Escuela Superior de Física y Matemáticas

Instituto Politécnico Nacional

Tarea 5 - Optimización No Lineal

Camara Medina Cynthia Lilian

Alanis González Edzon Omar

20 de abril de 2023

Investigación

1. Dada una matriz simétrica, explique cómo se puede determinar si esta es o no definida positiva.

   Una matriz simétrica real A es:

   - Definida **positiva**: Si $XA \quad X^t \geq 0$ para cualquier vector $X = (x_1, \ldots, x_n) \in Mat_{1\times n}(\mathbb{R})$
   - Definida **negativa**: Si $XA \quad X^t \leq 0$ para cualquier vector $X = (x_1, \ldots, x_n) \in Mat_{1\times n}(\mathbb{R})$

     Por el criterio de Sylvester

     Teorema 1 (Criterio de Sylvester)**.** *Sea $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ una matriz simétrica real, y*

     $$\Delta_j = det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jj} \end{pmatrix}$$

     entonces

     *I. Si $\Delta_j > 0$ para $j = 1, \ldots, n$, entonces A es definida **positiva**.*

     *II. Si $(-1)^j\Delta_j < 0$ para $j = 1, \ldots, n$, entonces A es definida **negativa**.*

2. Investigue la definición de una función convexa de varias variables.

   Una función $f(x_1, \ldots, x_n)$ es convexa si cumple las siguientes dos condiciones:

   - El dominio de la función $dom(f)$ es un conjunto convexo en R^n
   - Para todo $b_1 = (b_{11}, \ldots, b_{1n}), b_2 = (b_{21}, \ldots, b_{2n})$ puntos en $dom(f)$ y $\alpha \in [0, 1]$ se cumple que
     $$f(\alpha b_1 + (1-\alpha)b_2) \leq \alpha f(b_1) + (1-\alpha)f(b_2)$$

3. Enuncie e ilustre dos propiedades de las funciones convexas en $\mathbb{R}^n$

   - Si una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es convexa y derivable, la minimización de la función es equivalente a la solución de $\nabla f(x) = 0$
   - Una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de la clase C^2 es convexa si y solo si su matriz Hessiana $\nabla^2 f(x)$ es semi definida positiva $\forall x \in \mathbb{R}^n$

Ejercicios

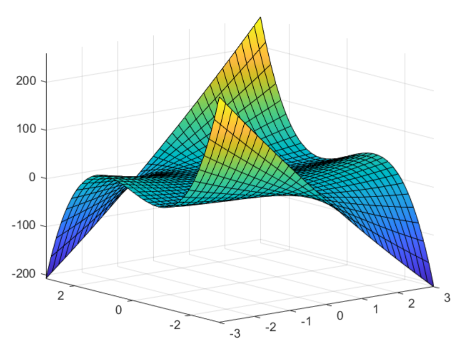
Condiciones de optimalidad para varias variables

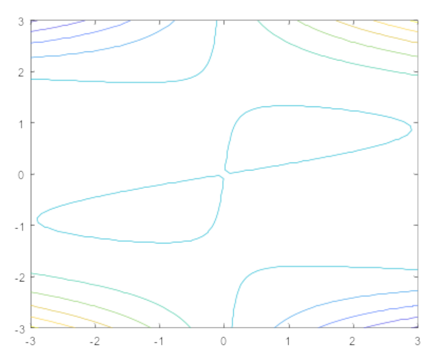
1. Hallar y clasificar todos los puntos estacionarios del siguiente problema:

$$f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 4x_1x_2^3 - 10x_1x_2 + x_2^2$$

```
 Matriz 1
 En el punto [0, 0]
La matriz evaluada en el punto es
4.0000   -10.0000
-10.0000   2.0000

La matriz es indefinida
[0, 0] es un punto de inflexion


 Matriz 2
 En el punto [2, 1]
La matriz evaluada en el punto es
4.0000   -1.1355
-1.1355   33.2259

La matriz es definida positiva
[2, 1] es un minimo de la funcion
```

```
 Matriz 3
 En el punto [0, 2]
La matriz evaluada en el punto es
4.0000   21.1355
21.1355   -3.8925

La matriz es indefinida
[0, 2] es un punto de inflexion
```

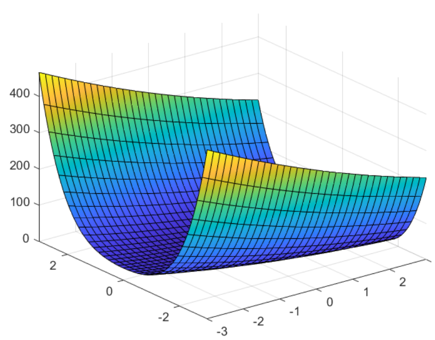


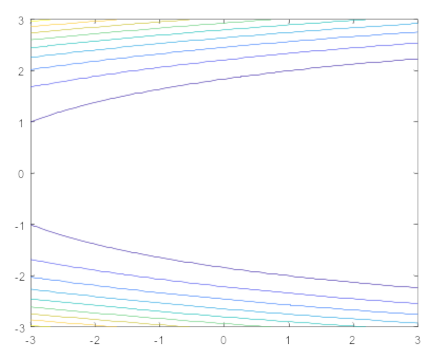


2. Hallar y clasificar todos los puntos estacionarios del siguiente problema:

$$f(x_1, x_2) = (x_1 - 2)^2 + (x_1 - 2x_2^2)^2$$

```
 Matriz 1
 En el punto [1, 0]
[4,  0]
[0, -8]

La matriz es indefinida
[1, 0] es un punto de inflexion


 Matriz 2
 En el punto [2, -1]
[4,  8]
[8, 32]

La matriz es definida positiva
[2, -1] es un minimo de la funcion


 Matriz 3
 En el punto [2, 1]
[ 4, -8]
[-8, 32]

La matriz es definida positiva
[2, 1] es un minimo de la funcion
```

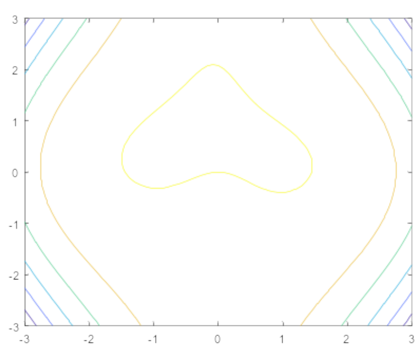


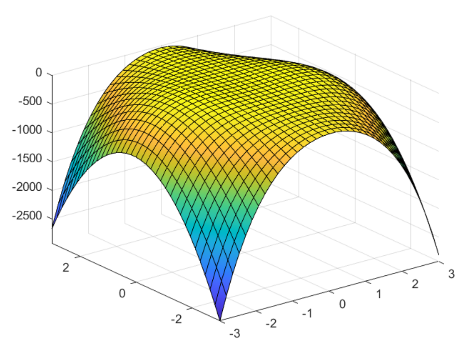


3. Hallar y clasificar todos los puntos estacionarios del siguiente problema:

$$f(x_1, x_2) = 25x_1^2 - 12x_1^4 - 6x_1x_2 + 25x_2 - 24x_1^2x_2^2 - 12x_2^2$$

```
 Matriz 1
 En el punto [-9.442980e-01, 1.101739e+01]
La matriz evaluada en el punto es
-5904.7830   992.7551
992.7551   -66.8015

La matriz es definida negativa
[-9.442980e-01, 1.101739e+01] es un maximo de la funcion
 Matriz 2
 En el punto [3.240060e-01, 1.905514e+01]
La matriz evaluada en el punto es
-17393.8384   -598.7021
-598.7021   -29.0390

La matriz es indefinida
[3.240060e-01, 1.905514e+01] es un punto de inflexion
 Matriz 3
 En el punto [9.624690e-01, 6.739310e+00]
La matriz evaluada en el punto es
-2263.4723   -628.6922
-628.6922   -68.4646

La matriz es definida negativa
[9.624690e-01, 6.739310e+00] es un maximo de la funcion
```





Programación

```
%%% MATRIZ HESSIANA %%%

clear;
clc;

f = input('\n Ingresar la funcion:\n');
%Funcion anonima con indices

v = input('\n Ingresa el punto x para evaluar:\n');
%Ingresar como vector


h = 1E-5;
n = length(v); %Tamano del vector de valores iniciales
a = h.*eye(n); %Matriz identidad

Hess=ones(n);

for k= 1:n %Sera el que controle respecto a que variable se esta ...
    derivando
     for j=1:n
         Hess(j,k) = (1/(h^2))*(f(v+a(k,:)+a(j,:))- f(v+a(k,:))- ...
             f(v+a(j,:))+f(v));
         Entrada=round(Hess,3,"significant");
     end % for j
end %for k

fprintf('\n Matriz Hessiana en el punto dado es \n'); %Hessiana
disp(Entrada);
```

Bibliografía

- https://ocw.ehu.eus/pluginfile.php/42576/mod_page/content/1/tema4_7.pdf
- http://www.ifp.illinois.edu/~angelia/L3_convfunc.pdf
- https://wiki.math.ntnu.no/_media/tma4180/2016v/note2.pdf