1 Métodos de conteo en probabilidad

En muchos de los ejemplos que hemos visto hasta ahora, ha sido necesario determinar el número de maneras en que un evento puede ocurrir, así, conociendo la probabilidad de cada una de esas ocurrencias y los axiomas de la función probabilidad podemos calcular la probabilidad del evento.

Existen muchas técnicas, basadas en la ley de probabilidad total para contar todas las posibilidades. Es usual describir este problema en términos de cómo se pueden elegir `pelotas distinguibles` de una caja asumiendo que la elección es `aleatoria`, es decir, cada pelota en la caja es igualmente probable que se elija.

Alternativamente, el problema puede ser expresado en términos de cómo se pueden insertar `pelotas indistinguibles` en cajas distinguibles.

Esta primera forma se llama **problema de selección** y la última forma se llama **problema de asignación**. Formularemos nuestra notas en términos del problema de selección.

En el contexto del problema de selección, una vez que se ha elegido una de las pelotas distinguibles de la caja y antes de la selección de la pelota siguiente, se debe tomar una decisión sobre qué se debe hacer con la primera pelota elegida. Si se vuelve a colocar en la caja, se dice que la selección se hace con reemplazo [1]. En este caso, la misma pelota puede ser elegida una segunda vez, luego una tercera vez, y una cuarta vez, y así sucesivamente. La segunda posibilidad es que la pelota sea puesta a un lado y nunca vuelva a la caja. En este caso, la selección se hace sin reemplazo [2].

Un concepto relacionado al problema de selección se refiere al `orden` en que se seleccionan las pelotas. En algunos casos, este orden es importante. Por ejemplo, puede ser necesario saber si una pelota negra fue elegida antes o después de una pelota blanca. Cuando el orden es importante, el término que se utiliza es el de **permutación**. En otros casos, todo lo que se necesita saber es que se eligió una pelota negra y una pelota blanca y no el orden en que fueron elegidos, en este caso se utiliza el concepto de **combinación**.

1.1 Principio del conteo

Ocasionalmente, se encuentran espacios muestrales para los cuales los puntos del espacio muestral son igualmente probables. Si este es el caso y si el espacio muestral S contiene n puntos, entonces, puesto que la probabilidad total en el espacio muestral es 1, cada punto tiene una probabilidad $1/n$. Si denotamos los puntos mutuamente exclusivos en A por $a_i, i = 1, 2, 3, \ldots, n$, entonces la probabilidad de un evento A, es la suma de las probabilidades de los puntos del espacio muestral en A. Es decir:

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{a_i \in A} \mathbb{P}(a_i) = \sum_{a_i \in A} \frac{1}{n}$$

así,

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{Número de puntos de A}}{n} = \frac{\text{Número de puntos de A}}{\text{Número de puntos de S}}$$

Con el fin de considerar problemas que conducen a espacios muestrales con puntos igualmente probables, debemos considerar algunas técnicas para contar conjuntos de puntos. Estas técnicas proporcionan algunos problemas desafiantes.

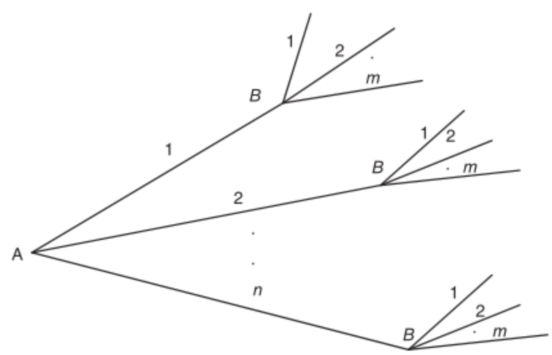
[1] with replacement
[2] without replacement

Se debe tener cuidado al concluir que sólo porque un espacio muestral tiene n puntos, cada punto tiene probabilidad $1/n$. Por ejemplo, si un viaje en avión se completa de forma segura o no, se hace evidente que estos eventos no tienen cada uno una probabilidad $1/2$! Las técnicas de conteo consideradas en este caso se basan en dos principios de conteo fundamentales relativos a eventos mutuamente exclusivos A y B

- `Principio 1` Si los eventos A y B pueden ocurrir en n y m maneras respectivamente, entonces A y B pueden ocurrir juntos de $n \cdot m$ maneras.
- `Principio 2` Si los eventos A y B pueden ocurrir en n y m maneras respectivamente, entonces A o B pueden ocurrir juntos de $n + m$ maneras.

El Principio 1 se establece fácilmente ya que A puede ocurrir de n maneras y luego debe ser seguida por cada manera en que B puede ocurrir. Un diagrama de árbol, mostrado en la siguiente figura ilustra el resultado.

El Principio 2 simplemente usa la palabra `o` en un sentido exclusivo.



1.2 Permutaciones

Una disposición (arreglo) de ítems, también llamada una `secuencia ordenada` de ítems , se dice que es una permutación de los ítems. Una secuencia ordenada de n ítems se llama una n-permutación.

Con n ítems distintos, hay $n!$ permutaciones posibles. Este es el número de diferentes maneras en que los n ítems distintos pueden ser colocados, ordenados .

Ejemplo 1.1 Si se tienen tres letras diferentes A, B y C hay $3! = 6$ permutaciones (arreglos, disposiciones), a saber

$$ABC,\ ACB,\ BAC,\ BCA,\ CAB,\ CBA$$

Debes observar que no sólo hay tres elementos (items) distintos A, B y C, sino que también hay tres lugares diferentes en los que pueden colocarse, es decir, la primera, segunda y tercera posición de una cadena de tres letras. Por esta razón, se considera que ABC es una permutación diferente de ACB.

Ahora consideremos el número de permutaciones que pueden generarse a partir de elementos que no son todos distintos.

Ejemplo 1.2 Consideremos la palabra OXO. Esta vez no todas las letras son distintas. Hay dos O y una X y sólo se pueden encontrar tres arreglos diferentes, a saber:

$$OXO,\ XOO,\ OOX$$

Puesto que el carácter O aparece dos veces, el número $n! = 3!$ obtenido con $n = 3$ caracteres distintos debe ser dividido por 2!. En este caso, tenemos $3!/2! = 3$ arreglos.

Ejemplo 1.3 Consideremos la palabra PUPPY. Si los cinco caracteres fueran distintos, el número de permutaciones que se obtendría seria 5!. Sin embargo, como el carácter P aparece tres veces en PUPPY, el 5! debe ser dividido por 3!, para obtener $5!/3! = 5 \times 4 = 20$. El número de diferentes maneras en que los caracteres de la palabra PUPPY se pueden colocar o disponer es por lo tanto 20.

Ejemplo 1.4 Consideremos la palabra NEEDED, que contiene tres E, dos D y una N. El número de diferentes maneras en que los caracteres en esta palabra puede ser dispuestos es:

$$\frac{6!}{2! \times 3!} = 60$$

Por lo tanto, el número de permutaciones que se pueden obtener de n ítems, no todos los cuales son distintos, puede obtenerse asumiendo primero que todos los ítems son distintos (lo que nos da $n!$) y luego para cada elemento múltiple se divide por el factorial de su multiplicidad.

1.3 Permutaciones con reemplazos

En el caso de permutaciones con reemplazo, nuestro objetivo es contar el número de formas en que se pueden seleccionar k pelotas entre n pelotas distinguibles. Después de cada pelota es elegida y sus características son registradas, se sustituye en la caja y se elige la pelota siguiente.

Una forma alternativa de afirmar esto es decir que después de cada pelota es seleccionada, la pelota es puesta a un lado y una pelota que es idéntica a ella toma su lugar en la caja. De esta manera es posible que la misma pelota sea elegida muchas veces.

Si $k = 1$(se elige una pelota), entonces el número de permutaciones posibles es n, ya que cualquiera de las n pelotas puede ser elegida. Si $k = 2$, entonces cualquiera de las n pelotas puede ser elegida como la primera pelota y luego reemplazada en la caja. Para cada una de estas n elecciones de la primera pelota, la siguiente pelota elegida puede ser también cualquiera de las n pelotas distinguibles y por lo tanto el número de permutaciones cuando $k = 2$ es $n \times n = n^2$. Este razonamiento puede continuar y demostrar que el número de permutaciones obtenidas para cualquier k es n^k.

Ejemplo 1.5 El número de códigos de cuatro dígitos que se pueden obtener utilizando el sistema de números decimales (con diez dígitos de 0 a 9 inclusive) es $10^4 = 10.000$. Estos son los códigos que van desde 0000 hasta 9999.

Supongamos ahora que hay n_1 maneras de elegir un primer elemento (ítem) y n_2 formas de elegir un segundo elemento(ítem). Entonces el número de pares ordenados distintos es igual a $n_1 n_2$.

En términos de pelotas distinguibles en cajas, esto puede ser visto como el número de maneras en que una pelota puede ser elegida de una primera caja que contiene n_1 pelotas distinguibles y una segunda pelota elegida de una segunda caja que contiene n_2 pelotas distinguibles. La extensión a más de dos ítems diferentes es inmediata.

Si hay n_i formas de elegir un ítem i, para $i = 1, 2, \ldots, k$, entonces el número de k-tuplas ordenadas distintas es igual a $n_1 n_2 \ldots n_k$.

Ejemplo 1.6 Supongamos que una camisa se puede elegir entre $n_1 = 12$ camisas diferentes y una corbata de $n_2 = 20$ corbatas diferentes. Entonces el número de combinaciones de camisas y corbatas es $n_1 n_2 = 240$.

1.4 Permutaciones sin reemplazos

Pasemos ahora al problema de contar el número de diferentes permutaciones obtenidas al seleccionar k pelotas de entre n pelotas distinguibles en el caso de que una vez que se elija una pelota en particular, esta no se devuelve a la caja. Esto es igual al número de secuencias ordenadas de k objetos distinguibles, es decir, el número de k-permutaciones, que se pueden obtener a partir de n objetos distinguibles.

Denotamos a este número como $P(n,k)$ y asignamos los valores $P(n,0) = 1, n = 0,1,\ldots,$ por convención.

Decimos que $P(n,k)$ es el número de permutaciones de n objetos tomados k a la vez.

Si $k = 1$, entonces cualquier pelota puede ser elegida y el número total de permutaciones simplemente es n. Si $k = 2$, entonces cualquiera de las n pelotas puede ser elegida como la primera, para cada una de estas n elecciones posibles, quedan $n-1$ pelotas en la caja, cualquiera de las cuales puede ser elegida como la segunda. Así, el número total de permutaciones para $k = 2$ es igual a $n(n-1)$. Con k = 3, hay n posibilidades diferentes para la primera pelota, $n-1$ para la segunda y $n-2$ para la tercero, lo que da $P(n,3) = n(n-1)(n-2)$.

Podemos ahora generalizar esto a cualquier arbitrario $k \leq n$ para obtener:

$$P(n,k) = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Existen varias relaciones entre los valores de $P(n,k)$ para diferentes valores de los parámetros n y k.

Por ejemplo:

$$P(n,k) = nP(n-1,k-1), \quad k = 1,2,\ldots,n, \quad n = 1,2,\ldots$$

Podemos explicar esta fórmula de la siguiente manera: La primera pelota elegida puede ser cualquiera de las n pelotas distinguibles. Esto deja $n-1$ pelotas a partir de las cuales $k-1$ deben ser elegidas, el número de maneras en que $k-1$ pelotas se pueden elegir de $n-1$ es igual a $P(n-1,k-1)$.

Ejemplo 1.7 Sea $n = 4, k = 3$ y distinguimos las cuatro pelotas por medio de las letras A, B, C y D. Tenemos $P(4,3) = 4 \times 3 \times 2 = 24$.

Esas 24 posibilidades, están dadas por:

```
ABC, ABD, ACB, ACD, ADB, ADC,
BAC, BAD, BCA, BCD, BDA, BDC,
CAB, CAD, CBA, CBD, CDA, CDB,
DAB, DAC, DBA, DBC, DCA, DCB.
```

Debes observar que distinguimos entre ABC y ACB, ya que el orden es importante, pero no incluimos la misma letra más de una vez (por ejemplo, AAB no está presente), esto es por que una vez que las letras son usadas no pueden ser utilizadas de nuevo.

Ejemplo 1.8 Supongamos que deseamos encontrar el número de formas en que un código de cuatro dígitos, en el que todos los dígitos son diferentes, puede ser seleccionado. Dado que trabajamos con diez dígitos (0 a 9), el primer dígito puede ser cualquiera de los diez, el segundo cualquiera de los nueve restantes, y así sucesivamente. Continuando de esta manera, vemos que el número total de permutaciones es $10 \times 9 \times 8 \times 7$ que naturalmente es el mismo valor cuando se calcula directamente con la fórmula:

$$P(10,4) = \frac{10!}{(10-4)!} = 5040.$$

Ejemplo 1.9 Si los passwords pueden consistir de 6 letras, encuentra la probabilidad que aleatoriamente un password, pueda ser elegido y que no tenga letras repetidas.

En este caso el número posible de passwords es 26^6 y el número casos favorables es $\binom{26}{6}$ y la probabilidad de escoger palabras no repetidas es $\frac{\binom{26}{6}}{26^6}$

Ejemplo 1.10 Supongamos que r palomas que regresan de una carrera tienen la misma probabilidad de entrar en cualquiera de n nidos de acogida, donde $n > r$. Nos gustaría saber la probabilidad de que todas las palomas terminen en nidos diferentes?.

Sea k_1 el nido donde entra la primera paloma, k_2 donde entra la segunda paloma y así sucesivamente. Tenemos $1 \leq k_i \leq n$, para $i = 1, 2, \ldots, r$. El número total de posibilidades disponibles para las palomas es igual a $N = n^r$, ya que la paloma número 1 puede volar a cualquiera de los n nidos y lo mismo para la paloma número 2 y así sucesivamente. Esta es la situación de las permutaciones con reemplazo.

Decimos que cada una de estas N opciones posibles es igualmente probable. Por lo tanto, existen n^r disposiciones distintas y equiprobables de las palomas en los n nidos. Estos n^r eventos son los eventos elementales que constituyen el espacio muestral del experimento.

Sea A el evento en que todas las palomas terminan en nidos diferentes. Este evento ocurre si todos los $k_i, i = 1, 2, \ldots, k_r$ son distintos: cada paloma vuela en un nido diferente. Esta es la situación de la permutación sin reemplazo.

La primera paloma puede entrar en cualquiera de los n nidos, la segunda puede entrar en cualquiera de los $n-1$ nidos restantes y así sucesivamente. El número de posibles formas en que las r palomas se pueden disponer en los n nidos de manera que ninguno comparte un nido es dado por $n(n-1)\ldots(n-r+1)$. Este es el número de salidas que resultan en el evento A y dado que hay un total de n^r resultados equiprobables en el espacio muestral, la probabilidad de A debe ser:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{n^r} = \frac{n!/(n-r)!}{n^r} = \frac{\text{conteo sin reemplazo}}{\text{conteo con reemplazo}}.$$

Ejemplo 1.11 Considere el `problema del cumpleaños`, el de determinar la probabilidad de que entre un grupo de k personas al menos dos tengan el mismo cumpleaños (dia y mes solamente).

Para encontrar la probabilidad de que al menos dos personas tengan el mismo cumpleaños, es más fácil calcular el complemento de este evento, la probabilidad de que no haya dos individuos que tengan el mismo cumpleaños. Si asumimos que un año tiene 365 dias, entonces el número de permutaciones con reemplazo es de 365^k . Este es el tamaño del espacio muestral desde el cual se toman todas las posibles permutaciones de cumpleaños. El número de permutaciones sin reemplazo es $365!/(365-k)!$. Este es el número de salidas en el espacio muestral en el que no hay dos cumpleaños en la permutación que sean los mismos. La probabilidad de no encontrar entre k personas dos con el mismo cumpleaños esta dado por la siguiente proporción entonces:

$$\begin{aligned}\frac{365!/(365-k)!}{365^k} &= \frac{365}{365} \times \frac{364}{365} \times \frac{363}{365} \times \cdots \times \frac{365-k+1}{365} \\ &= \left(1 - \frac{1}{365}\right)\left(1 - \frac{2}{365}\right)\cdots\left(1 - \frac{k-1}{365}\right)\end{aligned}$$

Se puede notar que en una clase con 23 estudiantes, la probabilidad de que dos estudiantes no tengan el mismo cumpleaños es menos del 50%.

1.5 Combinaciones sin reemplazos

Sea al caso en el que las pelotas se seleccionan sin reemplazo, pero el orden en que se seleccionan no tiene importancia.

Por ejemplo, podemos haber elegido una pelota verde, una pelota roja y una pelota negra, pero no sabemos o no nos preocupamos cuál de estas tres fue elegida primera, segunda o tercera.

Sea $C(n, k)$ que denota el número de maneras en que se pueden seleccionar k pelotas sin reemplazo e independientemente de su orden en una caja que contiene n pelotas. Este símbolo se dice que es el número de combinaciones de n elementos tomados k a la vez, no teniendo en cuenta el orden.

Como vimos anteriormente, cualquier colección de k ítems distintos puede ser colocada en $k!$ diferentes permutaciones. Por ejemplo, con $k = 3$ y usando las letras ABC, tenemos $3! = 6$ permutaciones.

```
ABC   ACB   BAC   BCA   CAB  CBA
```

Estas son todas diferentes permutaciones porque el orden es importante. Si el orden no es importante, entonces la única información que necesitamos es que haya un A, un B y un C. Todas las 3! permutaciones producen entonces una sola combinación. Esto nos proporciona un medio para relacionar permutaciones sin reemplazo a combinaciones sin reemplazo.

Dado que cualquier secuencia de k ítems puede ser dispuesta en $k!$ permutaciones, se deduce que debe haber $k!$ veces más permutaciones (sin reemplazo) de k ítems distintos de lo que hay en combinaciones (sin reemplazo), ya que el orden importa en permutaciones, pero no en combinaciones. En otras palabras, debemos tener:

$$k!C(n,k) = P(n,k) \text{ para } n = 0,1,2,\ldots \text{ y } k = 0,1,\ldots,n.$$

Esto conduce a:

$$C(n,k) = \frac{P(n,k)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \text{ para } n = 0,1,2,\ldots \text{ y } k = 0,1,\ldots,n.$$

Ejemplo 1.12 Sean A, B, C, D y E cinco elementos distinguibles de los cuales dos deben ser escogidos (lo cual implica, sin reemplazo, y no importa cuál viene primero: es decir, una combinación). El número de formas en que estos dos pueden ser elegidos está dado por $C(5,2) = 5!/(2!3!) = 10$. Estos son los resultados:

```
AB   AC   AD   AE
     BC   BD   BE
          CD   CE
               DE
```

Si las elecciones se hacen de forma aleatoria, entonces la probabilidad de obtener una de estas diez combinaciones es $1/10$. Calculemos la probabilidad de elegir exactamente uno de (A, B) y uno de (C, D, E). Este es el evento que contiene las salidad $\{AC, AD, AE, BC, BD, BE\}$. El número de formas en que tal combinación puede aparecer es el producto del número de maneras en que podemos elegir uno de dos (es decir $C(2,1)$) por el número de maneras que podemos elegir uno de los tres restantes (es decir $C(3,1)$). La probabilidad de tal elección es entonces:

$$\frac{C(2,1)\times C(3,1)}{C(5,2)} = \frac{2!/(1!1!)\times 3!/(1!2!)}{5!/(2!3!)} = \frac{2\times 3}{10} = 0.6.$$

$C(n,k)$ se denomina <u>coeficiente binomial</u> ya que es el coeficiente del término $p^k q^{n-k}$ en la expansión del binomio $(p+q)^n$. Formas alternativas para escribir este coeficiente binomial son:

$$C(n,k) = C_k^n = \binom{n}{k}.$$

Para calcular los coeficientes binomiales, se cumple que:

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n}{k}\left(\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}\right) \\ &= \frac{n}{k}\left(\frac{(n-1)!}{(k-1)!([n-1]-[k-1])!}\right) = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}\end{aligned}$$

Lo que conduce a,

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \times \frac{n-1}{k-1} \times \cdots \times \frac{n-(k-1)}{k-(k-1)} = \prod_{j=1}^{k} \frac{n-j+1}{j}.$$

y esta expresión computacionalmente es más eficiente que formar factoriales y tomar razones.

Los coeficientes binomiales poseen un gran número de propiedades interesantes, de las cuales sólo cuatro se enumeran a continuación. Para $0 \leq j \leq k \leq n$ se cumple:

- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
- $\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$.
- $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$.
- $\binom{n}{k}\binom{k}{j} = \binom{n}{j}\binom{n-j}{k-j}$.

Consideremos ahora el problema de colocar k pelotas distinguibles en n cajas diferentes de tal manera que el número de pelotas en la caja i sea k_i para $i = 1, 2, \ldots, n$.

Asumimos que $\sum_{i=1}^{n} k_i = k$, de modo que cada pelota se pone en una de las cajas y de manera que no queda ninguna. El número de combinaciones obtenidas al seleccionar las primeras k_1 pelotas para la caja 1 es $C(k, k_1)$. Esto deja $k - k_1$ pelotas, de las cuales k_2 son escogidas y colocadas en la caja 2. El número de combinaciones obtenidas al seleccionar estas k_2 pelotas de las $k - k_1$ pelotas es $C(k - k_1, k_2)$, de modo que el total obtenido de las dos primeras cajas es $C(k, k_1) \times C(k - k_1, k_2)$.

Esto deja ahora $k - k_1 - k_2$ de los cuales k_3 deben ser elegidos y puesto en la caja 3. Continuando de esta manera, vemos que el número total de combinaciones está dado por:

$$C(k, k_1) \times C(k - k_1, k_2) \times C(k - k_1 - k_2, k_3) \times \cdots \times C\left(k - \sum_{i=1}^{n-1} k_i, k_n\right),$$

donde $C(k - \sum_{i=1}^{n-1} k_i, k_n) = C(k_n, k_n)$. Sustituyendo en la fórmula para los números de combinación tenemos:

$$\begin{aligned} &\frac{k!}{k_1!(k-k_1)!} \times \frac{(k-k_1)!}{k_2!(k-k_1-k_2)!} \times \frac{(k-k_1-k_2)!}{k_2!(k-k_1-k_2-k_3)!} \times \cdots \\ &\qquad = \frac{k!}{k_1!k_2! \cdots k_n!} \equiv \binom{k}{k_1, k_2, \ldots k_n}. \end{aligned}$$

Estos son los llamados <u>coeficientes multinomiales</u>. Cuando $k = k_1 + k_2$ tenemos:

$$\binom{k}{k_1, k_2} = \binom{k}{k_1} = \binom{k}{k_2}.$$

Ejemplo 1.13 Calculemos el número de maneras en que cinco cartas pueden ser repartidas desde una baraja de 52 cartas. Puesto que no importa en qué orden se reparten las cartas, el problema es con combinaciones en lugar de permutaciones, por lo que la respuesta es $C(52, 5) = 2,598,960$. Sea K el evento de que hay exactamente tres reyes entre las cartas seleccionadas. El número de salidas que resultan en el evento K es el producto de $C(4,3)$ y $C(48,2)$ ya que tres reyes deben ser sacados de cuatro cartas y dos cartas de los 48 restantes. La probabilidad de obtener exactamente tres reyes es:

$$\frac{C(4,3)\times C(48,2)}{C(52,5)}=0.001736.$$

Ejemplo 1.14 Durante el control de calidad de un lote de 144 artefactos, 12 son elegidos al azar y inspeccionados. Si alguno de los 12 está defectuoso, el lote es rechazado, de lo contrario se acepta. Deseamos calcular la probabilidad de que un lote que contenga 10 artefactos defectuosos sea aceptado.

El número de formas en que el inspector puede elegir los 12 elementos para la inspección es el número de combinaciones de 144 elementos tomados 12 a la vez y por lo tanto es igual a:

$$N=C(144,12)=\frac{144!}{12!132!}.$$

Se nos dice que todos son equiprobables,ya que el inspector elige los 12 aparatos al azar.

Sea A el evento de que el lote es aceptado, es decir, ninguno de los 10 artefactos defectuosos aparece en la muestra de 12 escogida por el inspector. Esto significa que los 12 artefactos seleccionados pertenecen a los 134 buenos. El número de formas en que esto puede suceder, denotado por $N(A)$ es:

$$N(A)=C(134,12)=\frac{134!}{12!122!}$$

Se sigue entonces

$$\mathbb{P}(A)=\frac{N(A)}{N}=\frac{134!12!132!}{12!122!144!}=0.4066.$$

1.6 Combinaciones con reemplazo

Sólo queda determinar el número de combinaciones posibles, cuando se seleccionan k pelotas con reemplazo de una caja que contiene n pelotas distinguibles. Se puede demostrar que esto es idéntico al problema de contar el número de combinaciones cuando se seleccionan k pelotas sin sustitución de una caja que contiene un total de $n+k-1$ pelotas distinguibles, es decir:

$$\frac{(n+k-1)!}{(n-1)!k!}.$$

1.7 Solución - Hossein Pishro-Nik

Supongamos que queremos tomar muestras del conjunto $A=\{x_1,x_2,\ldots,x_k\}$ k veces tal que la repetición esté permitida y que orden no importa. Por ejemplo, si $A=\{1,2,3\}$ y $k=2$, entonces hay 6 maneras de hacer esto

```
1,1
1,2
1,3
2,2
2,3
3,3
```

¿Cómo podemos obtener el número 6 sin enumerar todas las posibilidades? Una forma de pensar sobre esto es observar que cualquiera de los pares en la lista anterior se puede representar por los número de 1, 2 y 3 que contiene.

$$\begin{aligned}
1,1 &\to (x_1, x_2, x_3) = (2,0,0)\\
1,2 &\to (x_1, x_2, x_3) = (1,1,0)\\
1,3 &\to (x_1, x_2, x_3) = (1,0,1)\\
2,2 &\to (x_1, x_2, x_3) = (0,2,0)\\
2,3 &\to (x_1, x_2, x_3) = (0,1,1)\\
3,3 &\to (x_1, x_2, x_3) = (0,0,2)
\end{aligned}$$

Nota que aquí $x_i \geq 0$ son enteros y que $x_1 + x_2 + x_3 = 2$. Por lo tanto, podemos afirmar que la cantidad de formas en que podemos muestrear dos elementos del conjunto $A = \{1,2,3\}$ de manera que el orden no importa y la repetición esté permitida es lo mismo que las soluciones a la siguiente ecuación:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 2 \qquad \text{donde} \qquad x_i \in \{0,1,2\}.$$

En general, el número total de k muestras distintas de un conjunto de n elementos, de manera que la repetición esté permitida y que el orden no importe, es igual al número de soluciones distintas a la ecuación

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k \qquad \text{donde} \qquad x_i \in \{0,1,2,3,\ldots\}.$$

El siguiente resultado calcula la cantidad de soluciones para esa ecuación.

El número de soluciones distintas a la ecuación

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k \qquad \text{donde} \qquad x_i \in \{0,1,2,3,\ldots\}.$$

es igual

$$\binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k+1}{n-1}$$

Primero definamos la siguiente asignación simple en la que reemplazamos un número entero $x_i \geq 0$ con líneas verticales x_i, es decir,

$$\begin{aligned}
1 &\to |\\
2 &\to ||\\
3 &\to |||\\
&\ldots
\end{aligned}$$

Ahora supongamos que tenemos una solución para la ecuación anterior. Podemos reemplazar las x_i por líneas verticales equivalentes. Así por ejemplo si tenemos $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3 + 0 + 2 + 1$, esto es equivalente $||| + + || + |$.

Por lo tanto, afirmamos que para cada solución a la ecuación, tenemos una representación única usando líneas verticales $('|')$ y signos más $('+')$. De hecho, cada solución se puede representar mediante k líneas verticales (desde que la suma de las x_i hasta k) y n-1 signos más.

Ahora, esto es exactamente a responder ¿cuántas secuencias distintas se puede hacer usando k líneas verticales $(|)$ y $n-1$ signos más $(+)$?

La respuesta, que se puede calcular a partir de lo aprendido es igual

$$\binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k+1}{n-1}$$

Ejemplo 1.15 Diez pasajeros toman un servicio de transbordo en el aeropuerto. El transbordador tiene una ruta que incluye 5 hoteles y cada pasajero se baja del transbordador en su hotel. El conductor registra cuántos pasajeros abandonan el servicio de transporte en cada hotel. ¿Cuántas posibilidades diferentes existen?

Sea x_i la cantidad de pasajeros que baja del transbordador en el hotel i. Entonces tenemos

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 10 \qquad \text{donde} \qquad x_i \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

Así el número de soluciones es

$$\binom{5+10-1}{10} = \binom{5+10-1}{5-1} = \binom{14}{4}.$$

Es útil describir diferentes escenarios que resultan en el mismo número de combinaciones. Consideremos, por ejemplo, el que hemos estado utilizando hasta ahora, el de contar el número de diferentes combinaciones posibles al seleccionar k pelotas de una caja que contiene n pelotas distinguibles.

Como ejemplo, veamos el caso que $n = 4$ y diferenciamos las pelotas con las letras A, B, C y D. Si elegimos k = 3 entonces la fórmula nos dice que hay $(4+3-1)!/(3! \times 3!) = 20$ combinaciones diferentes. Estas son:

```
AAA   AAB   AAC   AAD  ABB  ABC  ABD   ACC  ACD   ADD
                       BBB  BBC  BBD   BCC  BCD   BDD
                                       CCC  CCD   CDD
                                                  DDD.
```

Debes de observar que, aunque las cuatro pelotas se distinguen, la misma pelota puede aparecer más de una vez en una combinación dada. Esto se debe a que después de que una pelota ha sido elegida, esta se sustituye y se puede elegir una vez más. Observa también que no incluimos combinaciones como BAA o CBA porque con combinaciones, el orden no es importante y estas son equivalentes a AAB y ABC, respectivamente.

Un segundo escenario equivalente cambia las cosas. Se puede demostrar que contar el número de combinaciones en la selección de k pelotas de una caja de n pelotas distinguibles es equivalente a contar el número de combinaciones obtenidas al distribuir k pelotas indistinguibles entre n cajas distinguibles.

Este es el problema de asignación mencionado anteriormente. Considérese el ejemplo con $n = 4$ cajas y $k = 3$ pelotas y que las cuatro cajas distinguibles sean representadas por un vector de cuatro componentes enteras, que se distinguen de acuerdo con su posición en el vector. Las 20 combinaciones diferentes se dan entonces como:

```
(0 0 0 3) (1 0 0 2) (2 0 0 1) (3 0 0 0)
(0 0 1 2) (1 0 1 1) (2 0 1 0)
(0 0 2 1) (1 0 2 0) (2 1 0 0)
(0 0 3 0) (1 1 0 1)
(0 1 0 2) (1 1 1 0)
(0 1 1 1) (1 2 0 0)
(0 1 2 0)
(0 2 0 1)
(0 2 1 0)
(0 3 0 0)
```

donde, por ejemplo, $(1\ 0\ 0\ 2)$ indica que una pelota está en la caja 1 y dos pelotas están en la caja 4 y no somos capaces de distinguir entre las pelotas. En este caso, necesitamos distinguir entre, por ejemplo, $(1\ 0\ 0\ 2)$ y $(2\ 0\ 0\ 1)$ ya que en el primer caso, la primera caja contiene una pelota y la cuarta dos pelotas, mientras que en la segunda, la primera caja contiene dos pelotas y la cuarta sólo una pelota.

Este último escenario es útil para determinar el número de estados en ciertos **modelos de redes de colas** y **cadenas de Markov**. El problema es determinar el número de formas en que k clientes idénticos pueden ser distribuidos entre n centros de cola diferentes. Esto es equivalente a que el número de vectores enteros de longitud n que satisfacen las restricciones

$$(k_1, k_2, \ldots, k_n) \text{ con } 0 \leq k_i \leq k \text{ y } \sum_{i=1}^{n} k_i = k$$

es dado por:

$$\frac{(n+k-1)!}{(n-1)!k!}.$$

Resumimos las cuatro posibilidades mencionadas a continuación, utilizando un ejemplo de cuatro elementos distinguibles, llamados A, B, C y D, tomados dos a la vez bajo las diversas posibilidades.

- Permutación con reemplazo

```
AA AB AC AD
BA BB BC BD
CA CB CC CD
DA DB DC DD
```

- Permutación sin reemplazo

```
   AB    AC AD
BA    BC BD
CA CB    CD
DA DB DC
```

- Combinación con reemplazo

```
AA AB AC AD
   BB BC BD
      CC CD
         DD
```

- Combinación sin reemplazo

```
AB AC AD
   BC BD
      CD
```

2 Referencias

1. Probability, Stochastic Processes, and Queueing Theory:The Mathematics of Computer Performance Modeling Nelson, Randolph chapter 3.
2. Lecture 3: Learning to count; Binomial Distribution, Introduction to Probability and Statistics Karl Border 2016.
3. Introduction to Probability Dimitri P. Bertsekas and John N. Tsitsiklis Athena Scientific , Belmont , Massachusetts 2008 chapter 1 **Counting**.