

# Домашнее задание 2 по курсу «Онлайн-методы в машинном обучении»

Срок сдачи: 13 мая, 23:59

Правила оформления домашнего задания.

- Сканы или фотографии решений должны быть объединены в один pdf-файл. Другие форматы (zip, rar, jpg и т. д.) не принимаются.
- Страницы pdf-файла должны иметь правильную ориентацию.
- Допускается решать задачи не по порядку. Однако, если решение одной задачи написано на нескольких страницах, то эти страницы должны идти друг за другом в правильном порядке.
- Название pdf-файла должно иметь формат \*\_hw2.pdf, где вместо \* пишется фамилия студента. Например, *Petrov\_hw2.pdf*.

Решения задач, не соответствующие правилам оформления, могут быть не приняты.

1. Пусть  $R(p) = \|p - p_0\|^2/2$ , где  $p_0 \in \mathbb{R}^N$  – некоторая фиксированная точка. Найдите дивергенцию Брегмана  $B_R(p, v)$ . Пусть  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^N$  – выпуклое замкнутое множество. Докажите, что

$$\arg \min_{p \in \mathcal{D}} B_R(p, v) = \pi_{\mathcal{D}}(v),$$

где  $\pi_{\mathcal{D}}(v)$  – Евклидова проекция  $v$  на  $\mathcal{D}$ .

2. Пусть  $R(p) = \sum_{i=1}^N p_i \log p_i$ . Найдите сопряженную (по Фенхелю) к  $R(p)$  функцию на единичном симплексе  $\Delta_N = \{p \in \mathbb{R}_+^N : \sum_{i=1}^N p_i = 1\}$ :

$$R^*(v) = \max_{p \in \Delta_N} (p^\top v - R(p)).$$

3. Пусть функция  $R(p)$  выпукла и дифференцируема на выпуклом замкнутом множестве  $\mathcal{D}$ . Обозначим через  $R^*(v) = \max_{p \in \mathcal{D}} (p^\top v - R(p))$  сопряженную к  $R(v)$  функцию.

Докажите, что

$$\nabla R(p) \in \arg \max_{v \in V^*} (p^\top v - R^*(v)),$$

где  $V^* = \{v : R^*(v) < \infty\}$ .

4. Рассмотрим функцию  $\varphi(x) = e^{-x}$ . Для каждого  $\eta \in [0, 1]$  найдите

$$H(\eta) = \inf_{\alpha \in \mathbb{R}} C_\eta(\alpha) \quad \text{и} \quad H^-(\eta) = \inf_{\alpha: \alpha(2\eta-1) \leq 0} C_\eta(\alpha),$$

где

$$C_\eta(\alpha) = \eta\varphi(\alpha) + (1 - \eta)\varphi(-\alpha).$$

Вычислите дважды сопряженную функцию

$$\psi = \beta^{**}, \quad \text{где} \quad \beta(\theta) = H^-\left(\frac{1+\theta}{2}\right) - H\left(\frac{1+\theta}{2}\right).$$

5. Пусть в задаче онлайн выпуклой оптимизации функции  $f_t$  линейны при всех  $t \in \mathbb{N}$ , то есть  $f_t(p) = g_t^\top p$ . Докажите, что метод зеркального спуска<sup>1</sup> с квадратичной прокси-функцией эквивалентен алгоритму следования за регуляризованным лидером с линейной функцией потерь и квадратичной регуляризацией.

6. Докажите, что в стохастической задаче о многоруком бандите математическое ожидание числа раз, когда алгоритм UCSB выбирает неоптимальную ручку, после  $T$  итераций ограничено константой, умноженной на  $\ln T$ .

---

<sup>1</sup>В том виде, как он сформулирован в Лекции 7.