

## 1 Distribuciones discretas

Algunas de la más importantes variables aleatorias discretas, se listan a continuación:

### 1.1 Distribución de masa puntual

$X$  tiene una distribución de masa puntual en  $a$ ,  $X \sim \delta_a$ , si  $\mathbb{P}(X = a) = 1$ , en el caso que

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ 1 & x \geq a. \end{cases}$$

La función de masa de probabilidad es  $p_X(x) = 1$  para  $x = a$  y 0 en otros casos.

### 1.2 Distribución uniforme discreta

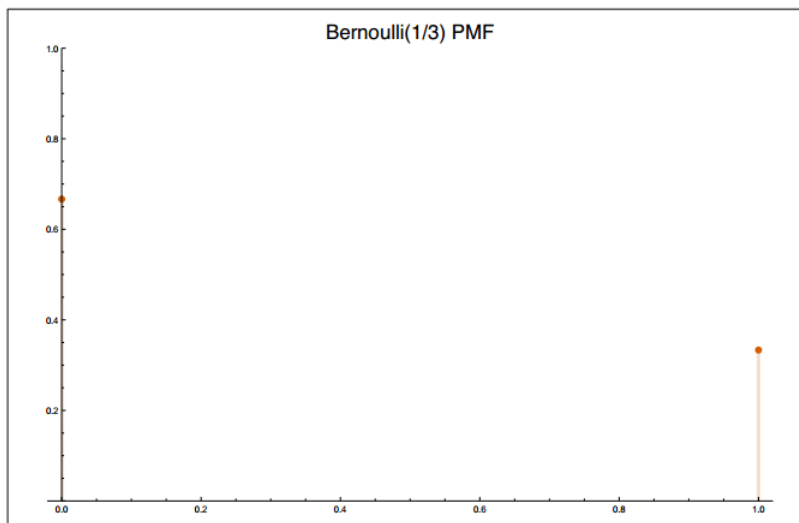
Sea  $k > 1$  un número entero. Supongamos que  $X$  tiene PMF dado por

$$p_X(x) = \begin{cases} 1/k & \text{para } 1, \dots, k \\ 0 & \text{en otros casos.} \end{cases}$$

Decimos que  $X$  tiene una distribución uniforme sobre  $\{1, \dots, k\}$ .

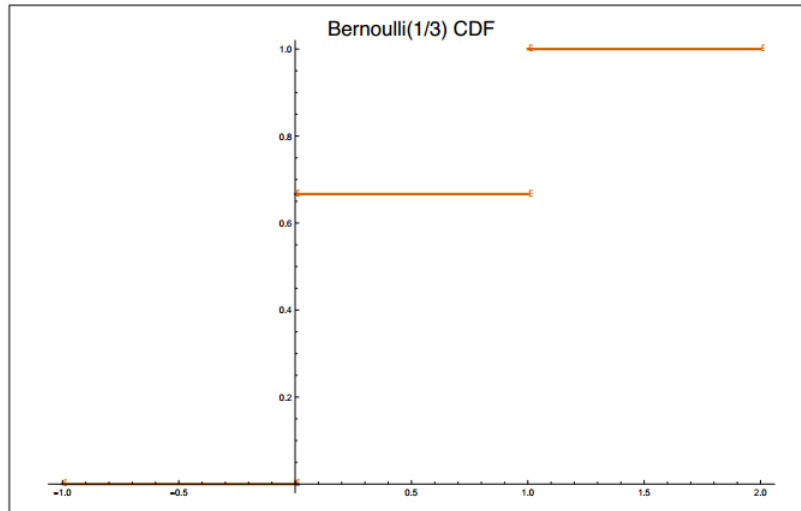
### 1.3 Distribución de Bernoulli

Sea  $X$  que representa un lanzamiento de una moneda. Entonces  $\mathbb{P}(X = 1) = p$  y  $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$  para algún  $p \in [0, 1]$ , entonces decimos que  $X$  tiene una distribución de Bernoulli, escrita como  $X \sim \text{Bernoulli}(p)$ . La función de probabilidad es  $p_X(x) = p^x(1 - p)^{1-x}$  para  $x \in \{0, 1\}$ .



La distribución de  $\text{Bernoulli}(p)$  tiene una media:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x=0,1} xp(X=x) = 0(1-p) + 1p = p.$$



Además:

$$\mathbb{E}(X)^2 = \sum_{x=0,1} x^2 p(X=x) = 0^2(1-p) + 1^2 p = p$$

y así la varianza:

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2 = p - p^2 = p(1-p).$$

La varianza es maximizada para el valor de  $p = 1/2$  y cada momento es el mismo  $\mathbb{E}(X^\alpha) = 0^\alpha(1-p) + 1^\alpha p = p$ .

## 1.4 Distribución binomial

Supongamos que tenemos una moneda, que cae cara con una probabilidad  $p$  para algún  $0 \leq p \leq 1$ . Lanzamos la moneda  $n$  veces y sea  $X$  el número de caras. Asumimos que estos lanzamientos son independientes. El PMF de  $X$ ,  $p_X(x) = \mathbb{P}(X=x)$  para esta distribución es:

$$p_X(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} & \text{para } x = 0, \dots, n \\ 0 & \text{en otros casos.} \end{cases}$$

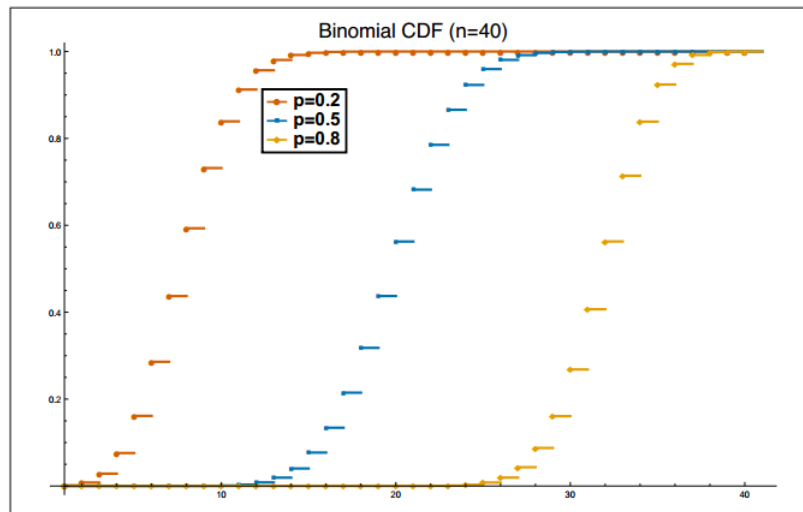
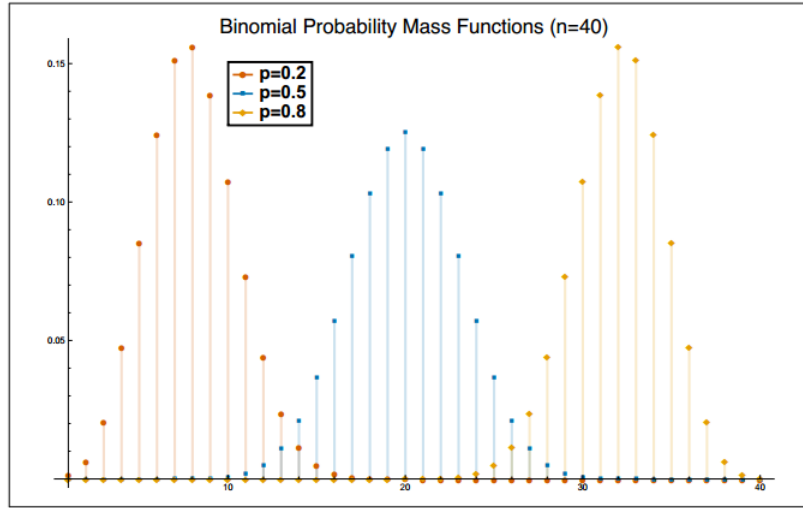
Esta es la suma de  $n$  variables aleatorias independientes de Bernoulli. Se denota como  $X \sim \text{Binomial}(n, p)$ .

Desde que la esperanza es un operador lineal, la esperanza de una distribución Binomial, es la suma de las esperanzas de las distribuciones de Bernoulli involucradas, así si  $X$  es una distribución Binomial( $n, p$ ):

$$\mathbb{E}(X) = np,$$

y desde que la varianza de la suma de variables independientes es la suma de varianzas,

$$\text{Var}(X) = np(1-p).$$



## 1.5 Distribución binomial negativa

Replicar un experimento de Bernoulli ( $p$ ) de forma independiente hasta que ocurre el  $r$ -ésimo éxito ( $r \geq 1$ ). Sea  $X$  el número de pruebas en el cual se produce el  $r$ -ésimo éxito. Entonces se dice que  $X$  tiene una distribución binomial negativa( $r, p$ ).

Existe otra definición de distribución binomial negativa, a saber, la distribución del número de fallos antes del  $r$ -ésimo éxito. (Esta es la definición empleada por R, en los cálculos).

La relación entre las dos definiciones es bastante simple. Si  $X$  es binomial negativo en el sentido usual y  $F$  es binomial negativo en el sentido de R, entonces:

$$F = X - r$$

¿Cuál es la probabilidad de que el  $r$ -ésimo éxito ocurre en la prueba  $t$ , para  $t \geq r$ ? Para que esto suceda, debe haber  $t - r$  fracasos y  $r - 1$  éxitos, en las primeras  $t - 1$  pruebas, con un éxito en la prueba  $t$ .

Por independencia, esto sucede con la probabilidad binomial para  $r - 1$  éxitos en las primeras  $t - 1$  pruebas, por la probabilidad  $p$  de éxito en la prueba  $t$ :

$$P(X = t) = \binom{t-1}{r-1} p^r (1-p)^{t-r} \quad (t \geq r).$$

de esta manera la probabilidad es cero, cuando  $t < r$ . El caso especial  $r = 1$  es llamada distribución geométrica. Es decir,  $X$  tiene una distribución geométrica con parámetro  $p \in (0,1)$ , denotada como

$X \sim \text{Geom}(p)$ , si

$$\mathbb{P}(X = k) = p(1 - p)^{k-1}, \quad k \geq 1.$$

Tenemos a partir de este resultado que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X = k) = p \sum_{k=1}^{\infty} (1 - p)^k = \frac{p}{1 - (1 - p)} = 1.$$

$X$  es el número de lanzamientos necesarios hasta que la primera cara salga, cuando una moneda es lanzada. La media de una distribución geométrica, tiene el valor de:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{t=1}^{\infty} tp(1 - p)^{t-1} = \frac{1}{p}.$$

Además que se tiene:

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2 = \frac{1 - p}{p}.$$

La distribución binomial negativa( $r, p$ ) es la suma de  $r$  de variables aleatorias geométricas independientes  $\text{Geom}(p)$ . Como la esperanza es un operador lineal positivo, se concluye que la media de binomial negativa( $r, p$ ) es  $r$  veces la media que  $\text{Geom}(p)$  y la varianza de una suma independiente es la suma de varianzas, así:

Si  $X \sim \text{binomial negativa}(r, p)$ , entonces:

$$\mathbb{E}(X) = \frac{r}{p} \quad \text{y} \quad \text{Var}(X) = \frac{r(1 - p)}{p^2}.$$

## 1.6 Distribución multinomial

En un sentido, la distribución multinomial generaliza la distribución binomial a experimentos aleatorios independientes con más de dos resultados. Es la distribución de un vector que cuenta cuántas veces se produce cada resultado. Se denota como  $X \sim \text{Multinomial}(n, \mathbf{p})$ .

Un vector aleatorio multinomial es un  $m$ -vector  $\mathbf{X}$  de resultados en una secuencia de  $n$  repeticiones independientes de un experimento aleatorio con  $m$  resultados distintos.

Si el experimento tiene  $m$  resultados posibles y el  $i$ -ésimo resultado tiene probabilidad  $p_i$ , entonces la función de masa de probabilidad  $\text{Multinomial}(n, \mathbf{p})$  viene dada por:

$$\mathbb{P}(\mathbf{X} = (k_1, \dots, k_m)) = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_m!} p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \dots p_m^{k_m}.$$

donde  $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$ .

Si contamos el resultado  $k$  como éxito, entonces es obvio que cada  $X_k$  es simplemente una variable aleatoria binomial ( $n, p_k$ ). Pero los componentes no son independientes, ya que suman a  $n$ .

## 1.7 Distribución de Rademacher

La distribución  $\text{Rademacher}(p)$  es una variación de la distribución de Bernoulli, 1 todavía indica éxito, pero el fracaso se codifica como  $-1$ . Si  $Y$  es una variable aleatoria  $\text{Bernoulli}(p)$ , entonces  $X = 2Y - 1$  es una variable aleatoria  $\text{Rademacher}(p)$ . La función de masa de probabilidad es:

$$\mathbb{P}(X = x) = \begin{cases} p & x = 1 \\ 1 - p & x = -1 \end{cases}$$

Una variable aleatoria  $X$  Rademacher( $p$ ) tiene una media:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x=-1,1} xp(X=x) = -1(1-p) + 1p = 2p-1.$$

Además  $X^2 = 1$ , así:

$$\mathbb{E}(X^2) = 1,$$

por tanto la varianza es:

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2 = 1 - (2p-1)^2 = 4p(1-p).$$

Una secuencia de sucesivas sumas de variables aleatoria independientes de Rademacher( $p$ ) es llamado **camino aleatorio**. Esto es, si  $X_i$  son idénticamente distribuidas a variables aleatorias Rademacher( $1/2$ ), la secuencia  $S_1, S_2, \dots$  es un camino aleatorio, donde:

$$S_n = X_1 + \dots + X_n.$$

Desde que el operador esperanza es un operador lineal:

$$\mathbb{E}(S_n) = 0, \text{ para todo } n,$$

y desde que la varianza de la suma de variables aleatorias independientes es la suma de varianzas:

$$\text{Var}(S_n) = n, \text{ para todo } n.$$

## 1.8 Distribución de Poisson

Una variable aleatoria de Poisson  $N$  modela el recuento de éxitos cuando la probabilidad de éxitos es pequeña y el número de pruebas independientes es grande, de modo que la tasa de éxito promedio  $\mu$ . Se denota esta variable aleatoria como  $X \sim \text{Poisson}(\mu)$  si:

$$\mathbb{P}(N=k) = e^{-\mu} \frac{\mu^k}{k!} \quad k=0,1,\dots$$

Así :

$$\mathbb{E}(N) = \mu \text{ y } \text{Var}(N) = \mu.$$

La distribución de Poisson es usado a menudo como un modelo para eventos, como decaimiento radiactivo y accidentes de tráfico.

Ladislaus von Bortkiewicz se refirió a la distribución de Poisson como La Ley de los números pequeños. Se puede pensar esto, como un límite peculiar de las distribuciones binomiales. Consideremos una secuencia de variables binomiales( $n, p$ ), donde la probabilidad  $p$  de éxito va a cero, pero el número  $n$  de pruebas crece de tal manera que  $np = \mu$  permanece fijo. Entonces tenemos la siguiente proposición:

**Proposición 1.1** Para cada  $k$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Binomial}(n, \mu/k)(k) = \text{Poisson}(\mu)(k).$$