1 기본 계수법칙

1 기본 계수법칙

- 계수 문제는 수학과 컴퓨터과학의 전반에 걸쳐서 나타남
- 실험의 성공적인 결과와 그 실험의 가능한 모든 결과를 세어 보아야 이산 사건의 확률을 결정할 수 있음
- 알고리즘의 시간 복잡도를 계산하기 위해서는 알고리즘에서 사용되는 연산의 개수를 세어 보아야 함
- 어떤 사건이 일어나는 방법이 전부 m가지일 때 그 사건이 일어나는 '경우의 수'는 m가지라고 함
- 경우의 수에 대해서는 곱의 법칙과 합의 법칙이 있음

1 기본 계수법칙

- 어떤 실험(사건)➔ 결과 수(경우의 수)

- 예) 동전 던지기(앞면, 뒷면 2가지 경우)
  주사위 던지기(1~6의 수 6가지 경우)
  가위, 바위, 보(3가지 경우)

1 기본 계수법칙

2 곱의 법칙

- 사건 A와 B가 동시에 발생할 경우의 수
- 하나의 작업이 2개의 연속된 작업으로 이루어진 경우에 사용함(그리고, ~이고)
- 첫번째 작업은 n1가지의 방법으로 수행하고 첫번째 작업을 수행한 후 두번째 작업이 n2 가지의 방법으로 수행될 때 전체 작업은 n1× n2가지의 방법으로 수행함
- 셋 이상인 사건에 대하여도 성립함

1 기본 계수법칙

2 곱의 법칙

- 정의
  - 두 사건 A, B가 일어날 경우의 수가
    각각 N(A)=n, N(B)=m 일 때,
    사건 A, B가 동시에 일어날 경우의 수는 n×m임

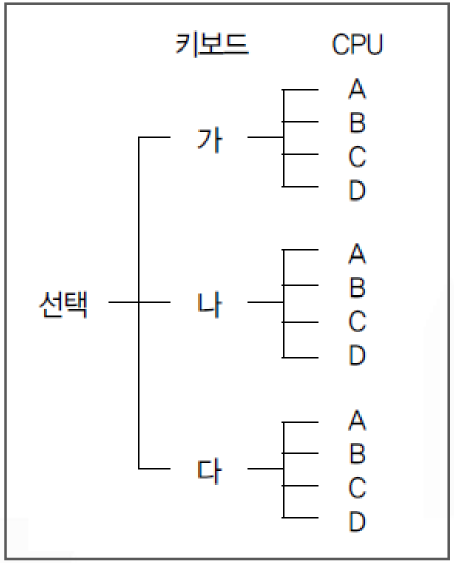
    즉, N(A×B)= N(A) × N(B)=n × m

1 기본 계수법칙

2 곱의 법칙

- 예) 어떤 사람이 키보드와 CPU를 구입하려고 한다.
  마음에 드는 키보드가 3개, CPU가 4개라면 몇 가지 선택이 가능한가?

(풀이)
키보드의 종류는
'가, 나, 다'로 CPU를
'A, B, C, D'로 표기하여
모든 경우를 고려하면
다음과 같음



키보드마다 4 가지 CPU를
선택할 수 있고 키보드의 종류는
3 가지이므로 이 사람이 선택할 수
있는 경우의 수는 키보드의 수와
CPU의 수를 곱하면 됨

→ 따라서 3×4=12 가지

1 기본 계수법칙

2 곱의 법칙

- 예) 4비트로 표현할 수 있는
  이진수는 몇 개인지 구하시오

(풀이)
이진수는 0이나 1로 구성되며 4비트 이진수는
4자리를 차례로 채워야 함

➡ 따라서 총 4비트인 이진수를 만드는
경우의 수는 $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4 = 16$ 가지

1 기본 계수법칙

2 곱의 법칙

- 예) 다음 알고리즘에서 '*'의 출력 횟수는?

```
for x=0 to 4
{
   for y=0 to 2
    {
         print "*";
     }
}
```

(풀이)
5× 3=15(회)

1 기본 계수법칙

2 곱의 법칙

- 예) 컴퓨터과학과 학생 4명, 영문과 학생 3명,
경영학과 학생 5명이 있을 때 각 학과에서
1명씩 선택하여 한 그룹을 만들려고 한다.
이때 만들 수 있는 그룹의 개수는 얼마인지 구하시오.

(풀이)
컴퓨터과학과, 영문과, 경영학과
학생을 선택하려면 곱의 법칙을 사용해야 함

➡ 따라서 4 × 3 × 5 =60 가지

3 합의 법칙

- 사건 A 또는 B가 발생할 경우의 수
- 합의 법칙은 각 작업의 방법의 수를 합하여 전체 방법의 수를 계산함
- 작업들이 서로 독립적인 경우 적용(또는, ~이거나)
- 첫번째 작업은 n1가지의 방법으로 수행하고
  두번째 작업은 n2가지의 방법으로 수행될 때
  두 작업이 서로 독립적일 경우 둘 중의 한가지 작업을 수행하는 방법의 수는 n1+n2가지의 방법이 있음

3 합의 법칙

- 정의
  - 두 사건 A, B가 일어날 경우의 수가 각각 $N(A)=n$, $N(B)=m$ 이고 $A\cap B=\varnothing$ 일 때 사건 A 또는 B가 일어날 경우의 수는 $n+m$임

    즉, $N(A\cup B)= N(A) + N(B)=n + m$

3 합의 법칙

- 예) 8비트 이진수 중 101 이나 111로 시작하는
  이진수의 경우의 수를 구하시오

(풀이)
첫번째 작업은 101로 시작하는 이진수를 구하는 것
두번째 작업은 111로 시작하는 이진수를 구하는 것

이 작업은 이미 결정된 앞의 3비트 이외에 각각
5비트를 추가로 구성해야 하므로 각 작업을 구성하는
개수는 $2^5=32$ 가지임, 또 두 작업은 서로 독립적이고
구하고자 하는 것은 두 작업 중 어느 하나가 나타날
가짓수이므로 합의 법칙에 의하여 32+32=64 가지임

3 합의 법칙

- 예) 사용 가능한 숫자가 2부터 5까지 이고, 자릿수는 4~6개인 비밀번호의 개수는 모두 몇 개인가?

(풀이)

4자리 짜리 비밀번호의 개수= 4^4= 256

5자리 짜리 비밀번호의 개수= 4^5 = 1,024

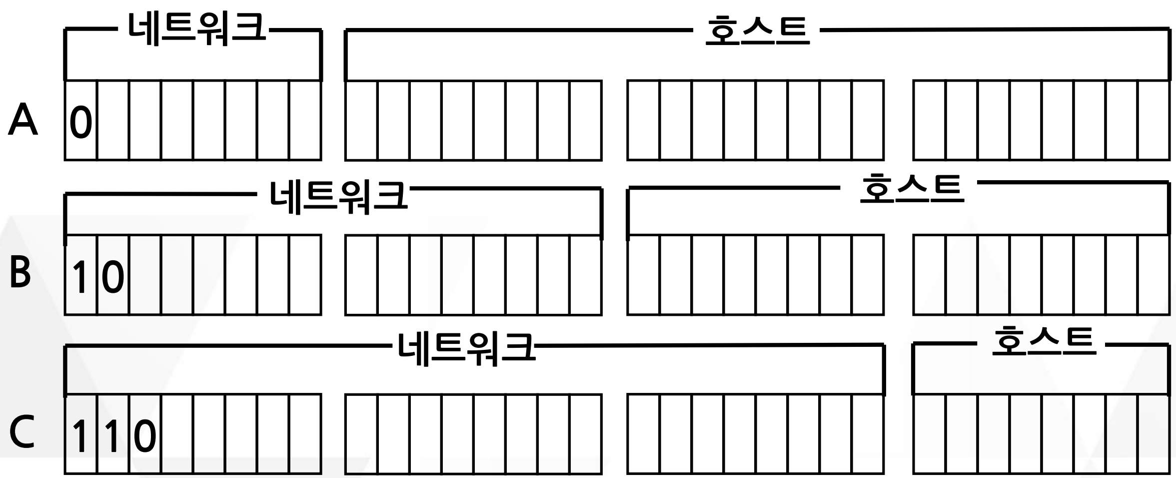
6자리 짜리 비밀번호의 개수= 4^6 = 4,096

➡ 따라서 256+1,024+4,096=5,376

1 기본 계수법칙

3 합의 법칙

- 예) 32bit 인터넷 주소(IPv4)는 그림과 같이 A,B,C의 클래스로 구분된다. 3개의 클래스를 이용해 구분할 수 있는 최대 네트워크의 수는?



1 기본 계수법칙

3 합의 법칙

- (풀이)
  클래스 A의 네트워크 개수= 2^7= 128
  클래스 B의 네트워크 개수= 2^{14} = 16,384
  클래스 C의 네트워크 개수= 2^{21} = 2,097,152

➡ 따라서 최대 네트워크의 개수
=128+16,384+2,097,152=2,113,664

2 순열

2 순열

1 순열(Permutation)

- 순열과 조합은 물체의 집합에서 일정 개수를 선택하는 문제를 풀 때 사용할 수 있으며 선택만 하는 것은 조합 문제, 선택한 것의 순서도 고려해야 하면 순열 문제임

- 이러한 순열과 조합은 다시 중복을 허용하는 경우와 허용하지 않는 경우로 나누어짐

2 순열

1 순열(Permutation)

- 서로 다른 n개의 원소 중 r개를 중복하지 않고 선택하여 순서대로 나열하는 것
- 원소들의 순차적인 배열
- 임의의 집합 X가 전체 n개 원소로 구성되고 이 중 r개를 추출하여 순서대로 나열한다면 이것을 r-순열이라 함
- r-순열의 가지수를 r-순열수라 하며 $P(n, r)$ 또는 ${}_nP_r$ 로 표기

1 순열(Permutation)

- 정의
  - $0 \le r \le n$을 만족하는 정수 n, r에 대하여, n개의 원소를 갖는 집합에서 순서를 고려해서 r개의 원소를 뽑는 경우의 수는

$$P(n, r) = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$$

또는

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

2 순열

1 순열(Permutation)

- 예) 집합 A= {a, b, c}가 있을 때
  이 집합에서 2-순열을 구하시오

(풀이)
전체 3개의 원소 중 2개를 선택하는 문제이므로
2-순열은

$$P(3, 2)= \frac{3!}{(3-2)!} =3!= 3\times2\times1 =6$$

집합 A의 2-순열은 ab, ac, ba, bc, ca, cb

1 순열(Permutation)

- 예) 1부터 6까지의 자연수를 사용하여 자리의 숫자가 모든 다른 세자리 정수를 만들 수 있는 방법의 수를 구하시오

(풀이)
6개의 원소 중 3개를 뽑아
일렬로 나열하는 방법의 수와 같으므로

$P(6, 3)=6\times5\times4=120$

1 순열(Permutation)

- 예) 1부터 9까지의 숫자를 한 번씩만 사용하여 만들 수 있는 4자리 수는 모두 몇 가지인가?

(풀이)
4자리 수의 개수는
$P(9, 4) = 9\times8\times7\times6 = 3{,}024$ (가지)

2 같은 것이 있는 순열

- 원소들은 많은 계수 문제에서 반복적으로 사용할 수 있음
- 예를 들어 번호판의 문자나 숫자는 한 번 이상 반복하여 사용할 수 있음
- 여러 개의 볼펜을 선택할 때도 같은 종류의 볼펜을 반복해서 선택할 수 있음

2 순열

2 같은 것이 있는 순열

정의

- 중복 집합에서의 순열

- 중복된 원소를 허용하는 중복 집합의 크기가 n이고
  그 중에서 중복된 원소의 개수가
  각각 p개, q개, ⋯ , r개가 있을 때,
  n개 모두를 일렬로 배열하는 경우의 수는

$$\frac{n!}{p!q!\cdots r!}$$

2 같은 것이 있는 순열

- 예) 문자 a, b, b, b, c가 주어졌을 때,
  이 문자들을 나열하는 방법의 수
  (세 개의 b를 각기 다른 원소 b1, b2, b3으로 가정)

(풀이)
문자 5개를 나열하는 방법의 수는 ${}_5P_5=5!$
그러나 b1, b2, b3은 원래 같은 문자이므로
이 세 개의 b는 어떻게 나열해도 똑같은 형태가 됨
따라서
5!에서 b1, b2, b3을 나열했던 방법의 수(${}_3P_3=3!$) 제외

그러므로 5개의 문자 a, b, b, b, c의 나열 방법 수는 $\frac{5!}{3!}$

2 같은 것이 있는 순열

- 예) 'SUCCESS'라는 단어의 문자를 나열하여 만들 수 있는 단어의 개수는 얼마인지 구하시오.

(풀이)
만약 'SUCCESS'라는 단어가 모두 다른 문자로 구성되었을 때는 7! 임.
그러나 C와 S가 중복 출현하기 때문에 같은 문자끼리는 순서를 바꾼다 해도 같은 단어가 되므로 이 경우는 제외해야 하며, 이 문제는 7개의 빈칸을 'SUCCESS'를 구성하는 문자들로 채우는 것으로 생각할 수 있음
□□□□□□□
'SUCCESS'의 맨 앞 S는 3번 출현하고 C는 2번 출현함, C와 S가 중복 출현하기 때문에 중복을 허용하는 집합에 대한 순열로 계산할 수 있음

$$\frac{7!}{3!2!} = 420 \text{ (가지)}$$

2 순열

2 같은 것이 있는 순열

- 예) 'SUCCESS'라는 단어의 문자를 나열하여 만들 수 있는 단어의 개수는 얼마인지 구하시오.

(다른 풀이)
조합(Combination)을 이용하여
다음과 같이 풀 수도 있음.

$$C(n, r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

'SUCCESS'의 맨 앞 S는 3번 출현하므로 C(7, 3)
그 다음 U는 C(4, 1)
그 다음 C는 2번 출현하므로 C(3, 2)
그 다음 E는 1번 출현하므로 C(1, 1)
따라서 C(7, 3)×C(4, 1)×C(3, 2)×C(1, 1)

$$= \frac{7!}{3!4!} \times \frac{4!}{1!3!} \times \frac{3!}{2!1!} \times \frac{1!}{1!0!} = 35\times4\times3\times1 = 420$$

2 같은 것이 있는 순열

- 예) 8개의 서로 다른 색연필이 있다.
  이 색연필을 철수, 영희, 민수에게 나누어 주려고 한다. 이때 철수에게는 3개, 영희에게는 2개, 민수에게는 3개를 나누어 주려고 할 때 나누어 줄 수 있는 방법의 수는 얼마인지 구하시오

(풀이)

이 문제는 중복된 순열의 문제이므로 $\dfrac{8!}{3!2!3!}=560$

2 순열

2 같은 것이 있는 순열

- 예) A, A, A, B, B, B, C, C, C, C라는 문자 10개를 한 줄로 나열하여 만들 수 있는 단어의 개수는 ?

(풀이)
10개의 문자를 나열하는 경우의 수는 10! 이고,
A가 3개, B가 3개, C가 4개 이므로,
한 줄로 나열하여 만들 수 있는 단어의 개수는

$$\frac{10!}{3!3!4!}=4,200 \text{ (가지)}$$

3 중복 순열

3 중복 순열

1 중복 순열

- 정의
  - n개의 원소를 갖는 집합에서 중복을 허용하고 순서를 고려해서 r개 원소를 뽑는 경우의 수는
- 중복 순열을 구하는 방법은
  우선 최초 1개를 취하는 방법의 수는 n가지,
  다음 1개를 취하는 방법의 수도 n가지, … 인데
  이것을 r회 계속하는 것이므로
  이 순열의 수는 n^r이 됨

$$n\Pi r = n^r$$

3 중복 순열

1 중복 순열

- 예) 1부터 9까지의 숫자를 이용하여
  만들 수 있는 4자리 수의 개수는 몇 가지인가?
  (단, 숫자는 중복해서 사용할 수 있음)

(풀이)
중복이 허용되므로 총 경우의 수는
9^4=6,561

중복이 허용되지 않는 경우는
C(9, 1)×C(8, 1)×C(7, 2)×C(6, 1)
= 9×8×7×6 = 3,024