Universidad Rafael Landívar
Facultad de Ingeniería
Precálculo
Proyecto 1, sección 01
Docente: Luis Pablo Granja, MACDE

PROYECTO No. 1
"Manual de resolución de ecuaciones"

Estudiantes: Escobar Fernández, Sebastian Alberto | 1025224
Mazariegos Soto, Fátima Lourdes | 1166424
Rosales Ochoa, Edwards Vicente | 1354124
Gonzáles Franco, Carlos Emmanuel | 1107124
Castillo Palacios, Mariana | 1127124
Méndez Gonzáles, Krizia Mariné | 1377024

Guatemala, 08 de mayo de 2,024

ÍNDICE

ECUACIONES LINEALES

Una ecuación lineal se identifica reconociendo su grado o el exponente que debe ser igual a 1. Se les denomina lineales, pues al momento de graficarlas en un plano cartesiano, estas quedan como una línea. Un sistema de ecuaciones lineales se conforma por dos o más variables. La estructura de una ecuación lineal con dos variables se representa de la siguiente manera:

$$ax + by = c$$

Donde x y y son las incógnitas y a y b son los valores brindados o constantes.
Para resolver los sistemas de ecuaciones lineales de dos o más variables existen diversos métodos, los tres principales son.

- Método gráfico:
  Este método presenta algo en contra, y es que cuando la solución obtenida no es entera o cuando la escala de los ejes es un valor demasiado bajo o demasiado alto, el sistema forma una solución de manera aproximada.

- Método de sustitución:
  En este método se utilizarán las propiedades aditivas, multiplicativa y de sustitución, este consiste en que despejes las variables según lo vayas necesitando y sustituyas dicha variable en otra ecuación.

- Método de igualación:
  En este aplicaremos las propiedades multiplicativa, aditiva, transitiva y de sustitución. Este consiste en que despejar la misma variable de ambas ecuaciones y luego igualar los dos despejes.

Una aplicación específica para las ecuaciones lineales en la rama de la economía es en el estudio de los modelos de mercado de renta nacional, este tratándose de la descripción matemática del comportamiento de la renta de un país.

<u>Ejemplos:</u>

$$2\mathrm{x} - (5\mathrm{x} + 3) = 7 + (3\mathrm{x} - 2)$$
$$2x - 5x - 3 = 7 + 3x - 2$$
$$2x - 5x - 3x = 7 - 2 + 3$$
$$-6x = 8$$
$$x = \frac{-8}{6}$$
$$x = \frac{-4}{3}$$

Comprobación

$$2\left(\frac{-4}{3}\right) - \left(5\left(\frac{-4}{3}\right) + 3\right) = 7 + (3\left(\frac{-4}{3}\right) - 2$$

$$1 = 1$$

Ej.

$$2x + 9 = 14$$
$2x + 9 - 9 = 14 - 9$ Restar 9 en ambos lados
$\frac{2x}{2} = \frac{5}{2}$ Dividir 2 en ambos lados
$x = \frac{5}{2}$ Resultado

Comprobación

$$2x + 9 = 14$$
$$2\left(\frac{5}{2}\right) + 9 = 14$$
$$5 + 9 = 14$$
$14 = 14$ Verdadero

ECUACIONES CUADRÁTICAS

Una ecuación de segundo grado o ecuación cuadrática es una ecuación polinómica donde el mayor exponente de la incógnita **x** es igual a dos. Normalmente, la expresión se refiere al caso en que solo aparece una incógnita y la forma más común en la que se expresa es:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Donde **a** es el coeficiente cuadrático o de segundo grado y es siempre distinto a 0 (pues si fuera cero, no sería de segundo grado), **b** es el coeficiente lineal o de primer grado y **c** es el termino independiente.

Resolución de Ecuaciones Cuadráticas

1. Ecuaciones cuadráticas del tipo $ax^2 + c = 0$

En este tipo de ecuaciones falta el termino bx, por lo que solo hay termino con x^2 y un término independiente. Para resolver este tipo de ecuaciones se procede como una ecuación de primer grado en principio dejando de un lado todos los términos con x^2y del otro lado todos los términos independientes, se despeja la x^2 y hallar x, se calcula la raíz cuadrada del valor obtenido para x^2.

Ej.

2. Ecuaciones cuadráticas del tipo $ax^2 + bx = 0$

En este tipo de ecuaciones falta el termino independiente. Se puede observar que en los dos términos se tiene una x. Se trata pues de un factor común. El hecho que aparezca la x en ambos términos permite que se pueda reescribir la ecuación sacando factor común a la x.

Ej.

3. Ecuaciones cuadráticas $ax^2 + bx + c = 0$

Para resolver este tipo de ecuaciones se ordena previamente si no lo está, siendo que los coeficientes que tenemos (a,b y c) hacen referencia a:

A- Coeficiente que acompaña a la x^2
B- Coeficiente que acompaña a la x
C- Termino independiente.

La resolución de estas ecuaciones se realiza mediante una formula general. La fórmula general para encontrar valores de x es:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ej.

$5a^2 + 15a = 0$ - (Factorizar)

$5(a^2 + 3a) = 0$ (5 es factor común de $5a^2$ y $15a$)

$5a(a + 3) = 0$ (a es factor común de a^2 y $3a$)

$5a = 0$ $a + 3 = 0$ (Igualar cada factor a cero)

$\frac{5a}{5} = \frac{0}{5}$ $a + 3 - 3 = 0 - 3$ (Resolver ecuación)

$a = 0$ $a = -3$ (Resultado)

Comprobación

$a = 0$ $a = -3$

$5(0^2) + 15(0) = 0$

$5(0) + 0 = 0$ $5(9) - 45 = 0$

$0 + 0 = 0$ $45 - 45 = 0$

$0 = 0$ $0 = 0$

Ejemplos:

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$x = \frac{-(.5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(1)(6)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2}$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2}$$

$$x = \frac{5 \pm 1}{2}$$

$$x_1 = \frac{5 + 1}{2} = 3$$

Comprobación

$$(3)^2 - 5(3) + 6 = 0$$

$$0 = 0$$

$$x_2 = \frac{5 - 1}{2} = 2$$

Comprobación

$$(2)^2 - 5(2) + 6 = 0$$

$$0 = 0$$

ECUACIONES REDUCIBLES A CUADRÁTICAS

Las ecuaciones reducibles a cuadráticas son ecuaciones polinómicas especiales, como ejemplo, $x^4 – 5x^2 + 4 = 0$. Si se utiliza el método de la sustitución o también conocida como cambio de variables se puede reducir la ecuación de forma cuadrática. Logrando así encontrar una solución.

Ejemplo

$x^4 – 13x^2 + 36 = 0$

Usando la propiedad de la potencia $(x^a)^b= x^{a+b}$ se puede reescribir la ecuación:

$(x^2)^2-(x^2) +36=0$

Se realiza un cambio de variable $U=x^2$. Lo que sucede es que se sustituye la x^2 por la U, reescribiendo la ecuación como
$U^2-13U+36=0$

Es notoria que la ecuación tiene forma cuadrática, por eso se pueden aplicar 2 métodos para resolverla, mediante la ecuación cuadrática o por factorización.
Por método de fórmula cuadrática general:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Donde:

B= -13

C= 36

A=1

$$U = \frac{-(-13) \pm \sqrt{(13)^2 - 4(1)(36)}}{2(1)}$$

$$U = \frac{+13 \pm 5}{2}$$

- Se sustituye la U por x^2, para determinar el valor de x

$$x^2 = \frac{+13 \pm 5}{2}$$

$$x = \sqrt[2]{\frac{+13 \pm 5}{2}}$$

- Finalmente, los 4 valores para x son los siguientes:

$$x_1 = \sqrt[2]{9} = 3$$

$$x_2 = \sqrt[2]{9} = -3$$

$$x_3 = \sqrt[2]{4} = 2$$

$$x_4 = \sqrt[2]{4} = -2$$

Método por Factorización

Con el caso que se desee por factorización, se debe tomar el polinomio en forma cuadrática, ya con el cambio de variable.

$U^2-13U+36=0$

Se aplica el caso de factorización que se llama, trinomio de la forma $x^2+ax+c=0$, este consiste en encontrar dos valores, estos al momento de sumarse o restarse (depende del signo de los términos), den el término b y multiplicándolos entre sí, den el término C.

$(U-9)(U-4)=0$ (en este caso se suman los términos para dar el término b, en caso los signos fueron diferentes, se restan)

- Se despeja cada miembro y se igualan a 0

$$(U-9)=0$$

$$U=9$$

- Se sustituye U por x^2

$$x^2 = 9$$

$$x_1 = \sqrt[2]{9} = 3$$

$$x_2 = \sqrt[2]{9} = -3$$

$$U-4=0$$

$$U=4$$

- Se sustituye U por x^2

$$x^2 = 4$$

$$x_3 = \sqrt[2]{4} = 2$$

$$x_4 = \sqrt[2]{4} = -2$$

Ej.

$$4x^2 + 4x + 1 = 0$$

$w = 2x$ Tomamos que w = 2x

$4x^2 + 4x + 1 = w^2 + 2w + 1$ Resolver ecuación

$$(w + 1)(w + 1) = 0$$

$$w + 1^2 = 0$$

$$(2x + 1)^2 = 0$$

Sustituimos w por 2x

$$2x + 1 = 0$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

Resultado

Comprobación

$$4\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 4\left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = 0$$

$$1 - 2 + 1 = 0$$

$$-1 + 1 = 0$$

$$0 = 0$$

ECUACIONES RADICALES

Ejemplos:

$$3\sqrt{x-1} + 11 = 2x$$

$$3\sqrt{x-1} = 2x - 11$$

$$(3\sqrt{x-1})^2 = (2x-11)^2$$

$$9(x-1) = 4x^2 - 44x + 121$$

$$9x - 9 = 4x^2 - 44x + 121$$

$$4x^2 - 53x + 130 = 0$$

$$x = \frac{53 \pm \sqrt{2809 - 2080}}{8}$$

$$x = \frac{53 \pm \sqrt{729}}{8}$$

$$x = \frac{53 \pm 27}{8}$$

$$x_1 = \frac{80}{8} = 10 \qquad x_2 = \frac{26}{8} = \frac{13}{4}$$

Comprobación

$$3\sqrt{(10)-1}+11=2(10)$$

$$20=20$$

$$x=10$$

Comprobación

$$3\sqrt{\left(\frac{13}{4}\right)-1}+11\neq 2\left(\frac{13}{4}\right)$$

$$\frac{31}{2}=\frac{13}{2}$$

Ej.

$$\sqrt{4x^2-15}-2x=-1$$

$$\sqrt{4x^2-15}=2x-1$$

$$4x^2-15=4x^2-4x+1$$ Elevar al cuadrado ambos lados y desarrollar

$$4x=16$$

$$x=4$$

Comprobación

$$\sqrt{4(4)^2-15}-2(4)=-1$$

$$\sqrt{64-15}-8=-1$$

$$\sqrt{49}-8=-1$$

$$7-8=-1$$

$$-1=-1$$

ECUACIONES RACIONALES

Se denomina ecuaciones racionales a todas aquellas ecuaciones con fracciones algebraicas, es decir, que polinomios se dividen entre más polinomios, las incógnitas pueden estar presentes en los denominadores o numerador. Las ecuaciones racionales se presentan en la siguiente forma base:

$$\frac{p(x)}{s(x)}=r(x)$$

Siendo p y s un coeficiente, mientras que x representara una variable.

Métodos para resolver las ecuaciones racionales:

Método de la multiplicación cruzada, este método únicamente puede ser utilizado si hay una sola expresión racional de cada lado de la igualdad

Ejemplo

$$\frac{7}{x+2} = \frac{x}{x+2}$$

- El primer paso será cambiar los denominadores de ambos lados y trasladarlos hacia su lado contrario, debido a que estos se están dividiendo pasan a multiplicar. $7(x+2) = x(x+2)$
- Se realizan las multiplicaciones $x^2 + 2x = 7x + 14$
- Pasar todos los términos a un solo lado de la igualdad y igualarlos a 0 x2$x^2 - 7x + 2x - 14 = 0$
- Operar los termino similares $x^2 - 5x - 14 = 0$
- Factorizar la ecuación: $(x-7)(x+2) = 0$
- Despejar la variable $x = 7$ $x = -2$

Método mínimo común denominador, esta técnica permite la resolución de cualquier racional sin excepciones

Ejemplo:

$$\frac{x}{16} - \frac{3}{8x} = \frac{5}{16}$$

- Encontrar el mínimo común denominador en este caso es 16 y multiplicarlo por cada uno de los denominadores que se encuentran en la ecuación $\frac{x(16x)}{16} - \frac{3(16x)}{8x} = \frac{5(16x)}{16}$
- Simplificar la ecuación: $x^2 - 6 = 5x$
- Pasar todos los términos a un solo lado de la ecuación e igualarlo a 0 $x^2 - 6 - 5x = 0$
- Factorizar la ecuación: (x-6)(x+1)=0
- Resolver cada una de la X y encontrar sus valores $x = 6$ $x = -1$

Ej.

$\frac{7+x}{x+5} = \frac{x+3}{x+2}$

(Buscar el denominador común)

$$\frac{(7+x)\ (x+2)}{(x+5)\ (x+2)} = \frac{(x+3)(x+5)}{(x+5)\ (x+2)}$$

(Modificar los numerados similar a suma de fracciones)

$$(7 + x)(x+2) = (x + 3)(x+5)$$

(Cancelar el denominador común en ambos miembros)

$$7x + 14 + x^2 + 2x = x^2 + 5x + 3x + 15$$

(Resolver ecuación)

$$9x + x^2 - x^2 - 5x - 3x = 15 - 14$$

$$x + x^2 - x^2 = 1$$

$$x = 1$$

(Resultado)

ECUACIONES DE VALOR ABSOLUTO

Para resolver este tipo de ecuaciones se debe utilizar la definición de valor absoluto. Tomando en cuenta que esto quiere decir que, al haber un número negativo dentro de un valor absoluto, le cambia el signo a uno positivo, y de haber un número positivo dentro del valor absoluto lo deja con el mismo signo.

Para resolver una ecuación como esta debemos seguir los siguientes pasos:

- Despejar el valor absoluto.
- Negar el otro miembro de la ecuación.
- Resolver las dos ecuaciones.
- Comprobar las soluciones halladas, sustituyéndolas en la ecuación original y el resultado debe ser igual a 0 para que una respuesta sea verídica y no sea una respuesta extraña.

A continuación, un ejemplo de cómo resolver una ecuación de valor absoluto esta junto a su respectiva comprobación.

$$|2x-1|-5=0$$
$$|2x-1|=5$$

$$2x-1=5$$

$$2x=5+1$$

$$x=\frac{6}{2}$$

$$x=3$$

Comprobación:

$$|2(3)-1|-5=0$$

$$|5|-5=0$$

$$0=0$$

$$2x-1=-5$$

$$2x=-5+1$$

$$x=\frac{-4}{2}$$

$$x=-2$$

Comprobación:

$$|2(-2)-1|-5=0$$

$$|-5|-5=0$$

$$5-5=0$$

$$0=0$$

Ejemplos:

$$1 + |3x + 6| + 4x = 0$$
$$|3x + 6| = -4x - 1$$

$$3x + 6 = -4 - 1$$

$$3x + 4x = -7$$

$$x = \frac{-7}{7}$$

$$x = -1$$

Comprobación

$$1 + |3(-1) + 6| + 4(-1) = 0$$

$$1 + |3| - 4 = 0$$

$$1 + 3 - 4 = 0$$

$$0 = 0$$

$$3x + 6 = -(4x - 1)$$

$$3x + 6 = 4x + 1$$

$$3x - 4x = 1 - 6$$

$$-x = -5$$

$$x = \frac{-5}{-1}$$

$$x = 5$$

Comprobación

$$1 + |3(5) + 6| + 4(5) = 0$$

$$1 + |21| + 20 = 0$$

$$1 + 21 + 20 = 0$$

$$42 = 0$$

ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

Ejemplos:

Seno: Lulu
Coseno: Mariné
Tangente: Sebas
Secante: Edward
Cosecante: Carlos
Cotangente: Mariana

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

LIBROS:

Sánchez, F., Villanueva, R., & Lugo, J. (2012). Álgebra II. México: Ediciones Anglo. Cap. 2, pp. 140-146

Baldor, A. (2017). Álgebra. (3a ed.). México: Grupo Editorial Patria. Cap. XXXIV, pp. 319-339
Aguilar, A. (2009). Matemáticas Simplificadas. (2a ed.). México: Pearson. Cap. 8, pp. 394-412

ELECTRÓNICAS

Ecuaciones reducibles a la forma cuadrática - Mi Profe. (2022, Febrero 24). Mi Profe. https://miprofe.com/ecuaciones-reducibles-a-la-forma-cuadratica/

MatematicaTuya. (s. f.). Ecuaciones con un valor absoluto. https://www.matematicatuya.com/DESIGUALDADES/S8_Ecuaciones_Absoluto.html

Dechima, S. (2020, 5 abril). Ecuaciones fraccionarias racionales [Diapositivas]. SlideShare. https://es.slideshare.net/sabrinadechima1/ecuaciones-fraccionarias-racionales