

Lista de ejercicios

1. ¿Cuántos números de seis dígitos hay?. ¿Cuántos de ellos contienen el dígito 5?. Ten en cuenta que el primer dígito de un número de n dígitos es distinto de cero.
2. La población de una ciudad es de 20.000 habitantes. Si cada residente tiene tres iniciales, ¿ es cierto que al menos dos personas tienen las mismas iniciales?.
3. ¿ Cuántas matrices $n \times m$ con entradas 0 o 1 hay?.
4. Se selecciona aleatoriamente un entero del conjunto $\{1, 2, \dots, 1,000,000\}$. ¿Cuál es la probabilidad de que contenga el dígito 5?.
5. En el popular programa de televisión Who Wants to Be a Millionaire se pide a los concursantes que clasifiquen cuatro elementos de acuerdo con alguna norma: por ejemplo, puntos de referencia en orden geográfico, películas en el orden de la fecha de lanzamiento, cantantes en el orden de fecha de nacimiento . ¿Cuál es la probabilidad de que un concursante pueda obtener la respuesta correcta sólo con adivinar?.
6. ¿ Cuantas permutaciones del conjunto $\{a, b, c, d, e\}$ inicia con a y termina en con c .
7. Robert tiene ocho invitados, dos de los cuales son Jim y John. Si llegan los invitados en un orden aleatorio, ¿cuál es la probabilidad de que John no llegue justo después de Jim?.
8. Un concurso de baile tiene 11 competidores, de los cuales tres son estadounidenses, dos son mexicanos, tres rusos y tres italianos. Si el resultado del concurso sólo enumera la nacionalidad de los bailarines, ¿ cuántos resultados son posibles?.
9. Se tiran seis dados. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos dos de ellos muestren la misma cara?.
10. Un dado se lanza ocho veces. ¿Cuál es la probabilidad de obtener exactamente dos 3, tres 1 y tres 6?.
11. En una fiesta, 15 parejas casadas están sentadas al azar en una mesa redonda. ¿Cuál es la probabilidad de que todos los hombres estén sentados junto a sus esposas? Supongamos que de estas parejas casadas, cinco esposos y sus esposas tienen más de 50 años y los restantes maridos y esposas son todos menores de 50 años. ¿Cuál es la probabilidad de que todos los hombres mayores de 50 años estén sentados junto a sus esposas? Tenga en cuenta que cuando la gente está sentada alrededor de una mesa redonda, sólo sus asientos en relativos entre si importan. La posición exacta de una persona no es importante.
12. Una caja contiene cinco azules y ocho bolas rojas. Jim y Jack comienzan a sacar bolas de la caja, respectivamente, una a la vez, al azar y sin reemplazo hasta que se saque una bola azul. ¿Cuál es la probabilidad de que Jack saque la pelota azul?.
13. En una pequeña ciudad, 11 de los 25 profesores tiene una opinión en contra el aborto, ocho están a favor del aborto, y el resto son indiferentes. Se selecciona una muestra aleatoria de cinco profesores para una entrevista.
 - (a) ¿Cuál es la probabilidad de que todos ellos esten a favor del aborto?.
 - (b) ¿Cuál es la probabilidad de que todos ellos tengan la misma opinión?.
14. Sea x un número positivo y sea $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$ una ecuación. Un vector (x_1, x_2, \dots, x_k) satisfaciendo $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$ se dice que es una solución entera no negativa de la ecuación si para cada $i, 1 \leq i \leq k$, x_i es un entero no negativo. Se dice que es una solución entera positiva de la ecuación si para cada $i, 1 \leq i \leq k$, x_i es un entero positivo.

- (a) ¿ Cuántas soluciones enteras no negativas distintas tiene la ecuación $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$?.
 (b) ¿ Cuántas soluciones enteras positivas distintas tiene la ecuación $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$?.
15. Un profesor distraído escribió n cartas y las selló en sobres antes de escribir las direcciones en los sobres. Luego escribió las n direcciones en los sobres al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que por lo menos una carta fue dirigida correctamente?.
16. Jim tiene 20 amigos. Si decide invitar a seis de ellos a su fiesta de cumpleaños, ¿ cuántas opciones tiene?.
17. Una muestra aleatoria de n elementos se toma de una población de tamaño N sin reemplazo. ¿Cuál es la probabilidad de que se incluya un elemento fijo de la población? Simplifique tu respuesta.
18. Frente a la oficina de Jeff hay un estacionamiento con 13 plazas de aparcamiento en una fila. Cuando los coches llegan a este aparcamiento, se estacionan aleatoriamente en uno de los lugares vacíos. Jeff estaciona su coche en el único lugar vacío que queda, luego se va a su oficina. A su regreso encuentra que hay siete plazas vacías. Si no ha estacionado su coche en un extremo del estacionamiento, ¿ cuál es la probabilidad de que ambos espacios de estacionamiento que están al lado del auto de Jeff estén vacíos?.
19. Lili tiene 20 amigos. Entre ellos están Karen y Claude , que son marido y mujer. Lili quiere invitar a seis de sus amigos a su fiesta de cumpleaños. Si ni Karen ni Claude iran a la fiesta si es que no van con su pareja. ¿ cuántas opciones tiene Lili?.
20. Prueba que

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \cdots + (-1)^k \binom{n}{k} + \cdots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0.$$

21. Sea n un entero positivo. Una muestra aleatoria de cuatro elementos es escogida del conjunto $\{0, 1, 2, \dots, N\}$, uno a la vez y con reemplazo. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de los dos primeros elementos sea igual a la suma de los dos últimos elementos?.