Curso: Cálculo de probabilidades CM-1H2
Notas de matemáticas

1 Funciones

Definición 1.1 Sean A, B dos conjuntos. Una función $f : A \to B$ asigna un elemento $b \in B$ para cada elemento $a \in A$, denotado por $b = f(a)$.

Definición 1.2 Para una función $f : A \to B$, definimos

$$\begin{aligned} \operatorname{rango} f &= \{f(a) : a \in A\} \\ f^{-1}(b) &= \{a \in A : f(a) = b\} \\ f^{-1}(H) &= \{a \in A : f(a) \in H\}. \end{aligned}$$

Si $\operatorname{rango} f = B$, decimos que f es sobreyectiva. Si para todo $b \in B$, $|f^{-1}(b)| \leq 1$, decimos que la función f es inyectiva. Una función que es sobreyectiva y inyectiva se llama biyección.

Si $f : A \to B$ es inyectiva, f^{-1} es también una función $f^{-1} : B^{'} \to A$ donde $B^{'} = \operatorname{rango} f \subset B$. Si $f : A \to B$ es una biyección, entonces $f^{-1} : B \to A$ es también una biyección.

Definición 1.3 Sea $f : A \to B$ y $f : B \to C$ dos funciones. La composición es un función $f \circ g : A \to C$ definido como $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.

Proposición 1.1 Para alguna función f y una colección de conjuntos indexados $U_a, a \in A$, tenemos

$$\begin{aligned} f^{-1}\left(\bigcap_{a \in A} U_a\right) &= \bigcap_{a \in A} f^{-1}(U_a) \\ f^{-1}\left(\bigcup_{a \in A} U_a\right) &= \bigcup_{a \in A} f^{-1}(U_a) \\ f\left(\bigcup_{a \in A} U_a\right) &= \bigcup_{a \in A} f(U_a). \end{aligned}$$

Ejemplo 1.1 Para $f : \mathbb{R} \to \mathbf{R}, f(x) = x^2$, tenemos $f^{-1}(x) = \{\sqrt{x}, -\sqrt{x}\}$ implicando que f no es inyectiva. También tenemos que $f^{-1}([1,2]) = [-\sqrt{2}, 1] \cup [1, \sqrt{2}]$.

Definición 1.4 Sean las funciones $f, g : A \to \mathbb{R}$, denotamos $f \leq g$ si $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in A$, $f < g$ si $f(x) < g(x)$ para todo $x \in A$ y $f \equiv g$ si $f(x) = g(x)$ para todo $x \in A$.

Definición 1.5 Denotamos una sucesión de funciones $f_n : A \to \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$, satisfaciendo $f_1 \leq f_2 \leq f_3 \leq \cdots$ como $f_n \nearrow$.

Definición 1.6 Dado un conjunto $A \in \Omega$, definimos la función indicador $I_A : \Omega \to \mathbb{R}$ como

$$I_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega \in A \\ 0 & \text{e otros casos} \end{cases}, \qquad \omega \in \Omega.$$

Proposición 1.2 La función indicador tiene algunas propiedades importantes

1. Para algún conjunto A, tenemos $I_A = 1 - I_{A^c}$.
2. Si $A \subset B$, se cumple que $I_A \leq I_B$.
3. Para dos conjuntos A y B, se cumple que $I_{A\cap B} = I_A I_B$ y
4. Del mismo modo dado dos conjuntos A y B, se cumple que $I_{A\cup B} = I_A + I_B - I_{A\cap B}$.

Ejemplo 1.2 (Principio de inclusión -exclusión) Sean los conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ y sea I_{A_i} la función indicador de A_i, la unión $A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ tiene como función indicador

$$I_A = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - I_{A_i}).$$

Existen algunas definiciones que son útiles en la comparación del comportamiento asintótico.

Definición 1.7 Sean las funciones $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definimos las siguientes notaciones

$$\begin{array}{rcccl}
f = O(g) & \text{cuando} & x \to L & \text{si} & \limsup\limits_{x\to L} \dfrac{|f(x)|}{|g(x)|} < \infty \\
f = o(g) & \text{cuando} & x \to L & \text{si} & \lim\limits_{x\to L} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0 \\
f \sim g & \text{cuando} & x \to L & \text{si} & \lim\limits_{x\to L} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1 \\
f \,\Theta\, g & \text{cuando} & x \to L & \text{si} & f = O(g) \text{ y } g = O(f).
\end{array}$$

A L le puede corresponder un límite finito o un límite infinito: $+\infty, -\infty$. Si se omite L, normalmente se supone que es $+\infty$.

Intuitivamente, $f = O(g)$ implica que f crece tan rápido como g o más lento y $f = o(g)$ implica que f crece más lento que g . Las definiciones anteriores suponen que $g(x)$ no es cero, o al menos no es cero cuando $x \to L$.

Ejemplo 1.3 Se cumple $f = O(g)$ si y sólo si $f(x)/g(x) = O(1)$ y $f(x) = o(g(x))$ si y sólo si $f(x)/g(x) = o(1)$.

Ejemplo 1.4 1. Se cumple que $x^a = o(x^b)$ para toda constante no negativa $a < b$.

2. $\log x = o(x^\epsilon)$ para todo $\epsilon > 0$ y $x > 1$.
3. $x^b = o(a^x)$ para $a, b \in \mathbb{R}$ con $a > 1$.

Ejemplo 1.5 Si tenemos $n, k > 0$, tenemos que $x^n = O(x^k)$ si y sólo si $k \geq n$ y $x^{-n} = o(x^{-k})$ si y sólo si $k < n$ (en ambos casos $x \to \infty$). También $x^n = O(\exp(x))$ y $\exp(-x) = o(x^{-n})$ cuando $x \to \infty$, para todo $n > 0$.

Proposición 1.3 Si $f = o(g)$ o se cumple $f \sim g$, entonces $f = O(g)$.

Es importante notar que

Proposición 1.4 Si $f = o(g)$, entonces no es verdad que $g = O(f)$.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{1}{\lim_{x\to\infty} f(x)/g(x)} = \frac{1}{0} = \infty,$$

así $g \neq O(f)$.

Proposición 1.5 Para $a_k \neq 0, a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = O(x^k)$.

Definición 1.8 Dado dos funciones $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, decimos que

$$f = \Omega(g)$$

si y sólo existe una constante c y un x_0 tal que para todo $x \geq x_0$, tenemos que $f(x) \geq c|g(x)|$.

Proposición 1.6 $f(x) = O(g(x))$ si y sólo si $g(x) = \Omega(f(x))$.

Así por ejemplo $x^2 = \Omega(x), 2^x = \Omega(x^2)$ y $x/100 = \Omega(100x + \sqrt{x})$.

2 Referencias

1. Mathematics for Computer Science, Eric Lehman F Thomson Leighton Albert R Meyer 2010.
2. Book of Proof, 2013 by Richard Hammack Second Edition.
3. Probability, The Analysis of Data, volumen 1 Guy Lebanon.