Tarea 2 - Optimización no Lineal

Camara Medina Cynthia Lilian
Reyes Zamora Ollin
Alanis González Edzon Omar

20 de abril de 2023

Índice general

1. Teoría

1.1. Enuncie el Teorema de Taylor para funciones de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Escriba la demostración o un esbozo de ésta.

Sea f continua en $[a, b]$ y con derivadas hasta de orden n continuas también en este intervalo cerrado; supóngase que $f^{(n+1)}(x)$ existe en $(a.b)$ entonces para x & $x_{0\hat{i}}(a, b)$ se tiene

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_o) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x - x_o)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + E_n$$

donde $E_n = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$ & c es un punto $[x, x_0]$

Demostración. Primero demostremos que si $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$, entonces el polinomio también puede escribirse como

$$p(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)^2 + ... + b_n(x - x_0)^n$$

Procedemos por inducción

para n = 0

$$p(x) = a_0$$

para n = 1

$$p(x) = a_0 + a_1x = a_0 + a_1(x - x_0 + x_0) = a_0 + a_1x_0 + a_1(x - x_0)$$
$$\Rightarrow p(x) = b_0 + b_1(x - x_0)$$

ahora suponemos cierto para $n = k$, es decir se cumple que si

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_kx^k$$

entonces implica que

$$p(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)^2 + ... + b_k(x - x_0)^k$$

ahora probemos que se cumple para $n = k + 1$

$$\begin{aligned}
p(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_kx^k + a_{k+1}x^{k+1} \\
&= a_0 + x(a_1 + a_2x + ... + a_kx^{k-1} + a_{k+1}x^k) \\
&= a_0 + (x - x_0 + x_0)(c_0 + c_1(x - x_0) + ... + c_2(x - x_0)^k) \\
&= a_0 + c_0(x - x_0) + c_1(x - x_0)^2 + ... + c_k(x - x_0)^{k+1} + c_0x_0 + c_1x_0(x - x_0) \\
&+ ... + c_kx_0(x - x_0)^k \\
&= b_0 + b_1(x - x_0) + ... + b_{k+1}(x - x_0)^{k+1}
\end{aligned}$$

por lo que

$$f(x) = p(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)^2 + ... + b_m(x - x_0)^m$$

Ahora tenemos que demostrar que $b_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, \quad \forall n = 0, 1, 2, ..., m$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{m} b_n(x - x_0)^n \to f(x_0) = b_0$$

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{m} nb_n(x - x_0)^{n-1} \to f'(x_0) = b_1$$

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{m} n(n-1)b_n(x - x_0)^{n-2} \to f''(x_0) = 2 \cdot 1b_2 \to b_2 = \frac{f''(x_0)}{2!}$$

$$f'''(x) = \sum_{n=3}^{m} n(n-1)(n-2)b_n(x - x_0)^{n-3} \to f'''(x) = 3 \cdot 2 \cdot 1b_3 \to b_3 = \frac{f'''(x_0)}{3!}$$

$$...$$

$$f^{(m)}(x) = \sum_{n=m}^{m} n(n-1)...(n-m+1)b_n(x - x_0)^{n-m} \to f^{(m)}(x_0) = m! \cdot b_m \to b_m = \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}$$

$$f^{(m+1)}(x_0) = 0$$

■

1.1.1. Explique con sus propias palabras y un ejemplo la importancia del teorema anterior.

Dado un polinomio cualquiera podemos expresarlo en potencias de $(x - x_0)$ para cualquier x_0.

Ejemplo:

$$7x^3 + x^2 + 8 = 16 + 23(x-1)^2 + 22(x-1)^2 + 7(x-1)^3, \quad x_0 = 1$$

$$\begin{gathered} P(x) = 7x^3 + x^2 + 8P(1) = 16 \\ P'(x) = 21x^2 + 2xP'(1) = 23 \\ P''(x) = 42x + 2P''(1) = 44 \\ P'''(x) = 42P'''(1) = 42 \end{gathered}$$

$$f(x) = 16 + 23(x-1) + \frac{44}{2!}(x-1)^2 + \frac{42}{3!}(x-1)^3$$

1.2. Escriba las definiciones de los conceptos de *conjunto abierto*, *conjunto cerrado* y *vecindad*, para $\mathbb{R}^n$.

1.2.1. Conjunto Abierto

Se incluyen todos los puntos comprometidos entre los limites, sin considerar los limites.

1.2.2. Conjunto Cerrado

Se incluyen todos los puntos comprometidos entre los limites, considerando los limites.

1.2.3. Vecindad

Conjunto que contiene al punto y a un conjunto de puntos cercanos a él.

V es vecindad de p, si un disco alrededor de $p \in V$

1.3. Escriba las definiciones de los conceptos de *óptimo local* y *óptimo global* de una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dé un ejemplo.

1.3.1. Óptimo Local

x_0 es un óptimo local (extremo absoluto) si $\forall x \in f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cumple que $f(x_0) \geq f(x)$(máximo) o $f(x_0) \leq f(x)$(mínimo).

1.3.2. Óptimo Global

x_0 es un óptimo global (extremo relativo) si existe un entorno de x_0, $U(x_0)$ tal que $\forall x \in U(x_0) \cap f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cumple que $f(x_0) \geq f(x)$(máximo) o $f(x_0) \leq f(x)$(mínimo).

1.4. Escriba las definiciones de los conceptos de *óptimo local* y *óptimo global* de una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Dé un ejemplo.

1.4.1. Óptimo Local

Un punto $x^* \in F$ se denomina un óptimo local del problema de optimización si existe un entorno de x^* tal que para cualquier otro punto $x \in F$ del entorno $J(x^*) \leq J(x)$ pueden existir varios mínimos locales en una misma región.

1.4.2. Óptimo Global

Un punto x^* se denomina un óptimo global del problema de optimización si para cualquier punto x del conjunto factible $J(x^*) \leq J(x)$. Solamente existe un óptimo global en una función, debido a que este es el punto óptimo de la función.

1.5. Escriba la definición del *gradiente* de una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Dé un ejemplo.

Es el vector cuyas proyecciones sobre los ejes de coordenadas son las correspondientes derivadas parciales de dicha función. Se denomina por ∇f.

Ejemplo:

El gradiente de la función $f(x, y, z)$ en el punto (x_0, y_0, z_0) es:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0), \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)\right)$$

Cada derivada parcial en el punto (x_0, y_0, z_0) se llama componente del gradiente en ese punto.

1.6. Escriba la definición de la derivada direccional de una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Dé un ejemplo.

La derivada de una función, en la dirección de un vector dado, representa la tasa de cambio de la función en la dirección de dicho vector. Este concepto generaliza las derivadas parciales, puesto que estas son derivadas direccionales según la dirección de los respectivos ejes coordenados.

Ejemplo:

$$f(x, y) = -x^2 - y^2 + 18$$
$$u = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)\hat{i} + \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\hat{j}$$

2. Programación

Escriba un programa, en Matlab/Octave, que tome como parámetros una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y un punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y devuelva una aproximación al vector gradiente

$$\nabla f(x_0) \in \mathbb{R}^n$$

evaluado en el punto x_0.

- Lleve a cabo la programación de manera que el valor de n no sea requerido como parámetro.
- El gradiente debe aproximarse numéricamente (no simbólicamente), es decir debe hacerse usando diferencias finitas.
- Muestre con un ejemplo numérico particular con $n = 4$, usando el gradiente calculado algebraicamente, que su programa aproxima correctamente los valores.

2.0.1. Código Matlab

Ejemplo para la función $f(x_n) = x_1 x_2^3 - x_3^4 - x_4 x_2$ en el punto $x_0 = (2, 3, 4, 5)$

```
Ingrese la funcion:
Use (x(1),x(2),...,x(n)) como variables

f(x_n) = x(1)*x(2)^2-x(3)^4-x(4)*x(2)
Ingresa el vector x0
[2 3 4 5]

El vector gradiente de la funcion:
f(x_n)=x(1)*x(2)^2-x(3)^4-x(4)*x(2)
es:
    9.0000     7.0000  -256.1600    -3.0000
```

Ejemplo para la función $f(x_n) = x_1^3 + x_2^5 x_5^4 - 2x_1^7 - 8x_3 x_4^2$ en el punto $x_0 = (7, 6, 5, 4, 3)$

```
Ingrese la funcion f
Use (x(1),x(2),...,x(n)) como variables

f(x_n) = x(1)^3 + x(2)^5*x(5)^4-2*x(1)^7-8*x(3)*x(4)^2
Ingresa el vector x0
[7 6 5 4 3]

El vector gradiente de la funcion:
f(x_n)=x(1)^3 + x(2)^5*x(5)^4-2*x(1)^7-8*x(3)*x(4)^2
es:
1.0e+06 *

   -1.6486    0.5252   -0.0001   -0.0003    0.8407
```