№1 Построить матрицу поворота на угол φ вокруг точки $A(a,b)$

$$M = \underbrace{S^{-1}}_{\text{преобр. в исх. СК}} \underbrace{R}_{\text{преобр. в новой СК}} \underbrace{S}_{\text{переход в новую СК}}$$

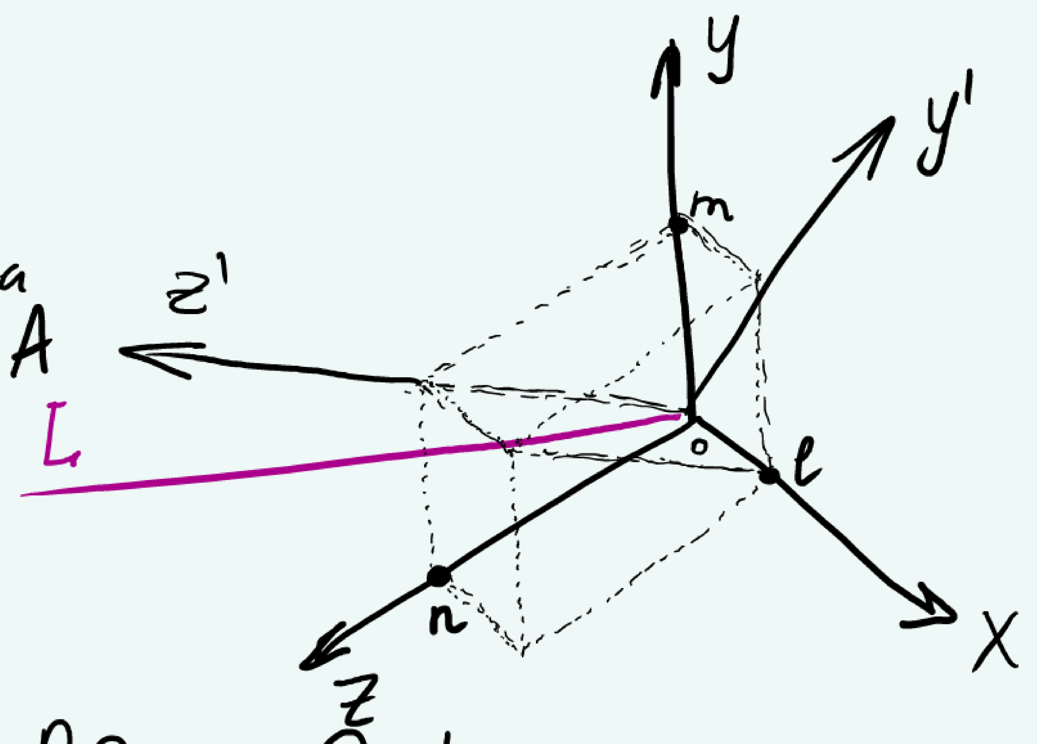
$$R = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & b & 1 \end{pmatrix} \qquad S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -a & -b & 1 \end{pmatrix}$$

№2 Построить матр. поворота на угол φ вокруг прямой L в 3D-пр-ве, проходящей ч/з $A = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ и имеющей направляющий в-р $\begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix}$ с единичным модулем

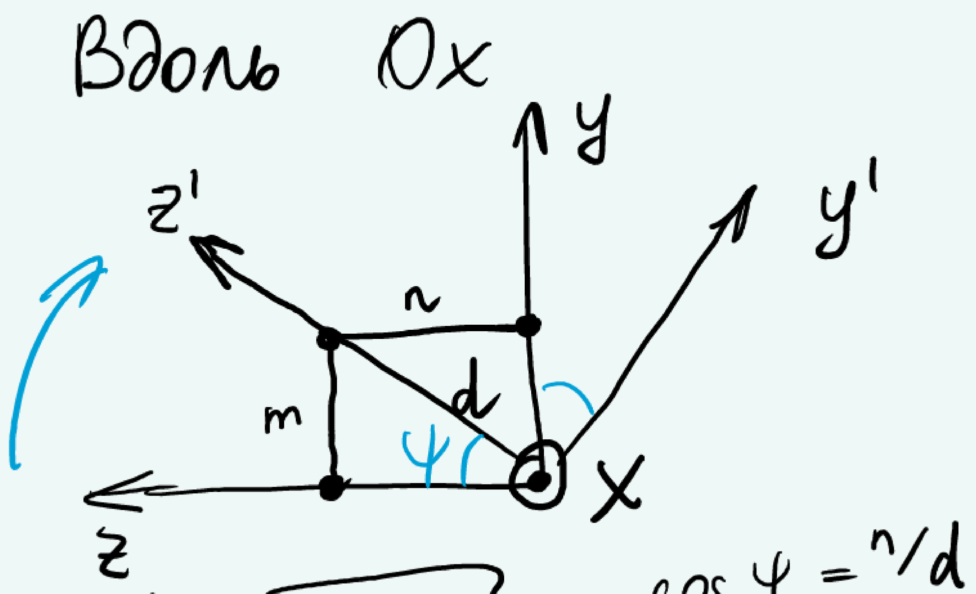
$$M = \underbrace{Q^{-1}}_{\text{преобр-ие в исх. СК}} \cdot \underbrace{R}_{\text{преобр. в новой СК}} \cdot \underbrace{Q}_{\text{матрица перехода в новую СК}}$$, где в новой СК ось z совмещена с прямой L, а её начало расположено в точке A

$$Q = \underbrace{R_L}_{\text{совмещение } Oz \text{ с } L} \cdot \underbrace{T}_{\text{сдвиг центра СК в точку } A}$$



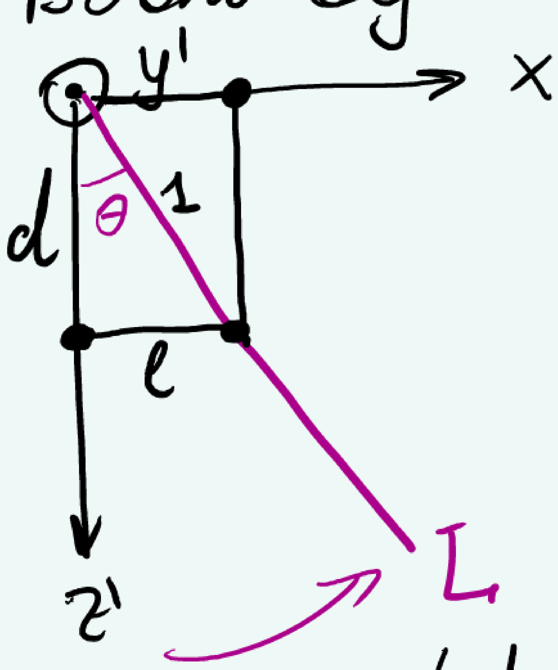
$$R_L = R_y(\theta) \cdot R_x(-\psi)$$

Вдоль Ox



$$d = \sqrt{m^2+n^2} \Rightarrow \cos\psi = n/d, \quad \sin\psi = m/d$$

Вдоль Oy'



$$\cos\theta = d, \quad \sin\theta = l$$

$$R_x(-\psi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n/d & -m/d & 0 \\ 0 & m/d & n/d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R_y(\theta) = \begin{pmatrix} d & 0 & -l & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ l & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ a & b & c & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Итого, $M = Q^{-1} \cdot R \cdot Q = (R_y(\theta) \cdot R_x(-\psi) \cdot T)^{-1} \cdot R \cdot R_y(\theta) \cdot R_x(-\psi) \cdot T$

№3 I-ый поворот — вокруг оси X на $\pi/2$
II-ой поворот — вокруг оси Y на $\pi/2$.
Результ. поворот?

$$Q_1 = \cos\frac{\pi}{4} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt2}{2} + \frac{\sqrt2}{2}\mathbf{i}$$

$$Q_2 = \cos\frac{\pi}{4} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt2}{2} + \frac{\sqrt2}{2}\mathbf{j}$$

$$(1+j)(1+i)$$

$$V_{out} = Q_2 Q_1 V_{in} Q_1^{-1} Q_2^{-1} = Q_2 Q_1 v_{in} (Q_2 Q_1)^{-1}$$

$$Q_2 Q_1 = \frac{1}{2}(1+i+j-k) = \frac12 + \frac12 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \underbrace{\frac12}_{\cos\psi} + \underbrace{\frac{\sqrt3}{2}}_{\sin\psi} \begin{pmatrix} 1/\sqrt3 \\ 1/\sqrt3 \\ -1/\sqrt3 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\psi = \frac{2\pi}{3}, \quad v = \begin{pmatrix} 1/\sqrt3 \\ 1/\sqrt3 \\ -1/\sqrt3 \end{pmatrix}}$$

Теор. отсылки

- Если T — матр. перех. м/у 2-ух СК, R и R' — матрицы ЛП в ССК и НСК, то
  $R = T^{-1} R' T \Leftrightarrow R' = T R T^{-1}$
  $R_x = R_x'$
  $R_{xy} = R_x R_y = R_x (R_x^{-1} R_y' R_x) = R_y' R_x = R_y' R_x'$
- Теорема об оп-ре вращения:
  Если Q и R — нескалярные кватернионы, $Q = |Q|(\cos\frac{\theta}{2} + \xi \sin\frac{\theta}{2})$, то
  1) $R' = Q \circ R \circ Q^{-1}$ — кватернион, вект. часть к-рого $r' = vect(R')$ получается вращением $r = vect(R)$ по конусу вокруг оси $vect(Q)$, причём конец в-ра r описыв. дугу с центром на оси ξ, соответствующую углу θ
  2) $\|R'\| = \|R\|$
  3) $scal(R) = scal(R')$