Metodo Del Trapecio Simple

$I = \int_a^b f(x)dx$ Este metodo cambia el integrando por un polinomio interpolador de grado uno.

Considerando $x_0 = a$, $x_1 = b$ y los puntos $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$ se obtiene un polinomio de interpolación de grado uno.

$$p_1(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i(x) = f(x_0) L_0(x) + f(x_1) \cdot L_1(x)$$

y sabiendo que $L_i = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{1} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$

Entonces $p_1(x) = f(x_0) \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + f(x_1) \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$

$x_0 - x_1 = a - b$ y $x_1 - x_0 = b - a$

$$p_1(x) = f(a) \frac{x - b}{a - b} + f(b) \frac{x - a}{b - a}$$

Entonces $I = \int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b \left[f(a) \frac{x-b}{a-b} + f(b) \frac{x-a}{b-a} \right] dx$

$$I \approx \frac{f(a)}{a-b} \int_a^b (x-b)dx + \frac{f(b)}{b-a} \int_a^b (x-a)dx$$

$$I \approx \frac{f(a)}{a-b} \cdot \left.\frac{(x-b)^2}{2}\right|_a^b + \frac{f(b)}{b-a} \cdot \left.\frac{(x-a)^2}{2}\right|_a^b$$

$$I \approx -\frac{f(a)}{a-b} \cdot \frac{(a-b)^2}{2} + \frac{f(b)}{b-a} \cdot \frac{(b-a)^2}{2}$$

$$I \approx \frac{f(a)}{b-a} \cdot \frac{(b-a)^2}{2} + \frac{f(b)}{b-a} \cdot \frac{(b-a)^2}{2}$$

$$I \approx f(a)\frac{b-a}{2} + f(b)\frac{b-a}{2} = \frac{b-a}{2}\left(f(a)+f(b)\right)$$

Error Asociado a la Integración

Suponiendo que $f(x)$ es continua y derivable de clase C^2 en el intervalo $[a,b]$: $f(x) = p_1(x) + \varepsilon(x)$

Donde $\varepsilon(x) = \frac{f''(\xi)}{2}(x-a)(x-b) \qquad a \leq \xi \leq b$

$$E = \int_a^b \frac{f''(\xi)}{2}(x-a)(x-b)\,dx = \frac{f''(\xi)}{2}\int_a^b (x-a)(x-b)\,dx$$

$$E = \frac{f''(\xi)}{2}\int_a^b x^2 - bx - ax + ab\,dx = \frac{f''(\xi)}{2}\left[\int x^2 dx - \int bx\,dx - \int ax\,dx + \int ab\,dx\right]$$

$$E = \frac{f''(\xi)}{2}\left[\frac{x^3}{3} - \frac{bx^2}{2} - \frac{ax^2}{2} + abx\right]\Big|_a^b$$

$$E = \frac{f''(\xi)}{2}\left[\left(\frac{b^3}{3} - \frac{b^3}{2} - \frac{ab^2}{2} + ab^2\right) - \left(\frac{a^3}{3} - \frac{ba^2}{2} - \frac{a^3}{2} + a^2b\right)\right]$$

$$E = \frac{f''(\xi)}{2}\left[\left(-\frac{b^3}{6} + \frac{ab^2}{2}\right) - \left(-\frac{a^3}{6} + \frac{a^2b}{2}\right)\right]$$

$$E = \frac{f''(\xi)}{2}\left[-\frac{b^3}{6} + \frac{3ab^2}{6} + \frac{a^3}{6} - \frac{3a^2b}{6}\right]$$

$$E = \frac{f''(\xi)}{12}\left[-b^3 + 3ab^2 + a^3 - 3a^2b\right]$$

$$E = \frac{f''(\xi)}{12}(a-b)^3 \Rightarrow E = -\frac{f''(\xi)}{12}(b-a)^3$$