Los axiomas de Kolmogorov: sea S un conjunto de eventos con una medida de probabilidad P definida sobre él, tal que la probabilidad de cualquier evento $A \subset S$ viene dada por $P(A)$. Entonces, la medida de probabilidad obedece los siguientes axiomas:

1) $P(A) \geq 0$

2) $P(S) = 1$

3) si $\{A_1, A_2, \dots, A_j \dots\}$ es una secuencia de eventos mutuamente excluyentes tal que $A_i \cap A_j = 0$ para todo i, j entonces $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_j \cup \dots)$
$= P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_j) + \dots$

* Demostrar que $P(\phi) = 0 \rightarrow$ la probabilidad del evento nulo es cero

Por las leyes de la identidad sabemos que: $S \cap \phi = \phi$ y $S \cup \phi = S$

Esto demuestra que S y ϕ son conjuntos disjuntos

Entonces por el axioma 3 podemos decir que:

$P(S \cup \phi) = P(S) + P(\phi)$

Pero tambien sabemos que $S \cup \phi = S$ entonces $P(S \cup \phi) = P(S)$

y por el axioma 2 sabemos $P(S) = 1$

Entonces $P(S \cup \phi) = P(S) = 1$

$1 = P(S) + P(\phi) \Rightarrow 1 = 1 + P(\phi) \Rightarrow P(\phi) = 0$

* Demostrar que $P(A^c) = 1 - P(A)$

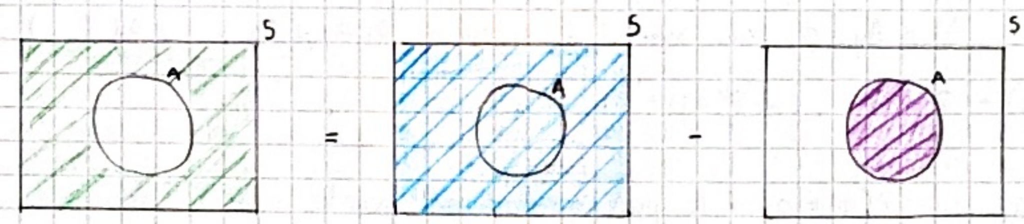
Por las leyes del complemento sabemos que: $A \cup A^c = S$ y $A \cap A^c = \phi$

Entonces sabiendo que A y A^c son disjuntos podemos reescribir la formula y utilizar el axioma 3

$P(A^c) = 1 - P(A) \Rightarrow P(A^c) + P(A) = 1 \Rightarrow P(A^c \cup A) = 1 \Rightarrow P(S) = 1$

Entonces $1 = P(S) = P(A^c \cup A) = P(A^c) + P(A)$

Reorganizando: $P(A^c) = 1 - P(A)$



$P(A^c) \quad = \quad P(S) = 1 \quad - \quad P(A)$

* Demostrar que $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$A \cup B$ lo podemos reescribir: $A \cup B = (A \cup B) \cap S = (A \cup B) \cap (A \cup A^c) = A \cup (B \cap A^c)$

Si $A \cup B = A \cup (B \cap A^c)$ entonces $A \cup B$ es la unión de dos conjuntos disjuntos y por el axioma 3 podemos decir que:

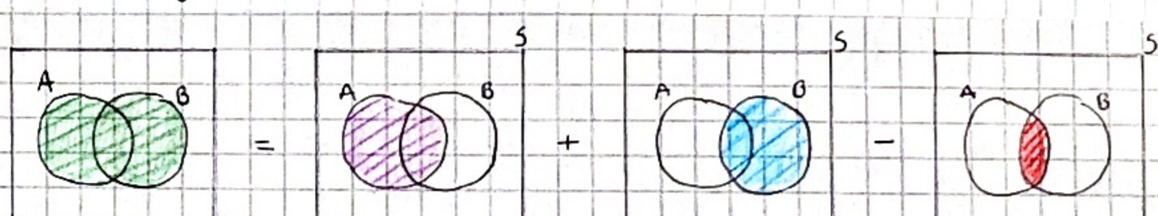
$P(A \cup B) = P(A) + P(B \cap A^c)$

B tambien lo podemos reescribir $B = B \cap S = B \cap (A \cup A^c) = (B \cap A) \cup (B \cap A^c)$

Si $B = (B \cap A) \cup (B \cap A^c)$ entonces B es la unión de dos conjuntos disjuntos y por el axioma 3 podemos decir que:

$P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap A^c) \Rightarrow P(B \cap A^c) = P(B) - P(B \cap A)$

y sustituyendo nos queda: $P(A \cup B) = P(A) + P(B \cap A^c) = P(A) + P(B) - P(B \cap A)$



$P(A \cup B) \quad = \quad P(A) \quad + \quad P(B) \quad - \quad P(A \cap B)$