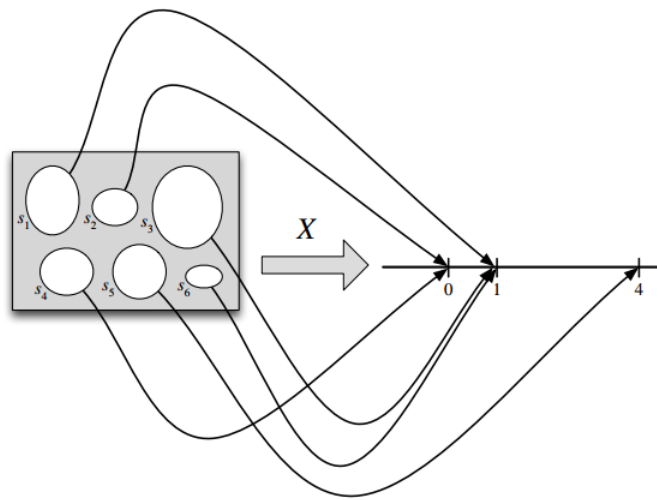


## 1 Variables aleatorias discretas

En muchos modelos probabilísticos, las salidas o resultados son numéricos, por ejemplos, las lecturas de instrumentos o el precio de las acciones. En otros experimentos, las salidas no son numéricas, pero pueden estar asociadas a un valor numérico. Por ejemplo, si el experimento es la selección de estudiantes desde una población, podemos considerar su promedio de calificaciones. Cuando tratamos con esos valores numéricos, es a menudo útil asignarles una probabilidad. Esto se puede hacer con la noción de **variable aleatoria**.

Dado un experimento y el correspondiente conjunto de posibles respuestas o salidas (el espacio muestral), una variable aleatoria asocia un número particular con cada respuestas o salidas, como se indica en la figura siguiente, donde la variable aleatoria  $X$  representada, es definida sobre un espacio muestral con 6 elementos y los valores posibles 1, 2 y 4. La aleatoriedad viene de la elección de un punto aleatorio de acuerdo con la función de probabilidad  $\mathbb{P}$  para el espacio muestral.



**Definición 1.1** Una variable aleatoria es una función  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  que asigna un número real  $X(\omega)$  a cada salida o respuesta  $\omega$ .

Asumiendo  $E \subset \mathbb{R}$ , denotamos el evento  $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in E\} \subset \Omega$  por  $\{X \in E\}$  o sólo  $X \in E$ .

- Las variables aleatorias son denotadas por letras mayúsculas  $X, Y, Z$ .
- Algunas veces usamos la notación  $\{X \in E\}$  o  $X \in E$  de forma indistinta. Por ejemplo, la notación  $X = x$  corresponde a  $\{X \in \{x\}\}$  y la notación  $a < X < b$  corresponde a  $\{X \in (a, b)\}$ .
- Mientras que  $X$  denota una función, la notación  $X \in A$  y  $X = x$  corresponde a subconjuntos de  $\Omega$ .

Las variables aleatorias que toman valores de un conjunto discreto de números (es decir, cuyo rango consiste de puntos aislados en la recta real) se denominan variables aleatorias discretas. El conjunto puede ser infinito pero contable. Los ejemplos a continuación son discretos y finitos. Las variables aleatorias discretas se utilizan para representar distintos elementos indivisibles, como personas, automóviles, árboles, etc.

Todas las variables aleatorias definidas en un espacio muestral discreto deben ser discretas.

**Ejemplo 1.1** Sea el experimento de probabilidad que consiste en lanzar dos dados. Hay 36 resultados posibles que pueden ser representados por los pares  $(i, j); i = 1, 2, \dots, 6, j = 1, 2, \dots, 6$ . Estos son los 36 elementos del espacio muestral. Es posible asociar muchas variables aleatorias a este espacio muestral (dominio). Una posibilidad es la variable aleatoria  $X$ , definida por la siguiente enumeración como

$$\begin{aligned} X(1, 1) &= 2; \\ X(1, 2) &= X(2, 1) = 3; \\ X(1, 3) &= X(2, 2) = X(3, 1) = 4; \\ X(1, 4) &= X(2, 3) = X(3, 2) = X(4, 1) = 5; \\ X(1, 5) &= X(2, 4) = X(3, 3) = X(4, 2) = X(5, 1) = 6; \\ X(1, 6) &= X(2, 5) = X(3, 4) = X(4, 3) = X(5, 2) = X(6, 1) = 7; \\ X(2, 6) &= X(3, 5) = X(4, 4) = X(5, 3) = X(6, 2) = 8; \\ X(3, 6) &= X(4, 5) = X(5, 4) = X(6, 3) = 9; \\ X(4, 6) &= X(5, 5) = X(6, 4) = 10; \\ X(5, 6) &= X(6, 5) = 11; \\ X(6, 6) &= 12. \end{aligned}$$

Así,  $X$  asigna el resultado  $(1,1)$  al número real 2, los resultados  $(1,2)$  y  $(2,1)$  al número real 3 y así sucesivamente. En este caso la variable aleatoria  $X$  representa la suma de los puntos obtenidos cuando se lanzan dos dados simultáneamente. El dominio de esta función son los 36 elementos del espacio muestral y su rango es el conjunto de enteros desde el 2 a 12.

Observa que la variable aleatoria  $X$  divide el espacio muestral en 11 subconjuntos; es decir, en 11 eventos que son mutuamente excluyentes y colectivamente exhaustivos: en otras palabras, estos 11 eventos forman un espacio de eventos. Los subconjuntos se distinguen de acuerdo con el valor particular tomado por la función. Así  $\{(1,3), (2,2), (3,1)\}$  es el subconjunto que consiste de elementos del espacio muestral que se asignan al número real 4;  $\{(5,6), (6,5)\}$  es el subconjunto que consiste de los elementos que se asignan al número real 11 y así sucesivamente.

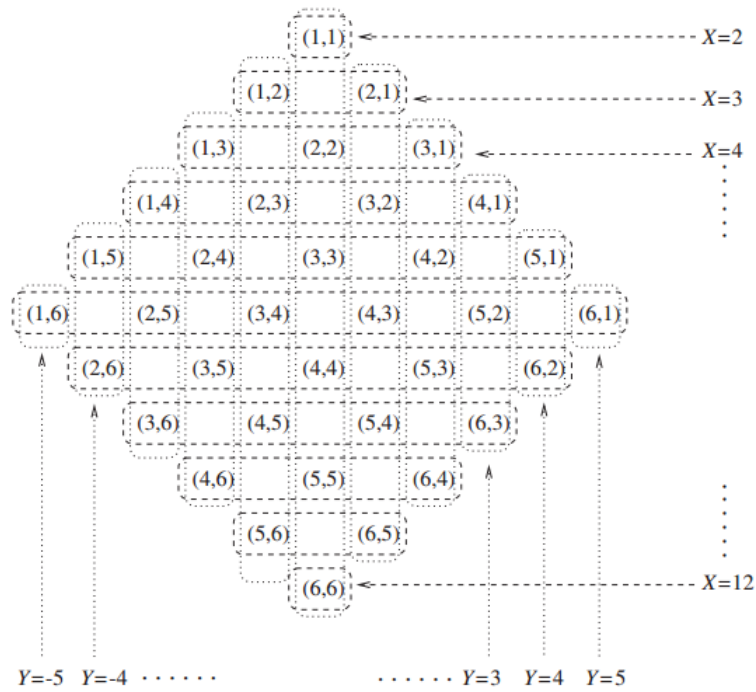
Cada resultado en el espacio muestral se asocia con un número real, varios se pueden asociar con el mismo número real: por ejemplo,  $(1,3), (2,2)$  y  $(3,1)$  están todos asociados con el número entero 4, pero ninguno está asociado con más de un número real y esto es porque  $X$  se ha definido como una función.

Se pueden definir diferentes variables aleatorias en el mismo espacio muestral. Con el mismo dominio, pero con un rango que puede ser diferente.

**Ejemplo 1.2** Consideremos una variable aleatoria diferente  $Y$  cuyo dominio es el mismo espacio muestral que el de  $X$ , pero que se define como la diferencia en el número de puntos en los dos dados. En este caso tenemos:

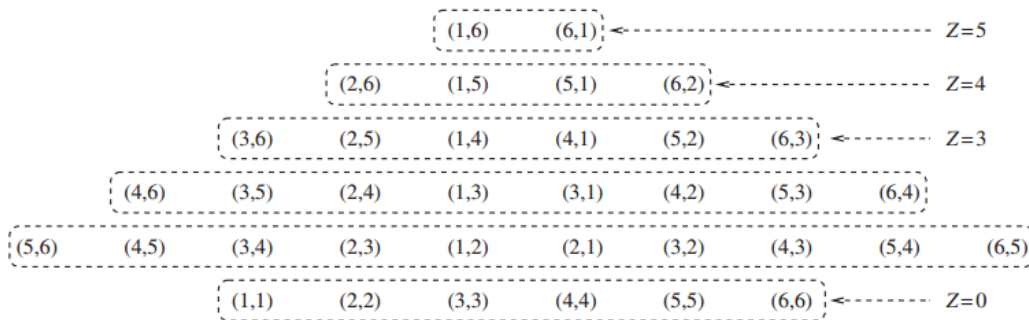
$$\begin{aligned} Y(1, 1) &= Y(2, 2) = Y(3, 3) = Y(4, 4) = Y(5, 5) = Y(6, 6) = 0; \\ Y(2, 1) &= Y(3, 2) = Y(4, 3) = Y(5, 4) = Y(6, 5) = 1; \\ Y(1, 2) &= Y(2, 3) = Y(3, 4) = Y(4, 5) = Y(5, 6) = -1; \\ Y(3, 1) &= Y(4, 2) = Y(5, 3) = Y(6, 4) = 2; \\ Y(1, 3) &= Y(2, 4) = Y(3, 5) = Y(4, 6) = -2; \\ Y(4, 1) &= Y(5, 2) = Y(6, 3) = 3; \\ Y(1, 4) &= Y(2, 5) = Y(3, 6) = -3; \\ Y(5, 1) &= Y(6, 2) = 4; \\ Y(1, 5) &= Y(2, 6) = -4; \\ Y(6, 1) &= 5; \\ Y(1, 6) &= -5. \end{aligned}$$

En este caso observa que la variable aleatoria  $Y$  tiene el mismo dominio que  $X$ , pero el rango de  $Y$  es el conjunto de enteros entre  $-5$  y  $+5$ , como se ilustra en la siguiente figura que muestra las particiones según  $X$  (horizontal y discontinuo) e  $Y$  (vertical y punteada).  $Y$  también divide el espacio muestral en 11 subconjuntos, pero no los mismos 11 que los obtenidos con  $X$ .



Sin embargo, una tercera variable aleatoria  $Z$ , puede definirse como el valor absoluto de la diferencia entre los puntos obtenidos en los dos dados. De nuevo,  $Z$  tiene el mismo dominio que  $X$  e  $Y$ , pero ahora su rango es el conjunto de enteros entre 0 y 5.

Esta variable aleatoria divide el espacio muestral en seis subconjuntos: el primer subconjunto que contiene elementos del espacio muestral en el que el número de puntos difiere en 5, independientemente de cuál sea el primero y cuál es el segundo; el segundo subconjunto de la partición contiene elementos en los que el número de puntos difiere en 4 y así sucesivamente. Esta partición se muestra en la siguiente figura:



Esta es una propiedad importante de las variables aleatorias, que dividen el espacio muestral en representaciones más significativas del experimento de probabilidad. Si nuestro interés es sólo con la suma obtenida al tirar dos dados, tiene más sentido trabajar con los 11 eventos obtenidos por la partición generada por la variable aleatoria  $X$ , que los 36 eventos elementales del espacio muestral. De esta manera, se utilizan las variables aleatorias como medio de simplificación.

**Ejemplo 1.3** Sea  $R$  la variable aleatoria que cuenta el número de caras obtenidas al lanzar tres monedas. Entonces  $R$  asigna el valor 3 al resultado  $HHH$ ; el valor 2 para cada uno de los resultados  $HHT, HTH$  y  $THH$ ; el valor 1 a cada uno de los resultados  $HTT, THT$  y  $TTH$ .

Finalmente,  $R$  asigna el valor 0 al resultado  $TTT$ . Si nuestro interés es únicamente el número de caras obtenidas, entonces es más fácil trabajar con  $R$  que con los ocho resultados del experimento de probabilidad.

Puesto que una variable aleatoria es una función, no es posible para dos o más valores en el rango ser asignados a la misma salida en el espacio muestral. Para una variable aleatoria  $X$ , el conjunto de elementos del espacio muestral al que se asigna el valor  $x$  es denotado por  $A_x$  o  $X^{-1}(x)$ .

Observa que este resultado describe un evento, ya que consiste de un subconjunto del espacio muestral, pues

$$A_x \equiv [X = x] \equiv \{\omega \in \Omega | X(\omega) = x\}$$

el cuál es el conjunto de todas las salidas (resultados) en el espacio muestral (dominio) para el que la variable aleatoria  $X$  tiene el valor  $x$  (un elemento del rango).

En el ejemplo de los dos dados lanzados simultáneamente y la variable aleatoria  $X$  que describe la suma de puntos obtenidos, encontramos, por ejemplo, que  $A_3$  es el conjunto  $\{(1,2), (2,1)\}$  y  $A_5$  es el conjunto  $\{(1,4), (2,3), (3,2), (4,1)\}$ .

El conjunto de todos estos eventos se denomina un espacio de eventos y con frecuencia es más conveniente trabajar en este espacio que en el espacio muestral original. El espacio de eventos de nuestra variable aleatoria  $X$  define 11 eventos, cada uno correspondiente a un valor de  $x = 2, 3, \dots, 12$ . Para todos los demás valores de  $x$ ,  $A_x$  es el conjunto nulo.

Dada una variable aleatoria, nos gustaría poder describir su comportamiento utilizando el lenguaje de las probabilidades. Por ejemplo, quizás quisiéramos responder las preguntas acerca de la probabilidad de que la variable aleatoria caiga dentro de un rango dado: si  $L$  es el ingreso vitalicio de un graduado universitario de los Estados Unidos elegido al azar, ¿cuál es la probabilidad de que supere el millón de dólares?. Si  $M$  es el número de terremotos mayores a 4 grados en la escala de Richter en Arequipa en los próximos cinco años, ¿cuál es la probabilidad de que  $M$  sea igual a 0?.

La **distribución** de una variable aleatoria proporciona respuestas a estas preguntas; especifica las probabilidades de todos los eventos asociados con la variable aleatoria, tal como la probabilidad de que sea igual a 3 y la probabilidad de que sea al menos 110.

Hay varias maneras equivalentes de expresar la distribución de una variable aleatoria. Para una variable aleatoria discreta la manera más natural de hacer esto es con la función de masa de probabilidad, que ahora definimos:

## 1.1 Función de masa de probabilidad para una variable aleatoria discreta

La función de masa de probabilidad (frecuentemente conocida como **PMF**) para una variable aleatoria discreta  $X$ , da la probabilidad de que el valor obtenido por  $X$  en el resultado de un experimento de probabilidad sea igual a  $x$ . Se denota por  $p_X(x)$ . A veces se utiliza el término función de densidad discreta en lugar de función de masa de probabilidad. Tenemos entonces:

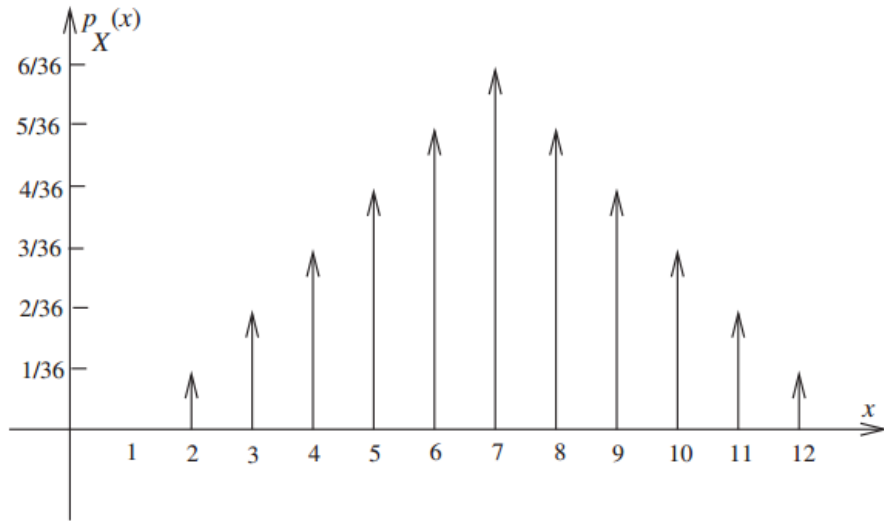
$$p_X(x) \equiv \mathbb{P}([X = x]) = \mathbb{P}(\omega \in \Omega | X(\omega) = x) = \sum_{X(\omega)=x} \mathbb{P}(\omega)$$

La notación  $[X = x]$  define un evento: el evento que contiene todos los resultados que corresponden con el número real  $x$ . Si ninguno de los resultados corresponden a  $x$ , entonces  $[X = x]$  es el evento nulo y tiene probabilidad cero. La mayoría de las veces simplemente escribimos  $\mathbb{P}([X = x])$  como  $\mathbb{P}(X = x)$ . Dado que  $p_X(x)$  es una probabilidad, se tiene lo siguiente:

$$0 \leq p_X(x) \leq 1, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

**Ejemplo 1.4** En el caso de dos dados lanzados simultáneamente, y  $X$  la variable aleatoria que representa la suma de puntos obtenidos, tenemos  $p_X(2) = 1/36$ , ya que solo uno de los 36 resultados equiprobables en el espacio muestral da la suma 2 (cuando cada dado lanzado produce un solo punto). Del mismo modo,  $p_X(3) = 2/36$  ya que hay dos resultados que dan un número total de puntos iguales a 3, a saber, (1, 2) y (2, 1). Podemos continuar de esta manera. Mientras  $x$  sea igual a uno de los enteros en el intervalo  $[2, 12]$ , entonces  $p_X(x)$  es estrictamente positivo. Para todos los demás valores de  $x$ ,  $p_X(x) = 0$ .

Las variables aleatorias discretas se caracterizan completamente por sus funciones de masa de probabilidad. Estas funciones y por lo tanto sus variables aleatorias discretas asociadas, se ilustran frecuentemente en forma tabular o en forma de gráficos de barras. En un gráfico de barras, la función de masa de probabilidad de la variable aleatoria  $X$  (suma de puntos obtenidos al tirar dos dados) se muestra en la siguiente figura:



La forma tabular correspondiente de este gráfico de barras se muestra a continuación:

$x_i$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$p_X(x_i)$	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

Se debe notar que

$$\sum_{x \in \mathbb{R}} p_X(x) = 1 \quad (1)$$

ya que la variable aleatoria  $X$  asigna algún valor  $x \in \mathbb{R}$  a cada punto de muestra  $\omega \in \Omega$  manera que cuando sumamos sobre cada valor posible de  $x$ , sumamos sobre las probabilidades de todos los resultados en el espacio muestral y esto debe ser igual a 1.

Cuando (como es el caso aquí) la variable aleatoria es discreta, entonces el conjunto de valores asumidos por  $x$  es enumerable, y constituye un subconjunto de los reales. Denotaremos sucesivos elementos de este conjunto por  $\{x_1, x_2, \dots\}$ . El conjunto en si se llama imagen de  $X$  y es usual denotar a  $\mathbb{P}(X = x_i)$  por  $p_i$ . De todo esto se tiene que

$$\sum_k p_X(x_k) = \sum_k p_k = 1. \quad (2)$$

Se puede demostrar que cualquier función de valor real definida en  $\mathbb{R}$  que satisface las ecuaciones (1) y (2) es la función de masa de probabilidad para alguna variable aleatoria  $X$ .

**Ejemplo 1.5** Sea el experimento de lanzar una moneda tres veces. El espacio muestral está dado por:

$$\{ \text{CCC}, \text{CCS}, \text{CSC}, \text{CSS}, \text{SCC}, \text{SCS}, \text{SSC}, \text{SSS} \}$$

y cada uno de los elementos tiene una probabilidad de  $1/8 = 0.125$ . Sea  $Q$  la variable aleatoria definida como el número de caras obtenida durante esta secuencia de lanzamientos, esta variable aleatoria sólo tiene los valores 1, 2 y 3. Uno de los ocho eventos elementales da cero caras, así que la probabilidad que  $Q = 0$  es  $1/8$ , es decir,  $p_Q(0) = \mathbb{P}(Q = 0) = 0.125$ . Tres de los eventos elementales produce, una cara  $\{\text{CSS}, \text{SCS}, \text{SSC}\}$  y así  $\mathbb{P}(Q = 1) = 0.375$  y así sucesivamente, como lo muestra la siguiente figura:

$x_i$	0	1	2	3
$p_R(x_i)$	0.125	0.375	0.375	0.125

## 1.2 Función de distribución acumulativa

Para cualquier variable aleatoria discreta  $X$ , hay un número numerable de reales que se asignan a  $X$ . Estos reales son denotados por el conjunto  $\{x_1, x_2, \dots\}$  y es natural disponer estos reales en orden creciente en magnitud. Por ejemplo, se dispusieron de 2 a 12 para la variable aleatoria  $X$  y de 0 a 3 para la variable aleatoria  $Q$  respectivamente como se muestran en las tablas.

Dada esta situación, podemos ahora desear encontrar la probabilidad de que una variable aleatoria  $X$  asuma un valor que sea menor o igual que un  $x_i$  dado, es decir, la probabilidad  $\mathbb{P}(X \leq x_i)$ . Observa que esto corresponde a la probabilidad de un evento, el evento que consiste de todos los elementos  $\omega$  del espacio muestral, para los cuales  $X(\omega) = x_k$  con  $x_k \leq x_i$ .

**Ejemplo 1.6** Consideremos una vez más la variable aleatoria  $X$ , definida como la suma de puntos obtenidos al tirar simultáneamente dos dados. Hemos examinado previamente la función de masa de probabilidad para  $X$ . Tal vez ahora nos interesa saber la probabilidad de que la variable aleatoria  $X$  tenga un valor menor que 6. Denotemos a este evento como  $A$  y observamos que su probabilidad es sólo la suma de las probabilidades:

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(X = 2) + \mathbb{P}(X = 3) + \mathbb{P}(X = 4) + \mathbb{P}(X = 5),$$

que se puede denotar como  $\mathbb{P}(X < 6)$ , con lo cual se tiene:

$$\mathbb{P}(X < 6) = \frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{3}{36} + \frac{4}{36} = \frac{10}{36}.$$

El evento  $A$  es definido como el subconjunto consistiendo de 10 salidas

$$A = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (1, 3), (2, 2), (3, 1), (1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)\}.$$

Supongamos que queremos saber la probabilidad de que la variable aleatoria  $X$  tenga un valor que esté entre 5 y 7 inclusive. En este caso, podemos escribir

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(X = 5) + \mathbb{P}(X = 6) + \mathbb{P}(X = 7),$$

que de manera abreviada se escribe como  $\mathbb{P}(5 \leq X \leq 7)$  y se calcula como sigue:

$$\mathbb{P}(5 \leq X \leq 7) = \frac{4}{36} + \frac{5}{36} + \frac{6}{36} = \frac{15}{36}.$$

Consideremos ahora un subconjunto  $E$  que contiene una colección arbitraria de valores que la variable aleatoria  $X$  puede asumir. Entonces, el conjunto  $\{\omega | X(\omega) \in E\}$  contiene todos los resultados que la variable aleatoria  $X$  tiene un valor en  $E$ . Por definición, este constituye un evento que está denotado por  $[X \in E]$  y por tanto tenemos:

$$[X \in E] = \{\omega | X(\omega) \in E\} = \bigcup_{x_k \in E} \{\omega | X(\omega) = x_k\}$$

Si  $p_X(x)$  es la función masa de probabilidad para variables aleatorias discretas  $X$ , entonces

$$\mathbb{P}(X \in E) = \sum_{x_k \in E} p_k(x_k).$$

**Ejemplo 1.7** Volvamos al ejemplo de dos dados y la variable aleatoria  $X$  que describe la suma de puntos obtenidos y sea  $E$  el conjunto que contiene solamente los dos valores  $x_1 = 2$  y  $x_{10} = 11$ , es decir,  $E = \{2, 11\}$ . Entonces  $\{\omega | X(\omega) = x_1\} = (1, 1)$  y  $\{\omega | X(\omega) = x_{10}\} = \{(5, 6), (6, 5)\}$ . Por lo tanto  $[X \in E] = \{(1, 1), (5, 6), (6, 5)\}$  y

$$\mathbb{P}(X \in S) = p_X(2) + p_X(11) = 1/36 + 2/36 = 1/12.$$

Cuando el conjunto  $S$  contiene todos los valores posibles dentro de un rango de valores que  $X$  que podamos asumir, como  $(a, b]$ , entonces es más usual escribir  $\mathbb{P}(X \in E)$  como  $\mathbb{P}(a < X \leq b)$ .

En el caso particular en que  $E$  contiene todos los valores que son menores o iguales a algún valor especificado  $x$ , entonces  $\mathbb{P}(X \in E)$  se denomina función de distribución acumulativa (CDF) de la variable aleatoria  $X$ . Esta función se denota como  $F_X(x)$  y también se conoce como la función de distribución de probabilidad (PDF).

Esto se define para valores reales de  $x$  en el rango  $(-\infty < x < \infty)$ , así tenemos:

$$F_X(x) \equiv \mathbb{P}(-\infty < X \leq x) = \mathbb{P}(X \leq x).$$

Observa que si  $X$  es una variable aleatoria discreta, entonces  $x$  no tiene que ser uno de los valores que  $X$  puede asumir, esto es,  $x$  no tiene por que ser uno de los  $x_i$ . Por ejemplo, cuando los  $x_i$  son enteros,

$$F_X(x) = \sum_{-\infty < x_i \leq [x]} p_X(x_i)$$

donde  $[x]$  es la función que denota el mayor entero menor o igual a  $x$ .

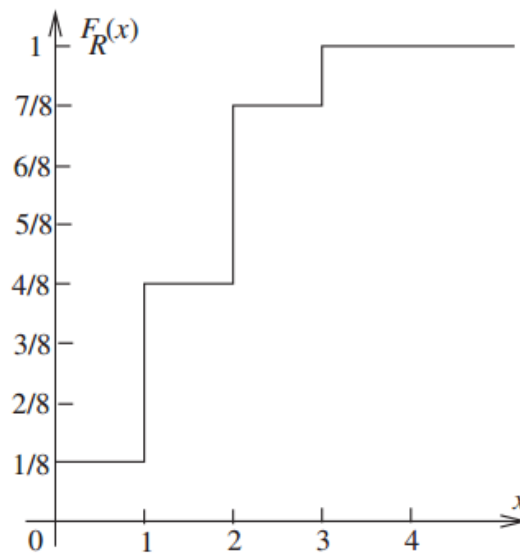
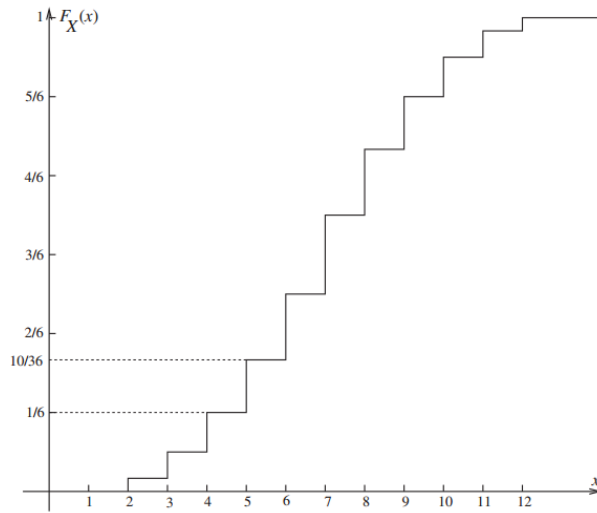
Para ilustrar esto, consideremos la siguiente figura, que muestra la función de distribución acumulativa de la variable aleatoria  $X$ , definida como la suma de puntos encontrados en dos dados lanzados simultáneamente. De esta figura se puede observar que para cualquier valor de  $x$  en el intervalo  $[4, 5)$ , se tiene  $F_X(x) = 1/6$ .

Esta es la probabilidad de que el número de puntos obtenidos sea 4 o menos. Si  $x$  está en el intervalo  $[5, 6)$  entonces  $F_X(x) = 10/36$ , la probabilidad de que el número de puntos sea 5 o menos.

Para la variable aleatoria  $R$ , que denota el número de caras obtenidas en tres lanzamientos de una moneda, la función de distribución acumulativa se muestra en la siguiente figura:

Si  $x$  está en el intervalo  $[1, 2)$ , entonces  $F_R(x) = 1/2$ , que es la probabilidad de lanzar uno o cero caras, es decir, el evento  $A = \{SSS, CSS, SCS, SSC\}$ .

En ambas de estas figuras, se han incluido los escalones simplemente para mostrar la característica escalonada de la función de distribución acumulativa de una variable aleatoria discreta; el valor asumido por la función de distribución acumulativa en  $x_i$  es el valor de la parte superior de la columna ascendente.



Se observa que en ambas figuras, el valor de la función de distribución acumulativa es cero para valores suficientemente pequeños de  $x$ . La función no decrece con valores crecientes de  $x$  y es igual a 1 para valores suficientemente grandes de  $x$ . Esto se debe al hecho de que la probabilidad de que la variable aleatoria asuma un valor menor que el menor  $x_k$  debe ser cero, mientras que la probabilidad de que tenga un valor menor o igual al mayor  $x_k$  debe ser 1. Estas propiedades son inherentes en todas las funciones de distribución acumulativa.

La estructura discontinua de las dos funciones mostradas es una característica distintiva de variables aleatorias discretas. Estos ejemplos ilustran el hecho de que la función de distribución de una variable aleatoria discreta no es continua. Estas funciones tienen al menos un punto en el que la aproximación de la función desde la izquierda y la derecha no se cumplen: la aproximación desde la derecha es estrictamente mayor que la aproximación desde la izquierda. En los ejemplos, estos son los puntos  $x_i$  que pueden ser asumidos por la variable aleatoria.

Para las variables aleatorias continuas, se mantiene la propiedad no decreciente monótona de la función de distribución acumulativa, pero el incremento es continuo. La función de distribución acumulativa de una variable aleatoria continua es una función continua de  $x$  para todo  $-\infty < x < \infty$ .

Mientras que la función de masa de probabilidad se define sólo para variables aleatorias discretas, la función de distribución acumulativa se aplica tanto a variables aleatorias discretas como continuas. La siguiente definición abarca ambos casos:



**Definición 1.2** La función de distribución acumulativa  $F_X$  de una variable aleatoria  $X$  es definida como la función:

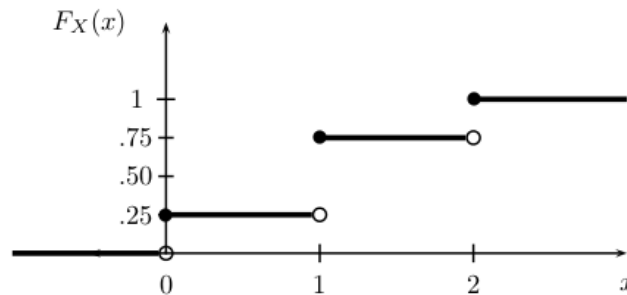
$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) \text{ para } -\infty < x < \infty$$

En pocas palabras, es sólo la probabilidad de que la variable aleatoria  $X$  no exceda un número real dado  $x$ .

**Ejemplo 1.8** Lanzamos una moneda dos veces y sea  $X$  el número de caras. Entonces  $\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(X = 2) = 1/4$  y  $\mathbb{P}(X = 1) = 1/2$ . La función distribución acumulativa es

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1/4 & 0 \leq x < 1 \\ 3/4 & 1 \leq x < 2 \\ 1 & x \geq 2. \end{cases}$$

y el CDF es mostrado en la siguiente figura. Se debe notar que la función es continua por la derecha, no decreciente y es definida para todo  $x$ , incluso si la variable aleatoria toma los valores 0, 1 y 2.



### 1.3 Propiedades de la función de distribución

La función de distribución tiene muchas propiedades matemáticas. Entre las más importantes tenemos:

1.  $0 \leq F_X(x) \leq 1$  para  $-\infty < x < \infty$ , desde que  $F_X(x)$  es una probabilidad.
2. Se cumple que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$  y  $\lim_{x \rightarrow \infty} F_X(x) = 1$ .
3. Si la variable aleatoria  $X$  tiene una imagen finita, entonces
  - $F_X(x) = 0$  para todo  $x$  suficientemente pequeño.
  - $F_X(x) = 1$  para todo  $x$  suficientemente grande.
4.  $F_X(x)$  es una función no decreciente en  $x$ . Como  $(-\infty, x_1] \subset (-\infty, x_2]$  para  $x_1 \leq x_2$ , se sigue que  $F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$  para  $x_1 \leq x_2$ .
5.  $F_X(x)$  es continua por la derecha. Esto significa que para algún  $x$  y una secuencia decreciente  $x_k$  con  $k \geq 1$  que converga a  $x$ , se cumple que  $\lim_{k \rightarrow \infty} F_X(x_k) = F_X(x)$ .

Para alguna variable aleatoria  $X$  discreta o continua, tenemos:

$$\mathbb{P}(a < X \leq b) = \mathbb{P}(X \leq b) - \mathbb{P}(X \leq a) = F_X(b) - F_X(a).$$

Sea que  $a \rightarrow b$  y observamos que ocurre. Obtenemos:

$$\mathbb{P}(X = b) = F_X(b) - F_X(b^-)$$

donde  $F_X(b^-)$  es el límite de  $F_X(x)$  desde la izquierda al punto  $b$ . Ahora hay dos posibilidades:

- $F_X(b^-) = F_X(b)$ . En este caso  $F(x)$  es continuo en el punto  $b$  y así la probabilidad  $\mathbb{P}(X = b) = 0$ . El evento tiene probabilidad cero, pero incluso un evento ocurre.
- $F_X(b^-) \neq F_X(b)$ . Aquí  $F$  tiene una discontinuidad (un salto) en el punto  $b$  y  $\mathbb{P}(X = b) > 0$ .

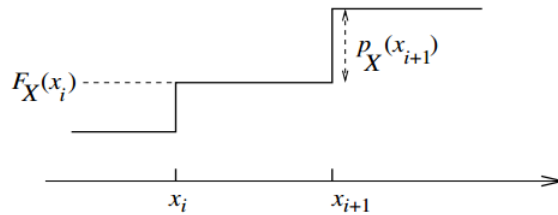
La función de distribución acumulativa de una variable aleatoria discreta crece sólo por saltos, mientras que la función de distribución acumulativa de una variable aleatoria continua no tiene saltos, pero crece continuamente. Cuando  $X$  es una variable aleatoria continua, la probabilidad de que  $X$  tenga un valor dado debe ser cero.

Todo lo que podemos hacer es asignar una probabilidad positiva de que  $X$  cae en algún intervalo finito, tal como  $[a, b]$ , en el eje real.

Para una variable aleatoria discreta,  $F_X(x)$  tiene la apariencia de escalera. En cada uno de los puntos  $x_i$ , tiene un salto positivo igual a  $p_X(x_i)$ . Entre estos puntos, es decir, en el intervalo  $[x_i, x_{i+1})$ , tiene un valor constante. En otras palabras, tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} F_X(x) &= F_X(x_i) \quad \text{para } x_i \leq x < x_{i+1} \\ F_X(x_{i+1}) &= F_X(x_i) + p_X(x_{i+1}). \end{aligned}$$

Como se muestra en la siguiente figura:



Finalmente, señalamos que cualquier función continua, monotóna no decreciente  $\Phi(x)$  que cumpla con lo siguiente:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \Phi_X(x) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \Phi_X(x) = 1$$

puede servir como función de distribución de una variable aleatoria continua  $X$ . Como anteriormente se mencionó la función de masa de probabilidad proporciona una especificación completa de una variable aleatoria discreta.

Lo mismo puede decirse de una función de distribución acumulativa, que especifica completamente una variable aleatoria. Las dos distribuciones están estrechamente relacionadas. Dada una la otra se puede determinar fácilmente.

**Ejemplo 1.9** Sea  $X$  una variable aleatoria discreta con una función distribución de probabilidad dado por:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty, -2), \\ 1/10 & x \in [-2, -1), \\ 3/10, & x \in [-1, 1), \\ 6/10, & x \in [1, 2), \\ 1, & x \in [2, \infty). \end{cases}$$

Calculemos la función de masa de probabilidad de esta variable aleatoria. Para ello primero debes observar que esta variable aleatoria tiene discontinuidades en los puntos  $x = -2, -1, 1$  y  $2$ . Estos son los valores que  $X$  puede asumir y son los únicos puntos en los que  $p_X(x)$  puede tener un valor distinto de cero. Restando el valor de la función anterior a uno de estos puntos del valor de la función en el punto mismo, obtenemos la siguiente función de masa de probabilidad de  $X$ :

$$p_X(x) = \begin{cases} 1/10 & x = -2, \\ 2/10 & x = -1, \\ 3/10 & x = 1 \\ 4/10 & x = 2 \\ 0 & \text{en otros casos.} \end{cases}$$