1 간접증명법

1 간접증명법

1 간접증명법이란?

증명하고자 하는 명제를
논리에 어긋나지 않는 범위에서
증명하기 쉬운 명제로 변화시켜 증명하는 방법

- 조건명제 $p \rightarrow q$를 다양한 형태로 변형하여 증명
- 대우증명법, 모순증명법, 반례증명법, 존재증명법 등

1 간접증명법

2 간접증명법의 종류

① 대우증명법

- 증명하고자하는 명제의 대우명제를 이용하는 방법
- 명제의 함축 p → q가 참이면 대우인 ~q → ~p도 참이며 두 명제는 서로 동치라는 점을 이용
- 주어진 명제의 대우명제가 참임을 증명함으로써 증명하고자 하는 명제도 참임을 증명하는 방법

1 간접증명법

2 간접증명법의 종류

① 대우증명법

예시 1 x^2이 짝수라면 x도 짝수임을 증명하시오.

(풀이) " x^2이 짝수라면 x도 짝수"의 대우는

"x가 짝수가 아니라면 x^2도 짝수가 아니다"

x는 홀수라면 x=2k+1(단, k는 정수)라고 할 수 있다.

$x^2=(2k+1)^2$

$= 4k^2 + 4K + 1$

$=4(k^2 + 1)+1$

$\rightarrow$ x^2은 홀수

$\therefore$ "x^2이 짝수라면 x도 짝수이다"는 참(T)

1 간접증명법

2 간접증명법의 종류

① 대우증명법

◆ 예시 2 정수 n에 대해 3n+2가 짝수이면 n도 짝수임을 증명하시오

(풀이) "3n+2가 짝수이면 n도 짝수"의 대우는

"n이 짝수가 아니면 3n+2도 짝수가 아니다"

n이 짝수가 아니면 n은 홀수이다.

따라서 n= 2k+1 으로 놓을 수 있다.

$3n+2=3(2k+1)+2$

$= 6k+3+2 =6k+5=2(3k+2)+1$

⇨ 3n+2는 짝수가 아니다

∴ 3n+2이 짝수이면 n도 짝수이다

1 간접증명법

2 간접증명법의 종류

② 모순증명법

- 주어진 명제를 부정한 뒤 그 식을 전개할 때 결론이 모순임을 보여 명제가 참임을 증명하는 방법
- 본 명제 p → q에 대한 부정이 거짓임을 증명하여 본 명제가 참임을 증명하는 방식
- 본 명제를 부정한 명제가 **참**이면 **본 명제가 거짓**이 되고, 본 명제를 부정한 명제가 **거짓**이면 **본 명제가 참**이 됨

1 간접증명법

2 간접증명법의 종류

② 모순증명법

예시 1 두개의 홀수 m, n의 곱이 홀수임을 모순증명법으로 증명하시오

(풀이) 명제 p, q는 다음과 같다.

- p : m, n은 홀수다.
- q : mn은 홀수다.

그러면 명제 $p \wedge \sim q$는 m과 n이 홀수이면서 두 수의 곱인 mn이 짝수가 되며, 이를 참이라고 가정하자.

이때 m, n이 홀수이므로 $m = 2k+1$, $n = 2l+1$로 나타낼 수 있다. 따라서

$$\begin{aligned} mn &= (2k+1)(2l+1) \\ &= 4kl+2k+2l+1 \\ &= 2(2kl+k+l)+1 \end{aligned}$$

이 된다. 그런데 $mn = 2(2kl+k+l)+1$인 홀수이므로 mn이 짝수라는 가정에 모순이다.

즉 명제 $p \wedge \sim q$는 거짓이고 $\sim (p \wedge \sim q)$는 참이므로 동치인 $p \Rightarrow q$는 참이 된다.

그러므로 2개의 홀수 m, n의 곱은 홀수가 된다.

1 간접증명법

2 간접증명법의 종류

한정자가 포함된 명제를 증명할 때 사용할 수 있는 방법

반례증명법	• **전체한정자(∀)**가 사용되었을 때 해당명제가 **거짓**임을 증명하기 위해 반례를 찾음
존재증명법	• **존재한정자(∃)**가 사용되었을 때 해당명제가 **참**임을 증명하는 방법 • 예가 존재함을 직접 찾았는지 여부에 따라 **구성적 존재증명법**과 **비구성적 존재증명법**으로 나뉨

1 간접증명법

2 간접증명법의 종류

③ 반례증명법

- 주어진 명제에 모순이 되는 예를 하나 보임으로써 명제가 거짓임을 증명하는 방법
- 명제를 거짓이 되게 하는 단 하나의 예라도 존재하면 그 명제는 거짓

1 간접증명법

2 간접증명법의 종류

③ 반례증명법

예시 1

다음 명제가 거짓임을 증명하시오

" 모든 양의 실수 x 에 대해 $x^2 > x$ 이다"

(풀이) $x=0.2$일 경우 $x^2=0.04$

➔ $x^2 > x$ 성립하지 않는다.

$\therefore$ 거짓(F)

1 간접증명법

2 간접증명법의 종류

③ 반례증명법

- 예시 2

다음 명제가 거짓임을 증명하시오

"모든 실수 a, b에 대하여 $a^2 = b^2$ 이면 $a = b$이다."

(풀이) a =-2, b=2일 경우

$a^2 = b^2$ 이지만 a ≠ b

∴ 거짓(F)

1 간접증명법

2 간접증명법의 종류

④ 존재증명법 1)구성적 존재증명법

- 존재한정자가 사용된 명제함수 ∃xP(x)를 증명할 때 P(x)를 참으로 만드는 x를 주어진 정의역에서 찾거나 x를 찾는 과정을 제시하는 것

1 간접증명법

2 간접증명법의 종류

④ 존재증명법 1)구성적 존재증명법

- 예시 1

  두 개의 소수의 합으로 나타낼 수 있는
  소수 n이 존재함을 증명하시오

(풀이) n=5 라고 하자
5=2+3

2와 3은 모두 소수

∴ 참(T)

1 간접증명법

2 간접증명법의 종류

④ 존재증명법 1)구성적 존재증명법

예시 2

a^b 이 무리수가 되는 유리수 a, b가 존재함을 증명하시오

(풀이) $\boldsymbol{a}$가 2, $\boldsymbol{b}$가 $\frac{1}{2}$이라고 하자.

$$\Rightarrow 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

∴ 참

1 간접증명법

2 간접증명법의 종류

④ 존재증명법 2)비구성적 존재증명법

- 직접적으로 명제함수 P(x)를 참으로 만드는 x를 찾거나 x를 찾는 일련의 과정을 제시하는 것이 아니라 우회적인 방법을 통해서 명제가 타당함을 보이는 방법

2 다양한 증명방법

2 다양한 증명방법

1 전수증명법

- 명제에서 유도될 수 있는 경우의 수가 적을 때
일일이 모든 경우의 수를 조사하는 방법

2 다양한 증명방법

1 전수증명법

예시 1

n이 6이하의 자연수 일 때 $(n+2)^2 \geq 2^n$임을 증명하시오.

(풀이) $n=1$일 때 $(1+2)^2 \geq 2^1$
$n=2$일 때 $(2+2)^2 \geq 2^2$
$n=3$일 때 $(3+2)^2 \geq 2^3$
$n=4$일 때 $(4+2)^2 \geq 2^4$
$n=5$일 때 $(5+2)^2 \geq 2^5$
$n=6$일 때 $(6+2)^2 \geq 2^6$

$\therefore$ n이 6이하의 자연수일 때 $(n+2)^2 \geq 2^n$ 성립

2 다양한 증명방법

2 조합적 증명법

- 두 집합의 원소의 개수가 동일함을 증명할 때 사용됨
- 전단증명과 중복산정이 있음

2 다양한 증명방법

2 조합적 증명법

① 전단증명

- 원소가 n개인 집합 A와 원소가 m개인 집합 B를 찾은 후, 두 집합이 일대일 관계임을 보여 n=m임을 증명하는 방법

② 중복산정

- 동일한 집합의 원소를 두 가지 방법으로 센 다음, 그 결과가 각각 n과 m이라면 n=m임을 보임으로써 원소의 개수를 세는 두 방법이 동일하다는 것을 증명

2 다양한 증명방법

3 컴퓨터를 이용한 증명(Computer-Assisted Proof)

- 수학적 증명과정 중에 컴퓨터를 이용한 계산이 포함되는 경우를 의미

- 사람이 직접 계산하기 힘들 정도로 많은 계산식이 포함될 경우 컴퓨터의 도움을 받음

- 증명하기가 복잡한 경우 컴퓨터의 데이터 처리능력을 이용하여 증명

※문제점

- 컴퓨터 역시 인간이 만들기 때문에 오류가 포함될 수 있음

3 컴퓨터를 이용한 증명(Computer-Assisted Proof)

◆ 예시 1

부동소수점 나눗셈 연산의 정확도가 약간 떨어지는
버그가 1994년 인텔 CPU에서 발견됨

$\frac{1}{3}$ 을 부동소수점으로 표현하면

0.3333333333333333 이 되는데
컴퓨터는 그 이후의 숫자는 버리고 저장함