1 행렬의 개념

1 행렬의 개념

1 행렬(Matrix)

행과 열로 구성되는 사각형 형태로 수를 배열한 것

- 수 또는 문자를 네모꼴로 배열한 것
- 대괄호로 묶어서 그 영역을 표시함
- 예 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

2 컴퓨터 분야의 활용

프로그래밍 언어, 자료구조

- 행렬을 배열로 구현해 다양한 자료를 저장하는 용도로 사용

수치해석, 패턴인식

- 데이터를 행렬로 표현해 데이터를 가공하고 분석

컴퓨터 그래픽스

- 이미지 확대/축소하거나 회전시키고 3차원 이미지를 2차원 평면에 투영시킴으로써 영화나 게임에서 사실적인 움직임을 보여주는데 사용

3 정의

① 행렬

m, n이 양의 정수일 때,
m개의 행과 n개의 열로 구성된
직사각형의 수 배열 A를 $m \times n$ **행렬**이라 함

- 행렬 A 에서 i번째 행의 j번째 열의 수를 행렬 A 의 (i, j) 원소라 하며, a_{ij}로 표시함
- 행렬 A 를 간단히 $A=(a_{ij})$로 표기하기도 함

1 행렬의 개념

3 정의

① 행렬

- 행벡터(Row Vector) : **$1 \times n$ 행렬**
- 열벡터(Column Vector) : **$m \times 1$ 행렬**

1 행렬의 개념

3 정의

② 영행렬 (Zero Matrix)

- 모든 원소가 0인 행렬

$$[0], \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \cdots$$

2 행렬의 연산

1 행렬의 연산

- 실수집합의 사칙연산과 유사한 다양한 연산들이 존재
- 행렬의 곱셈에는 스칼라 곱과 행렬 곱이 있음

2 행렬의 연산

2 기본연산

(1) 행렬의 합, 차, 스칼라 곱

◆ 정의

- 크기가 같은 행렬 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$가 있고, $\boldsymbol{k}$를 실수라 할 때,
  ① $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 는 같은 위치의 $\boldsymbol{A}$와 $\boldsymbol{B}$의 원소를 더해서 구해지는 행렬로서 $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$ 원소의 값은
  $\boldsymbol{a_{ij}}+\boldsymbol{b_{ij}}$임

  ② $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ 는 같은 위치의 $\boldsymbol{A}$의 원소로부터 $\boldsymbol{B}$의 원소를 빼서 구해지는 행렬로서 $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$ 원소의 값은 $\boldsymbol{a_{ij}}-\boldsymbol{b_{ij}}$이다.

2 행렬의 연산

2 기본연산

(1) 행렬의 합, 차, 스칼라 곱

◆ 정의

- 크기가 같은 행렬 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$가 있고, $\boldsymbol{k}$를 실수라 할 때,
  ③ $\boldsymbol{kA}$는 $\boldsymbol{A}$ 의 각 원소에 $\boldsymbol{k}$ 를 곱해서 구해지는 행렬로서 (i, j) 원소의 값은 $\boldsymbol{ka_{ij}}$임

2 기본연산

(1) 행렬의 합, 차, 스칼라 곱

◆ (예) 행렬 A와 B가 다음과 같을 때 질문에 답하시오.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 & 3 \\ 1 & 8 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

(풀이) ① $B - A$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

② 2A+(B−A)

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 10 \\ 0 & 8 & 2 & 2 \\ 6 & 0 & 4 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 1 & 8 \\ 1 & 12 & 3 & 2 \\ 8 & 3 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

2 기본연산

(1) 행렬의 합, 차, 스칼라 곱

행렬의 합과 스칼라 곱의 연산법칙

- 행렬의 합과 스칼라 곱은 같은 크기의 행렬 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$에 대해 다음과 같은 연산법칙들을 만족함($\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$는 실수이고 $\boldsymbol{O}$은 모든 원소가 0인 영행렬을 의미함)

2 행렬의 연산

2 기본연산

(1) 행렬의 합, 차, 스칼라 곱

◆ 행렬의 합과 스칼라 곱의 연산법칙

- $A+B=B+A$ 합의 교환법칙
- $A+(B+C)=(A+B)+C$ 합의 결합법칙
- $A+O=A$ 합의 항등원
- $A+(-A)=O$ 합의 역원
- $(ab)A=a(bA)$ 스칼라 곱의 결합법칙
- $(a+b)A=aA+bA$ 스칼라 곱의 분배법칙
- $(a-b)A=aA-bA$ 스칼라 곱의 분배법칙
- $a(A+B)=aA+aB$ 스칼라 곱의 분배법칙
- $a(A-B)=aA-aB$ 스칼라 곱의 분배법칙

2 기본연산

(2) 행렬의 곱

- A가 $m \times n$ 행렬이고 B가 $n \times l$ 행렬일 때, 행렬의 곱 AB는 (i,j)원소가 다음과 같이 정의되는 $m \times l$ 행렬임

$$AB_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \cdots + a_{in} b_{nj}$$

2 기본연산

(2) 행렬의 곱

$$\underset{(m \times n \text{ 행렬})}{A} \times \underset{(n \times l \text{ 행렬})}{B} = \underset{(m \times l \text{ 행렬})}{C}$$

$$\begin{bmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \cdots & b_{1j} & \cdots \\ \cdots & b_{2j} & \cdots \\ & \vdots & \\ \cdots & b_{nj} & \cdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & \vdots & \\ \cdots & c_{ij} & \cdots \\ & \vdots & \end{bmatrix}$$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

2 기본연산

(2) 행렬의 곱

- (예) 행렬 A와 B가 다음과 같을 때 AB를 계산하시오.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- (풀이)

$$AB = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 13 & 5 \end{bmatrix}$$

2 기본연산

(2) 행렬의 곱

- (예) 행렬 A와 B가 다음과 같을 때 AB와 BA를 계산하시오.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

(풀이)

$$AB = [20], \quad BA = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 6 & 8 \\ 6 & 9 & 12 \end{bmatrix}$$

※ 행렬 곱 연산의 특이 성질 $\boldsymbol{AB \neq BA}$

2 기본연산

가우스 소거법

- 행렬은 일차연립방정식의 풀이에 사용됨
- 행렬을 이용한 가우스 소거법으로도 풀 수 있음

(예) $$\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 2x + 5y + z = 3 \\ 3x + 4y - 4z = 13 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 13 \end{bmatrix}$$

2 행렬의 연산

2 기본연산

가우스 소거법

- 행렬은 일차연립방정식의 풀이에 사용됨
- 행렬을 이용한 가우스 소거법으로도 풀 수 있음

(예) $$\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 2x + 5y + z = 3 \\ 3x + 4y - 4z = 13 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow AX = B \begin{cases} A & : \text{계수행렬} \\ X & : \text{미지수 행렬 또는 해} \\ B & : \text{상수행렬} \\ (A|B) & : \text{확장행렬} \end{cases}$$

2

행렬의 연산

2 기본연산

가우스 소거법

- 일차연립방정식에서 해를 구하기 위해
식을 변형하는 작업(3가지)

① 두 개의 식을 더해서 새로운 식을 만듦
② 두 식의 위치를 서로 교환
③ 하나의 식에 0이 아닌 상수를 곱하는 것

2 기본연산

가우스 소거법

① 두 개의 식을 더해서 새로운 식을 만듦

$$\begin{cases} x + 2y - z = 2 & \text{------- (1)} \\ 2x + 5y + z = 3 & \text{------- (2)} \\ 3x + 4y - 4z = 13 & \text{------- (3)} \end{cases}$$

- (1) 에 -2를 곱해서 (2)를 더하면 미지수 x가 없어진 새로운 식 (4)를 만들 수 있음
  → **행 대체 연산**

$$y + 3z = -1 \quad \text{------- (4)}$$

2 행렬의 연산

2 기본연산

가우스 소거법

① 두 개의 식을 더해서 새로운 식을 만듦

$$y + 3z = -1 \qquad \text{-------} \ (4)$$

$$\begin{cases} x + 2y - z = 2 & \text{-------} \ (1) \\ y + 3z = -1 & \text{-------} \ (4) \\ 3x + 4y - 4z = 13 & \text{-------} \ (3) \end{cases}$$

※ 행 대체 연산

하나의 행에 스칼라 곱을 해서 다른 행에 더하는 작업

2 행렬의 연산

2 기본연산

가우스 소거법

② 두 식의 위치를 서로 교환

- (3)과 (4)의 위치를 서로 교환하면 다음과 같음
  → **행 교환**

$$\begin{cases} x + 2y - z = 2 & \text{------- (1)} \\ 3x + 4y - 4z = 13 & \text{------- (3)} \\ y + 3z = -1 & \text{------- (4)} \end{cases}$$

※ 연립방정식에서 식의 순서를 바꾸더라도 해는 변하지 않음

2 행렬의 연산

2 기본연산

◆ 가우스 소거법

③ 하나의 식에 0이 아닌 상수를 곱하는 것

- (1)의 식에 상수 3을 곱하면 새로운 식 (5)를 구할 수 있음

→ **행 스케일링 연산**

$$3x + 6y - 3z = 6 \quad \text{-------} \ (5)$$

$$\begin{cases} 3x + 6y - 3z = 6 & \text{-------} \ (5) \\ 3x + 4y - 4z = 13 & \text{-------} \ (3) \\ y + 3z = -1 & \text{-------} \ (4) \end{cases}$$

※ 행 스케일링 연산

하나의 행에 0이 아닌 스칼라 곱을 하는 작업

3 행렬의 종류

3 행렬의 종류

1 정방행렬(Square Matrix)

행의 수와 열의 수가 같은 $n \times n$ 행렬을
n차 **정방행렬**이라고 하며, n을 정방행렬의
차수라 함

- n차 정방행렬은 다음과 같은 형태를 가짐

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

- 정방행렬의 $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$ 원소를 **대각원소**
- 대각원소를 포함하는 대각선을 **주대각선**

3 행렬의 종류

2 단위행렬(Unit Matrix)

- n차 정방행렬에서 대각원소가 모두 1이고 나머지 원소는 모두 0인 행렬.(I_n으로 표기)즉, $i=j$이면 $a_{ij}=1$ 이고, $i \neq j$이면 $a_{ij}=0$ 임

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

3 대각행렬(Diagonal Matrix)

- n차 정방행렬에서 대각원소 이외의 모든 원소가 0인 행렬

즉, $i \neq j$이면 $a_{ij} = 0$임

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

4 대칭행렬(Symmetric Matrix)

- $\boldsymbol{n}$차 정방행렬에서 $\boldsymbol{a_{ij}} = \boldsymbol{a_{ji}}$인 행렬

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

3 행렬의 종류

4 대칭행렬(Symmetric Matrix)

- (예) 다음 행렬들에 대해서 각각 정방행렬, 단위행렬, 대각행렬, 대칭행렬의 여부를 판단하시오.

① $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ② $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ ③ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ ④ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(풀이)

번호	정방행렬	단위행렬	대각행렬	대칭행렬
①	X	X	X	X
②	O	X	X	O
③	O	X	O	O
④	O	O	O	O

5 교대행렬(Skew Matrix)

- $\boldsymbol{n}$차 정방행렬에서 $\boldsymbol{a_{ij}}=-\boldsymbol{a_{ji}}$이고
대각원소가 모두 0인 행렬.
즉, $\boldsymbol{i=j}$이면 $\boldsymbol{a_{ij}=0}$이고, $\boldsymbol{i\neq j}$이면 $\boldsymbol{a_{ij}}=-\boldsymbol{a_{ji}}$임

$$\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

5 교대행렬(Skew Matrix)

- (예) 3차 정방행렬에서 a_{12}=1, a_{13}=2, a_{23}=3 의 원소를 가지는 교대행렬이 존재할 때 행렬의 나머지 원소를 구하시오.

(풀이) $$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

6 삼각행렬(Triangle Matrix)

- n차 정방행렬에서
  - 상삼각행렬
    - 주대각선 아래에 있는 모든 원소들이 0일 경우
    ($i>j$일 때, $a_{ij} = 0$)
  - 하삼각행렬
    - 주대각선 위에 있는 모든 원소들이 0일 경우
    ($i<j$일 때, $a_{ij} = 0$)
  - 삼각행렬
    - 상삼각행렬 또는 하삼각행렬

6 삼각행렬(Triangle Matrix)

- $\boldsymbol{n}$차 정방행렬에서

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

7 전치행렬(Transpose Matrix)

- $m \times n$ 행렬 A가 주어졌을 때,
  A 의 행과 열을 서로 교환한 행렬을 A의 **전치행렬**
  (A^T로 표기)

- A^T의 크기는 $n \times m$이 됨

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & am_2 & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \ \mathrm{A}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{22} & \cdots & am_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

4 부울 행렬

1 부울 행렬의 합, 교차, 부울 곱

- 크기가 $m \times n$인 두 행렬 $A=[a_{ij}]$와 $B=[b_{ij}]$가 부울 행렬일 때,
  - A와 B의 **합(Join)**은 크기가 $m \times n$ 인 부울 행렬 C 이며, $C=A \vee B$
  - A와 B의 **교차(Meet)**는 크기가 $m \times n$ 인 부울 행렬 C 이며, $C=A \wedge B$
  - A와 B의 **부울 곱(Boolean Product)**은 (i,j) 원소가 다음과 같이 정의되는 $m \times l$ 크기의 부울 행렬 C 이며, $C=A \odot B$로 나타냄

4 부울 행렬

1 부울 행렬의 합, 교차, 부울 곱

(예) 다음 연산을 수행하고 그 결과를 구하시오.

① $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ② $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

③ $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(풀이) ① $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ② $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ ③ $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$