그래프에서 정점을 도시라 하고 간선을 도로로 간주한다면 경로는 어떤 도시를 출발하여 몇몇 도시를 거쳐 어떤 도시에서 끝내는 여행에 해당함
- 예)
  - 택배 기사가 택배 배달해야 할 때 배달 지역은 어떤 규칙성이 없이 여러 지역이 분포됨

    ➔ 어떤 규칙성 없이 필요할 때마다 연결하여 사용하는 비선형 자료구조가 그래프임

1 오일러 사이클

2 그래프 응용

- 그래프 이론은 회사의 조직도나 가계도, 토너먼트의 조합, 전기회로의 배선도, 집적회로 등 전기 회로망 문제, 통신망, 물자의 수송로 등에 응용
- 철도망과 도로망에서 역과 역이 몇 개의 선으로 연결되어 있는지, 바꾸어 타는 것은 어느 역에서 하면 좋은지 등을 결정하는데 활용

1 오일러 사이클

2 그래프 응용

- Chinese Postman Problem
  우체부가 모든 거리의 집에 편지를 전하고 우체국으로 돌아오려할 때 최저 거리의 길을 찾는 문제
  ➔ 시작점에서 모든 노드를 다 거쳐서 다시 시작점으로 돌아오는 그래프

- 도시의 눈 치우기
  (제설기 1대가 모든 도로의 눈 치우기 위해 필요한 방법)

1 오일러 사이클

3 그래프 시초

- 그래프 이론은 스위스의 수학자 오일러가 연구한 쾨니히스베르크의 다리 건너기 문제가 그 시초

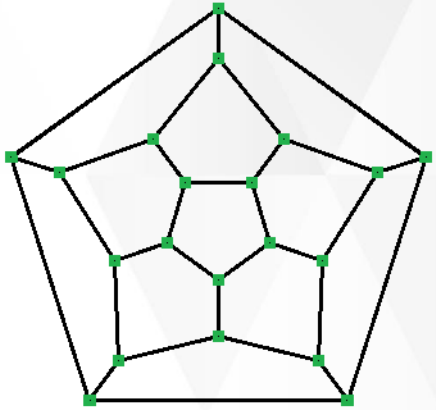
- 그 후 영국의 수학자 해밀턴에 의하여 정십이면체의 각 정점을 세계의 도시로 보고, 각 변은 그 사이를 오가는 여행로로 보았을 경우, 이 여행로를 따라서 각 도시를 단 한 번만 지나가는 여행 코스를 찾아내라는 '해밀턴의 문제'가 제시됨

1 오일러 사이클

3 그래프 시초

해밀턴의 문제

- 해밀턴 사이클은 1857년에 만들어진
  아이코시안(Icosian) 퀴즈 문제에서 비롯됨
- 이 퀴즈 문제는 12면체 20개의 각 정점에
  도시 이름을 적고 어느 한 도시에서 출발하여
  모서리를 따라서 다른 모든 19개의 도시를 방문하고
  처음 출발했던 도시로 돌아오는 게임
- 물론 각 도시는 단 한번만 방문할 수 있음

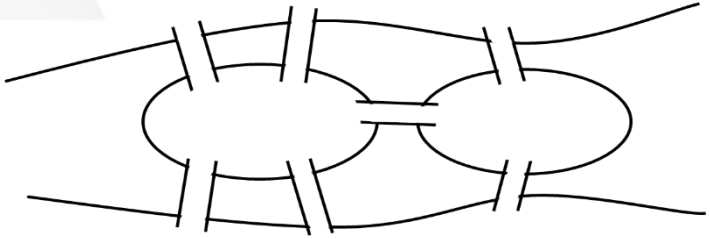


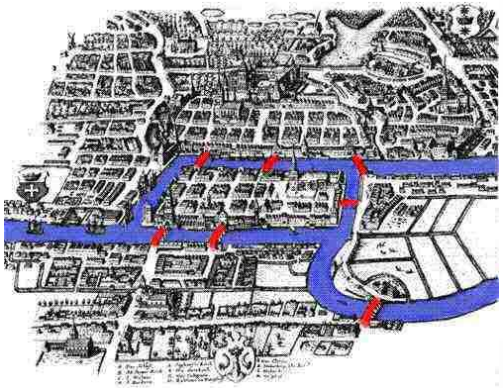
→ 해답은 여러개가 있음

※출처: http://puzzleresearchroom.tistory.com/154

4 오일러 사이클(Euler Cycle)

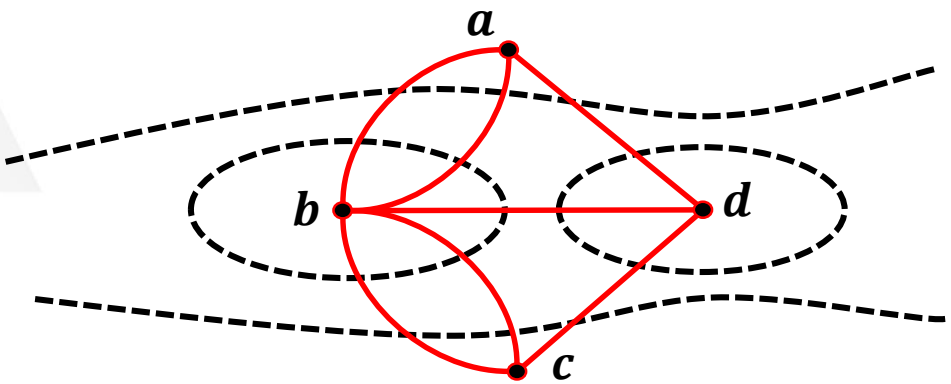
- 쾨니히스베르크 다리 문제는 7개의 다리를 한 붓 그리기로 다 건너는 문제임





- 2개의 섬과 7개의 다리로 구성된 공원에서 7개의 다리를 모두 지나가는데 이미 지나갔던 다리는 다시 거치지 않고 갈 수 있는 전체 경로를 해결하는데 오일러는 그래프 이론을 사용하였음

4 오일러 사이클(Euler Cycle)



- 오일러는 이 문제를 해결하는데 각 정점에 연결된 간선의 개수가 모두 짝수일 때 가능함을 증명함
- 각 간선을 정확하게 한번씩만 경유해서 그래프의 모든 간선을 지날 수 있는 경로가 존재하고 출발 정점과 최종 도착 정점이 같으면 오일러 사이클이라고 함

4 오일러 사이클(Euler Cycle)

참고

- 한 붓 그리기 문제

붓을 한 번도 종이 위에서 떼지 않고 같은 곳을
두 번 지나지 않으면서 어떤 도형을 그릴 수 있느냐
하는 문제

➔ 그래프의 모든 정점의 차수가 짝수만으로
되어 있을 때 가능

➔ 또는 홀수 차수인 정점이 2개인 그래프도
그 한쪽을 출발점, 나머지 하나를 도착점으로
하는 경우에는 한 붓 그리기가 가능함

1 오일러 사이클

5 오일러 경로(Euler Path)

- 그래프에서 각 간선을 정확하게 한번씩만 경유해서 그래프의 모든 간선을 지날 수 있는 경로가 존재한다면 그래프는 오일러 경로를 갖는다고 함

- 참고

> 임의의 두 정점 사이의 경로(Path)는 두 정점을 연결하는 간선들을 나열한 것이며 경로에서 같은 간선은 두 번 이상 지나갈 수 없음

1 오일러 사이클

5 오일러 경로(Euler Path)

- 오일러 경로, 오일러 사이클에서는 정점에 상관없이 모든 간선을 반드시 한 번씩 지나야 함

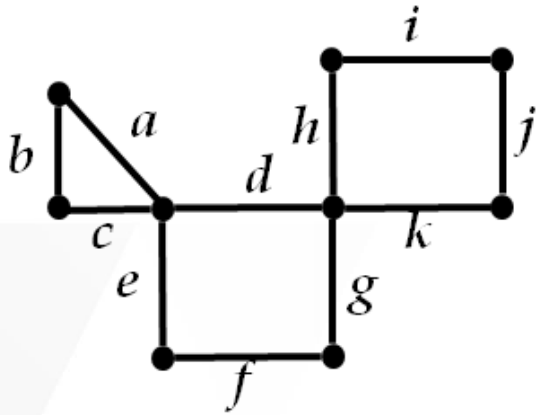
- 그래프 G가 오일러 경로를 갖기 위한 필요충분조건은 그래프 G가 연결 그래프이고 홀수 차수의 정점이 2개인 것임

1 오일러 사이클

6 오일러 사이클의 예

◆ 예시 1

다음 그래프가 오일러 사이클을 갖고 있는지 설명하시오



(풀이)

이 그래프에는 여러 개의 오일러 사이클이 존재

그 중 하나는 d-a-b-c-e-f-g-h-i-j-k

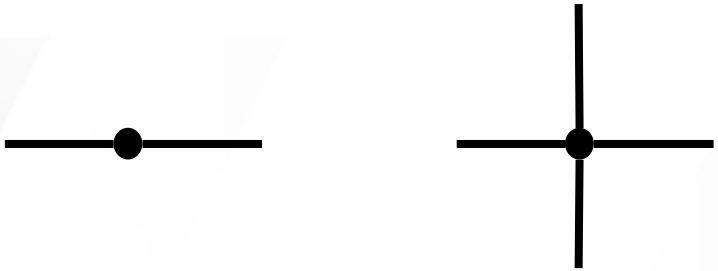
※출처: 알기 쉽게 해설한 이산수학, 손진곤, 이한미디어

1 오일러 사이클

6 오일러 사이클의 예

정리

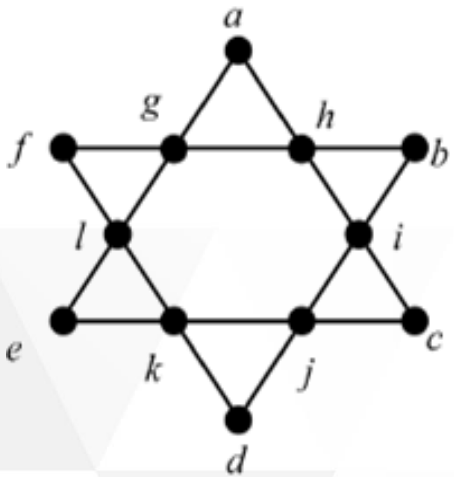
- 그래프가 오일러 사이클을 가진다면
  모든 정점의 차수는 짝수임
- 그래프가 연결 그래프이고 모든 정점의 차수가
  짝수라면 그래프는 오일러 사이클을 가짐



6 오일러 사이클의 예

◆ 예시 2

다음 그래프가 오일러 경로나 오일러 사이클을 갖고 있는지 설명하시오



(풀이)
각 정점의 차수는 다음과 같음
d(a) = d(b) = d(c) = d(d) = d(e) = d(f) = 2
d(g) = d(h) = d(i) = d(j) = d(k) = d(l) = 4

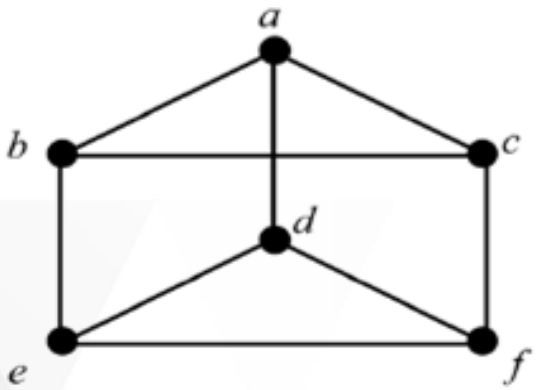
각 정점의 차수는 짝수이고
오일러 사이클을 갖는 오일러 그래프임

*오일러 사이클의 예 : a-h-b-i-c-j-d-k-e-l-f-g-l-k-j-i-h-g-a

6 오일러 사이클의 예

◆ 예시 3

다음 그래프가 오일러 경로나 오일러 사이클을 갖고 있는지 설명하시오



(풀이)

각 정점의 차수는 다음과 같음
d(a) = d(b) = d(c) = d(d) = d(e) = d(f)=3

따라서 각 정점의 차수는 홀수이고
오일러 경로와 오일러 사이클을 갖지 않음

2 해밀턴 사이클

2 해밀턴 사이클

1 해밀턴 경로(Hamiltion Path)

- 그래프 G=(V, E)가 주어진 모든 정점들을 정확하게 한 번만 경유하는 경로가 있는 그래프를 해밀턴 경로가 존재한다고 함
- 그래프에서 모든 정점을 정확히 한번만 지나는 경로
- 참고

> 어떤 두 정점에 인접하는 간선이 존재하지 않더라도 다른 정점들과 간선들을 통해 두 정점이 연결되면 두 정점 간의 경로가 존재하는 것임

2 해밀턴 사이클(Hamiltion Cycle)

- 그래프의 한 정점에서 출발하여 인접한 간선과 이웃하는 정점을 따라 교대로 통과하되 시작점을 제외한 모든 정점을 단 한 번씩만 지나서 시작점으로 되돌아오는 것을 해밀턴 사이클이라 함

- 시작점과 끝점이 같은 해밀턴 경로

2 해밀턴 사이클(Hamiltion Cycle)

- 연결된 그래프가 각 정점을 정확히 한 번만 경유하는 경로인 사이클
- 정점을 한 번씩만 지나고 다시 출발 정점으로 돌아오는 사이클
- 참고

> 해밀턴 사이클이 존재한다는 것은 해밀턴 경로가 존재한다는 것이지만 그 역은 성립하지 않음

2 해밀턴 사이클

3 해밀턴 그래프

- 해밀턴 사이클을 갖는 모든 그래프
- 참고

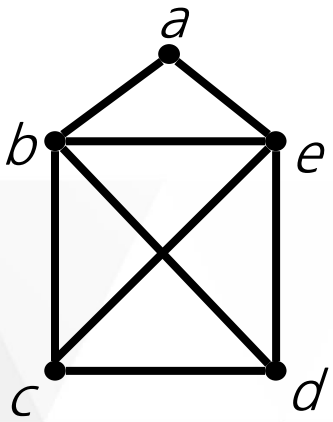
> 오일러 사이클은 그래프의 간선에 대한 탐색 방법이였다면 해밀턴 사이클은 그래프의 정점에 대한 탐색 방법임

2 해밀턴 사이클

3 해밀턴 그래프

◆ 예시 1

다음 그래프에 해밀턴 사이클과
해밀턴 경로가 존재하는지 조사하시오



(풀이)

해밀턴 경로와
해밀턴 사이클이 존재함

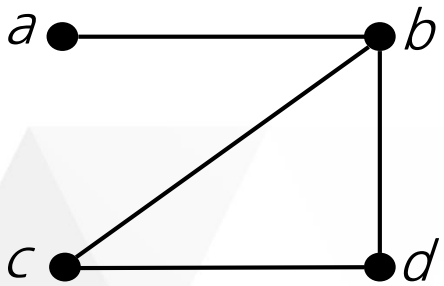
- 해밀턴 경로는 a-b-c-d-e
- 해밀턴 사이클은 a-b-c-d-e-a

※출처: 알기 쉽게 해설한 이산수학, 손진곤, 이한미디어

3 해밀턴 그래프

◆ 예시 2

다음 그래프에 해밀턴 사이클과
해밀턴 경로가 존재하는지 조사하시오



(풀이)

해밀턴 경로는 존재하고
해밀턴 사이클은 존재하지 않음

- 해밀턴 경로는 a-b-d-c

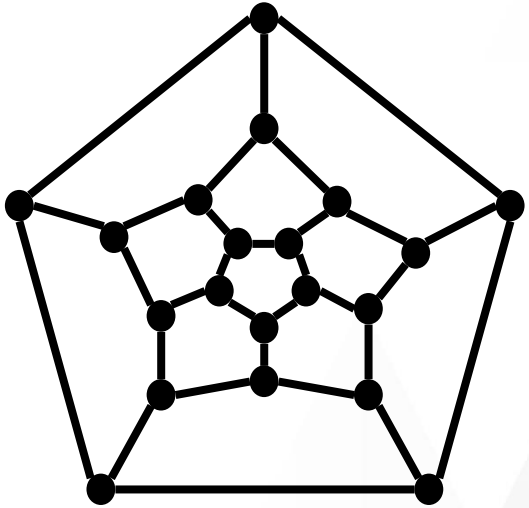
※출처: 알기 쉽게 해설한 이산수학, 손진곤, 이한미디어

2 해밀턴 사이클

3 해밀턴 그래프

- 예시 3

다음 십이면체 그래프의
해밀턴 사이클을 구하시오



※출처: 알기 쉽게 해설한 이산수학, 손진곤, 이한미디어

2 해밀턴 사이클

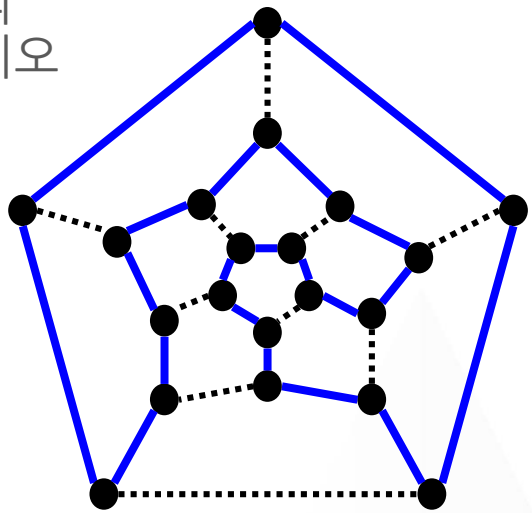
3 해밀턴 그래프

◆ 예시 3

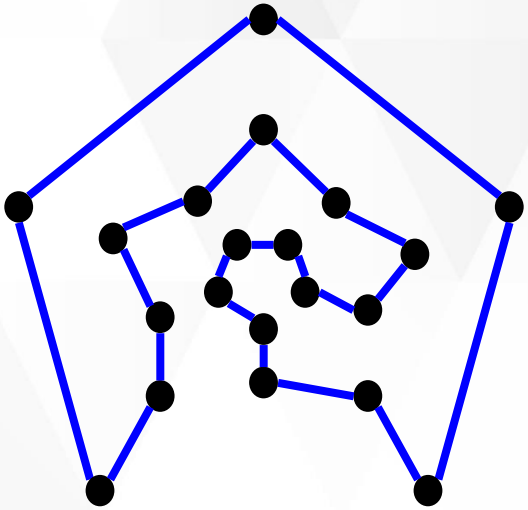
다음 십이면체 그래프의
해밀턴 사이클을 구하시오

(풀이)

해밀턴 사이클은
다음 그림과 같이
구할 수 있음



[최종 결과]

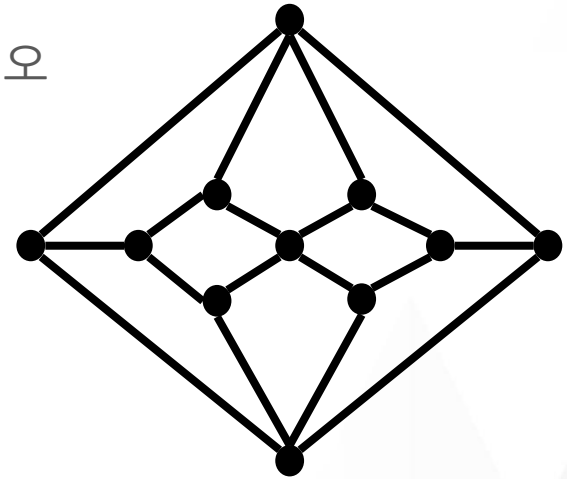


※출처: 알기 쉽게 해설한 이산수학, 손진곤, 이한미디어

3 해밀턴 그래프

- 예시 4

다음 그래프의
해밀턴 사이클을 구하시오



※출처: 알기 쉽게 해설한 이산수학, 손진곤, 이한미디어

3 해밀턴 그래프

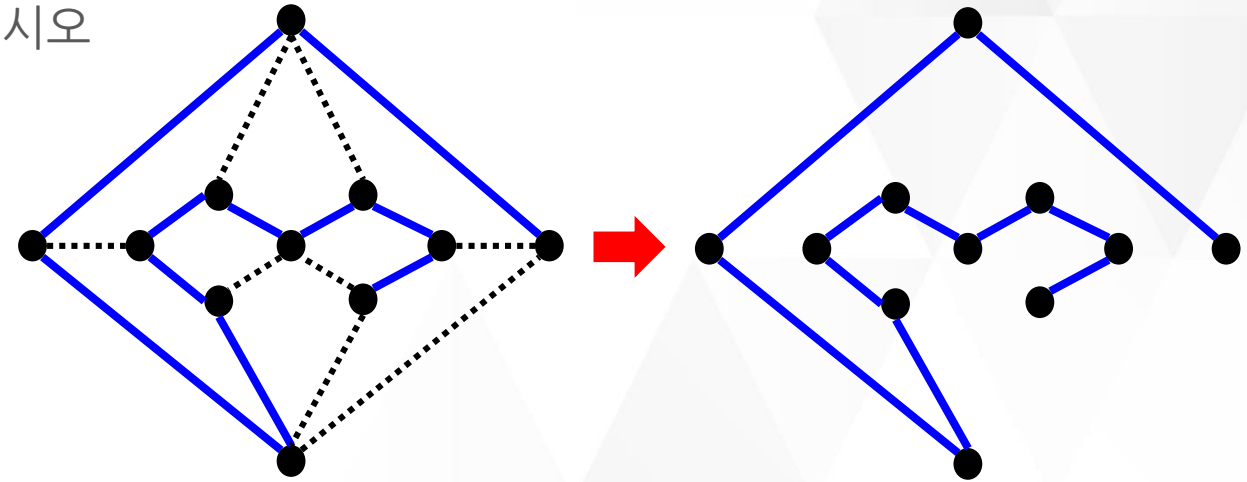
◆ 예시 4

다음 그래프의
해밀턴 사이클을 구하시오

(풀이)

해밀턴 경로는
다음 그림과 같이
구할 수 있으나
해밀턴 사이클은
구할 수 없음

[최종 결과]



※출처: 알기 쉽게 해설한 이산수학, 손진곤, 이한미디어

2 해밀턴 사이클

3 해밀턴 그래프

- 주어진 그래프에서 원하는 경로나 사이클 등을 찾는 방법은 그래프 이론에서 매우 중요한 문제임

  - 모든 도시를 방문해야 하는 판매원의 경우 각 도시를 한 번씩만 거칠 때 가장 경제적임

  ➔ 즉, 방문할 도시들은 정점으로 표현할 수 있으며 각 도시를 정확히 한 번만 경유하는 최적의 방문 경로를 찾는 데 목적이 있음

3 해밀턴 그래프

방문 판매원 문제 (Traveling Salesman Problem)

- 해밀턴 사이클은 일상생활의 문제를 해결할 때에도 적용할 수 있는데 이러한 대표적인 예로 방문 판매원 문제가 있음

3 해밀턴 그래프

방문 판매원 문제 (Traveling Salesman Problem)

- 문제

어떤 방문 판매원이 수많은 도시들을 순회하여
출발한 도시로 되돌아와야 하는데 이때 각 도시를
단 한번만 방문하되 총 이동 거리를 가능한 짧게
하고자 한다.
각 도시들 사이의 거리가 다양하게 주어져 있을 때,
방문 판매원은 어떤 경로를 선택해야 할까?

2 해밀턴 사이클

3 해밀턴 그래프

방문 판매원 문제 (Traveling Salesman Problem)

- 풀이

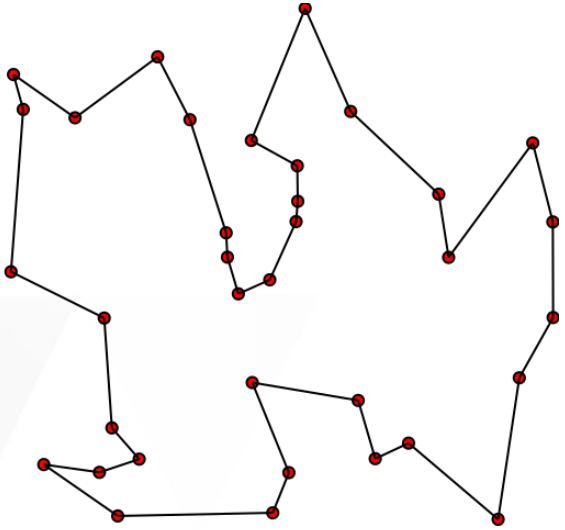
주어진 도시들을 정점으로, 두 도시를 잇는 도로를 간선으로, 도시 간 거리를 변의 가중치로 하여 완전 가중치 그래프를 만들면 이 문제는 주어진 가중치 그래프에서 모든 정점을 통과하면서 총 가중치가 최소인 사이클을 찾는 것이 됨

➔ 즉, 최소 가중치 해밀턴 사이클을 찾는 문제가 됨

2 해밀턴 사이클

3 해밀턴 그래프

방문 판매원 문제 (Traveling Salesman Problem)



※출처: https://en.wikipedia.org/wiki/Travelling_salesman_problem

2 해밀턴 사이클

3 해밀턴 그래프

방문 판매원 문제 (Traveling Salesman Problem)

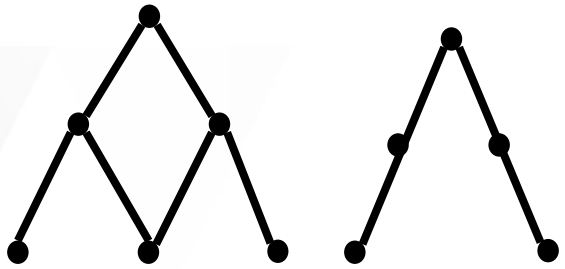
- 방문 판매원 문제는 겉보기에는 무척 간단해 보이지만 정점이 늘어나면 기하급수적으로 어려워져서 조합적 최적화 분야에서 악명 높은 **NP-난해 문제(NP-hard Problem)**로서 문제를 푸는 효율적인 알고리즘이 아직 알려져 있지 않음

3 트리

3 트리

1 트리(Tree)

- 사이클이 없는 연결 그래프를 트리라 함
- 상위 원소에서 하위 원소로 내려가면서 확장되는 트리(나무)모양의 구조
- 운영체제의 파일 시스템, 검색 엔진, 데이터베이스, 컴파일러 등 다양한 분야에서 활용되는 자료 구조



3 트리

1 트리(Tree)

루트 트리(Root Tree)

- **루트 트리** T는 다음 조건을 만족하는
  1개 이상의 노드($v_1, v_2, \cdots, v_n$)들의 유한집합

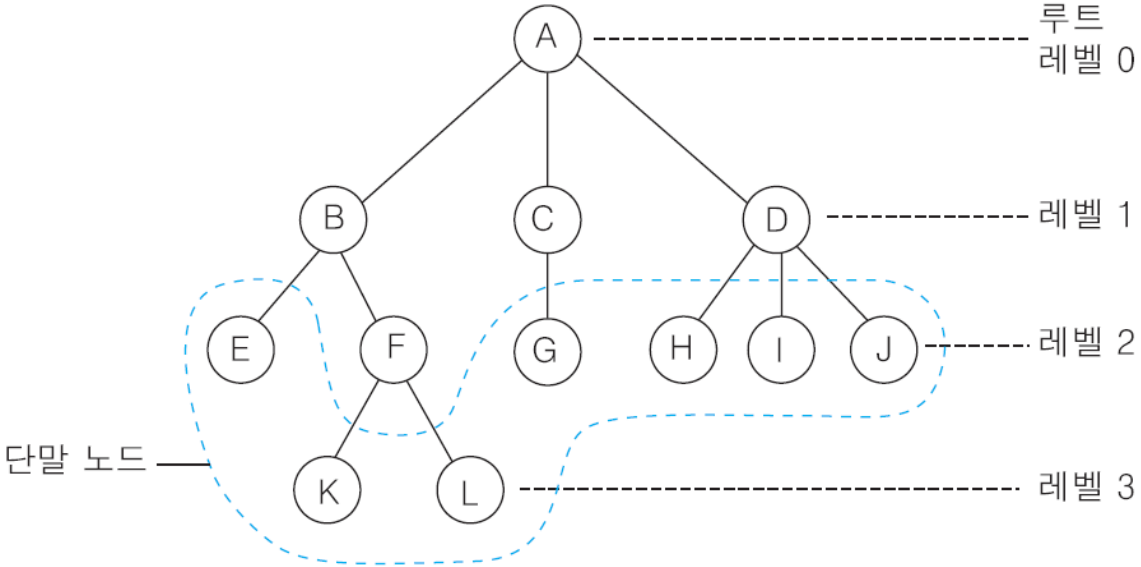
  1) **루트(Root : v_1)**라 부르는 노드가 1개 존재
  2) 나머지 노드 ($v_2, v_3, \cdots, v_n$)들은 m개의
     서로 분리된 집합 $T_1, T_2, \cdots, T_m$으로 나뉘며
     T_i는 다시 **루트 트리**가 됨

  ➔ 이때 $T_1, T_2, \cdots, T_m$을 각각 v_1의 **서브트리(Subtree)**

3 트리

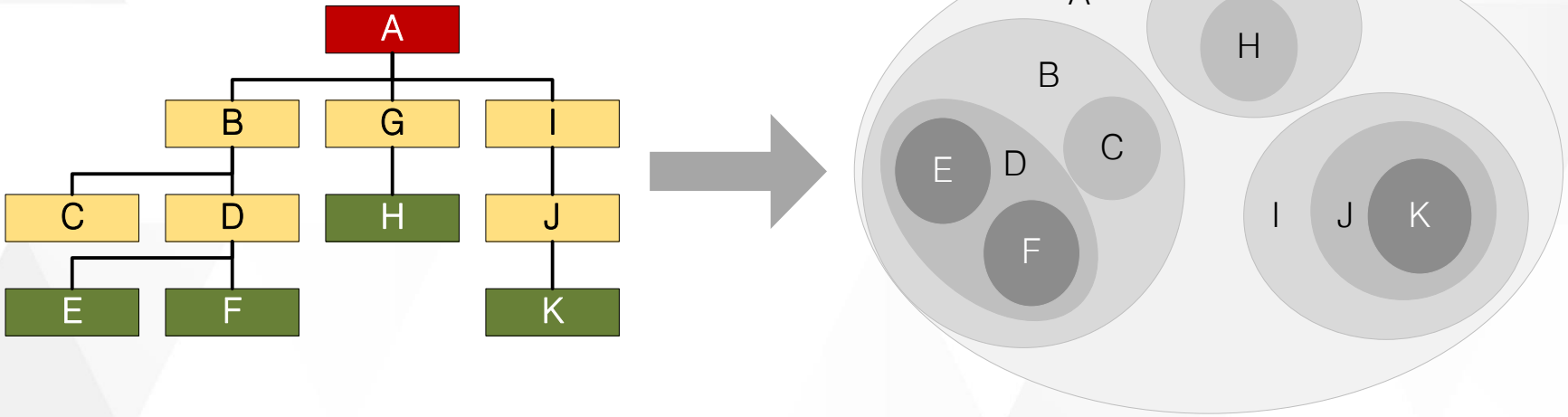
1 트리(Tree)

루트 트리(Root Tree) 예



2 트리의 표현

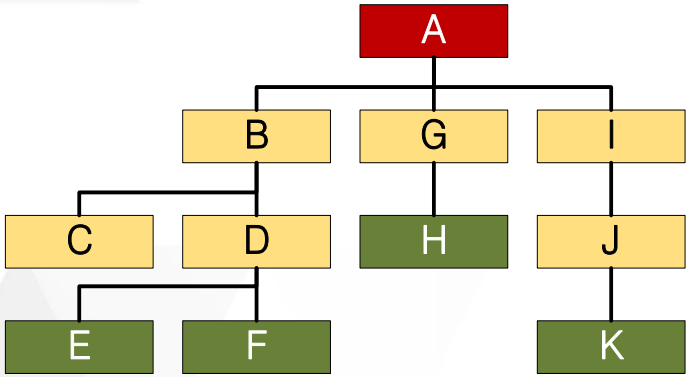
- 중첩된 집합



※출처: 뇌를 자극하는 알고리즘, 박상현, 한빛미디어

2 트리의 표현

- 중첩된 괄호

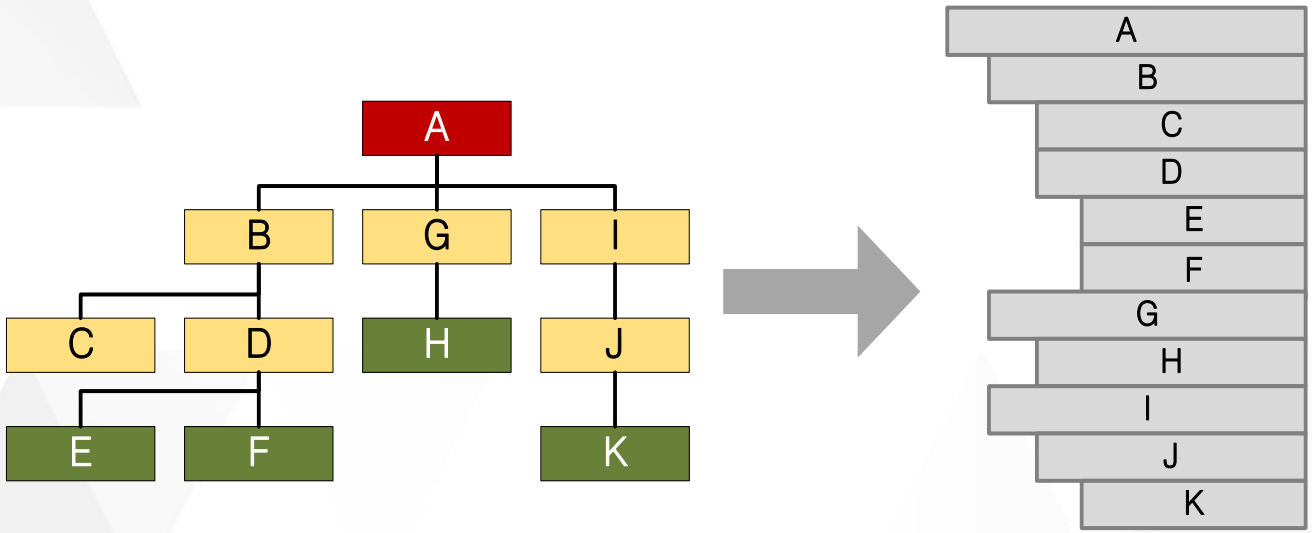


(A(B(C(D(E)(F)))(G(H))(I(J(K)))))

※출처: 뇌를 자극하는 알고리즘, 박상현, 한빛미디어

2 트리의 표현

들여쓰기



※출처: 뇌를 자극하는 알고리즘, 박상현, 한빛미디어