Primero :

$$f(x+2h) = \cancel{f(x)} + \cancel{2h f'(x)} + \cancel{\frac{(2h)^2}{2}} f''(x) + \cancel{\frac{(2h)^3}{3!}} f^{(3)}(x) + \frac{(2h)^4}{4!} f^{(4)}(x) + O(h^5)$$

$$f(x-2h) = \cancel{f(x)} - \cancel{2h f'(x)} + \cancel{\frac{(2h)^2}{2}} f''(x) - \cancel{\frac{(2h)^3}{3!}} f^{(3)}(x) + \frac{(2h)^4}{4!} f^{(4)}(x) + O(h^5)$$

$$-4f(x+h) = -\cancel{4f(x)} - \cancel{4h f'(x)} - \cancel{\frac{4h^2}{2}} f''(x) - \cancel{\frac{4h^3}{3!}} f^{(3)}(x) - \frac{4h^4}{4!} f^{(4)}(x) + O(h^5)$$

$$-4f(x-h) = -\cancel{4f(x)} + \cancel{4h f'(x)} - \cancel{\frac{4h^2}{2}} f''(x) + \cancel{\frac{4h^3}{3!}} f^{(3)}(x) - \frac{4h^4}{4!} f^{(4)}(x) + O(h^5)$$

$$6f(x) = \cancel{6f(x)}$$

Ahora sumamos todo y nos queda

$$f(x+2h) + f(x-2h) - 4f(x+h) - 4f(x-h) + 6f(x) = h^4 f^{(4)}(x) + O(h^5)$$

Reorganizando nos queda:

$$f^{(4)}(x) = \frac{f(x+2h) - 4f(x+h) + 6f(x) - 4f(x-h) + f(x-2h)}{h^4} + O(h)$$

Para cualquier punto :

$$Df^{(4)}(x_i) = \frac{f(x_{i+2}) - 4f(x_{i+1}) + 6f(x_i) - 4f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})}{h^4} + O(h)$$

La aproximación de este operador (formula) es de $O(h)$.
Con esto queda demostrada la formula para la cuarta derivada