Sistemas de Ecuaciones Lineales

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{array}\right\}$$

Sistema de n ecuaciones lineales con n incognitas

Este sistema tambien se puede representar como:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \iff A \cdot \vec{x} = \vec{b}$$

* Sustitución hacia atrás (regresiva):

Algoritmo para resolver un sistema de ecuaciones lineales siendo A una matriz triangular superior.

Entonces tendriamos:

$$\left\{\begin{array}{rl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1,n-1}x_{n-1} + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{22}x_2 + \dots + a_{2,n-2}x_{n-1} + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots & \\ a_{n-1,n-1}x_{n-1} + a_{n-1,n}x_n &= b_{n-1} \\ a_{nn}x_n &= b_n \end{array}\right.$$

Resolviendo la n-ésima ecuación para x_n, se obtiene:

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$$

Resolviendo la ecuación $(n-1)$-esima para x_{n-1} y usando x_n obtenemos:

$$x_{n-1} = \frac{b_{n-1} - a_{n-1,n} x_n}{a_{n-1,n-1}}$$

y continuando con este proceso, llegamos a que:

$$x_i = \frac{b_i - a_{in} x_n - a_{i,n-1} x_{n-1} - \dots - a_{i,i+1} x_{i+1}}{a_{ii}}$$

Entonces $$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j}{a_{ii}}$$

* Sustitución hacia adelante (Progresiva):

Algoritmo para resolver un sistema de ecuaciones lineales siendo A una matriz triangular inferior y con unos en la diagonal.

$$\begin{cases} a_{11} x_1 & = b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 & = b_2 \\ \vdots \quad\quad \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} x_1 + a_{n-1,2} x_2 + \dots + a_{n-1,n-1} x_{n-1} & = b_{n-1} \\ a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \dots + a_{n,n-1} x_{n-1} + a_{nn} x_n & = b_n \end{cases}$$

Resolviendo la ecuación para x_1, se obtiene:

$$x_1 = \frac{b_1}{a_{11} = 1} \qquad x_1 = b_1$$

Resolviendo la ecuación para x_2, se obtiene:

$$x_2 = \frac{b_2 - a_{21} x_1}{a_{22} = 1} \qquad x_2 = b_2 - a_{21} x_1$$

Resolviendo la ecuación para x_i se obtiene:

$$x_i = b_i - a_{i1} x_1 - a_{i2} x_2 - \dots - a_{i,i-1} x_{i-1}$$

Entonces $x_i = b_i - \sum_{j=0}^{i-1} a_{ij} x_j$