二分查找算法详解

Original labuladong labuladong 2019-06-11

来自专辑

手撕力扣高频面试题

预计阅读时间： 10分钟

先给大家讲个笑话乐呵一下：

有一天阿东到图书馆借了 N 本书，出图书馆的时候，警报响了，于是保安把阿东拦下，要检查一下哪本书没有登记出借。阿东正准备把每一本书在报警器下过一下，以找出引发警报的书，但是保安露出不屑的眼神：你连二分查找都不会吗？于是保安把书分成两堆，让第一堆过一下报警器，报警器响；于是再把这堆书分成两堆……最终，检测了 logN 次之后，保安成功的找到了那本引起警报的书，露出了得意和嘲讽的笑容。于是阿东背着剩下的书走了。

从此，图书馆丢了 N - 1 本书。

二分查找真的很简单吗？并不简单。看看 Knuth 大佬（发明 KMP 算法的那位）怎么说的：

> Although the basic idea of binary search is comparatively straightforward, the details can be surprisingly tricky...

这句话可以这样理解：思路很简单，细节是魔鬼。

本文就来探究几个最常用的二分查找场景：寻找一个数、寻找左侧边界、寻找右侧边界。

而且，我们就是要深入细节，比如不等号是否应该带等号，mid 是否应该加一等等。分析这些细节的差异以及出现这些差异的原因，保证你能灵活准确地写出正确的二分查找算法。

零、二分查找框架

```
int binarySearch(int[] nums, int target) {
    int left = 0, right = ...;

    while(...) {
        int mid = (right + left) / 2;
        if (nums[mid] == target) {
            ...
        } else if (nums[mid] < target) {
            left = ...
        } else if (nums[mid] > target) {
            right = ...
        }
    }
    return ...;
}
```

分析二分查找的一个技巧是：不要出现 else，而是把所有情况用 else if 写清楚，这样可以清楚地展现所有细节。本文都会使用 else if，旨在讲清楚，读者理解后可自行简化。

其中...标记的部分，就是可能出现细节问题的地方，当你见到一个二分查找的代码时，首先注意这几个地方。后文用实例分析这些地方能有什么样的变化。

另外声明一下，计算 mid 时需要技巧防止溢出，可以 参见前文，本文暂时忽略这个问题。

一、寻找一个数（基本的二分搜索）

这个场景是最简单的，可能也是大家最熟悉的，即搜索一个数，如果存在，返回其索引，否则返回 -1。

```
int binarySearch(int[] nums, int target) {
    int left = 0;
    int right = nums.length - 1; // 注意

    while(left <= right) { // 注意
        int mid = (right + left) / 2;
        if(nums[mid] == target)
            return mid;
        else if (nums[mid] < target)
            left = mid + 1; // 注意
        else if (nums[mid] > target)
            right = mid - 1; // 注意
        }
    return -1;
}
```

1. 为什么 while 循环的条件中是 <=，而不是 < ？

答：因为初始化 right 的赋值是 nums.length - 1，即最后一个元素的索引，而不是 nums.length。

这二者可能出现在不同功能的二分查找中，区别是：前者相当于两端都闭区间 [left, right]，后者相当于左闭右开区间 [left, right)，因为索引大小为 nums.length 是越界的。

我们这个算法中使用的是 [left, right] 两端都闭的区间。这个区间就是每次进行搜索的区间，我们不妨称为「搜索区间」。

什么时候应该停止搜索呢？当然，找到了目标值的时候可以终止：

```
    if(nums[mid] == target)
        return mid;
```

但如果没找到，就需要 while 循环终止，然后返回 -1。那 while 循环什么时候应该终止？搜索区间为空的时候应该终止，意味着你没得找了，就等于没找到嘛。

`while(left <= right)`的终止条件是 left == right + 1，写成区间的形式就是 [right + 1, right]，或者带个具体的数字进去 [3, 2]，可见这时候搜索区间为空，因为没有数字既大于等于 3 又小于等于 2 的吧。所以这时候 while 循环终止是正确的，直接返回 -1 即可。

`while(left < right)`的终止条件是 left == right，写成区间的形式就是 [right, right]，或者带个具体的数字进去 [2, 2]，这时候搜索区间非空，还有一个数 2，但此时 while 循环终止了。也就是说这区间 [2, 2] 被漏掉了，索引 2 没有被搜索，如果这时候直接返回 -1 就可能出现错误。

当然，如果你非要用 while(left < right) 也可以，我们已经知道了出错的原因，就打个补丁好了：

```
//...
while(left < right) {
    // ...
}
return nums[left] == target ? left : -1;
```

2. 为什么 left = mid + 1，right = mid - 1？我看有的代码是 right = mid 或者 left = mid，没有这些加加减减，到底怎么回事，怎么判断？

答：这也是二分查找的一个难点，不过只要你能理解前面的内容，就能够很容易判断。

刚才明确了「搜索区间」这个概念，而且本算法的搜索区间是两端都闭的，即 [left, right]。那么当我们发现索引 mid 不是要找的 target 时，如何确定下一步的搜索区间呢？

当然是去搜索 [left, mid - 1] 或者 [mid + 1, right] 对不对？因为 mid 已经搜索过，应该从搜索区间中去除。

3. 此算法有什么缺陷？

答：至此，你应该已经掌握了该算法的所有细节，以及这样处理的原因。但是，这个算法存在局限性。

比如说给你有序数组 nums = [1,2,2,2,3]，target = 2，此算法返回的索引是 2，没错。但是如果我想得到 target 的左侧边界，即索引 1，或者我想得到 target 的右侧边界，即索引 3，这样的话此算法是无法处理的。

这样的需求很常见。你也许会说，找到一个 target 索引，然后向左或向右线性搜索不行吗？可以，但是不好，因为这样难以保证二分查找对数级的复杂度了。

我们后续的算法就来讨论这两种二分查找的算法。

二、寻找左侧边界的二分搜索

直接看代码，其中的标记是需要注意的细节：

```
int left_bound(int[] nums, int target) {
    if (nums.length == 0) return -1;
    int left = 0;
    int right = nums.length; // 注意

    while (left < right) { // 注意
        int mid = (left + right) / 2;
        if (nums[mid] == target) {
            right = mid;
        } else if (nums[mid] < target) {
            left = mid + 1;
        } else if (nums[mid] > target) {
            right = mid; // 注意
        }
    }
```

```
    return left;
}
```

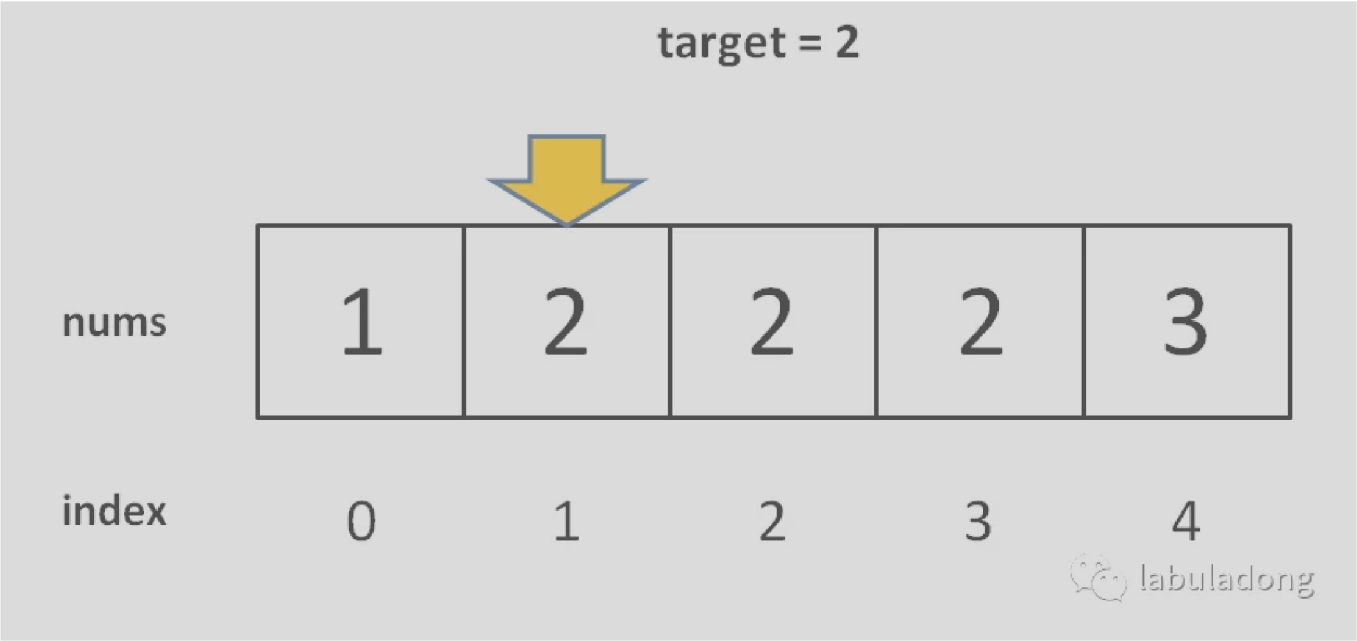
1. 为什么 while(left < right) 而不是 <= ?

答：用相同的方法分析，因为初始化 right = nums.length 而不是 nums.length - 1 。因此每次循环的「搜索区间」是 [left, right) 左闭右开。

while(left < right) 终止的条件是 left == right，此时搜索区间 [left, left) 恰巧为空，所以可以正确终止。

2. 为什么没有返回 -1 的操作？如果 nums 中不存在 target 这个值，怎么办？

答：因为要一步一步来，先理解一下这个「左侧边界」有什么特殊含义：



对于这个数组，算法会返回 1。这个 1 的含义可以这样解读：nums 中小于 2 的元素有 1 个。

比如对于有序数组 nums = [2,3,5,7], target = 1，算法会返回 0，含义是：nums 中小于 1 的元素有 0 个。如果 target = 8，算法会返回 4，含义是：nums 中小于 8 的元素有 4 个。

综上可以看出，函数的返回值（即 left 变量的值）取值区间是闭区间 [0, nums.length]，所以我们简单添加两行代码就能在正确的时候 return -1：

```
while (left < right) {
    //...
}
// target 比所有数都大
if (left == nums.length) return -1;
// 类似之前算法的处理方式
return nums[left] == target ? left : -1;
```

3. 为什么 left = mid + 1，right = mid ？和之前的算法不一样？

答：这个很好解释，因为我们的「搜索区间」是 [left, right) 左闭右开，所以当 nums[mid] 被检测之后，下一步的搜索区间应该去掉 mid 分割成两个区间，即 [left, mid) 或 [mid + 1, right)。

4. 为什么该算法能够搜索左侧边界？

答：关键在于对于 nums[mid] == target 这种情况的处理：

```
if (nums[mid] == target)
    right = mid;
```

可见，找到 target 时不要立即返回，而是缩小「搜索区间」的上界 right，在区间 [left, mid) 中继续搜索，即不断向左收缩，达到锁定左侧边界的目的。

5. 为什么返回 left 而不是 right？

答：都是一样的，因为 while 终止的条件是 left == right。

三、寻找右侧边界的二分查找

寻找右侧边界和寻找左侧边界的代码差不多，只有两处不同，已标注：

```
int right_bound(int[] nums, int target) {
    if (nums.length == 0) return -1;
    int left = 0, right = nums.length;

    while (left < right) {
        int mid = (left + right) / 2;
        if (nums[mid] == target) {
            left = mid + 1; // 注意
        } else if (nums[mid] < target) {
            left = mid + 1;
        } else if (nums[mid] > target) {
            right = mid;
        }
    }
    return left - 1; // 注意

}
```

1. 为什么这个算法能够找到右侧边界？

答：类似地，关键点还是这里：

```
    if (nums[mid] == target) {
        left = mid + 1;
```

当 nums[mid] == target 时，不要立即返回，而是增大「搜索区间」的下界 left，使得区间不断向右收缩，达到锁定右侧边界的目的。

2. 为什么最后返回 left - 1 而不像左侧边界的函数，返回 left？而且我觉得这里既然是搜索右侧边界，应该返回 right 才对。

答：首先，while 循环的终止条件是 left == right，所以 left 和 right 是一样的，你非要体现右侧的特点，返回 right - 1 好了。

至于为什么要减一，这是搜索右侧边界的一个特殊点，关键在这个条件判断：

```
if (nums[mid] == target) {
    left = mid + 1;
    // 这样想：mid = left - 1
```

因为我们对 left 的更新必须是 left = mid + 1，就是说 while 循环结束时，nums[left] 一定不等于 target 了，而 nums[left - 1] 可能是 target。

至于为什么 left 的更新必须是 left = mid + 1，同左侧边界搜索，就不再赘述。

3. 为什么没有返回 -1 的操作？如果 nums 中不存在 target 这个值，怎么办？

答：类似之前的左侧边界搜索，因为 while 的终止条件是 left == right，就是说 left 的取值范围是 [0, nums.length]，所以可以添加两行代码，正确地返回 -1：

```
while (left < right) {
    // ...
}
if (left == 0) return -1;
return nums[left-1] == target ? (left-1) : -1;
```

四、最后总结

先来梳理一下这些细节差异的因果逻辑：

第一个，最基本的二分查找算法：

```
因为我们初始化 right = nums.length - 1
所以决定了我们的「搜索区间」是 [left, right]
所以决定了 while (left <= right)
同时也决定了 left = mid+1 和 right = mid-1

因为我们只需找到一个 target 的索引即可
所以当 nums[mid] == target 时可以立即返回
```

第二个，寻找左侧边界的二分查找：

```
因为我们初始化 right = nums.length
所以决定了我们的「搜索区间」是 [left, right)
所以决定了 while (left < right)
同时也决定了 left = mid+1 和 right = mid

因为我们需找到 target 的最左侧索引
所以当 nums[mid] == target 时不要立即返回
而要收紧右侧边界以锁定左侧边界
```

第三个，寻找右侧边界的二分查找：

```
因为我们初始化 right = nums.length
所以决定了我们的「搜索区间」是 [left, right)
```

```
所以决定了 while (left < right)
同时也决定了 left = mid+1 和 right = mid

因为我们需找到 target 的最右侧索引
所以当 nums[mid] == target 时不要立即返回
而要收紧左侧边界以锁定右侧边界

又因为收紧左侧边界时必须 left = mid + 1
所以最后无论返回 left 还是 right，必须减一
```

如果以上内容你都能理解，那么恭喜你，二分查找算法的细节不过如此。

通过本文，你学会了：

1. 分析二分查找代码时，不要出现 else，全部展开成 else if 方便理解。

2. 注意「搜索区间」和 while 的终止条件，如果存在漏掉的元素，记得在最后检查。

3. 如需要搜索左右边界，只要在 nums[mid] == target 时做修改即可。搜索右侧时需要减一。

就算遇到其他的二分查找变形，运用这几点技巧，也能保证你写出正确的代码。LeetCode Explore 中有二分查找的专项练习，其中提供了三种不同的代码模板，现在你再去看看，很容易就知道这几个模板的实现原理了。

如果对你有帮助，点个在看，或者分享给朋友把～

点击这里进入留言板


编程，算法，生活
致力于把问题说清楚
扫码关注，交个朋友