1 증명의 이해

1 증명의 이해

1 공리 (Axiom)

어떤 다른 명제들을 증명하기 위해
전제로 사용되는 가장 기본적인 가정이며
별도의 증명 없이 참(T)으로 이용되는 명제

1 증명의 이해

1 공리 (Axiom)

예시 1

- 두 점이 주어졌을 때,
  두 점을 통과하는 직선을 그릴 수 있다.
  (유클리드 기하학)

- 어떤 자연수도, 그 수의 다음 수가 존재한다.
  (페아노의 공리)

- 어떤 것도 포함하지 않는 집합이 존재한다.
  (공리적 집합론)

1 증명의 이해

2 증명 (Proof)

특정한 공리들을 가정하고
그 가정하에 제안된 명제가 참임을 입증하는 작업

- 어떤 명제가 진리라는 것을 주장할 때
  그 명제가 참이라는 것을 확정하는 과정
- 주어진 전제가 증명에 의해 결론으로 성립되도록
  전개하는 일련의 과정
- 증명은 다양한 분야의 개념을 확립할 때
  중요한 역할을 함

3 컴퓨터 과학에서의 증명

- 컴퓨터과학 분야에서 작성된 프로그램이 올바르게 동작하는지 검증 필요
  - 검증 과정을 통해 정확성을 높이고 오류를 줄일 수 있음
- 개발자가 어떤 프로그램을 새로 개발하면 그 프로그램의 속도나 효율성 등 여러 가지 검증 자료를 정리하여 이전의 프로그램보다 향상된 기능을 보여줘야 하는데 이러한 과정을 **증명**이라 함

3 컴퓨터 과학에서의 증명

- 증명은 논리적인 식을 통해 주로 이루어지지만 때로는 자연어를 이용하기 때문에 해석에 따라 애매모호한 부분이 발생 가능하므로 자연어를 사용할 때는 모호하지 않은 언어를 선택하여야 함

1 증명의 이해

4 정리 (Theorem)

공리들을 바탕으로
논리적으로 증명된 결론

보조정리 (Lemma)

- 정리를 증명하는 과정 중에 사용되는 증명된 명제

따름정리 (Corollary)

- 정리로부터 쉽게 도출되는 부가적인 명제

4 정리 (Theorem)

예시 1

- **피다고라스의 정리**
  임의의 직각삼각형에서 빗변을 한 변으로 하는 정사각형의 넓이는 다른 두 변을 각각 한 변으로 하는 정사각형의 넓이의 합과 같다.

  직각 삼각형에서 세변 a, b, c 에 대해

  $$a^2 + b^2 = c^2$$

- **유클리드 정리**
  소수는 무한히 많다.

1 증명의 이해

5 증명 방법

① 수학적 귀납법

- 기본단계, 귀납가정, 귀납단계를 이용해
  자연수 n에 대한 명제의 성질을 증명하는데 유용

② 직접 증명법

- 공리와 정의, 그리고 정리를 논리적으로
  직접 연결하여 증명하는 방법

1 증명의 이해

5 증명 방법

③ 간접 증명법

- 증명해야 할 명제를 증명하기 쉬운 형태로 변형하여 증명하는 방법

- 대우증명법, 모순증명법, 반례증명법, 존재증명법 등

1 증명의 이해

5 증명 방법

④ 그외의 증명법

- **전수증명법** : 명제로부터 유도될 수 있는 경우의 수가 적을 때 일일이 모든 경우의 수를 조사
- **조합적 증명법** : 집합의 개수를 구하기 위해 사용됨
- **컴퓨터 이용 증명법** : 증명 과정 중에 컴퓨터를 이용한 증명

2 수학적 귀납법

1 수학적 귀납법

- 귀납적 방법을 이용하여 증명하는 것으로
  모든 자연수 n에 대해 명제를 증명하는데 유용한 방법

- 먼저 n=1일 때 명제가 참(T)임을 증명하고 그 다음에는
  n= k(단, k는 임의의 자연수)일 때 참이면 n=k+1 일 때
  도 참임을 증명하는 방식

- **귀납법**
  - 개개의 사실을 모두 관찰하여 일반화하는 증명방법

1 수학적 귀납법

- 3단계 과정

① **기본단계**
n의 출발점에서 명제가 성립하는가 확인

② **귀납가정**
n=k 일 때 명제가 성립한다고 가정

③ **귀납단계**
n=k+1 일 때도 명제가 성립함을 증명

1 수학적 귀납법

예시 1

'예) n이 자연수일 때 다음을 증명하시오.

$$1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

(풀이) S(n)을 $1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ 라 하자.

① 기본단계

S(1)은 1 = $\frac{1(1+1)}{2}$ = 1 이므로 성립

② 귀납가정

S(k)가 참이라고 가정. 즉,

$$1+2+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2}$$

③ 귀납단계

$$1+2+\cdots+k+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)$$

$$=\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$$=\frac{(k+1)\big((k+1)+1\big)}{2}$$

$\therefore$ $S(k+1)$ 도 참

1 수학적 귀납법

예시 2

자연수 n에 대하여 1부터 n 번째까지 홀수의 합은 n^2임을 수학적 귀납법을 이용하여 증명하시오

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$$

(풀이) **$P(n)$을 $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$ (n는 정수)**

① 기본단계

$P(1)$은 $1 = 1^2$ 이므로 참(T) 이다

② 귀납가정

$P(k)$가 참이라고 가정. 즉,

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k-1) = k^2$$

③ 귀납단계

$$P(k+1) = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2k-1) + (2k+1)$$
$$= k^2 + (2k+1)$$
$$= (k+1)^2$$

$\therefore$ **$P(k+1)$ 도 참**

3 직접증명법

3

직접증명법

1 직접증명법 (Direct proof)

명제를 변형하지 않고 증거를
직접 사용하여 증명하기 때문에 직접증명법

- 주어진 명제가 참이라고 가정하고 정리와 공리를 이용해 명제가 참이 됨을 증명

- 명제의 함축 $p \rightarrow q$가 참이 됨을 증명하기 위해 명제 p를 참이라고 가정하고, 여러 가지 정리와 식을 이용하여 명제 q 또한 참이 됨을 증명하는 것

1 직접증명법 (Direct proof)

- 다른 말로 연역법(Deduction)이라고도 함

※연역법(Deduction)이란?

- 이미 증명된 하나 또는 둘 이상의 명제를 전제로 하여 새로운 명제를 결론으로 이끌어내는 것

1 직접증명법 (Direct proof)

예시 1

두 홀수의 합은 짝수임을 증명하라.

(풀이) **두 홀수를 각각 x, y라고 하자.**

$\Rightarrow x = 2a + 1,\ y = 2b + 1$ **(단, a, b는 정수)**

$\Rightarrow x + y = 2a + 2b + 2 = 2(a + b + 1)$

$\therefore x + y$는 **짝수.**

1 직접증명법 (Direct proof)

예시 2

정수 a, b, c에 대해 b는 a로 나누어지고 c는 b로 나누어질 경우,
c는 a로 나누어짐을 증명하라.

(풀이) b는 a로 나누어진다.

$\Rightarrow b = ak$ (k는 정수)

c는 b 로 나누어진다.

$\Rightarrow c = bl$ (l은 정수)

$\Rightarrow c = bl = (ak)l = a(kl)$

$\therefore c$ 는 a로 나누어진다.

1 직접증명법 (Direct proof)

예시 3

a, b가 실수일 경우 $a^2 + 4b^2 \geq 4ab$임을 증명하라.

(풀이) **a, b가 실수이므로 $a - 2b$는 실수.**

$$\Rightarrow (a - 2b)^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow a^2 - 4ab + 4b^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow a^2 + 4b^2 \geq 4ab$$

2 이항식 (Binomial)

- $(x+y)^n$ 과 같은 식

이항식

x, y는 변수이고 n은 양의 정수일 때

$$(x+y)^n = C(n,0)x^n y^0 + C(n,1)x^{n-1}y^1 + \cdots + C(n,n-1)x^1 y^{n-1} + C(n,n)x^0 y^n$$
$$= \sum_{k=0}^{n} C(n,k)x^{n-k}y^k$$

이때 C(n, k)를 이항계수라 함

2 이항식 (Binomial)

예시 1

$(x+y)^{15}$ 에서 $x^{11}y^4$의 이항계수를 구하시오.

(풀이)

$x^{11}y^4$의 이항계수는 C(15, 4)

$$= \frac{15!}{4!(15-4)!} = \frac{15!}{4!11!} = 1365$$

$$C(n, r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

3 직접증명법

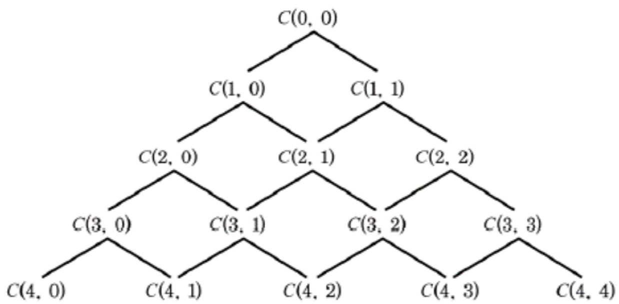
3 파스칼 항등식

- $n \geq 2, 1 \leq k \leq n$ 인 모든 양의 정수 n, k 에 대하여 다음이 성립한다. 여기서 $C(n, 0) = 1$
  - $C(n, k) = C(n-1, k-1) + C(n-1, k)$

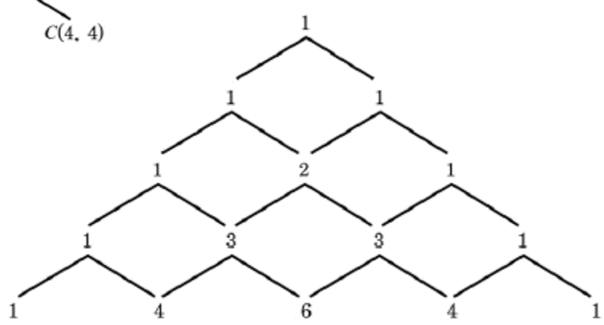
3 파스칼 항등식

- 어떤 위치의 이항계수는
  위쪽에 있는 2개의 이항계수의 합과 같음
- 이와 같은 형태의 삼각형을 파스칼의 삼각형이라고 함
- 파스칼의 삼각형에서 n번째 행에 있는 값들은 순차로
  $(x+y)^n$을 전개한 식의 계수에 대응함

3 파스칼 항등식



[파스칼의 삼각형]



3 직접증명법

3 파스칼 항등식

파스칼의 삼각형 (Pascal's Triangle)

- $\cdot\ (x+1)^2 = 1x^2 + 2x + 1x^0 = x^2 + 2x + 1$ (파스칼 삼각형의 3번째 줄 이용)
- $\cdot\ (x+y)^5 = 1x^5 + 5x^4y^1 + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5x^1y^4 + 1y^5$

(파스칼 삼각형의 6번째 줄 이용)

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

3 파스칼 항등식

파스칼의 삼각형 (Pascal's Triangle)

- 예시 1
  다음을 증명하시오.

n, k 는 양의 정수이고, $k \leq n$ 이라고 가정하면

$C(n+1, k) = C(n, k) + C(n, k-1)$이다.

3 파스칼 항등식

파스칼의 삼각형 (Pascal's Triangle)

(풀이) $C(n,k) + C(n,k-1)$

$$= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-(k-1))!}$$

$$= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k+1)!}$$

$$= \frac{(n-k+1)\,n!}{(n-k+1)\,k!\,(n-k)!} + \frac{k\,n!}{k(k-1)!\,(n-k+1)!}$$

$$= \frac{(n-k+1)n! + kn!}{k!\,(n-k+1)!}$$

$$= \frac{(n+1)\,n!}{k!\,(n-k+1)!}$$

$$= \frac{(n+1)!}{k!((n+1)-k)!}$$

$$= C(n+1,\ k)$$