$$y = f(x) = \frac{x}{\ln x}$$

Решение: Проведем исследование функции.

1) Найдём область определения функции:

$$\begin{cases} \ln x \neq 0 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x > 0 \end{cases}$$

Таким образом, область определения: $D(f) = (0;1) \cup (1;+\infty)$.

Функция не определена при отрицательных значениях x, значит, она не является четной или нечетной.

Очевидно, что функция непериодическая.

2) Асимптоты.

$$\lim_{x \to 0+0} f(x) = \lim_{x \to 0+0} \frac{x}{\ln x} = \frac{0}{-\infty} = 0 \cdot (-0) = 0$$

$$\lim_{x \to 1-0} f(x) = \lim_{x \to 1-0} \frac{x}{\ln x} = \frac{1}{-0} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 1+0} f(x) = \lim_{x \to 1+0} \frac{x}{\ln x} = \frac{1}{+0} = +\infty$$

Прямая $x = 1$ является вертикальной асимптотой для графика $f(x)$ при $x \to 1$.

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x \ln x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\ln x} = 0$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x}{\ln x} - 0 \cdot x \right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\ln x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \to +\infty} \frac{(x)'}{(\ln x)'} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to +\infty} (x) = +\infty$$

Таким образом, наклонная асимптота отсутствует.

Функция неограниченно возрастает, если $x \to +\infty$

3) Точки пересечения графика с координатными осями, интервалы знакопостоянства функции.

График функции не пересекает координатные оси.

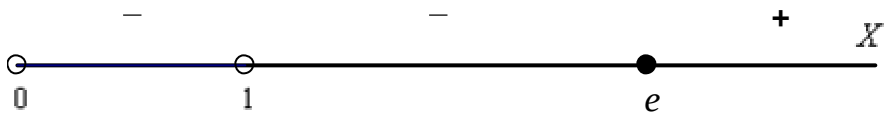
$f(x) < 0$, если $x \in (0;1)$.
$f(x) > 0$, если $x \in (1;+\infty)$,

4) Возрастание, убывание, экстремумы функции.

$$f'(x) = \left(\frac{x}{\ln x} \right)' = \frac{(x)'(\ln x) - x(\ln x)'}{\ln^2 x} = \frac{\ln x - x \cdot \frac{1}{x}}{\ln^2 x} = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x} = 0$$

$x = e \approx 2{,}7$ – критическая точка.

Определим знаки $f'(x)$:



$f(x)$ убывает на $(0;1)\cup(1;e)$ и возрастает на $(e;+\infty)$

В точке $x=e$ функция достигает минимума: $f(e)=\frac{e}{1}=e\approx 2{,}7$.

5) Выпуклость, вогнутость, перегибы графика.

$$f''(x)=\left(\frac{\ln x-1}{\ln^2 x}\right)'=\frac{(\ln x-1)'\cdot\ln^2 x-(\ln x-1)\cdot(\ln^2 x)'}{\ln^4 x}=\frac{\frac{1}{x}\cdot\ln^2 x-(\ln x-1)\cdot\frac{2\ln x}{x}}{\ln^4 x}=$$

$$=\frac{\ln x-2(\ln x-1)}{x\ln^3 x}=\frac{\ln x-2\ln x+2}{x\ln^3 x}=\frac{2-\ln x}{x\ln^3 x}=0$$

$x=e^2\approx 7{,}4$ – критическая точка.

Определим знаки $f''(x)$:

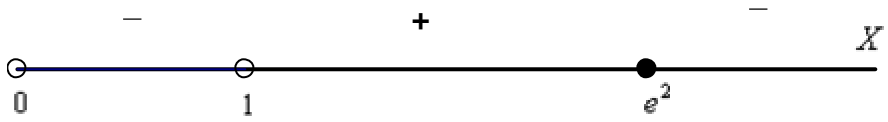


График $f(x)$ является выпуклым на $(0;1)\cup(e^2;+\infty)$ и вогнутым на $(1;e^2)$.

В точке $x=e^2$ существует перегиб графика.

$f(e^2)=\frac{e^2}{2}\approx 3{,}7$

6) Найдем дополнительные точки и построим график:

x	0,3	0,5	0,7	1,5	2	3	4	5	6	8
$f(x)$	-0,25	-0,72	-1,96	3,70	2,89	2,73	2,89	3,11	3,35	3,85

Пройти бесплатный курс обучения, а также найти исследования других функций можно на странице
http://mathprofi.ru/polnoe_issledovanie_funkcii_i_postroenie_grafika.html