1 Variables aleatorias continuas

En muchos modelos probabilísticos, las salidas o resultados son numéricos, por ejemplos, las lecturas de instrumentos o el precio de las acciones. En otros experimentos, las salidas no son numéricas, pero pueden estar asociadas a un valor numérico. Por ejemplo, si el experimento es la selección de estudiantes desde una población, podemos considerar su promedio de calificaciones. Cuando tratamos con esos valores numéricos, es a menudo útil asignarles una probabilidad. Esto se puede hacer con la noción de **variable aleatoria**.

Las variables aleatorias continuas toman valores en un intervalo continuo. Por ejemplo, una variable aleatoria que representa el tiempo entre dos llegadas sucesivas de un sistema de colas, o la que representa la temperatura en un reactor nuclear, es un ejemplo de una variable aleatoria continua.

El tiempo en el primer caso, o temperatura en el segundo, son reales pertenecientes a un subconjunto continuo del sistema de números reales. Las variables aleatorias que representan cantidades como tiempo, temperatura, distancia, área, volumen, etc, pueden discretizarse en minutos, horas, yardas, millas, etc., en cuyo caso es apropiado utilizar variables aleatorias discretas para representalos.

Ejemplo 1.1 Consideremos un experimento aleatorio de lanzar un dardo en un tablero circular, sin salirse del tablero. Asumiendo que el radio del tablero es 1, el espacio muestral es el conjunto de pares ordenados dentro del círculo unitario

$$\Omega = \left\{(x,y)\ :\ x,y\in\mathbb{R},\ \sqrt{x^2+y^2}<1\right\}.$$

y el evento que describe un golpe en el tablero es dado por:

$$E = \left\{(x,y)\ :\ x,y\in\mathbb{R},\ \sqrt{x^2+y^2}<0.1\right\}\subset\Omega.$$

La variable aleatoria R definida como $R(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ representa la distancia entre la posición del dardo y y el origen. Como $\mathbb{P}(R=r)=0$, desde que $\{R=r\}=0$, para todo r. También tenemos que:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(R<r) &= \mathbb{P}\left(\left\{(x,y):x,y\in\mathbb{R},\sqrt{x^2+y^2}<r\right\}\right)=\frac{\pi r^2}{\pi 1^2}=r^2\\ \mathbb{P}(0.2<R<0.5) &= \mathbb{P}\left(\left\{(x,y):x,y\in\mathbb{R},0.2<\sqrt{x^2+y^2}<0.5\right\}\right)\\ &= \frac{\pi(0.5^2-0.2^2)}{\pi 1^2}.\end{aligned}$$

1.1 Función de densidad de probabilidad para una variable aleatoria continua

Para una variable aleatoria continua X, la función definida como:

$$f_X(x) = dF_X(x)/dx$$

Es llamada `función de densidad de probabilidad de X (PDF)`. Esta función cumple el mismo papel para una variable aleatoria continua que el papel desempeñado por la función de masa de probabilidad de una variable aleatoria discreta. En este caso, la suma utilizada anteriormente se sustituye por la integración. Vemos este caso:

$$f_X(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F_X(x + \Delta x) - F_X(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\mathbb{P}(x < X \leq x + \Delta x)}{\Delta x}.$$

Así, cuando x es pequeño, tenemos

$$f_X(x)\Delta x \approx \mathbb{P}(x < X \leq x + \Delta x)$$

Esto es $f_X(x)\Delta x$ es aproximadamente igual a la probabilidad de que X pertenece al intervalo, $(x, x + \Delta x]$. Si Δx tiende al infinitesimal dx, podemos escribir:

$$\mathbb{P}(x < X \leq x + dx) = f_X(x)dx.$$

Se sigue que $f_X(x) \geq 0$ para todo x.

Si conocemos la función densidad de una variable aleatoria continua, podemos obtener la función de distribución acumulativa por integración:

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt \quad \text{para} \quad -\infty < x < \infty.$$

Desde que $F_X(\infty) = 1$ se sigue que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1.$$

A partir de estas consideraciones, podemos afirmar que una función $f_X(x)$ es la función de densidad de probabilidad para alguna variable aleatoria continua si y sólo si satisface las dos propiedades:

$$f_X(x) \geq 0 \quad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R}.$$

y

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1.$$

La probabilidad que X se encuentra en el intervalo $(a, b]$, es obtenido desde:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \in (a,b]) &= \mathbb{P}(a < X \leq b) = \mathbb{P}(X \leq b) - \mathbb{P}(X \leq a) \\ &= \int_{-\infty}^{b} f_X(t)dt - \int_{-\infty}^{a} f_X(t)dt = \int_{a}^{b} f_X(t)dt. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la probabilidad de que la variable aleatoria se encuentre en un intervalo dado en el eje real es igual al área bajo la curva de densidad de probabilidad en este intervalo.

La relación entre el CDF y el PDF se muestra en las siguientes ecuaciones:

$$f_X(r) = \begin{cases} F'_X(r) & F'_X(r) \text{ existe} \\ 0 & \text{en otros casos} \end{cases}$$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(r)\, dr.$$

donde la primera ecuación se sigue de la definición de un PDF y la segunda línea se sigue del teorema fundamental del cálculo.

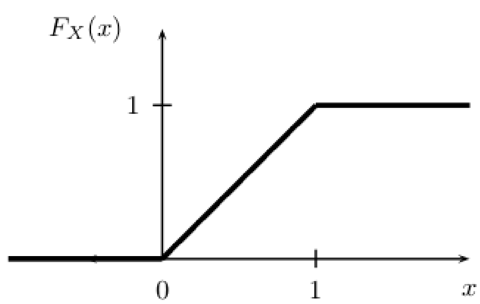
Ejemplo 1.2 Supóngase que X tiene `PDF`

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{para } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{en otros casos} \end{cases}$$

Claramente $f_X \geq 0$ y $\int f_X(x)dx = 1$. Una variable aleatoria con esta densidad se dice que tiene una distribución uniforme (Uniform(0,1)), lo que captura la idea, de escoger un punto entre 0 y 1. El `CDF` está dado por

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & x > 1. \end{cases}$$

y cuyo gráfico es



Ejemplo 1.3 Supongamos que X tiene `PDF`

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{1}{(1+x)^2} & \text{en otros casos.} \end{cases}$$

Desde que $\displaystyle\int f_X(x)dx = 1$ esta expresión es una bien definida `PDF`.

Las variables aleatorias pueden traer confusión. Primero debes notar que si X es continua entonces $\mathbb{P}(X = x) = 0$, para cada x. No debes tratar de pensar que $f(x)$ es $\mathbb{P}(X = x)$, esto sólo es válido para variables aleatorias discretas.

Obtenemos probabilidades de un PDF integrando. Un PDF puede ser mayor que 1 (a diferencia de una función de masa).

Por ejemplo, si $f_X(x) = 5$ para $x \in [0, 1/5]$ y 0 en otros casos, entonces $f_X(x) \geq 0$ y $\displaystyle\int f_X(x)dx = 1$, por lo que este es un PDF bien definido aunque $f_X(x) = 5$ en algunos lugares.

En efecto un PDF puede ser no acotado. Por ejemplo si $f_X(x) = (2/3)x^{-1/3}$ para $0 < x < 1$ y $f(x) = 0$ en otros casos, entonces $\displaystyle\int f_X(x)dx = 1$ incluso si f_X no es acotada.

Ejemplo 1.4 Sea

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \dfrac{1}{(1+x)} & \text{en otros casos.} \end{cases}$$

Esto no es un `PDF`, desde que $\int f_X(x)dx = \log \infty = \infty$.

Sea F el `CDF` una variable aleatoria X, entonces:

- $\mathbb{P}(x < X \leq y) = F_X(y) - F_X(x)$
- $\mathbb{P}(X > x) = 1 - F_X(x)$
- Si X es continua, entonces

$$\begin{aligned} F_X(b) - F_X(a) &= \mathbb{P}(a < X < b) = \mathbb{P}(a \leq X < b) \\ &= \mathbb{P}(a < X \leq b) = \mathbb{P}(a \leq X \leq b) \end{aligned}$$

Definición 1.1 Sea X una variable aleatoria con `CDF` F_X. La `inversa CDF` o `función cuantil` es definida como:

$$F_X^{-1}(q) = \inf\{x : F_X(x) > q\}$$

para $q \in [0, 1]$. Si F_X es estrictamente creciente y continua, entonces $F_X^{-1}(q)$ es el único número real x tal que $F_X(x) = q$.

Llamamos $F_X^{-1}(1/4)$ el `primer cuartil`, $F_X^{-}(1/2)$ la `mediana` o `segundo cuartil` y $F_X^{-1}(3/4)$, el tercer cuartil.

Dos variables aleatorias X y Y son **iguales en distribución** si $F_X(x) = F_Y(y)$ para todo x. Esto significa que las aseveraciones de probabilidad acerca de X y Y deben ser las mismas, pero de ninguna manera que X e Y sean iguales. Supongamos por ejemplo $\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = -1) = 1/2$. Sea $Y = -X$. Entonces $\mathbb{P}(Y = 1) = \mathbb{P}(Y = -1) = 1/2$ y así, X e Y son iguales en distribución, pero no son iguales. En efecto $\mathbb{P}(X = Y) = 0$.

Es tradicional escribir $X \sim F$ para indicar que X tiene una distribución F. Esto es una notación lamentable ya que el símbolo $\sim$ también se usa para denotar una aproximación. Léase $X \sim F$ como `X tiene una distribución F` y no como `X es aproximadamente F`.

2 Funciones de variables aleatorias

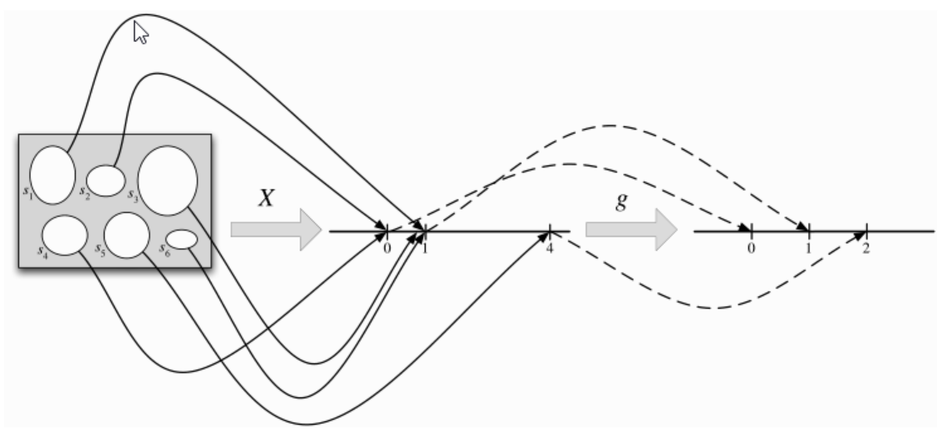
Como se sabe, una variable aleatoria X es una función que asigna valores de $\mathbb{R}$ para cada resultado o salida de un espacio muestral. Dada una variable aleatoria X podemos definir otras variables aleatorias que son funciones de X. Por ejemplo, la variable aleatoria Y definida como $2X$ toma cada resultado en el espacio muestral y le asigna un real que es igual al doble del valor que X le asigna. La variable aleatoria $Y = X^2$ asigna un resultado que es el cuadrado del valor que X le asigna y así sucesivamente.

En general, si una variable aleatoria X asigna el valor x a un resultado y si $g(X)$ es una función de X, entonces $Y = g(X)$ es una variable aleatoria y se le asigna el valor $g(x)$ a ese resultado. Se dice que la variable aleatoria Y es una variable aleatoria derivada. Esto es, si X es una variable aleatoria, entonces X^2, e^X y $\sin(X)$ son variables aleatorias, como $g(X)$ para una función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Por ejemplo, imaginemos que dos equipos de baloncesto (A y B) están jugando un partido de siete partidos, y que X sea el número de victorias para el equipo A (así que $X \sim \texttt{Binomial}(7, 1/2)$ si los equipos están igualados y los juegos son independientes). Sea $g(x) = 7$ y $h(x) = 1$ si $x \geq 4$ y $h(x) = 0$ si $x < 4$. Entonces $g(X) = 7 - X$ es el número de victorias para el equipo B y $h(X)$ es el indicador de que el equipo A gana la mayoría de los juegos. Puesto que X es una variable aleatoria, $g(X)$ y $h(X)$ son también variables aleatorias.

Definición 2.1 Para un experimento con un espacio muestral Ω, una variable aleatoria X y una función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(X)$ es una variable aleatoria que mapea s a $g(X(s)$ para todo $s \in \Omega$.

Sea $g(X) = \sqrt{X}$, la siguiente figura muestra que $g(X)$ es la composición de las funciones X y g.En esta figura, la variable aleatoria X es definida sobre un espacio muestral con 6 elementos y tiene los posibles valores $0, 1$ y 4. La función g es la raíz cuadrada. Componiendo X y g nos da la variable aleatoria $g(X) = \sqrt{X}$ que tiene los valores $0, 1$ y 2.



Consideremos ahora el caso de una variable aleatoria discreta X cuya función de masa de probabilidad es $p_X(x)$. Dada una funci?n $g(X)$ de X, nos gustaría encontrar la función de masa de probabilidad de la variable aleatoria $Y = g(X)$, es decir, buscamos encontrar $p_Y(y)$.

Ejemplo 2.1 Sea X una variable aleatoria discreta con función de probabilidad, dada por,

$$p_X(x) = \begin{cases} 1/10 & x = 1, \\ 2/10 & x = 2, \\ 3/10 & x = 3, \\ 4/10 & x = 4, \\ 0 & \text{en otros casos.} \end{cases}$$

Con esta variable aleatoria, cada resultado en el espacio muestral es mapeado a uno de los cuatro números reales 1, 2, 3 o 4. Considere ahora la variable aleatoria $Y = 2X$. En este caso cada resultado se mapea en uno de los enteros 2, 4, 6 y 8. Pero ¿ qué pasa con la función de masa de probabilidad de Y?.

Es evidente que, si la probabilidad de que X asigne un resultado en 1 sea $1/10$, entonces la probabilidad de que Y asigne un resultado en 2 también debe ser $1/10$, si X otra vez asigna un resultado en 2 con probabilidad $2/10$, entonces, esta debe ser también la probabilidad de que Y asigne un resultado en 4 y así sucesivamente. En este ejemplo específico, tenemos:

$$p_Y(y) = \mathbb{P}(Y = g(x)) = \mathbb{P}(X = x) = p_X(x).$$

El caso anterior se da cuando g es una función uno a uno o inyectiva. El caso en el que $Y = g(X)$ con g inyectiva se ilustra en las siguientes tablas:

x	$P(X = x)$
x_1	p_1
x_2	p_2
x_3	p_3
$\vdots$	$\vdots$

(a) PMF de X

y	$P(Y = y)$
$g(x_1)$	p_1
$g(x_2)$	p_2
$g(x_3)$	p_3
$\vdots$	$\vdots$

(b) PMF de Y

La idea es que si los distintos valores posibles de X son $x_1, x2, \ldots$ con probabilidades $p_1, p_2, \ldots$ (respectivamente), entonces los distintos valores posibles de Y son $g(x_1), g(x_2), \ldots$, con la misma lista $p_1, p_2, \ldots$, de probabilidades.

Ejemplo 2.2 Una partícula se mueve n pasos en una línea numérica. La partícula comienza en 0 y en cada paso se mueve 1 unidad a la derecha o a la izquierda, con probabilidades iguales. Supongamos que todos los pasos son independientes. Sea Y la posición de la partícula después de n pasos. Hallemos el PMF de Y.

En efecto si consideramos cada paso como un ensayo de Bernoulli, donde ir por la derecha se considera un éxito e ir a la izquierda se considera un fracaso. Entonces el número de pasos que la partícula toma a la derecha es una variable aleatoria $\texttt{Binomial}(n, 1/2)$, que podemos nombrar como X. Si $X = j$, entonces la partícula ha tomado j pasos a la derecha y $n - j$ pasos a la izquierda, dando una posici?n final de $j - (n - j) = 2j - n$. Así podemos expresar Y como una función inyectiva de X, a saber $Y = 2X - n$ y desde que X toma valores en $\{0, 1, 2, \ldots, n\}$, Y toma valores en $\{-n, 2 - n, 4 - n, \ldots, n\}$.

El PMF de Y puede ser calculado desde el PMF de X:

$$\mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}(2X - n = k) = \mathbb{P}(X = (n + k)/2) = \binom{n}{\frac{n+k}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

si k es un entero entre $-n$ y n (inclusive) tal que $n + k$ es un número par.

Sin embargo, como muestra el siguiente ejemplo, no siempre se da el anterior caso:

Ejemplo 2.3 Sea X una variable aleatoria discreta, con una función de masa de probabilidad dada por:

$$p_X(x) = \begin{cases} 1/10 & x = -2, \\ 2/10 & x = -1, \\ 3/10 & x = 1, \\ 4/10 & x = 2, \\ 0 & \text{en otros casos.} \end{cases}$$

Con esta variable aleatoria X, cada resultado en el espacio muestral, es asignado a uno de los cuatro números reales $-2, -1, 1$ ó 2. Consideramos la variable aleatoria derivada $Y = X^2$. En este caso, cada resultado se le asigna 1 ó 4. Si X asigna un resultado -1 ó 1 , entonces Y asignará ese resultado a 1, mientras que si X asigna un resultado a -2 ó 2, entonces Y asignará ese resultado a 4.

La variable aleatoria Y tiene la siguiente función de masa de probabilidad, que no es la misma que la de X:

$$p_y(y) = \begin{cases} 2/10 + 3/10 & y = 1, \\ 1/10 + 4/10 & y = 4, \\ 0 & \text{en otros casos.} \end{cases}$$

Estos ejemplos ilustran la regla de que la función de masa de probabilidad de una variable aleatoria de Y , que es una función de una variable aleatoria X, es igual a la función de masa de probabilidad de X, si $g(x_1) \neq g(x_2)$ cuando $x_1 \neq x_2$. De lo contrario la función de masa de probabilidad de Y se obtiene de la relación general (general en el sentido de que también cubre el caso anterior):

$$p_Y(y) = \sum_{x:g(x)=y} p_X(x).$$

Aquí la suma es sobre todos los x, para el cuál $g(x) = y$.

Ejemplo 2.4 Sea X una variable aleatoria discreta, que es definida sobre los enteros en el intervalo $[-3, 4]$. Sea la función de masa de probabilidad de X:

$$p_X(x) = \begin{cases} 0.05 & x \in \{-3, 4\}, \\ 0.10 & x \in \{-2, 3\}, \\ 0.15 & x \in \{-1, 2\}, \\ 0.20 & x \in \{0, 1\}, \\ 0 & \text{en otros casos.} \end{cases}$$

Encontremos la función de masa de probabilidad de la variable aleatoria Y, definida como $Y = X^2 - |X|$.

Como los posibles valores de X son dados por $[-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4]$, se sigue que los valores de Y son $[6, 2, 0, 0, 0, 2, 6, 12]$ y así el rango de Y es $[0, 2, 6, 12]$. Esto permite calcular la función de masa de probabilidad de Y como:

$$p_Y(y) = \begin{cases} 0.15 + 0.20 + 0.20 = 0.55 & \text{si } y = 0 \quad (g(x) = y \text{ para } x = -1, 0, 1) \\ 0.10 + 0.15 = 0.25 & \text{si } y = 2 \quad (g(x) = y \text{ para } x = -2, 2), \\ 0.05 + 0.10 = 0.15 & \text{si } y = 6 \quad (g(x) = y \text{ para } x = -3, 3), \\ 0.05 = 0.05 & \text{si } y = 12 \quad (g(x) = y \text{ para } x = 4), \\ 0 & \text{en otros casos.} \end{cases}$$

Ejemplo 2.5 Continuando con el `Ejemplo 1.2`, sea D la distancia de la partícula, desde el origen después de n pasos. Asumiendo que n es par. Encontremos el PMF de D.

Podemos es escribir $D = |Y|$, esta es una función de Y, pero no es inyectiva. El evento $D = 0$, es el mismo que el evento $Y = 0$. Para $k = 2, 4, \ldots, n$, el evento $D = k$ es el mismo evento $\{Y = k\} \cup \{Y = -k\}$.

Así el PMF de D es:

$$\mathbb{P}(D = 0) = \binom{n}{\frac{n}{2}} \left(\frac{1}{2}\right),$$

$$\mathbb{P}(D = k) = \mathbb{P}(Y = k) + \mathbb{P}(Y = -k) = 2\binom{n}{\frac{n+k}{2}} \left(\frac{1}{2}\right),$$

para $k = 2, 4, \ldots, n$. En el paso final, usamos la simetria para ver que $\mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}(Y = -k)$.

En el caso de variables aleatorias continuas, un enfoque es empezar con la función de distribución acumulativa de $g(X)$ y trasladar el evento $g(X) \leq y$ en un evento equivalente que implica X. Para una función general g, debemos expresar de forma acertada $g(X) \leq y$ en términos de X y no hay una fórmula fácil para eso. Pero cuando g es continua y estrictamente creciente, podemos encontrar una expresión conveniente, si $g(X) \leq y$ es lo mismo que $X \leq g^{-1}(y)$ y así tenemos que:

$$F_{g(X)}(y) = \mathbb{P}(g(X) \leq y) = \mathbb{P}(X \leq g^{-1}(y)) = F_X(g^{-1}y).$$

Entonces podemos diferenciar con respecto a y para obtener el PDF de $g(X)$. Esto da una versión unidimensional de la fórmula de cambio de variables, que se generaliza a transformaciones invertibles en múltiples dimensiones.

Teorema 2.1 (Cambio de variable en una dimensión) Sea X una variable aleatoria continua con PDF f_X y sea $Y = g(X)$, donde g es diferenciable y estrictamente creciente (o estrictamente creciente). Entonces el PDF de Y es dado por:

$$f_Y(y) = f_X(x)\left|\frac{dx}{dy}\right|,$$

donde $x = g^{-1}(y)$.

Sea g una función estrictamente creciente. El CDF de Y es:

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(g(X) \leq y) = \mathbb{P}(X \leq g^{-1}(y)) = F_X(g^{-1}(y)) = F_X(x),$$

Así por la regla de la cadena, el PDF de Y es:

$$f_Y(y) = f_X(x)\frac{dx}{dy}.$$

La prueba para g estrictamente decreciente es análogo. En ese caso el PDF, termina como, $-f_X(x)\dfrac{dx}{dy}$, que no es negativa, desde que $\dfrac{dx}{dy} < 0$ si g es estrictamente decreciente. Usando $\left|\dfrac{dx}{dy}\right|$ como en la declaración del teorema, abarca ambos casos.

Definición 2.2 El soporte de una variable aleatoria continua X y su distribución, es el conjunto de todos los puntos x donde $f_X(x) > 0$.

Ejemplo 2.6 La función de distribución acumulativa de una variable aleatoria exponencial X con parámetro λ es dado por:

$$\mathbb{P}(X \leq x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Calculemos la función de distribución acumulativa y la función de densidad de una variable aleatoria Y, definida como $Y = X^2$. Nosotros tenemos:

$$\mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(X^2 \leq y) = \mathbb{P}(X \leq \sqrt{y}) = 1 - e^{-\lambda\sqrt{y}} \quad \text{para } y \geq 0.$$

Podemos calcular la función densidad de Y, por diferenciación. Así tenemos:

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy}\mathbb{P}(Y \leq y) = \lambda e^{-\lambda y^{1/2}} \times \frac{1}{2}y^{-1/2} = \frac{\lambda}{2\sqrt{y}}e^{-\lambda\sqrt{y}} \quad \text{para } y > 0.$$

En experimentos de simulación es frecuente que se tenga acceso a secuencias de números aleatorios que se distribuyen uniformemente en el intervalo $(0,1)$, pero lo que realmente se requiere son números aleatorios de una distribución no uniforme. En particular, en teoria de colas, a menudo se necesitan números aleatorios que se distribuyen de acuerdo con una distribución exponencial (negativa). Este último ejemplo muestra cómo se pueden obtener tales números.

Ejemplo 2.7 Sea $X \sim N(0,1), Y = e^X$. Usemos el teorema de cambio de variable para encontrar el PDF de Y, desde que $g(x) = e^X$ es estrictamente creciente. Sea $y = e^X$, Así $x = \log y$ y $dy/dx = e^x$. Entonces:

$$f_Y(y) = f_X(x)\left|\frac{dx}{dy}\right| = \varphi(x)\frac{1}{e^x} = \varphi(\log y)\frac{1}{y},\ y > 0.$$

Ten en cuenta que después de aplicar la fórmula de cambio de variables, escribimos todo a la derecha en términos de y y especificamos el soporte [1] de la distribución. Para determinar el soporte, sólo observamos que cuando x varía desde $-\infty$ a ∞, e^X varía desde 0 a ∞.

Podemos obtener el mismo resultado trabajando a partir de la definición de la función de distribución acumulativa, transladando el evento $Y \leq y$ en un evento equivalente involucrando X. Para $y > 0$,

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(e^X \leq y) = \mathbb{P}(X \leq \log y) = \Phi(\log y),$$

y así el PDF, otra vez es:

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy}\Phi(\log Y) = \varphi(\log y)\frac{1}{y},\ y > 0.$$

Ejemplo 2.8 Sea la función densidad de probabilidad de una variable aleatoria X, es dado por:

$$f_X(x) = \begin{cases} \alpha/x^5, & 1 \leq x < \infty \\ 0 & \text{en otros casos.} \end{cases}$$

Sea una nueva variable aleatoria definida como $Y = 1/X$. Encontremos la función densidad de Y.

Primero responderemos a la pregunta usando el enfoque estándar. Nuestra primera tarea es calcular el valor de α. Ya que debemos tener:

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = \int_1^{\infty} \frac{\alpha}{x^5}dx = -\alpha\frac{x^{-4}}{4}\Big|_1^{\infty} = \frac{\alpha}{4},$$

y por propiedad $\alpha = 4$. La función distribución acumulativa de X, ahora se puede calcular como:

$$F_X(x) = \int_1^x f_X(t)dt = \int_1^x \frac{4}{t^5}dt = -t^{-4}\Big|_1^x = 1 - \frac{1}{x^4},\ x \geq 1.$$

Ahora, usando probabilidades y observando que el rango de Y es $(0,1]$, podemos calcular la distribución acumulativa de Y como:

$$\mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(1/X \leq y) = \mathbb{P}(X \geq 1/y) = 1 - \mathbb{P}(X < 1/y) = 1 - F_X(1/y) = y^4,\ \text{para}\ \ 0 < Y \leq 1.$$

Finalmente, calculamos la función densidad de Y, tomando derivadas. Así obtenemos:

[1] Si X es una variable aleatoria discreta, el conjunto finito o infinito contable de valores x tal que $\mathbb{P}(X = x) > 0$, es llamado soporte de X.

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy}F_Y(y) = \frac{d}{dy}y^4 = 4y^3,\ 0 < y \leq 1.$$

Utilizando el teorema de cambio de variables, cuando $y = 1/x$ y así $x = 1/y$, obtenemos

$$f_Y(y) = \frac{4}{(1/y)^5}\left|\frac{-1}{y^2}\right| = 4y^3$$

como antes.

Ejemplo 2.9 Sea X una variable aleatoria continua con PDF, f_X y sea $Y = a + bX$, con $b \neq 0$. Sea $y = a + bx$, el espejo de la relación entre Y y X. Entonces $\frac{dy}{dx} = b$ y así el PDF de Y es:

$$f_Y(y) = f_X(x)\left|\frac{dx}{dy}\right| = f_X\left(\frac{y-a}{b}\right)\frac{1}{|b|}.$$