Integración Numérica.

Taller presentado a:

Carlos Alberto Ardila Albarracín.

En la materia, Análisis Numero.

Presentado por:

PAOLA ANDREA RUIZ MELENGE.

KEVITH FELIPE BASTIDAS CHILITO.

Universidad del Cauca

Facultad de Ingeniería Electrónica y Telecomunicaciones

Programa de Ingeniería de sistemas.

Popayán, diciembre de 2020.

TEMA 1

Método de Romberg

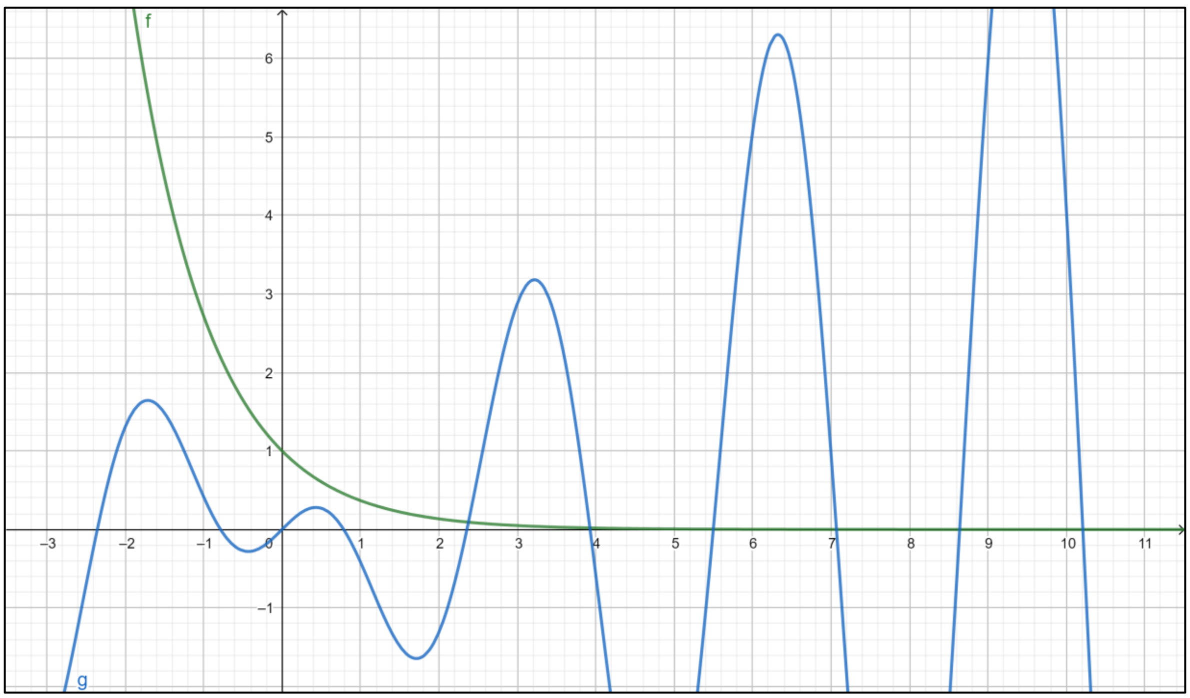
Este método permite obtener integrales numéricas (aproximaciones) de funciones de manera eficiente, en el cual se basa de aplicaciones sucesivas de la regla del trapecio.

Para aplicar dicho método, se deben suministrar las entradas como el límite inferior y límite superior de la integral, como también la función por lo que se tiene el siguiente ejercicio.

PARTE A. Cálculo de áreas planas.

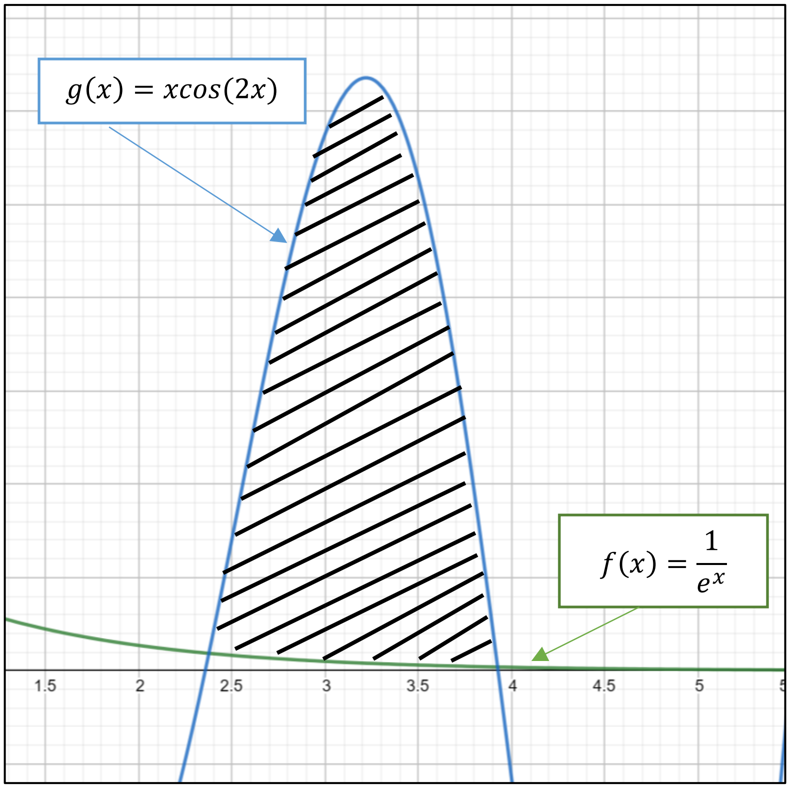
Hallar el área de la primera región limitada en el primer cuadrante por: $f(x) = \frac{1}{e^x}$ y $g(x) = x\cos(2x)$.

Graficamos las dos funciones para encontrar el área acotada entre las dos funciones.



Grafica 1

De la grafica 1 se vemos las áreas acotadas por estas dos funciones, de ahí obtenemos que la primera área limitada en el primer cuadrante es:



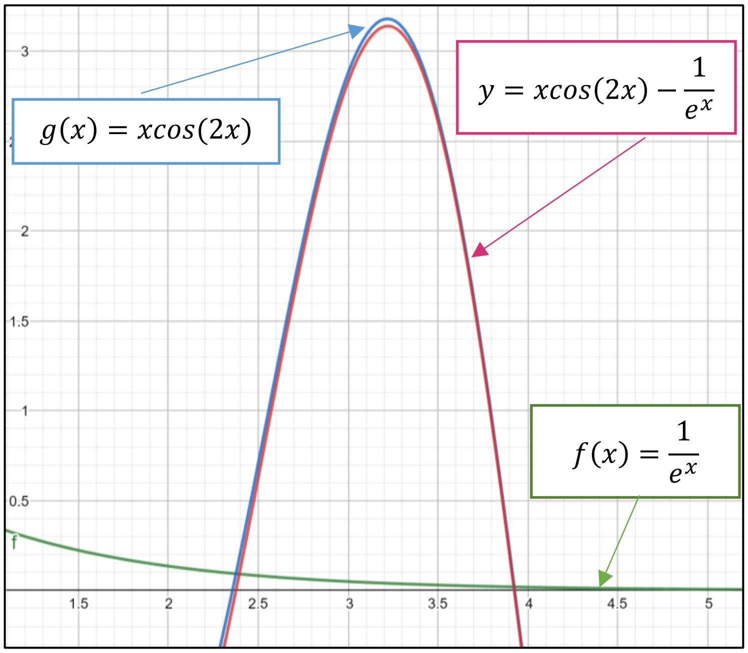
grafica 2

De aquí utilizamos el Teorema (Área de una región entre dos curvas): $A = \int_a^b [f(x) - g(x)]$

Obtenemos $A = \int_a^b \left[xcos(2x) - \frac{1}{e^x}\right]$, ya que g(x) es mayor entre ese intervalo que f(x) como podemos ver en la gráfica 2, tomamos como a $f(x) = xcos(2x)$ y $g(x) = \frac{1}{e^x}$.

Ahora para obtener los límites de las integrales, tendremos que encontrar las raíces de la función que se encuentra en la integral, o sea: $xcos(2x) - \frac{1}{e^x} = 0$, si graficamos esta diferencia como una función $y = xcos(2x) - \frac{1}{e^x}$, podemos observar en la gráfica 3 que sus raíces pasan exactamente, por los puntos de corte del área subrayada en la gráfica 2, entre las dos funciones f(x) y g(x).

Después utilizamos el método de Newton para hallar las raíces de $y = xcos(2x) - \frac{1}{e^x}$ y así encontrar los limites de las integrales.



grafica 3

Hallamos el primer límite de la integral:

```
 - N E W T O N -
Digite la aproximacion inicial : 2.4
Digite el numero de iteraciones : 10

        -- p --                -- f(p) --           -- Er --
1       2.375951               0.0009293090983      0.0101219452
2       2.3757603487           6.398606423e-008             8.014611637e-005
3       2.3757603356           -2.435524655e-016            5.51909052e-009

Procedimiento completado satisfactoriamente
Presione una tecla para continuar . . .
```

Ilustración 1. Método de Newton.

Hallamos el segundo límite de la integral:

```
 - N E W T O N -
Digite la aproximacion inicial : 4
Digite el numero de iteraciones : 10

        -- p --                -- f(p) --           -- Er --
1       3.925353               -0.006876354565      0.01901666079
2       3.9244744260           -1.574415749e-006            0.0002238438735
3       3.9244742247           -8.443564925e-014            5.127498477e-008
4       3.9244742247           -1.045729936e-015            2.715813744e-015

Procedimiento completado satisfactoriamente
Presione una tecla para continuar . . .
```

Ilustración 2. Método de Newton

Con las ilustraciones 1 y 2 ya obtuvimos los limites quedándonos la integral de la siguiente manera:

$$A = \int_{2.37576033}^{3.92447422} x\cos(2x) - \frac{1}{e^x}\,dx$$

Utilizando el método de Romberg se ha obtenido la siguiente aproximación para la integral anterior:

```
R O M B E R G
Limite Inferior (a) : 2.37576033
Limite Superior (b) : 3.92447422
Limites leidos. a = 2.37576033 , b = 3.92447422

I(1,1): 7.560079116e-009        I(1,2): 3.207708964     I(1,3): 3.065393404     I(1,4): 3.067477513     I(1,5): 3.06746963
I(2,1): 2.405781725     I(2,2): 3.074288126     I(2,3): 3.067444949     I(2,4): 3.067469661
I(3,1): 2.907161526     I(3,2): 3.067872648     I(3,3): 3.067469275
I(4,1): 3.027694867     I(4,2): 3.067494486
I(5,1): 3.057544581

La aproximacion de la integral es: 3.06746963
El error de aproximacion (Ea) es: 2.569809295e-006
Presione una tecla para continuar . . .
```

- Tomando el valor del error arrojado por el método de Romberg, calculamos la cantidad mínima de segmentos en Simpson (1/3) que se requiere para superar esa magnitud de error:

Despejando n de la expresión

$|E_T| = \frac{h^5}{90}|f^4(\varepsilon)|$, dado que $h = \frac{(b-a)}{n}$ entonces

$|E_T| = \frac{\left(\frac{(b-a)}{n}\right)^5}{90}|f^4(\varepsilon)|$ Quedaría

$$n = \sqrt[5]{\frac{(b-a)^5}{90|E_T|}|f^4(\varepsilon)|}$$

Determinamos cual es el mayor valor que toma la función f^4(x) en el intervalo de [2.37576033 , 3.92447422] ,procedemos a hallar las derivadas:

$$f(x) = x\cos(2x) - \frac{1}{e^x}$$

$$f^1(x) = \cos(2x) - 2x\sin(2x) + e^{-x}$$

$$f^2(x) = -4\sin(2x) - 4x\cos(2x) - e^{-x}$$

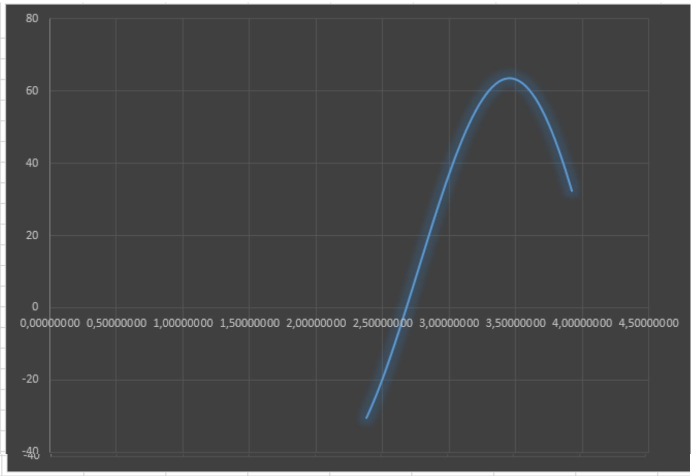
$$f^3(x) = -12\cos(2x) + 8x\sin(2x) + e^{-x}$$

$$f^4(x) = 32\sin(2x) + 16x\cos(2x) - e^{-x}$$

El mayor valor que toma la función f^4(x) en el intervalo mencionado es de 63,44627976

Graficamos:

x	32sin(2x)+16xcos(2x)-e^(-x)
2,37576033	-30,58134603
2,42576033	-26,39659145
2,47576033	-21,79100537
2,52576033	-16,81355326
2,57576033	-11,51846936
2,62576033	-5,964669178
2,67576033	-0,215100198
2,72576033	5,663962167
2,77576033	11,60366552
2,82576033	17,53336999
2,87576033	23,38146735
2,92576033	29,07622049
2,97576033	34,54661359
3,02576033	39,72320313
3,07576033	44,53895991
3,12576033	48,9300921
3,17576033	52,83683958
3,22576033	56,20423018
3,27576033	58,98278845
3,32576033	61,12918852
3,37576033	62,60684282
3,42576033	63,38641918
3,47576033	63,44627976
3,52576033	62,77283592
3,57576033	61,36081396
3,62576033	59,21342805
3,67576033	56,34245712
3,72576033	52,76822414
3,77576033	48,51947676
3,82576033	43,63316992
3,87576033	38,15415166
3,92447422	32,29588306



Por lo tanto $f^4(\varepsilon) = 63{,}44627976$ y $E_T = 2{,}569809295 * 10^{-6}$

Reemplazamos en la ecuación los datos obtenidos:

$n = \sqrt[5]{\frac{(b-a)^5}{90|E_T|}|f^4(\varepsilon)|}$ nos quedaría

$$n = \sqrt[5]{\frac{(3.92447422 - 2.37576033)^5}{90(2{,}569809295 * 10^{-6})}(63{,}44627976)}$$

$$n = \sqrt[5]{\frac{(1.54871389)^5}{2.312828366 * 10^{-4}}(63{,}44627976)}$$

$$n = \sqrt[5]{\frac{(1.54871389)^5}{2.312828366 * 10^{-4}}(63{,}44627976)}$$

$$n = \sqrt[5]{244{,}409{,}860.9}$$

$$n = 18.95063403$$

El método de Simpson (1/3) pide una cantidad de segmentos par; teniendo en cuenta lo que exige este método, la cantidad requerida de segmentos debe ser de 20, por lo tanto, la cantidad mínima de segmentos que necesitamos en Simpson (1/3) para superar el error arrojado por el método de Romberg es de 20 segmentos.

Si usamos 20 segmentos veremos que el paso será igual a h=0.07743569

$h = \frac{(b-a)}{n}$, ya que n=20, a=2.37576033 y b=3.92447422, entonces obtenemos:

$$h = \frac{(3.92447422 - 2.37576033)}{20} = 0.07743569$$

Entonces $E_T = \frac{h^5}{90}|f^4(\varepsilon)|$ reemplazando quedaría

$E_T = \frac{(0.07743569)^5}{90}(63{,}44627976)$

$E_T = 1.96277 * 10^{-6}$

Entonces $1.96277 * 10^{-6} \; < \; 5 * 10^{-6}, por\ lo\ tanto\ k = 5$

Lo que asegura cinco cifras decimales exactas en la aproximación obtenida aplicando la regla de Simpson (1/3).

Ajustamos la integral:

Integral ajustada = Aproximación + ET

Aproximamos la integral con Simpson (1/3)

```
M E T O D O   S I M P S O N   ( 1 / 3 )

Limite Inferior (a) : 2.37576033
Limite Superior (b) : 3.92447422
Limites leidos. a = 2.37576033 , b = 3.92447422

Cantidad de segmentos : 20

Segmentos leidos. N = 20
Suma de las Y = 118.8397606
I N T E G R A L  =  3.067479799

Presione una tecla para continuar . . .
```

Tenemos que $E_T = -\frac{h^5}{90}f^4(\varepsilon)$, Y aquí $f^4(x) = 63{,}44627976$.

Entonces $E_T = -\frac{(0.07743569)^5}{90}(63{,}44627976)$

$E_T = -1.96277 * 10^{-6}$

Integral ajustada = 3.067479799 $-1.96277 * 10^{-6}$

Integral ajustada =3.067477836

- Tomando el valor del error arrojado por el método de Romberg, calculamos la cantidad mínima de segmentos en Simpson (3/8) que se requiere para superar esa magnitud de error:

Despejando n de la expresión

$|E_T| = \frac{3h^5}{80}|f^4(\varepsilon)|$, dado que $h = \frac{(b-a)}{n}$ entonces

$|E_T| = \frac{3\left(\frac{(b-a)}{n}\right)^5}{80}|f^4(\varepsilon)|$ Nos quedaría

$$n = \sqrt[5]{\frac{3(b-a)^5}{80|E_T|}|f^4(\varepsilon)|}$$

Como ya analizamos la función vimos que:

$|f^4(\varepsilon)|$=63,44627976 y $E_T = 2{,}569809295 * 10^{-6}$

Solo hay que reemplazar en la ecuación

$n = \sqrt[5]{\frac{3(b-a)^5}{80|E_T|}|f^4(\varepsilon)|}$ tenemos

$$n = \sqrt[5]{\frac{26.72866217}{80(2{,}569809295 * 10^{-6})}(63{,}44627976)}$$

$$n = \sqrt[5]{\frac{26.72866217}{2.055847436 * 10^{-4}}(63{,}44627976)}$$

$$n = 24.17010295$$

El método de Simpson (3/8) pide una cantidad de segmentos impar y que esta sea múltiplo de tres; teniendo en cuenta lo que exige este método, la cantidad requerida de segmentos debe ser de 27, por lo tanto, la cantidad mínima de segmentos que necesitamos en Simpson (3/8) para superar el error arrojado por el método de Romberg es de 27 segmentos.

Si usamos 27 segmentos veremos que el valor del paso es: h= 0.057359773

$$h = \frac{(3.92447422 - 2.37576033)}{27} = 0.057359773$$

y que

$$|E_T| = \frac{3h^5}{80}|f^4(\varepsilon)|$$

$$E_T = \frac{3(0.05735977)^5}{80}(63{,}44627976)$$

$$E_T = 1.47732 * 10^{-6}$$

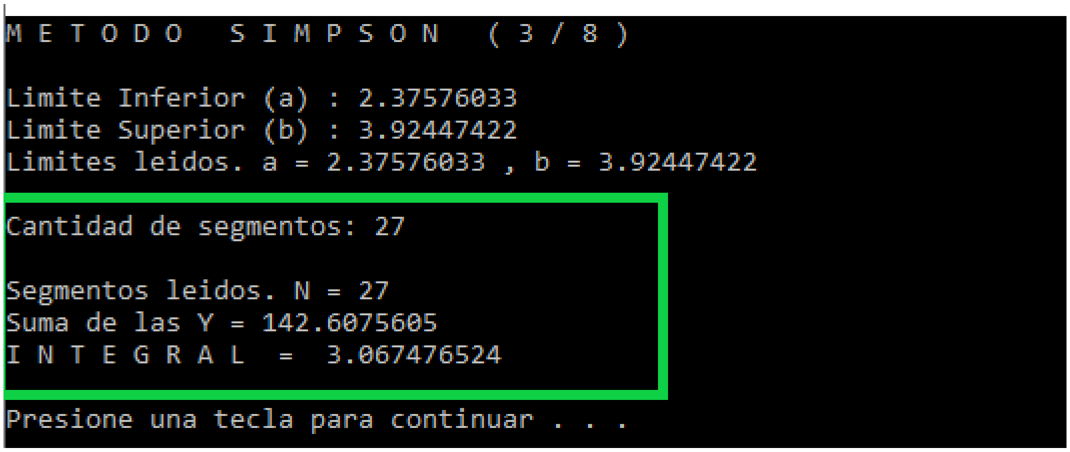
Entonces $1.47732 * 10^{-6} < 5 * 10^{-6}, por\ lo\ tanto\ k = 5$

Lo que asegura cinco cifras decimales exactas en la aproximación obtenida aplicando la regla de Simpson (3/8).

Ajustamos la integral:

Integral ajustada = Aproximación + ET

Aproximamos la integral con Simpson (3/8)



```
M E T O D O   S I M P S O N   ( 3 / 8 )

Limite Inferior (a) : 2.37576033
Limite Superior (b) : 3.92447422
Limites leidos. a = 2.37576033 , b = 3.92447422

Cantidad de segmentos: 27

Segmentos leidos. N = 27
Suma de las Y = 142.6075605
I N T E G R A L  =  3.067476524

Presione una tecla para continuar . . .
```

Tenemos $f^4(\varepsilon) = 63{,}44627976$

$E_T = -\frac{3h^5}{80} f^4(\varepsilon)$ reemplazando

$$E_T = -\frac{3(0.057359773)^5}{80}(63{,}44627976)$$

$E_T = -1.47732 * 10^{-6}$

Integral ajustada = 3.067476524 $-1.47732 * 10^{-6}$

Integral ajustada = 3.067475047

	Romberg	Simpson (1/3)	Simpson (3/8)
Integral Aproximada	3.06746963	3.067477836	3.067475047

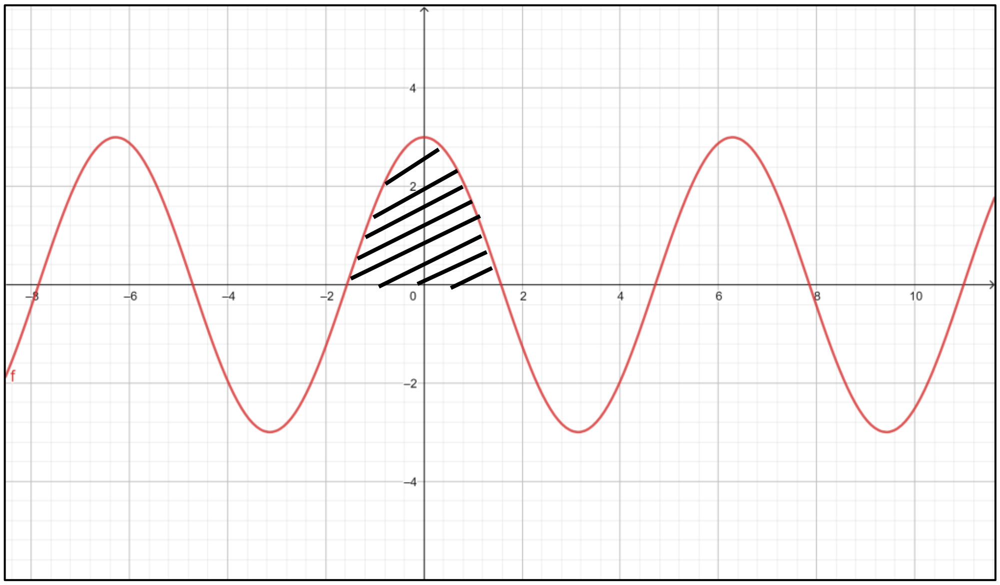
Se puede observar que los métodos 3 métodos tienen los mismos resultados en las primeras 4 cifras mientras que los métodos Simpson (1/3) y Simpson (3/8) tienen los mismos resultados en las primeras 5 cifras. En este caso el método de Simpson (1/3) es mas efectivo que el Simpson (3/8), ya que el numero de segmento de Simpson (1/3) = 20 es menor que el de Simpson (3/8) = 27.

Al comparar los resultados que arrojan los métodos de Simpson un tercio, Simpson tres octavos y el método de Romberg en la integral $\int_{2.37576033}^{3.92447422} xcos(2x) - \frac{1}{e^x} dx$ respecto al valor teórico (3,06747) se puede denotar que los métodos de Simpson un tercio y Simpson tres octavos aproximan las cinco cifras decimales teóricas se podría decir que tienen el mismo grado de precisión; lo que no sucede con el método de Romberg ya que solo alcanza aproximar cuatro cifras decimales, claro está que el método de Simpson un tercio trabaja con tan solo veinte segmentos y el de Simpson tres octavos con veintisiete segmentos.

PARTE B. Centroides

Hallamos el área limitada entre $f(x) = 3\cos(x)$ y el eje x como se ve en la gráfica 4. y con ello hallamos los límites de la integral, utilizando el método de Newton como se ve en la ilustración 3 obtuvimos el limite inferior con 8 cifras decimales y en la ilustración 4 obtuvimos el limite superior con 8 cifras decimales.

Que dándonos a $=-1.57079632$ y b$=1.57079632$, que sería el área sombreada en la grafica 4.



Grafica 4

```
 - N E W T O N -
Digite la aproximacion inicial : -2
Digite el numero de iteraciones : 10

        -- p --                 -- f(p) --             -- Er --
1       -1.542342               0.08535012547          0.2967288851
2       -1.5708040083           -2.30443896e-005               0.01811910491
3       -1.5707963268           1.836909531e-016               4.890171354e-006
4       -1.5707963268           1.836909531e-016               -0

Procedimiento completado satisfactoriamente
Presione una tecla para continuar . . .
```

Ilustración 3. Método de Newton

```
 - N E W T O N -
Digite la aproximacion inicial : 2
Digite el numero de iteraciones : 10

        -- p --                 -- f(p) --             -- Er --
1       1.542342                0.08535012547          0.2967288851
2       1.5708040083            -2.30443896e-005               0.01811910491
3       1.5707963268            1.836909531e-016               4.890171354e-006
4       1.5707963268            1.836909531e-016               0

Procedimiento completado satisfactoriamente
Presione una tecla para continuar . . .
```

Ilustración 4. Método de Newton

El momento respecto al eje x nos quedaría:

$M_x = \rho \int_{-1.57079632}^{1.57079632} \left[\frac{3\cos(x)+0}{2}\right][3\cos(x) - 0]dx$ Simplificando y reemplazando datos

$M_x = 1 \int_{-1.57079632}^{1.57079632} \left[\frac{3\cos(x)}{2}\right][3\cos(x)]dx$

$M_x = \int_{-1.57079632}^{1.57079632} \left[\frac{3\cos(x)}{2}\right][3\cos(x)]dx$

$M_x = \int_{-1.57079632}^{1.57079632} \left[\frac{9\cos^2(x)}{2}\right] dx$

Momento respecto al eje y:

$$M_y = \rho \int_{-1.57079632}^{1.57079632} x\,[3\cos(x) - 0]dx$$

$$M_y = 1 \int_{-1.57079632}^{1.57079632} x\,[3\cos(x)]dx$$

$$M_y = \int_{-1.57079632}^{1.57079632} 3x\cos(x)\,dx$$

Masa de la lámina:

$$m = \rho \int_{-1.57079632}^{1.57079632} [3\cos(x) - 0]dx$$

$$m = 1 \int_{-1.57079632}^{1.57079632} [3\cos(x)]dx$$

Usaremos el método de Romberg para resolver las integrales que se obtuvieron en la masa de la lámina y los momentos de los ejes x y y.

Para la integral del momento del eje x tenemos la siguiente aproximación:

```
R O M B E R G
Limite Inferior (a) : -1.57079632
Limite Superior (b) : 1.57079632
Limites leidos. a = -1.57079632 , b = 1.57079632

I(1,1): 6.527217776e-016       I(1,2): 9.42477792      I(1,3): 6.911503842     I(1,4): 7.071076798     I(1,5): 7.068573693
I(2,1): 7.06858344      I(2,2): 7.068583472     I(2,3): 7.068583471     I(2,4): 7.068583471
I(3,1): 7.068583464     I(3,2): 7.068583471     I(3,3): 7.068583471
I(4,1): 7.068583469     I(4,2): 7.068583471
I(5,1): 7.06858347

La aproximacion de la integral es: 7.068573693
El error de aproximacion (Ea) es: 0.0003541174327
Presione una tecla para continuar . . .
```

Al comparar la aproximación arrojada por el método de Romberg con el valor teórico de la integral podemos darnos cuenta de que este método arroja cuatro cifras decimales exactas respecto al valor teórico.

Para la integral del momento del eje y tenemos la siguiente aproximación:

```
R O M B E R G
Limite Inferior (a) : -1.57079632
Limite Superior (b) : 1.57079632
Limites leidos. a = -1.57079632 , b = 1.57079632

I(1,1): 0       I(1,2): 0       I(1,3): 0       I(1,4): -5.039262542e-016       I(1,5): 6.556899611e-016
I(2,1): 0       I(2,2): 0       I(2,3): -4.960524064e-016       I(2,4): 6.511602103e-016
I(3,1): 0       I(3,2): -4.65049131e-016        I(3,3): 6.332350131e-016
I(4,1): -3.487868483e-016       I(4,2): 5.645922542e-016
I(5,1): 3.362474786e-016

La aproximacion de la integral es: 6.556899611e-016
El error de aproximacion (Ea) es: 1.768543495
Presione una tecla para continuar . . .
```

En este caso el valor teórico de la integral es cero, efectivamente el método de Romberg nos da una aproximación apropiada.

Para la integral de la masa de la lámina tenemos la siguiente aproximación:

```
R O M B E R G
Limite Inferior (a) : -1.57079632
Limite Superior (b) : 1.57079632
Limites leidos. a = -1.57079632 , b = 1.57079632

I(1,1): 6.404039245e-008        I(1,2): 6.283185301     I(1,3): 5.995712196     I(1,4): 6.00001665      I(1,5): 5.999999984
I(2,1): 4.712388992     I(2,2): 6.013679265     I(2,3): 5.999949393     I(2,4): 6.000000049
I(3,1): 5.688356697     I(3,2): 6.00080751      I(3,3): 5.999999257
I(4,1): 5.922694807     I(4,2): 6.000049773
I(5,1): 5.980711031

La aproximacion de la integral es: 5.999999984
El error de aproximacion (Ea) es: 2.777695465e-006
Presione una tecla para continuar . . .
```

El valor teórico de esta integral es exactamente seis, este método se acerca o se aproxima a este valor, pero no logra, dejando denotar que para esta función no es tan efectivo el método.

Tomando el valor del error arrojado por el método de Romberg, calcule la cantidad mínima de segmentos en Simpson (1/3) que se requieren para SUPERAR esa magnitud de error.

Para la integral del momento del eje x $M_x = \int_{-1.57079632}^{1.57079632} \left[\frac{9cos^2\,(x)}{2}\right] dx$

$\boldsymbol{E_T = 0.0003541174327}$

Despejamos n de la expresión:

$|E_T| = \frac{h^5}{90}|f^4(\varepsilon)|,$ dado que $h = \frac{(b-a)}{n}$ entonces

$|E_T| = \frac{\left(\frac{(b-a)}{n}\right)^5}{90}|f^4(\varepsilon)|$ Nos quedaría

$$n = \sqrt[5]{\frac{(b-a)^5}{90|E_T|}|f^4(\varepsilon)|}$$

Para poder reemplazar debemos primero determinar cuál es el mayor valor que toma la función f^4(x) en el intervalo [-1.57079632 , 1.57079632].

Hallamos las primeras cuatro derivadas:

$$f(x) = \frac{9cos^2\,(x)}{2}$$

$$f^1(x) = -\frac{9\sin(2x)}{2}$$

$$f^2(x) = -9\cos(2x)$$

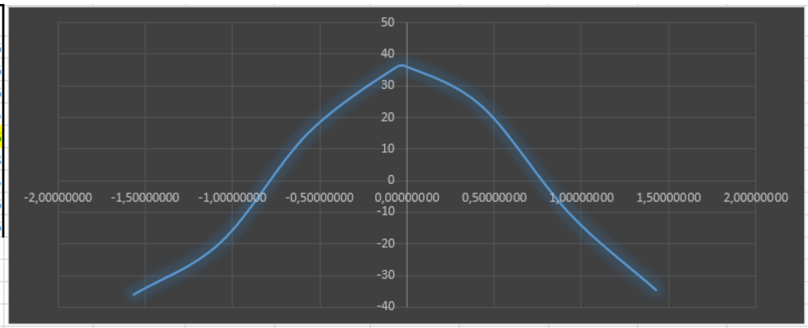
$$f^3(x) = 18\sin(2x)$$

$$f^4(x) = 36\cos(2x)$$

El mayor valor que toma la función f^4(x) en el intervalo mencionado es de 36

Graficamos:

0,5	X	36cos(2x)
0,5	-1,57079632	-36
0,5	-1,07079632	-19,4508826
0,5	-0,57079632	14,98128656
0,5	-0,07079632	35,63972995
	0	36
0,5	0,42920368	23,53116998
0,5	0,92920368	-10,21183915
0,5	1,42920368	-34,56613046
	1,57079632	-36



Por lo tanto $f^4(\varepsilon) = 36$ y $\boldsymbol{E_T = 0.0003541174327}$

Entonces reemplazamos en la ecuación

$n = \sqrt[5]{\frac{(b-a)^5}{90|E_T|}|f^4(\varepsilon)|}$ y nos quedaría

$$n = \sqrt[5]{\frac{(1.57079632 + 1.57079632)^5}{90(\mathbf{0.0003541174327})}(36)}$$

$$n = \sqrt[5]{\frac{(3.14159264)^5}{0{,}031870569}(36)}$$

$$n = \sqrt[5]{\frac{306.0196782}{0{,}031870569}(36)}$$

$$n = \sqrt[5]{345670.2776}$$

$$n = 12.81540713$$

El método de Simpson (1/3) pide una cantidad de segmentos par; teniendo en cuenta lo que exige este método, la cantidad requerida de segmentos debe ser de 14.

Si usamos 14 segmentos veremos que el paso será igual a h=0.22439947

$h = \frac{(b-a)}{n}$, ya que n=14, a=-1.57079632 y b=1.57079632, entonces obtenemos:

$$h = \frac{(1.57079632 + 1.57079632)}{14} = 0.22439947$$

Entonces $E_T = \frac{h^5}{90}|f^4(\varepsilon)|$ reemplazando quedaría

$E_T = \frac{(0.22439947)^5}{90}(36)$

$E_T = 2.27598 * 10^{-4}$

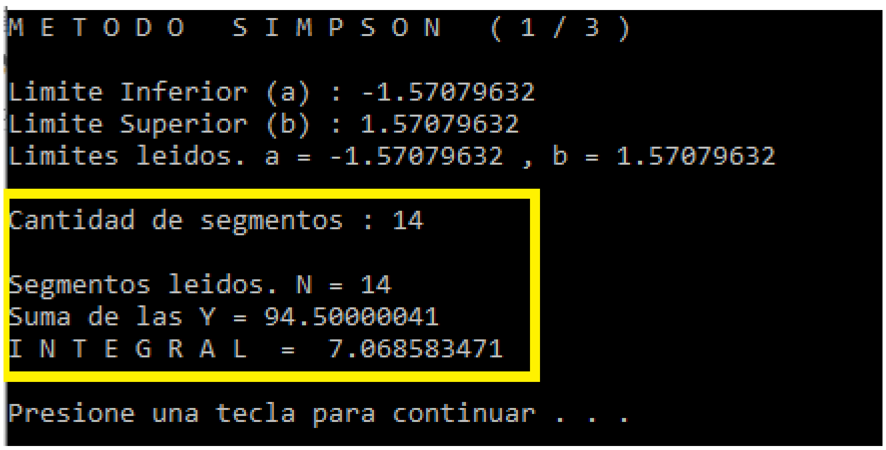
Entonces $2.27598 * 10^{-4} \quad < \quad 5 * 10^{-4}, por\ lo\ tanto\ k = 3$

Lo que asegura tres cifras decimales exactas en la aproximación obtenida aplicando la regla de Simpson (1/3).

Ajustamos la integral:

Integral ajustada = Aproximación + ET

Aproximamos la integral con Simpson (1/3)



Tenemos que $E_T = -\frac{h^5}{90}f^4(\varepsilon)$, Y aquí $f^4(x) = 36$.

Entonces $E_T = -\frac{(0.22439947)^5}{90}(36)$

$E_T = -2.27598 * 10^{-4}$

Integral ajustada = 7.06858347+$2.27598 * 10^{-4}$

Integral ajustada =7.06881106

Para la integral del momento del eje y $M_y = \int_{-1.57079632}^{1.57079632} 3xcos(x)\, dx$

$\boldsymbol{E_T = 1.768543495}$

Despejamos n de la expresión:

$|E_T| = \frac{h^5}{90}|f^4(\varepsilon)|$, dado que $h = \frac{(b-a)}{n}$ entonces

$|E_T| = \frac{\left(\frac{(b-a)}{n}\right)^5}{90} |f^4(\varepsilon)|$ Nos quedaría $n = \sqrt[5]{\frac{(b-a)^5}{90|E_T|} |f^4(\varepsilon)|}$

Para poder reemplazar debemos primero determinar cuál es el mayor valor que toma la función f^4(x) en el intervalo [-1.57079632 , 1.57079632] .

Hallamos las primeras cuatro derivadas:

$f(x) = 3xcos(x)$

$f^1(x) = 3\cos(x) - 3xsin(x)$

$f^2(x) = -6\sin(x) - 3xcos(x)$

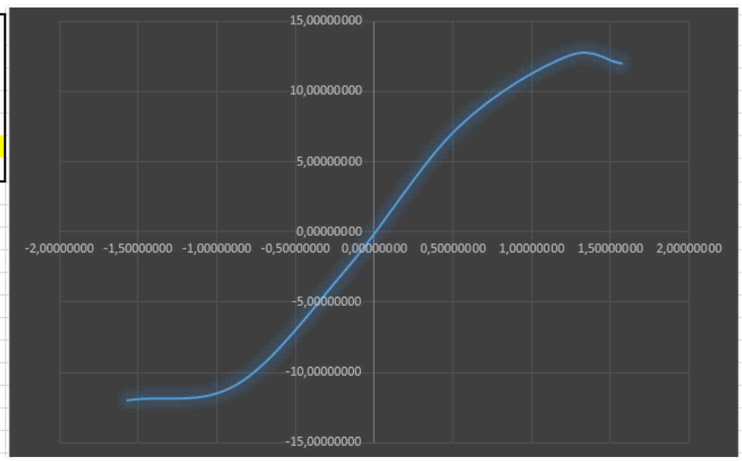
$f^3(x) = -9\cos(x) + 3xsin(x)$

$f^4(x) = 12\sin(x) + 3xcos(x)$

El mayor valor que toma la función f^4(x) en el intervalo mencionado es de 12,54197409

Graficamos:

X	12 sin(x)+3xcos(x)
-1,57079632	-12,00000003
-0,87079632	-10,86105338
-0,17079632	-2,54453920
0,52920368	7,42859404
1,22920368	12,54197409
1,57079632	12,00000003



Por lo tanto $f^4(\varepsilon) = 12{,}54197409$ y $\boldsymbol{E_T = 1.768543495}$

Entonces reemplazamos en la ecuación

$n = \sqrt[5]{\frac{(b-a)^5}{90|E_T|} |f^4(\varepsilon)|}$ y nos quedaría

$$n = \sqrt[5]{\frac{(1.57079632 + 1.57079632)^5}{90(\mathbf{1.768543495})} (12{,}54197409)}$$

$$n = \sqrt[5]{\frac{(3.14159264)^5}{159{,}168915} (12{,}54197409)}$$

$$n = \sqrt[5]{\frac{306.0196782}{159{,}168915} (12{,}54197409)}$$

$n = \sqrt[5]{24.1133193}$

n =1.88995472

El método de Simpson (1/3) pide una cantidad de segmentos par; teniendo en cuenta lo que exige este método, la cantidad requerida de segmentos debe ser de 2.

Si usamos 2 segmentos veremos que el paso será igual a h=1.57079632

$h = \frac{(b-a)}{n}$, ya que n=2, a=-1.57079632 y b=1.57079632, entonces obtenemos:

$$h = \frac{(1.57079632 + 1.57079632)}{2} = 1.57079632$$

Entonces $\quad E_T = \frac{h^5}{90}|f^4(\varepsilon)| \quad$ reemplazando quedaría

$E_T = \frac{(1.57079632)^5}{90}(12{,}54197409)$

$E_T = 1.33267 * 10^0$

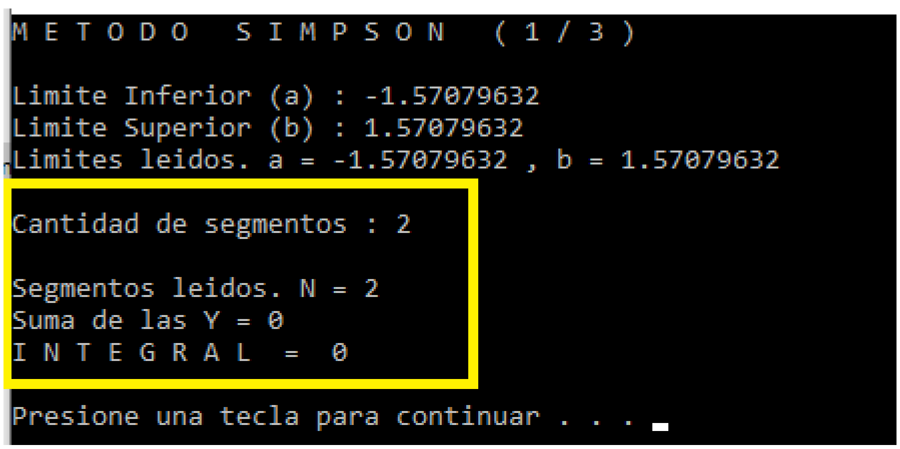
Entonces $1.33267 * 10^0 \quad < \quad 5 * 10^0, por\ lo\ tanto\ k = -1$

Lo que no asegura cifras decimales exactas en la aproximación obtenida aplicando la regla de Simpson (1/3), lo que significa que lo único que asegura es lo que lleva antes del 1 o sea un 0 este caso.

Ajustamos la integral:

Integral ajustada = Aproximación + ET

Aproximamos la integral con Simpson (1/3)



Tenemos que $E_T = -\frac{h^5}{90}f^4(\varepsilon)$, $\qquad$ Y aquí $\qquad f^4(x) = 12{,}54197409.$

Entonces $\qquad E_T = -\frac{(1.57079632)^5}{90}(12{,}54197409)$

$E_T = -1.33267 * 10^0$

Integral ajustada = 0 $+1.33267 * 10^0$

En este caso como el k=-1 significa que ninguna cifra decimal es exacta incluyendo la primera centésima por lo que el ajuste del $E_T = 0$, por lo que quedaría:

Integral ajustada = $0 + 0$

Integral ajustada = 0

Para la integral de la masa de la lámina $m = 1 \int_{-1.57079632}^{1.57079632} [3\cos(x)] dx$

$\boldsymbol{E_T = 2.777695465 * 10^{-6}}$

Despejamos n de la expresión:

$|E_T| = \frac{h^5}{90} |f^4(\varepsilon)|,$ dado que $h = \frac{(b-a)}{n}$ entonces

$|E_T| = \frac{\left(\frac{(b-a)}{n}\right)^5}{90} |f^4(\varepsilon)|$ Nos quedaría $n = \sqrt[5]{\frac{(b-a)^5}{90|E_T|} |f^4(\varepsilon)|}$

Para poder reemplazar debemos primero determinar cuál es el mayor valor que toma la función f^4(x) en el intervalo [-1.57079632 , 1.57079632] .

Hallamos las primeras cuatro derivadas:

$f(x) = 3cos(x)$

$f^1(x) = -3\sin(x)$

$f^2(x) = -3\cos(x)$

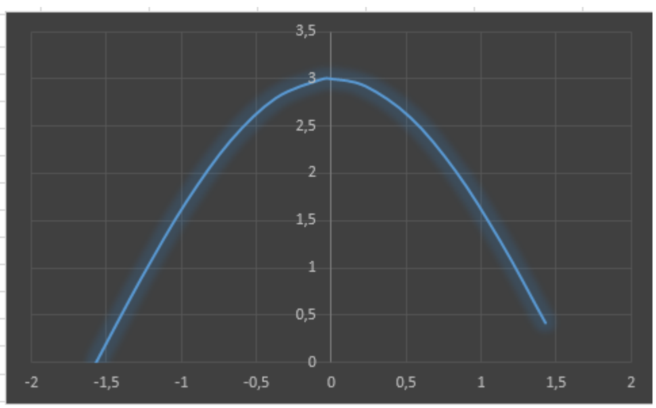
$f^3(x) = 3\sin(x)$

$f^4(x)$ =3cos(x)

El mayor valor que toma la función f^4(x) en el intervalo mencionado es de 3

Graficamos:

	x	3cos(x)
0,3	-1,57079632	2,03847E-08
0,3	-1,27079632	0,886560639
0,3	-0,97079632	1,693927437
0,3	-0,67079632	2,349980742
0,3	-0,37079632	2,796117265
0,3	-0,07079632	2,992484961
	0	3
0,3	0,22920368	2,921542888
0,3	0,52920368	2,58962809
0,3	0,82920368	2,026389527
0,3	1,12920368	1,282139622
0,3	1,42920368	0,423360004



Por lo tanto $f^4(\varepsilon) = 3$ y $\boldsymbol{E_T = 2.777695465 * 10^{-6}}$

Entonces reemplazamos en la ecuación

$n = \sqrt[5]{\frac{(b-a)^5}{90|E_T|}|f^4(\varepsilon)|}$ y nos quedaría

$$n = \sqrt[5]{\frac{(-1.57079632 - 1.57079632)^5}{90(2.777695465 * 10^{-6})}(3)}$$

$$n = \sqrt[5]{\frac{(3.14159264)^5}{0,000249993}(3)}$$

$$n = \sqrt[5]{\frac{306.0196782}{0,000249993}(3)}$$

$$n = \sqrt[5]{3672344,959}$$

n =20,55837075

El método de Simpson (1/3) pide una cantidad de segmentos par; teniendo en cuenta lo que exige este método, la cantidad requerida de segmentos debe ser de 22.

Si usamos 22 segmentos veremos que el paso será igual a h=0.14279966

$h = \frac{(b-a)}{n}$, ya que n=22, a=-1.57079632 y b=1.57079632,, entonces obtenemos:

$h = \frac{(1.57079632+1.57079632\ )}{22}$ =0.14279966

Entonces $E_T = \frac{h^5}{90}|f^4(\varepsilon)|$ reemplazando quedaría

$$E_T = \frac{(0.14279966)^5}{90}(3)$$

$$E_T = 1.97931 * 10^{-6}$$

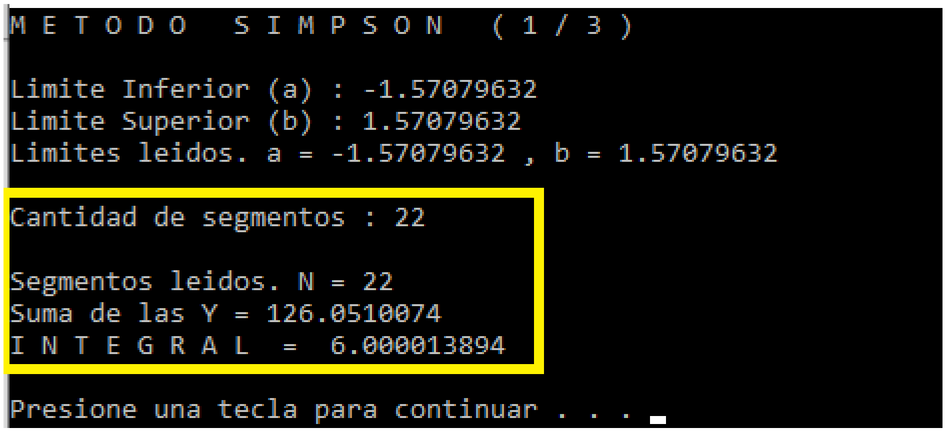
Entonces $1.97931 * 10^{-6} \quad < \quad 5 * 10^{-6}, por\ lo\ tanto\ k = 5$

Lo que asegura cinco cifras decimales exactas en la aproximación obtenida aplicando la regla de Simpson (1/3).

Ajustamos la integral:

Integral ajustada = Aproximación + ET

Aproximamos la integral con Simpson (1/3)



```
M E T O D O   S I M P S O N   ( 1 / 3 )

Limite Inferior (a) : -1.57079632
Limite Superior (b) : 1.57079632
Limites leidos. a = -1.57079632 , b = 1.57079632

Cantidad de segmentos : 22

Segmentos leidos. N = 22
Suma de las Y = 126.0510074
I N T E G R A L  =  6.000013894

Presione una tecla para continuar . . .
```

Tenemos que $E_T = -\frac{h^5}{90} f^4(\varepsilon)$,   Y aquí $f^4(x) = 3$.

Entonces $E_T = -\frac{(0.14279966)^5}{90}(3)$

$E_T = -1.97931 * 10^{-6}$

Integral ajustada = 6.00001389 $-1.97931 * 10^{-6}$

Integral ajustada =6.00001191

	Mx	My	m
Romberg	7.06858	$6.55689 * 10^{-16}$	5.999999
Simpson (1/3)	7.06881	0	6.000011

Tabla 1. Comparación de resultados.

El centro de masas ($\bar{x}$, $\bar{y}$) viene dado por

$\bar{x} = \frac{M_Y}{m}$ e $\bar{y} = \frac{M_x}{m}$ entonces tenemos que

$$M_x = \int_{-1.57079632}^{1.57079632} \left[\frac{9cos^2(x)}{2}\right] dx = 7{,}06858$$

$$M_y = \int_{-1.57079632}^{1.57079632} 3xcos(x)\, dx = 0$$

$$m = 1 \int_{-1.57079632}^{1.57079632} [3\cos(x)]dx = 6{,}00001$$

Reemplazando los datos anteriores tenemos

$$\bar{x} = \frac{M_Y}{m} = \frac{0}{6{,}00001} = 0$$

$$\bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{7{,}06858}{6{,}00001} = 1{,}1780947$$

Por lo tanto, el centro de masas de la lámina es: $(0\ ,\ 1{,}1780947)$.

Conclusiones:

- En los métodos de Simpson (1/3) y (3/8) es indispensable el número de segmentos que determinan que tan efectivos pueden ser estos mismos.
- Cuando tenemos un resultado de k=-1, se podría decir que solo tiene la certeza de que el valor aproximado es el anterior a la de la primera centésima.
- Es posible deducir que los 3 métodos tienen ventajas y desventajas dependiendo de su función o de los límites con los que se calculan estas integrales.
- Si le suministramos al método Simpson un tercio la cantidad de segmentos apropiada este nos arrojara una aproximación más precisa.
- Tanto el método Simpson (1/3) como el método Simpson (3/8) son más exactos en algunos casos para aproximar la integral que el método Romberg, esto se debe a que se les dio un numero de segmentos apropiado.
- Para que la aproximación de la integral sea más precisa dependerá del número de segmentos, en el caso de los métodos de Simpson (1/3) y (3/8).