TUGAS 2 SPSF

Sebuah partikel bermuatan q bergerak dengan kecepatan

$$\vec{v}(t) = v_x(t)\vec{\imath} + v_y(t)\vec{\jmath}$$

dalam ruang bermedan magnet konstan

$$\vec{B} = -\vec{k}B_z$$

Tentukan gerak partikel.

---

a. Tuliskan hukum newtonnya.

Berdasarkan Hukum II Newton, yakni

$$\Sigma\vec{F} = m\vec{a} \tag{1}$$

Karena yang berlaku pada partikel muatan tersebut hanyalah gaya yang diakibatkan oleh adanya medan magnet, yakni

$$\overrightarrow{F_B} = q\vec{v} \times \vec{B} \tag{2}$$

Maka resultan gaya yang dihasilkan akan menjadi seperti berikut.

$$\overrightarrow{F_B} = q\vec{v} \times \vec{B} = m\vec{a} \tag{3}$$

$$q\left(v_x(t)\hat{\imath} + v_y(t)\hat{\jmath}\right) \times \left(-\hat{k}B_z\right) = m\frac{d\vec{v}(t)}{dt} \tag{4}$$

$$q\left(v_x(t)\hat{\imath} \times \left(-\hat{k}B_z\right) + v_y(t)\hat{\jmath} \times \left(-\hat{k}B_z\right)\right) = m\frac{d\vec{v}(t)}{dt} \tag{5}$$

$$q\left(-v_y(t)B_z\hat{\imath} + v_x(t)B_z\hat{\jmath}\right) = m\frac{d\vec{v}(t)}{dt} \tag{6}$$

b. Tuliskan persamaan diferensial terkopel antara kecepatan pada kedua arah.

Apabila dari persamaan (6) ditinjau pada tiap komponen, maka akan diperoleh persamaan diferensial terkopel pada arah horizontal sebagai berikut,

$$-qv_y(t)B_z = m\frac{dv_x(t)}{dt} \tag{7}$$

$$\frac{-qB_z}{m}v_y(t) = \frac{dv_x(t)}{dt} \tag{8}$$

dan persamaan diferensial terkopel pada arah vertikal sebagai berikut,

$$qv_x(t)B_z = m\frac{dv_y(t)}{dt} \tag{9}$$

$$\frac{qB_z}{m}v_x(t) = \frac{dv_y(t)}{dt} \tag{10}$$

c. **Selesaikan kedua persamaan diferensial sehingga dapat diperoleh $V_x(t)$, $V_y(t)$, x(t), dan y(t). Lakukan secara teori.**

Apabila persamaan (8) dan (10) didiferensialkan, maka akan diperoleh,

$$\frac{-qB_z}{m}\frac{dv_y(t)}{dt} = \frac{d^2v_x(t)}{d^2t} \tag{11}$$

$$\frac{qB_z}{m}\frac{dx(t)}{dt} = \frac{d^2v_y(t)}{d^2t} \tag{12}$$

Kemudian, persamaan (10) disubstitusikan pada persamaan (11) serta persamaan (8) disubstitusikan pada persamaan (12) dan diperoleh persamaan sebagai berikut,

$$-\left(\frac{qB_z}{m}\right)^2 v_x(t) = \frac{d^2v_x(t)}{d^2t} \tag{13}$$

$$-\left(\frac{qB_z}{m}\right)^2 v_y(t) = \frac{d^2v_y(t)}{d^2t} \tag{14}$$

Solusi yang diperoleh apabila terdapat diferensial orde 2, sebagai berikut

$$\frac{d^2x}{d^2t} = -a^2x \tag{15}$$

adalah

$$x(t) = A_1\ cos\ cos\ (at)\ \ + A_2\ sin(at) \tag{16}$$

Maka persamaan (13) dan persamaan (14) akan memiliki solusi sebagai berikut,

$$v_x(t) = k_1\ \ cos\ cos\ \left(\frac{qB_z}{m}t\right)\ + k_2\ sin\ (\frac{qB_z}{m}t) \tag{17}$$

$$v_y(t) = k_3\ \ cos\ cos\ \left(\frac{qB_z}{m}t\right)\ + k_4\ sin\ (\frac{qB_z}{m}t) \tag{18}$$

atau dapat ditulis sebagai berikut,

$$v_x(t) = A\ \ sin\ sin\ \left(\frac{qB_z}{m}t + \phi\right) \tag{19}$$

$$v_y(t) = -A\ \ cos\ cos\ \left(\frac{qB_z}{m}t + \phi\right) \tag{20}$$

dengan A merupakan amplitudo dan ϕ merupakan beda fasa. A akan menjadi kecepatan tangensial dari rotasi partikel apabila ditinjau $v_x^2 + v_y^2 = A^2$ dan didapat $v_z = 0$. Apabila diasumsikan besar amplitudo (A) sebesar 15, beda fasanya(ϕ) 0, muatan(q) dan massa(m) partikel sebesar 1 serta medan magnet(B_z) sebesar 1, maka dapat dibuat grafik $v_x = 15\ \ sin\ sin\ (t)$ dan $v_y = -15\ \ cos\ cos\ (t)$ sebagai berikut,

d. Perolehlah solusi numeriknya.

Dengan menggunakan persamaan (8) dan (10), yakni

$$\frac{-qB_z}{m}v_y(t) = \frac{dv_x(t)}{dt} \tag{8}$$

$$\frac{qB_z}{m}v_x(t) = \frac{dv_y(t)}{dt} \tag{10}$$

dan dengan mengasumsikan muatan(q) dan massa(m) partikel sebesar 1 serta medan magnet(B_z) sebesar 1, maka solusi numerik dengan menggunakan Runge-Kutta orde ke 4 dapat diperoleh sebagai berikut.

e. Bandingkan hasil kedua pendekatan teori dan numerik.

Antar kedua pendekatan tersebut menghasilkan hasil yang sama.