

1

부울함수의 대수적 간소화

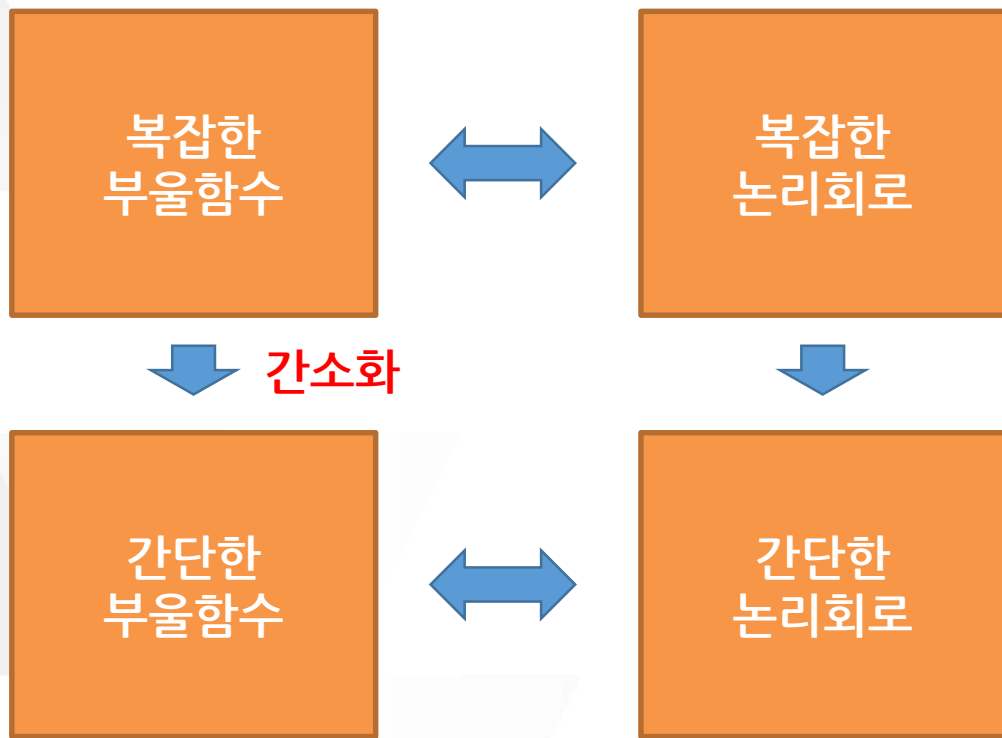
1 부울함수의 대수적 간소화

1 논리회로의 간소화

- ▶ 부울대수의 간소화를 통해 논리회로를 구성하는 게이트 수와 입력 변수의 수를 줄일 수 있음
- ▶ 논리회로를 직접 간소화하는 것은 어렵기 때문에 논리회로를 논리식으로 표현한 뒤에 부울대수의 기본 규칙을 이용하여 간소화함
- ▶ 부울대수의 대수법칙을 이용하여 간소화, 카르노맵 이용하여 간소화

1 부울함수의 대수적 간소화

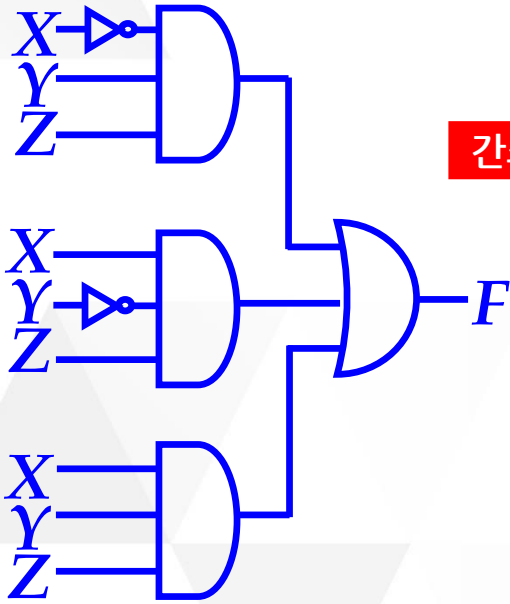
2 간소화 목적



1 부울함수의 대수적 간소화

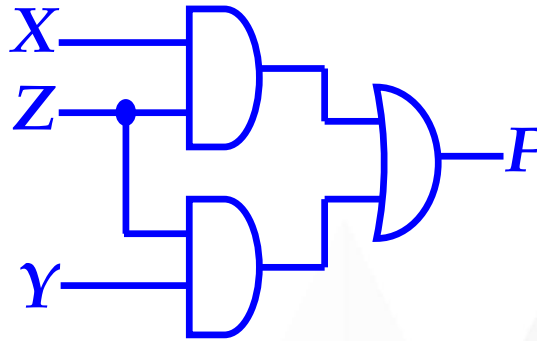
2 간소화 목적

〈간소화하기 전〉



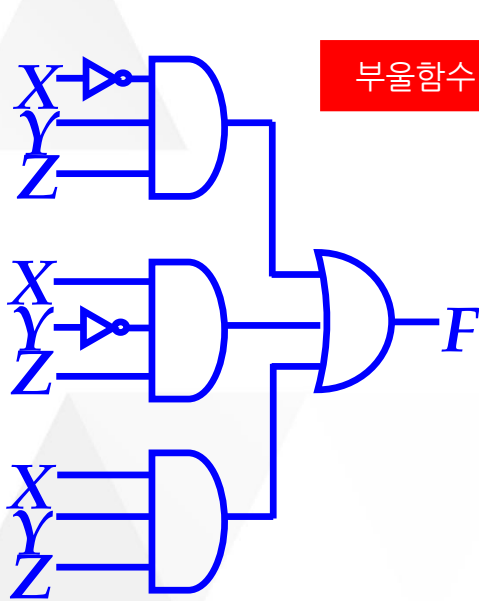
간소화

〈간소화한 후〉



1 부울함수의 대수적 간소화

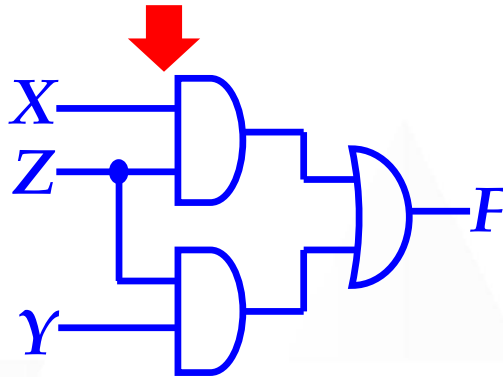
2 간소화 목적



$$F = \bar{X}YZ + X\bar{Y}Z + XYZ$$

부울함수 간소화

$$\begin{aligned} F &= \bar{X}YZ + X\bar{Y}Z + XYZ \\ &= \bar{X}YZ + X\bar{Y}Z + XYZ + XYZ \\ &= \bar{X}YZ + XYZ + X\bar{Y}Z + XYZ \\ &= YZ(\bar{X} + X) + XZ(\bar{Y} + Y) \\ &= YZ + XZ \end{aligned}$$



$$F = YZ + XZ$$

1 부울함수의 대수적 간소화

3 부울함수의 대수적 간소화

- ▶ 주어진 부울함수에 대하여 부울대수의 정리를 이용하여 변환한 다음 변환된 여러 함수 중에서 가장 간단한 형태의 함수를 찾아내는 것

1 부울함수의 대수적 간소화

4 대수적 간소화 방법

① 항결합

◆ 두 개의 항을 결합하여 하나의 항으로 만드는 방법

◆ 예시

- $XY + X\bar{Y} = X(Y + \bar{Y}) = X \cdot 1 = X$

- $$\begin{aligned} F &= X\bar{Y} + XYZ + \bar{X}YZ = X\bar{Y} + YZ(X + \bar{X}) \\ &= X\bar{Y} + YZ \end{aligned}$$

1 부울함수의 대수적 간소화

4 대수적 간소화 방법

② 문자 소거

◆ 중복된 문자를 제거하는 방법

◆ 예시

- $X + \bar{X}Y = X + Y$
 $\therefore X + \bar{X}Y = (X + \bar{X})(X + Y) = X + Y$
- $X(\bar{X} + Y) = XY$
 $\therefore X(\bar{X} + Y) = X \cdot \bar{X} + XY = XY$

1 부울함수의 대수적 간소화

4 대수적 간소화 방법

③ 중복항 첨가

▶ 주어진 함수식의 의미가 변하지 않도록 하면서 간소화를 위해 적절한 항을 함수식에 첨가시키는 방법

▶ 예시

$$\begin{aligned} F &= X\bar{Y}Z + XYZ + \bar{X}YZ \\ &= X\bar{Y}Z + XYZ + XYZ + \bar{X}YZ \\ &= XZ(\bar{Y} + Y) + YZ(X + \bar{X}) \\ &= XZ + YZ \end{aligned}$$

1 부울함수의 대수적 간소화

4 대수적 간소화 방법

④ 합의 정리를 활용하는 방법

◆ 합의 정리(Consensus Theorem)

- $XY + \bar{X}Z + YZ = XY + \bar{X}Z$

◆ (증명)

- $$\begin{aligned} XY + \bar{X}Z + YZ &= XY + \bar{X}Z + (X + \bar{X})YZ \\ &= XY + \bar{X}Z + XYZ + \bar{X}YZ \\ &= XY + XYZ + \bar{X}Z + \bar{X}YZ \\ &= XY(1 + Z) + \bar{X}Z(1 + Y) \\ &= XY + \bar{X}Z \end{aligned}$$

1 부울함수의 대수적 간소화

4 대수적 간소화 방법

▶ 예시 1
 $F = (\bar{X} + Y)(X + Z)$ 를 간소화하시오.

$$\begin{aligned} \text{(풀이)} \quad F &= X\bar{X} + \bar{X}Z + YX + YZ \\ &= \bar{X}Z + XY + YZ \\ &= \bar{X}Z + XY + YZ \\ &= XY + \bar{X}Z \end{aligned}$$

1 부울함수의 대수적 간소화

4 대수적 간소화 방법

▶ 예시 2
다음 부울대수를 간소화하시오.

① $x + x'y$

② $x(x' + y)$

③ $xy + x'z + yz$

(풀이)

$$\begin{aligned}\text{① } x + x'y &= x \times 1 + x'y + 0 \\ &= x(1 + y) + x'y + xx' \\ &= x + xy + x'y + xx' \\ &= x(x + x') + y(x + x') \\ &= (x + x')(x + y) \\ &= 1(x + y) \\ &= x + y\end{aligned}$$

1 부울함수의 대수적 간소화

4 대수적 간소화 방법

▶ 예시 2
다음 부울대수를 간소화하시오.

① $x + x'y$

② $x(x' + y)$

③ $xy + x'z + yz$

(풀이)

$$\begin{aligned}\text{② } x(x' + y) &= xx' + xy \\ &= 0 + xy \\ &= xy\end{aligned}$$

1 부울함수의 대수적 간소화

4 대수적 간소화 방법

▶ 예시 2
다음 부울대수를 간소화하시오.

① $x + x'y$

② $x(x' + y)$

③ $xy + x'z + yz$

(풀이)

$$\begin{aligned}\textcircled{3} \quad xy + x'z + yz &= xy + x'z + yz(x + x') \\ &= xy + x'z + xyz + x'yz \\ &= xy(1 + z) + x'z(1 + y) \\ &= xy + x'z\end{aligned}$$

1 부울함수의 대수적 간소화

4 대수적 간소화 방법

▶ 예시 3
다음 논리식을 간소화하시오.

- ① $XY + XY'$ ② $(X + Y)(X + Y')$
③ $XYZ + X'Y + XYZ'$ ④ $XZ + X'YZ$

(풀이)

$$\begin{aligned}\text{① } XY + XY' &= X(Y + Y') \\ &= X\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{② } (X + Y)(X + Y') &= XX + XY' + XY + YY' \\ &= X(1 + Y + Y') \\ &= X\end{aligned}$$

1 부울함수의 대수적 간소화

4 대수적 간소화 방법

▶ 예시 3
다음 논리식을 간소화하시오.

- ① $XY + XY'$ ② $(X + Y)(X + Y')$
③ $XYZ + X'Y + XYZ'$ ④ $XZ + X'YZ$

(풀이)

$$\begin{aligned}\textcircled{3} \quad XYZ + X'Y + XYZ' &= XY(Z + Z') + X'Y \\ &= Y(X + X') \\ &= Y\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\textcircled{4} \quad XZ + X'YZ &= Z(X + X'Y) \\ &= Z(X + Y)\end{aligned}$$

1 부울함수의 대수적 간소화

4 대수적 간소화 방법

▶ 예시 4
다음 논리식을 간소화하시오.

① $A + A \cdot B$

② $A + A' \cdot B$

③ $A(A + B)$

④ $(A + B)(A + B')$

(풀이)

$$\begin{aligned}\text{① } A + A \cdot B &= A \cdot 1 + A \cdot B \\ &= A \cdot (1 + B) \\ &= A\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{② } A + A' \cdot B &= (A + A')(A + B) \\ &= A + B\end{aligned}$$

1 부울함수의 대수적 간소화

4 대수적 간소화 방법

▶ 예시 4
다음 논리식을 간소화하시오.

① $A + A \cdot B$

② $A + A' \cdot B$

③ $A(A + B)$

④ $(A + B)(A + B')$

(풀이)

$$\begin{aligned}\text{③ } A(A + B) &= A \cdot A + A \cdot B \\ &= A + A \cdot B \\ &= A \cdot 1 + A \cdot B \\ &= A(1 + B) = A\end{aligned}$$

1 부울함수의 대수적 간소화

4 대수적 간소화 방법

▶ 예시 4
다음 논리식을 간소화하시오.

① $A + A \cdot B$

② $A + A' \cdot B$

③ $A(A + B)$

④ $(A + B)(A + B')$

(풀이)

$$\begin{aligned}\text{④ } (A + B)(A + B') &= A \cdot A + A \cdot B' + B \cdot A + B \cdot B' \\ &= A \cdot 1 + A \cdot B' + B \cdot A \\ &= A(1 + B' + B) \\ &= A\end{aligned}$$

2 카르노맵

1 카르노맵(karnaugh map)

- ▶ 부울변수들에 대한 최소항들을 도표로 그려서 인접한 항들을 서로 묶은 후 최소화하는 방법
- ▶ 돈케어(don't care) 조건
 - 각 셀의 값이 0, 1에 상관없이 같은 값을 갖음
 - 카르노맵의 셀에 d로 표시
 - 돈케어에 해당하는 셀은 카르노맵 간소화시 0 이나 1 중 유리한 방향으로 사용

2 카르노맵을 이용하여 최소화하는 방법

- ▶ n 차 불 함수에 대응하는 n 변수 카르노 맵을 선택함
- ▶ 불 함수에 있는 항들 각각에 대응하는 카르노 맵 항에 1을 표시함
- ▶ 인접하는 1들을 $2^n, 2^{n-1}, 2^{n-2}, \dots$ 순으로 묶음
- ▶ 묶음에 있는 공통변수를 찾아 논리합으로 묶음

3 정규합형(Disjunctive Normal Form)

- ▶ 변수의 곱을 합한 형태
- ▶ 변수의 곱항을 민텀(Minterm)이라 함

※ 민텀(최소항)

- 진리표에서 함수값이 1인 행

4 정규곱형(Conjunctive Normal Form)

- ▶ 변수의 합을 곱한 형태
- ▶ 변수의 합항을 맥스텀(Maxterm)이라 함

※ 맥스텀(최대항)

- 진리표에서 함수값이 0인 행

- ▶ 예를 들어, $(x+y+z)(x+y+z')(x'+y+z')$ 와 같은 정규곱형이 있을 때 $(x+y+z)$, $(x+y+z')$, $(x'+y+z')$ 는 각각 맥스텀임

5 2변수, 3변수, 4변수 카르노 맵

▶ 2변수 카르노 맵

		y	
		0	1
x	0	00	01
	1	10	11

▶ 3변수 카르노 맵

		yz			
		00	01	11	10
x	0	000	001	011	010
	1	100	101	111	110

5 2변수, 3변수, 4변수 카르노 맵

▶ 4변수 카르노 맵

yz		00	01	11	10
x	00	0000	0001	0011	0010
	01	0100	0101	0111	0110
	11	1100	1101	1111	1110
	10	1000	1001	1011	1010

5 2변수, 3변수, 4변수 카르노 맵

예시1

다음 부울식에 대한 카르노맵을 작성하고 최소화하시오.

① $xyz + xyz' + xy'z + x'y'z$

② $xyz + xyz' + x'yz + x'yz' + x'y'z$

(풀이)

①

		yz				
			00	01	11	10
x	0			1		
	1			1	1	1

$$xyz + xyz' + xy'z + x'y'z = y'z + xy$$

5 2변수, 3변수, 4변수 카르노 맵

▶ 예시1

다음 부울식에 대한 카르노맵을 작성하고 최소화하시오.

① $xyz + xyz' + xy'z + x'y'z$

② $xyz + xyz' + x'yz + x'yz' + x'y'z$

(풀이)

②

		yz			
		00	01	11	10
x	0		1	1	1
	1			1	1

$$xyz + xyz' + x'yz + x'yz' + x'y'z = x'z + y$$

5 2변수, 3변수, 4변수 카르노 맵

▶ 예시 2

카르노맵으로 표현한 다음 부울식을 최소화하시오.

①

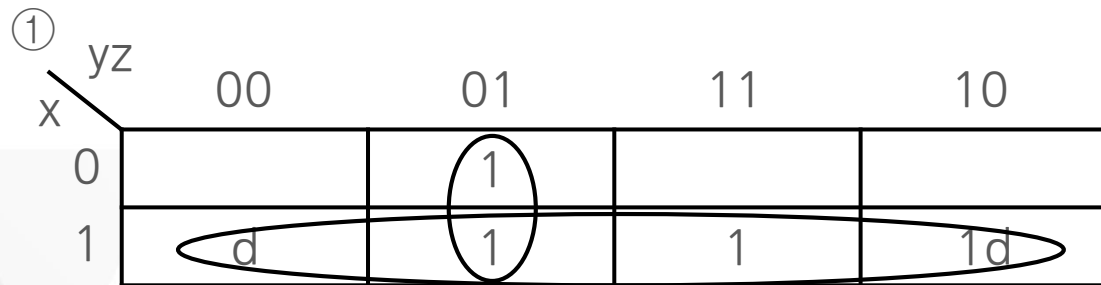
		yz			
		00	01	11	10
x	0		1		
	1	d	1	1	d

5 2변수, 3변수, 4변수 카르노 맵

▶ 예시 2

카르노맵으로 표현한 다음 부울식을 최소화하시오.

(풀이)



$$F = x + y'z$$

5 2변수, 3변수, 4변수 카르노 맵

▶ 예시 2

카르노맵으로 표현한 다음 부울식을 최소화하시오.

②

yz	00	01	11	10
x 00			1	1
01		1	1	
11			d	d
10			d	d

5 2변수, 3변수, 4변수 카르노 맵

▶ 예시 2

카르노맵으로 표현한 다음 부울식을 최소화하시오.

(풀이)

②

		yz	00	01	11	10
x	00				1	1
	01			1	1	
	11				d	d
	10				d	d

$$F = x'y + w'xz$$

5 2변수, 3변수, 4변수 카르노 맵

▶ 예시 2

카르노맵으로 표현한 다음 부울식을 최소화하시오.

③

	yz	00	01	11	10
x	00	1			d
	01		d	d	
	11		1	1	
	10	d			1

5 2변수, 3변수, 4변수 카르노 맵

▶ 예시 2

카르노맵으로 표현한 다음 부울식을 최소화하시오.

(풀이)

③

yz		00	01	11	
x	00	1			d
	01		d	d	
	11		1	1	
	10	d			1

$$F = xz + x'z'$$