Домашнее задание 1 по курсу «Онлайн-методы в машинном обучении»

Срок сдачи: 4 апреля, 23:59

Правила оформления домашнего задания.

- Сканы или фотографии решений должны быть объединены в один pdf-файл. Другие форматы (zip, rar, jpg и т. д.) не принимаются.
- Страницы pdf-файла должны иметь книжную ориентацию.
- Допускается решать задачи не по порядку. Однако, если решение одной задачи написано на нескольких страницах, то эти страницы должны идти друг за другом в правильном порядке.
- Название pdf-файла должно иметь формат $*\_hw1.pdf$, где вместо $*$ пишется фамилия студента. Например, $Petrov\_hw1.pdf$.

Решения задач, не соответствующие правилам оформления, могут быть не приняты.

1. Докажите, что

а) квадратичная функция $f(x) = \frac{1}{2}x^\top Ax$, $A \succeq \lambda I$, является λ-сильно выпуклой на R^n относительно евклидовой нормы;

б) энтропийная функция $g(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \log x_i$ является 1-сильно выпуклой на единичном симплексе $\{x \in \mathbb{R}_+^n : \|x\|_1 = 1\}$ относительно ℓ_1- нормы.

Указание. Воспользуйтесь неравенством Пинскера для дискретных распределений (само неравенство доказывать не нужно).

2. Пусть при любом предсказании и при любом исходе наблюдаемые потери неотрицательны и не превосходят 1. Докажите, что регрет алгоритма следования за лидером ограничен числом раз, когда лидер менялся с течением времени.

3. Пусть $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ – дважды дифференцируемая, L-Липшицева, λ-сильно выпуклая функция. Докажите, что для любого $\eta \in [0, \lambda/L^2]$ функция f является экспоненциально вогнутой с константой η.

4. Показать, что алгоритм Hedge есть частный случай алгоритма экспоненциального взвешивания экспертных решений.

Указание. Рассмотреть в качестве пространства исходов $\mathcal{Y} = [0,1]^N$, состоящее из наборов потерь экспертов $\bar{l} = (l_1, \ldots, l_N)$, где N – число экспертов. В качестве пространства решений $\mathcal{D}$ рассмотреть симплекс $\Delta_N = \{\overline{p} \in \mathbb{R}^N_+ : \sum\limits_{i=1}^{N} p_i = 1\}$ вероятностных распределений $\overline{p} = (p_1, \ldots, p_N)$, а в качестве функции потерь рассмотреть функцию $\ell(\bar{l}, \overline{p}) = \bar{l} \cdot \overline{p}$ – скалярное произведение векторов $\bar{l}$ и $\overline{p}$.

5. Определим жадный предсказатель как предсказатель, минимизирующий наихудший возможный регрет:

$$\widehat{p}_t = \arg\min_{p \in \mathcal{D}} \sup_{y_t \in \mathcal{Y}} \max_{1 \leqslant i \leqslant N} R_{i,t},$$

где $R_{i,t} = \widehat{L}_t - L_{i,t} = \sum\limits_{t=1}^{T} \ell(\widehat{p}_t, y_t) - \sum\limits_{t=1}^{T} \ell(p_{i,t}, y_t)$ – регрет относительно i-го эксперта. Покажите, что существует функция потерь и существуют эксперты, для которых сущестует такая последовательность исходов, что $T^{-1} \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant N} R_{i,T}$ не стремится к нулю при $T \to \infty$.

Указание. Достаточно рассмотреть $\mathcal{Y} = \mathcal{D} = [0,1]$, $\ell(\widehat{p}, y) = |\widehat{p} - y|$ и $N = 2$.

6. Пусть множество исходов есть единичный шар в некотором гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$: $\mathcal{Y} = \{y \in \mathcal{H} : \|y\| \leqslant 1\}$. Пусть множество экспертов $\mathcal{E}$ состоит из всевозможных постоянных экспертов: $\mathcal{E} = \{E \in \mathcal{Y} : p_t^E = E \quad \forall t \in \mathbb{N}\}$. Докажите следующую оценку регрета для алгоритма следования за лидером в случае квадратичной функции потерь:

$$\widehat{L}_T - \inf_{E \in \mathcal{E}} L_{E,T} \leqslant \sum_{t=1}^{T} \frac{8}{t} \leqslant 8(1 + \log T).$$

7. Пусть множество исходов есть единичный шар в $\mathbb{R}^d : \mathcal{Y} = \{y \in \mathbb{R}^d : \|y\| \leqslant 1\}$. Пусть множество экспертов $\mathcal{E}$ состоит из всевозможных постоянных экспертов: $\mathcal{E} = \{E \in \mathcal{Y} : p_t^E = E \quad \forall t \in \mathbb{N}\}$. Пусть функция потерь линейна: $\ell(p, y) = \langle p, y \rangle$. Рассмотрим следующую можификацию алгоритма следования за регуляризованным лидером. Пусть общее число итераций $T = 2^m$. На итерациях с номерами $t \in \{2^j, \ldots, 2^{j+1} - 1\}$, $0 \leqslant j \leqslant m - 1$, алгоритм следования за регуляризованным лидером запускается с параметром $\eta = 2^{-\frac{j+1}{2}}$ и регулязатором $R(p) = 0.5\|p\|^2/\eta$. Докажите, что регрет модифицированного алгоритма удовлетворяет неравенству

$$\widehat{L}_T - \inf_{E \in \mathcal{E}} L_{E,T} \leqslant \frac{2\sqrt{T}}{\sqrt{2} - 1}.$$

Указание. Воспользуйтесь оценкой регрета для алгоритма следования за регуляризованным лидером с постоянным параметром η:

$$\widehat{L}_T - \inf_{E \in \mathcal{E}} L_{E,T} \leqslant \frac{1}{2\eta} + \eta \sum_{t=1}^{T} \|y_t\|^2.$$

Замечание. Выбор параметра в алгоритме следования за регуляризованным лидером требует знания горизонта предсказания T. Модифицированный алгоритм не имеет такого недостатка, причем его регрет больше лишь в константное число раз. Рассмотренный прием называется Doubling Trick.

8. Предположим, что функция потерь ℓ выпукла по первому аргументу и принимает значения из отрезка $[0, 1]$. Докажите, что для любого $\eta > 0$ регрет алгоритма экспоненциального взвешивания удовлетворяет неравенству

$$\widehat{L}_T \leqslant \frac{\eta L_T^* + \log N}{1 - e^{-\eta}},$$

где $L_T^* = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant N} L_{i,T}$.

Указание. Воспользуйтесь неравенством

$$\log \mathbb{E} e^{sX} \leqslant (e^s - 1)\mathbb{E} X$$

Замечание. Из данного упражнения следует, что если взять $\eta = \log(1+\sqrt{(2\log N)/L_T^*})$, то

$$\widehat{L}_T - L_T^* \leqslant \sqrt{2L_T^* \log N} + \log N$$

то есть при малых значениях L_T^* получается более точная оценка.