ТеорДЗ

27 марта 2022 г. 22:35

№1 Построить матрицу поворота на угол φ вокруг точки $A(a,b)$

$$M = S^{-1} R S$$

преобр. в исх. СК; преобр. в новой СК; переход в новую СК

$$R = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & b & 1 \end{pmatrix} \qquad S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -a & -b & 1 \end{pmatrix}$$

№2 Построить матр. поворота на угол φ вокруг прямой L в 3D-пр-ве, проходящей ч/з $A = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ и имеющей направляющий в-р $\begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix}$ с единичным модулем

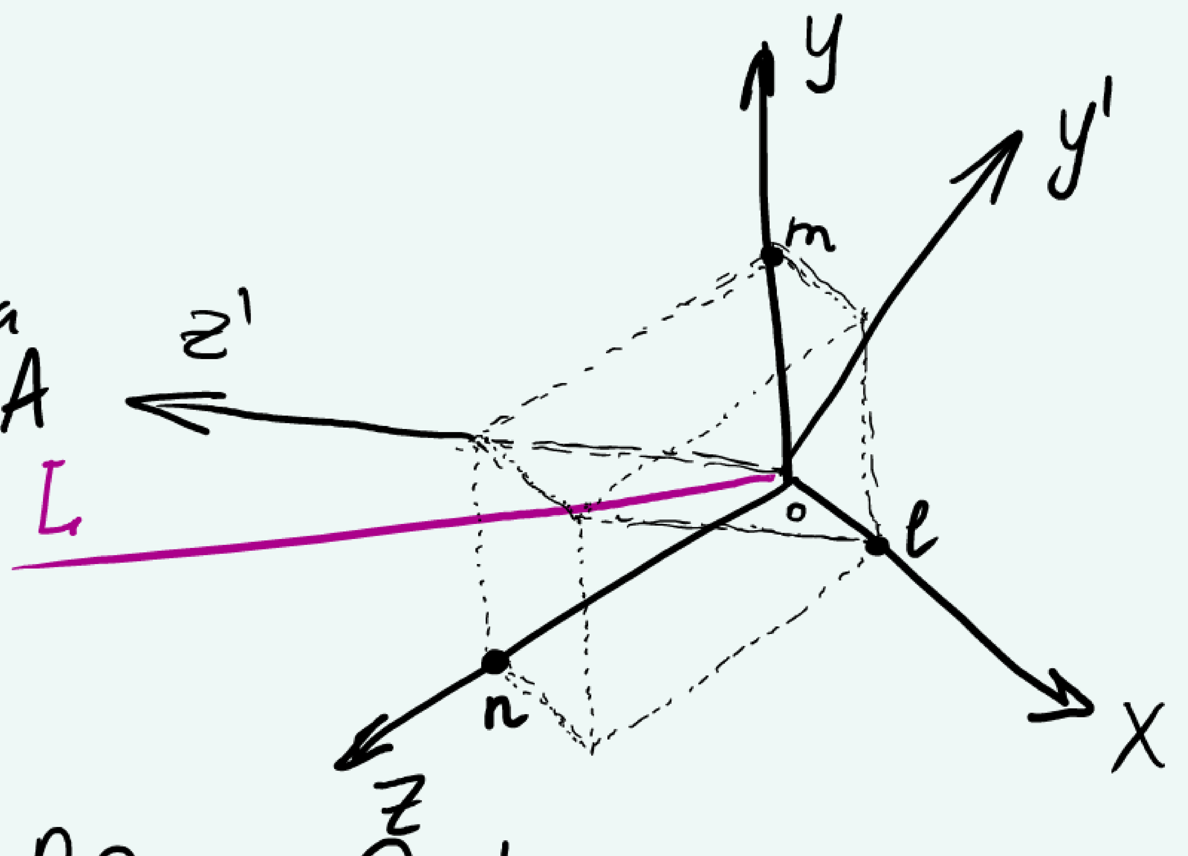
$M = Q^{-1} \cdot R \cdot Q$, где в новой СК ось z совмещена с прямой L, а её начало расположено в точке A

преобр-ие в исх. СК; преобр. в новой СК; матрица перехода в новую СК

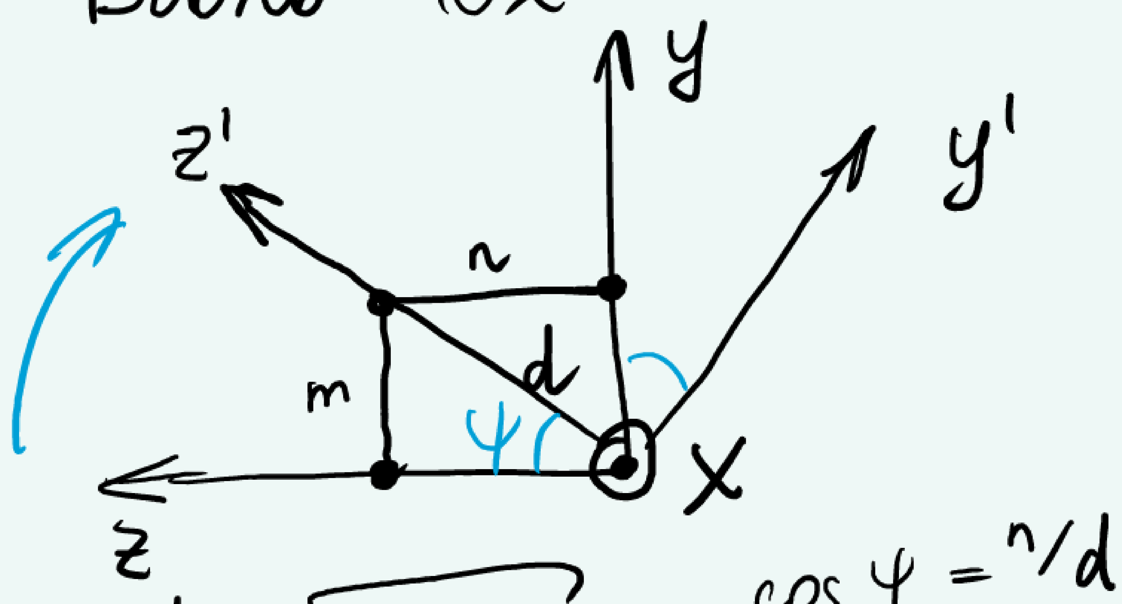
$$Q = R_L \cdot T$$

совмещение Oz с L; сдвиг центра СК в точку A

$$R_L = R_y(\theta) \cdot R_x(-\psi)$$

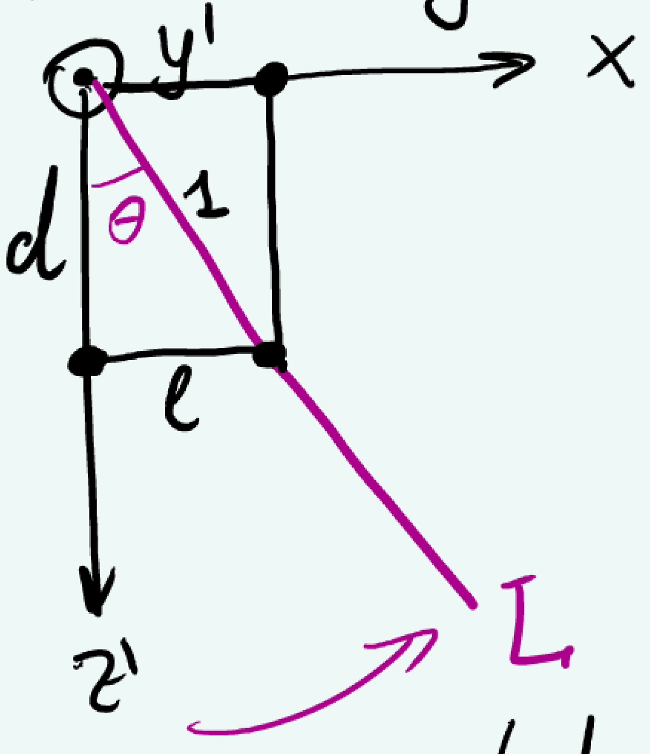


Вдоль Ox



$$d = \sqrt{m^2+n^2} \Rightarrow \begin{matrix} \cos\psi = n/d \\ \sin\psi = m/d \end{matrix}$$

Вдоль Oy'



$$\cos\theta = d$$
$$\sin\theta = l$$

$$R_x(-\psi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n/d & -m/d & 0 \\ 0 & m/d & n/d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R_y(\theta) = \begin{pmatrix} d & 0 & -l & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ l & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ a & b & c & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Итого, $M = Q^{-1} \cdot R \cdot Q = (R_y(\theta) \cdot R_x(-\psi) \cdot T)^{-1} \cdot R \cdot R_y(\theta) \cdot R_x(-\psi) \cdot T$

№3 I-ый поворот – вокруг оси X на $\pi/2$
II-ой поворот – вокруг оси Y на $\pi/2$.
Результ. поворот?

$$Q_1 = \cos\frac{\pi}{4} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt2}{2} + \frac{\sqrt2}{2}\mathbf{i} \qquad (1+j)(1+i)$$

$$Q_2 = \cos\frac{\pi}{4} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt2}{2} + \frac{\sqrt2}{2}\mathbf{j}$$

$$V_{out} = Q_2 Q_1 V_{in} Q_1^{-1} Q_2^{-1} = Q_2 Q_1 V_{in} (Q_2 Q_1)^{-1}$$

$$Q_2 Q_1 = \frac{1}{2}(1 + i + j - k) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \underbrace{\frac{1}{2}}_{\cos\psi} + \underbrace{\frac{\sqrt3}{2}}_{\sin\psi}\begin{pmatrix} 1/\sqrt3 \\ 1/\sqrt3 \\ -1/\sqrt3 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\psi = \frac{2\pi}{3}, \quad v = \begin{pmatrix} 1/\sqrt3 \\ 1/\sqrt3 \\ -1/\sqrt3 \end{pmatrix}}$$