1 Sumas, combinatorias

Hay varios de tipos de suma que se encuentran en probabilidad y estadística

Definición 1.1 Una función que tiene derivadas, de todos los órdenes en $x = b$, puede ser expandido en la siguiente serie de Taylor:

$$f(x) = f(b) + \frac{f'(b)}{1!}(x-b) + \frac{f''(b)}{2!}(x-b)^2 + \frac{f''(b)}{3!}(x-b)^3 + \cdots .$$

Si $b = 0$, obtenemos un caso especial, llamado a menudo, una serie de Maclaurin

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(b)}{2!}x^2 + \frac{f''(b)}{3!}x^3 + \cdots .$$

Por ejemplo si $f(x) = e^x$, todas las derivadas de $f(x) = e^x$ son $f^{(r)}(x) = e^x$, entonces $f^{(r)}(0) = 1$, para $r = 1, 2, 3, \ldots$. Así la expansión de Maclaurin de $f(x) = e^x$ es

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

El siguente test para series

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^n/n!}{x^{n-1}/(n-1)!}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x}{n}\right| = 0$$

prueba que, la expansión de Maclaurin de e^x converge para todos los valores de x. Por ejemplo se tiene

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$$

y

$$e^{-1} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!} + \cdots$$

Ejemplo 1.1 Consideremos

$$\begin{aligned}
f(x) &= \ln(1+x) \\
f'(x) &= (1+x)^{-1}, \\
f''(x) &= (-1)(1+x)^{-2}, \\
f'''(x) &= (-1)(-2)(1+x)^{-3}, \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Así $f^{(r)}(0) = (-1)^{r-1}(r-1)!$ y

$$\begin{aligned}\ln(1+x) &= \frac{0!}{1!}x - \frac{1!}{2!}x^2 + \frac{2!}{3!}x^3 - \frac{3!}{4!}x^4 + \cdots \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots\end{aligned}$$

el cual converge para $-1 < x < 1$.

Definición 1.2 Consideremos la siguiente expresión

$$h(w) = (1-w)^{-r},$$

donde r es un entero positivo

$$\begin{aligned}h'(w) &= r(1-w)^{-(r+1)}, \\ h''(w) &= (r)(r+1)(1-w)^{-(r+2)}, \\ h'''(w) &= (r)(r+1)(r+2)(1-w)^{-(r+3)}, \\ &\vdots\end{aligned}$$

En general $h^{(k)}(0) = (r)(r-1)\cdots(r+k-1) = (r+k-1)!/(r-1)!$. Así

$$\begin{aligned}(1-w)^{-r} &= 1 + \frac{(r+1-1)!}{(r-1)!1!}w + \frac{(r+2-1)!}{(r-1)!2!}w^2 + \cdots + \frac{(r+k-1)!}{(r-1)!k!}w^k + \cdots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\binom{r+k-1}{r-1}w^k.\end{aligned}$$

Esta expresión es conocida como serie binomial negativa. Usando, el test anterior, obtenemos

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{w^n(r+n-1)!/[(r-1)!n!]}{w^{n-1}(r+n-2)!/[(r-1)!(n-1)!]}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{w(r+n-1)}{n}\right| = |w|.$$

Así la serie converge cuando $|w| < 1$.

Definición 1.3 Un caso especial de la serie binomial negativa, ocurre cuando $r = 1$. En este caso, obtenemos la bien conocida serie geométrica

$$(1-w)^{-1} = 1 + w + w^2 + w^3 + \cdots$$

siempre que $-1 < w < 1$. Las serie diverge si $|w| \geq 1$.

Una serie de la misma forma, excepto que consta de finitos términos, es llamada una serie geométrica finita. Para $w \neq 1$, la suma es

$$s_n = \sum_{k=0}^{n-1} aw^k = \frac{a(1-w^n)}{1-w}.$$

Definición 1.4 La serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^c$ converge para $c > 1$ y diverge para $c \leq 1$. Para $c = 1$, esta es llamada serie armónica. La suma de los primeros n términos de la serie armónica puede ser aproximada usando

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \approx \log(n) + \gamma$$

para $n \to \infty$, donde $\gamma \approx 0.57721\ldots$.

Las definiciones en combinatorias muchas veces están restringidas a valores enteros. Sin embargo estas expresiones, se pueden expresar de forma más general y, en ocasiones, tendremos que recurrir a valores no enteros para el índice superior de los coeficientes binomiales. Un caso frecuente es el de $\binom{1/2}{k}$, que se define

$$\begin{aligned}\binom{1/2}{k} &= \frac{(1/2)\cdot(1/2-1)\cdots(1/2-(k-1))\cdot(1/2-k)!}{k!(1/2-k)!} \\ &= (1/2)^k(-1)^{k-1}\frac{1\cdot 3\cdots 2k-3}{k!}, \quad k = 1, 2, \ldots\end{aligned}$$

donde $\binom{1/2}{0} = 1$. La ecuación anterior puede ser simplificada como

$$\begin{aligned}\binom{1/2}{k} &= (1/2)^k(-1)^{k-1}\frac{1\cdot 3\cdots 2k-3}{k!}\frac{2\cdots 2(k-1)}{2\cdots 2(k-1)} \\ &= \frac{1}{k}\frac{(-1)^{k-1}}{2^{2k-1}}\binom{2(k-1)}{k-1}, \quad k \geq 1. \end{aligned} \tag{1}$$

De manera similar, tenemos

$$\binom{-1/2}{k} = (-1)^k\binom{2k}{k}2^{-2k}, \quad k = 0, 1, \ldots \tag{2}$$

Definición 1.5 La fórmula binomial para un entero no negativo n es

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^i y^{n-i}$$

Nota que es resultado no está restringido para enteros. Para generalizar este resultado, hacemos uso de la fórmula de Newton, para algún valor a

$$\begin{aligned}(1+t)^a &= 1 + \binom{a}{1}t + \binom{a}{2}t^2 + \cdots, \ -1 < t < 1 \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{k!}t^k.\end{aligned}$$

Las expansiones de potencia para raíces cuadradas se expresan convenientemente de esta manera, como se muestra a continuación

$$\sqrt{1+t} = \sum_{i=0}^{\infty}\binom{1/2}{i}t^i = 1 + \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i}\binom{2(i-1)}{i-1}\frac{(-1)^{i-1}t^i}{2^{2i-1}}$$

donde usamos (1) y

$$\sqrt{1+t} = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{-1/2}{i} t^i = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \binom{2i}{i} \frac{t^i}{2^{2i}},$$

donde hemos usado (2).

Mucho de matemáticas y estadísticas tienen que ver con el reconocimiento de patrones por ejemplo ver la estructura esencial de un problema, el reconocimiento de cuando un problema es esencialmente el mismo que Otro problema (sólo en una forma distinta), notar la simetría, etc.

En efecto supongamos que tenemos la serie $\sum_{k=0}^{\infty} e^{tk} e^{-\lambda} \lambda^k / k!$ con λ una constante positiva. El valor $e^{-\lambda}$ se puede sacar de la suma y la estructura de la serie coincide exactamente con la estructura de la serie de Taylor para e^x. Por tanto

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{tk} e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^t)^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda e^t} = e^{\lambda(e^t - 1)},$$

válido para todo real t.

Similarmente, supongamos que queremos calcular la serie de Taylor para $1/(1-x^3)$ alrededor de $x = 0$. Sería tedioso comenzar a tomar las derivadas de esta función, en su lugar, tenga en cuenta que esta función es una reminiscencia del resultado de sumar una serie geométrica

$$\frac{1}{1-x^3} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{3n},$$

válido para $|x^3| < 1$ (que es equivalente a $|x| < 1$).

Lo que importa es la estructura, no los nombres que usamos para variables!.

2 Algunos resultados

Proposición 2.1 Supongamos que $0 \leq a_n \leq b_n$ para todo n. Entonces si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, también converge $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Proposición 2.2 Si $a_n, b_n > 0$ y $\lim_{n\to\infty} a_n/b_n = c \neq 0$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si y sólo si converge $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Proposición 2.3 (Prueba del cociente) Sea $a_n > 0$ para todo n y supóngase que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = r$$

Entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si $r < 1$. Por otra parte, si $r > 1$, entonces los términos a_n no tienden a 0, de modo que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

Un incoveniente de la prueba del cociente es el hecho de que $\lim_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n$ puede ser dificil determinar e incluso puede no existir. Una deficiencia más seria, que aparece con regularidad, es el hecho de que el límite puede ser igual a uno. Es este caso donde no se puede sacar ninguna conclusión, por ejemplo si $a_n = 1/n$ o en el caso de $\sum_{n=1}^{\infty}(1/n)^2$ que converge, aun cuando

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{1}{n+1}\right)^2}{\left(\frac{1}{n}\right)^2} = 1.$$

Proposición 2.4 (Prueba de la integral) Supóngase que f es positiva y decreciente sobre $[1,\infty)$ y que $f(n) = a_n$ para todo n. Entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si y sólo si el límite

$$\int_1^{\infty} f = \lim_{A\to\infty}\int_1^{A} f$$

existe.

Ejemplo 2.1 Sea $p > 0$, la convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^p$ es equivalente, según la prueba de la integral, a la existencia de

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}dx$$

Ahora bien,

$$\int_1^{A} \frac{1}{x^p}dx = \begin{cases} -\frac{1}{(p-1)}\cdot\frac{1}{A^{p-1}} + \frac{1}{p-1}, & p \neq 1 \\ \log A, & P = 1 \end{cases}$$

Esto indica que $\lim_{A\to\infty}\int_1^{A} 1/x^p dx$ existe si $p > 1$, pero no si $p \leq 1$.

Así $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^p$ converge precisamente para $p > 1$. En particular $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ diverge.

Definición 2.1 La serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es <u>absolutamente convergente</u> si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ es convergente.

Proposición 2.5 Toda serie absolutamente convergente es convergente. Además, una serie es absolutamente convergente si y sólo si la serie formada con sus términos positivos y la serie formada con sus términos negativos son ambas convergentes.

3 Referencias

1. Calculus, Michael Spivak, Editorial Reverte 1992.
2. Randolph Nelson, Probability, Stochastic Processes and Queueing Theory, Springer 1995.
3. Probability, An introduction with statistical applications, John J. Kinney 2015.