이산수학 2주차 1차시

1 술어논리

1 술어논리

1 논리

명제논리

- 명제 단위의 참과 거짓에만 관심을 가지므로 명제를 구성하는 요소를 이용한 새로운 사실을 추론할 수 없음

술어논리

- 명제논리의 문제점을 해결
- 명제를 술어와 주어로 분리하여 **술어(주어)**의 형태로 표현하기 때문에 주어와 술어 사이에 더욱 세밀한 표현 가능하며 더 다양한 사실을 찾을 수 있음

1 술어논리

2 술어

문장을 구성하는 기본요소로서
주어의 동작, 상태, 성질에 대해 서술하는 말

- 문장들의 타당성을 결정하기 위해 선언적인 문장들을 **주어부**와 **술어부**로 분리할 필요가 있음
- **술어**는 주어에 대한 정보를 주는 문장 부분
- 명제에서 일부 또는 모든 명사들을 제거함으로써 얻을 수 있음

1 술어논리

2 술어

- ‘호랑이는 동물이다’
  이 문장에서 **‘호랑이’는 주어, ‘동물이다’는 술어**
  (술어는 주어를 제거한 문장의 부분)
- 술어는 유한개의 변수들을 가진 문장이며
  특정 값을 변수에 대입하면 명제가 됨
- 개체변수의 정의역은 그 변수 자리에 대입할 수 있는
  모든 값들의 집합

1 술어논리

2 술어

예시 1

'홍길동은 사람이다.'라는
명제는 다음과 같은 술어로 표현된다.

사람(홍길동)

1 술어논리

3 명제함수

변수 값에 의해
함수의 진리값이 결정되는 문장이나 식

명제함수를 명제로 만드는 방법

① 각 변수에 특정한 값을 부여하는 것

- 명제함수의 모든 변수에 특정 값들을 할당하면
  명제함수는 참 또는 거짓을 판정할 수 있는 명제가 됨

- 술어의 각 변수들에 특정 값들을 배정하는 것

3 명제함수

예시 1

x 가 15라면 문장 'x 는 5로 나누어 떨어진다'

풀이

15=5×3이므로 참인 명제

예시 2

- P(x)가 'x >3'일 때, P(4), P(2)의 진릿값을 구하시오

풀이

x에 4를 대입하여 P(4)를 구하면 '4>3'이므로 **참**

P(2)는 '2>3'이 되므로 **거짓**

3 명제함수

명제함수를 명제로 만드는 방법

2 한정자를 이용해 변수의 값을 제한하는 것

한정자(Quantifier)

- 명제함수를 명제로 바꾸는 또 다른 방법은 한정자를 추가하는 것
- 한정자는 ‘some’ 또는 ‘all’과 같은 양을 취급하는 단어(전체한정자, 존재한정자)

4 한정자

전체한정자

- 기호 ∀로 표현하며 'all'의 의미
- 전체 한정은
  '정의역에 속하는 모든 x값에 대하여 P(x)가 참'의 의미
- 전체한정화 명제(∀)의 부정은 존재한정화 명제(∃)

4 한정자

- 예시 1
  - P(x)가 "x 는 정수이다"이고
    x 의 정의역이 자연수일경우 $\forall\ x$ P(x)는 참

풀이

자연수는 정수에 포함되므로
모든 자연수는 정수가 됨

4 한정자

예시 2

- P(x)가 $x^2 + x - 12 > 0$ 이고
  x의 정의역이 실수일 경우 $\forall x P(x)$는 거짓

풀이

$x^2 + x - 12 = (x-3)(x+4) = 0$
$\Rightarrow -4 \leq x \leq 3$
일 때 $x^2 + x - 12 \leq 0$
$\therefore \ \forall x P(x) =$ 거짓(F)

4 한정자

존재한정자

- 기호 ∃로 표현하며 'some'의 의미
- 존재 한정은 '정의역에 속하는
  적어도 하나의 x 값에 대하여 P(x)가 참'의 의미

4 한정자

예시 1

- P(x)가 “x 는 유리수이다”이고
  x 의 정의역이 무리수일 경우 ∃xP(x)는 거짓

풀이

- “**유리수=실수-무리수**” 이므로
  무리수와 유리수는 서로 같은 값을
  가지지 않음
- 따라서
  어떠한 무리수도 유리수가 될 수 없음

4 한정자

예시 2

- 알맞은 한정자를 사용하여 다음 문장을 나타내시오

풀이

① 모든 x에 대하여 ‘x+3=3+x’이다.

$\forall x(x+3=3+x)$

② 모든 사람은 죽는다.

$\forall$x(사람 x는 죽는다)

③ 노란 수박이 있다.

$\exists$x(수박 x는 노랗다)

2 추론

1 추론 (Inference)

- 참이라고 알려져 있는 사실로부터 논리적인 과정을 거쳐 참인 사실을 이끌어 내는 과정
- 이미 알고 있는 사실이나 주장으로부터 새로운 주장이나 사실을 유도해 내는 것
- 기존의 논리식으로부터 새로운 논리식을 생성하는 과정

2 추론

1 추론 (Inference)

- **전제(Premise)**와 **결론(Conclusion)**간의 논리적 관계를 다룸
  - **전제(Premise)**란 결론의 근거를 제공하는 이미 알려진 명제
  - **결론(Conclusion)**이란 새로 유도된 명제
- 조건명제(Implication)를 들 수 있음
- 개개의 명제가 아니라 적어도 2개 이상의 명제를 그 논리적 상호관계에 대해 다루는 것

2 명제함수의 타당성

벤 다이어그램 (Venn diagram)

- 한정자가 사용된 명제함수의 타당성을 직관적으로 검사함
- 예시1
  “모든 평행사변형은 사각형이다”

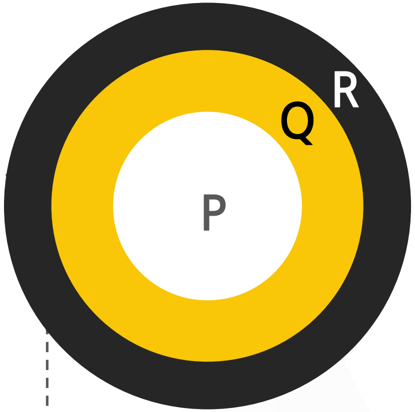
2

추론

3 3단 논법

- 2개의 참인 명제를 가지고
또 다른 참인 명제를 만들어 내는 것

P→Q이고 Q→R 이다.
그러므로 P → R 이다.



- 예시1

소크라테스는 사람이다.
사람은 죽는다.
그러므로 소크라테스는 죽는다.

3 3단 논법

- 예시2

영희는 서울에 있다
서울은 한국에 있다
그러므로 영희는 한국에 있다

2 추론

4 유효추론 (정당한 추론)

- 전제를 참(T)이라고 가정하였을 때
  그에 따른 결론이 항상 참(T)이 되는 추론

- 예시 1
  - $((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$

풀이

$p \rightarrow q$와 $q \rightarrow r$이 모두 참(T)일 경우
결론 $p \rightarrow r$ 도 참이므로 올바른 추론

4 유효추론 (정당한 추론)

예시 2

- 세 조건 p, q, r에 대하여 r → p이고 ~r → ~q일 때, 다음 보기 중 옳은 것을 모두 고르시오

보기

① q → p

② r → ~q

③ q → r

④ p → q

⑤ p → r

2 추론

4 유효추론 (정당한 추론)

◆ 예시 2

- 세 조건 p, q, r에 대하여 r → p이고 ~r → ~q일 때, 다음 보기 중 옳은 것을 모두 고르시오

보기

① q → p　　② r → ~q

③ q → r　　④ p → q

⑤ p → r

4 유효추론 (정당한 추론)

예시 2

- 세 조건 p, q, r에 대하여 r → p이고 ~r → ~q일 때, 다음 보기 중 옳은 것을 모두 고르시오

풀이

조건명제는 그것의 대우 명제와 동치임
문제에서

r → p의 대우는 ~p → ~r
~r → ~q의 대우는 q → r

그런데 **~p → ~r 와 ~r → ~q**에
3단논법을 적용하면 **~p → ~q**
~p → ~q는 대우명제와 동치이므로 **q → p**

4 유효추론 (정당한 추론)

예시 3

- 다음 두 문장이 모두 참이라고 할 때,
  다음 추론 중 옳지 않은 것은?

❖ 매운 것을 좋아하는 사람은 단 것을 좋아한다.
❖ 충치가 많은 사람은 단 것을 좋아하지 않는다.

보기

① 단 것을 좋아하는 사람은 충치가 적다.
② 단 것을 좋아하지 않는 사람은 충치가 많다.
③ 충치가 많은 사람은 매운 것을 좋아하지 않는다.
④ 매운 것을 좋아하는 사람은 충치가 적다.
⑤ 단 것을 좋아하지 않는 사람은 매운 것을 좋아하지 않는다.

4 유효추론 (정당한 추론)

예시 3

- 다음 두 문장이 모두 참이라고 할 때, 다음 추론 중 옳지 않은 것은?

❖ 매운 것을 좋아하는 사람은 단 것을 좋아한다.

❖ 충치가 많은 사람은 단 것을 좋아하지 않는다.

4 유효추론 (정당한 추론)

예시 3

- 다음 두 문장이 모두 참이라고 할 때, 다음 추론 중 옳지 않은 것은?

❖ 매운 것을 좋아하는 사람은 단 것을 좋아한다.
$\underbrace{\text{매운 것을 좋아하는 사람은}}_{p}$ $\underbrace{\text{단 것을 좋아한다.}}_{q}$

❖ 충치가 많은 사람은 단 것을 좋아하지 않는다.
$\underbrace{\text{충치가 많은 사람은}}_{r}$ $\underbrace{\text{단 것을 좋아하지 않는다.}}_{\sim q}$

풀이

문제를 정리하면 **p → q, r → ~q**

p → q 의 대우는 **~q → ~p** 이고, **r → ~q 의 대우**는 **q → ~r**

p → q와 q → ~r에 3단논법을 적용하면 **p → ~r**

r → ~q 와 ~q → ~p에 3단논법을 적용하면 **r → ~p**

2 추론

4 유효추론 (정당한 추론)

예시 3

- 다음 두 문장이 모두 참이라고 할 때,
  다음 추론 중 옳지 않은 것은?

풀이

① 단 것을 좋아하는 사람은 충치가 적다. $(q \rightarrow \sim r)$
② 단 것을 좋아하지 않는 사람은 충치가 많다. $(\sim q \rightarrow r)$
③ 충치가 많은 사람은 매운 것을 좋아하지 않는다. $(r \rightarrow \sim p)$
④ 매운 것을 좋아하는 사람은 충치가 적다. $(p \rightarrow \sim r)$
⑤ 단 것을 좋아하지 않는 사람은 매운 것을 좋아하지 않는다. $(\sim q \rightarrow \sim p)$

4 유효추론 (정당한 추론)

예시 3

- 다음 두 문장이 모두 참이라고 할 때,
  다음 추론 중 옳지 않은 것은?

풀이

① 단 것을 좋아하는 사람은 충치가 적다. ($q \to \sim r$)
② 단 것을 좋아하지 않는 사람은 충치가 많다. ($\sim q \to r$)
③ 충치가 많은 사람은 매운 것을 좋아하지 않는다. ($r \to \sim p$)
④ 매운 것을 좋아하는 사람은 충치가 적다. ($p \to \sim r$)
⑤ 단 것을 좋아하지 않는 사람은 매운 것을 좋아하지 않는다. ($\sim q \to \sim p$)

4 유효추론 (정당한 추론)

예시 4

- 세 조건 p, q, r에 대하여 $\sim p \to q$이고 $q \to r$일 때, 다음 보기 중 틀린 것은?

보기

① $\sim p \to r$　② $\sim r \to p$

③ $\sim q \to p$　④ $\sim r \to \sim q$

⑤ $\sim q \to r$

2 추론

4 유효추론 (정당한 추론)

- 예시 4
  - 세 조건 p, q, r에 대하여 ~p → q이고 q → r일 때, 다음 보기 중 틀린 것은?

보기

① ~p → r　　② ~r → p

③ ~q → p　　④ ~r → ~q

⑤ ~q → r

4 유효추론 (정당한 추론)

예시 4

- 세 조건 p, q, r에 대하여 ~p → q이고 q → r일 때,
  다음 보기 중 틀린 것은?

풀이

~p → q이고 q → r 이므로 3단논법에 의해 **~p → r**
문제에서
~p → q 의 대우는 **~q → p**
q → r 의 대우는 **~r → ~q**
그런데 **~r → ~q**와 **~q → p**에 3단논법을 적용하면 **~r → p**

3 추론규칙

3 추론규칙

1 추론규칙(Inference Rule)

어떤 명제로부터
다른 명제나 논리식을 끌어내는 규칙

- 다른 주장들로부터 결론을 도출하는데 사용
- 증명의 과정을 연결하는 역할
- 가설로부터 논리적으로 결론에 도달하는 과정이 정당하다는 것을 보여줌

3 추론규칙

1 추론규칙(Inference Rule)

- 추론 규칙에 의해 새로 생성된 논리식이
  기존의 논리식 집합과 논리적인 모순이 없어야 함

- 기본적인 추론규칙은 **논리적 동치**를 이용하는 것

  - 원래의 주장을 논리적으로 동치인 문장으로
    여러 번 대치해도 영향을 주진 않음

3 추론규칙

1 추론규칙(Inference Rule)

- 만약 모든 가정이 참일 때 결론도 참이면,
  그 논증은 타당(Valid)하다고 할 수 있음

- 가정 $P_1, P_2, P_3, \cdots P_n$ 이 참이면
  결론 q가 논리적으로 참이라고 하는 것은
  다음의 함축이 참이라는 것을 말함

$$(P_1 \land P_2 \land P_3 \land \cdots \land P_n) \rightarrow q$$

1 추론규칙(Inference Rule)

- 예시 1
  - ‘만약 오늘 눈이 온다면 우리는 스키를 타러 갈 것이다’라고 하는 **함축문**과 ‘오늘 눈이 온다’가 참이라고 하면

→ ‘우리는 스키를 타러 갈 것이다’는 **참**

3 추론규칙

1 추론규칙(Inference Rule)

법칙이름	추론법칙	항진명제
선언적 부가 (disjunctive addition)	p $\therefore\ p \vee q$	$p \rightarrow (p \vee q)$
단순화 (simplication)	$p \wedge q$ $\therefore\ p$	$(p \wedge q) \rightarrow p$
긍정논법 (modus ponens)	p $p \rightarrow q$ $\therefore\ q$	$(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q$
부정논법 (modus tollens)	$\sim q$ $p \rightarrow q$ $\therefore \sim p$	$(\sim q \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow \sim p$

1 추론규칙(Inference Rule)

법칙이름	추론법칙	항진명제
선언적 삼단논법 또는 소거 (disjunctive syllogism)	$p \lor q$ $\sim p$ $\therefore q$	$((p \lor q) \land \sim p) \rightarrow q$
가설적 삼단논법 또는 추이 (hypothetical syllogism)	$p \rightarrow q$ $q \rightarrow r$ $\therefore p \rightarrow r$	$((p \rightarrow q) \land (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$

1 추론규칙(Inference Rule)

- 예시 2
  - 다음 추론이 유효한 추론인지 진리표를 이용하여 보이시오.

보기

$$p \rightarrow q$$

$$q$$

$$\therefore p$$

3 추론규칙

1 추론규칙(Inference Rule)

- 예시 2
  - 다음 추론이 유효한 추론인지 진리표를 이용하여 보이시오.

풀이

진리표에서 전제가 모두 참일 경우 결론이 거짓이 되는 경우가 있으므로 이 추론은 유효하지 않은 추론

결론	전제	전제
p	q	p→q
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	F