Escuela Superior de Física y Matemáticas

Instituto Politécnico Nacional

Tarea 6 - Optimización No Lineal

Camara Medina Cynthia Lilian
Reyes Zamora Ollin
Alanis González Edzon Omar
Mendoza Urrusquieta Jair Natael

20 de abril de 2023

1. Método de Newton

Aproximar el óptimo del siguiente problema mediante el método de Newton. Hacer las iteraciones .ª mano". Comience las iteraciones en el punto $x^{(0)} = (-10, -10, 10)$. No es necesario que reporte todos los cálculos ni todos los detalles, basta con poner resultados parciales de las iteraciones (no hacer más de cinco).

Minimizar

$$f(x) = 3x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3 - 6x_1 - 4x_2 - 2x_3$$

Definimos

- $f = @(x)3 * x(1)^2 + 2 * x(2)^2 + x(3)^2 - 2 * x(1) * x(2) - 2 * x(1) * x(3) + 2 * x(2) * x(3) - 6 * x(1) - 4 * x(2) - 2 * x(3)$
- $x0 = [10, -10, 10]$
- $e = 0.001$
- MNewtondk(f,x0,e)

El resultado fue:

Iteracion 1

vector

$$gk = \begin{bmatrix} -54.00 & 44.00 & 22.00 \end{bmatrix}^T$$

vector $H =$

$$\begin{bmatrix} 6.0000 & -2.0000 & -2.0000 \\ -2.0000 & 4.0000 & 2.0000 \\ -2.0000 & 2.0000 & 2.0000 \end{bmatrix}$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones dado por $H = dk$

$$dk = \begin{bmatrix} -7.9999 & 11.0000 & -7.9999 \end{bmatrix}$$

Entonces calculamos $x^1 = x^0 + dk$

$$x^1 = \begin{bmatrix} 2.0001 & 1.0000 & 2.0001 \end{bmatrix}$$

Calculamos el nuevo gradiente $g(1)$

$$g(1) = \begin{bmatrix} 0.2702 & 0.0219 & 0.0053 \end{bmatrix}$$

$$k^1 = [255, 1]^T$$

$$ans = \begin{bmatrix} 2.0001 & 1.0000 & 2.0001 \end{bmatrix}$$

Probando así que este método encuentra en una sola iteración el mínimo global de cualquier función cuadrática.

2. Comprobación de Métodos

2.1. Newton vs Cauchy

Programar en Octave (o Matlab) el método de Newton, que vimos en clase, para aproximar el mínimo del siguiente problema:

$$f(x_1, x_2) = \left(x_2 - \frac{5.1}{4\pi^2} x_1^2 + \frac{5x_1}{\pi} - 6 \right)^2 + 10 \left(1 - \frac{1}{8\pi} \right) cos(x_1) + 10$$

Iteración 1

Calculamos el vector Gradiente para posteriormente calcular el vector dirección gk.

$$V_{gk} = -g(x_0) = [-748.95 \quad 31.98]^T$$

Calculamos la Hessiana evaluada en el punto x_0.

$$H(x_0) = \begin{bmatrix} 1.9137 & -0.0472 \\ -0.0472 & 0.0020 \end{bmatrix}$$

Ahora resolvemos el sistema de ecuaciones dado por $H(x_0)[x \ y]^T = V_{gk}$ para obtener d_k.

$$\begin{array}{ccl} 1.9137x & -0.0472y & = -748.95 \\ -0.0472x & 0.0020y & = 31.98 \end{array}$$

$$d_k = [0.0064 \quad 16.1436]$$

Calculamos $x_1 = x_0 + d_k$ y posteriormente calculamos el nuevo vector gradiente $g(x_1)$

$$x_1 = [1.0064 \quad 17.1436]$$

$$g(x_1) = [-5.1064 \quad - 0.0010]$$

Iteración 2

Calculamos el vector Gradiente para posteriormente calcular el vector dirección gk.

$$V_{gk} = -g(x_1) = [5.11 \quad 0]^T$$

Calculamos la Hessiana evaluada en el punto x_1.

$$H(x_1) = \begin{bmatrix} 1.1241 & -0.0475 \\ -0.0475 & 0.0020 \end{bmatrix}$$

Ahora resolvemos el sistema de ecuaciones dado por $H(x_1)[x\ y]^T = V_{gk}$ para obtener d_k.

$$\begin{array}{lll} 1.1241x & -0.0472y & = 5.11 \\ -0.0472x & 0.0020y & = 0 \end{array}$$

$$d_k = [-1.7205 \quad -40.8419]$$

Calculamos $x_2 = x_1 + d_k$ y posteriormente calculamos el nuevo vector gradiente $g(x_2)$

$$x_2 = [-0.7141 \quad -23.6984]$$

$$g(x_2) = [-1.4535 \quad -0.0745]$$

Iteración 3

Calculamos el vector Gradiente para posteriormente calcular el vector dirección gk.

$$V_{gk} = -g(x_2) = [1453.51 \quad 74.50]^T$$

Calculamos la Hessiana evaluada en el punto x_2.

$$H(x_2) = \begin{bmatrix} 2.6356 & 0.0391 \\ 0.0391 & 0.0020 \end{bmatrix}$$

Ahora resolvemos el sistema de ecuaciones dado por $H(x_2)[x\ y]^T = V_{gk}$ para obtener d_k.

$$\begin{array}{lll} 2.6356x & 0.0391y & = 1453.51 \\ 0.0391x & 0.0020y & = 74.50 \end{array}$$

$$d_k = [-0.0021 \quad 37.2912]$$

Calculamos $x_3 = x_2 + d_k$ y posteriormente calculamos el nuevo vector gradiente $g(x_3)$

$$x_3 = [-0.7161 \quad 13.59291]$$

$$g(x_3) = [3.9668 \quad -0.0010]$$

Iteración 4

Calculamos el vector Gradiente para posteriormente calcular el vector dirección gk.

$$V_{gk} = -g(x_3) = [-3.97 \quad 0]^T$$

Calculamos la Hessiana evaluada en el punto x_3.

$$H(x_3) = \begin{bmatrix} 764.6380 & 39.2273 \\ 39.2273 & 2 \end{bmatrix}$$

Ahora resolvemos el sistema de ecuaciones dado por $H(x_3)[x\ y]^T = V_{gk}$ para obtener d_k.

$$\begin{array}{lll} 764.6380x & 39.2273y & = -3.97 \\ 39.2273x & 2y & = 0 \end{array}$$

$$d_k = [0.8387 \quad -16.4499]$$

Calculamos $x_4 = x_3 + d_k$ y posteriormente calculamos el nuevo vector gradiente $g(x_4)$

$$x_4 = [0.1226 \quad -2.8570]$$

$$g(x_4) = [25.6962 \quad -17.7020]$$

Iteración 5

Calculamos el vector Gradiente para posteriormente calcular el vector dirección gk.

$$V_{gk} = -g(x_4) = [-25.70 \quad 17.70]^T$$

Calculamos la Hessiana evaluada en el punto x_4.

$$H(x_4) = \begin{bmatrix} 443.9710 & -2.9896 \\ -2.9896 & 2 \end{bmatrix}$$

Ahora resolvemos el sistema de ecuaciones dado por $H(x_4)[x\ y]^T = V_{gk}$ para obtener d_k.

$$\begin{array}{lll} 443.9710x & -2.9896y & = -25.70 \\ -2.9896x & 2y & = 17.70 \end{array}$$

$$d_k = [0.0017 \quad 8.8536]$$

Calculamos $x_5 = x_4 + d_k$ y posteriormente calculamos el nuevo vector gradiente $g(x_5)$

$$x_5 = [0.1243 \quad 5.9966]$$

$$g(x_5) = [-0.7530 \quad -0.0001]$$

Iteración 6

Calculamos el vector Gradiente para posteriormente calcular el vector dirección gk.

$$V_{gk} = -g(x_5) = [0.75 \quad 0]^T$$

Calculamos la Hessiana evaluada en el punto x_5.

$$H(x_5) = \begin{bmatrix} -1.2741 & -3.0772 \\ -3.0772 & 2 \end{bmatrix}$$

Ahora resolvemos el sistema de ecuaciones dado por $H(x_5)[x\ y]^T = V_{gk}$ para obtener d_k.

$$\begin{array}{lll} -1.2741x & -3.0772y & = 0.75 \\ -3.0772x & 2y & = 0 \end{array}$$

$$d_k = [-0.1253 \quad -0.1928]$$

Calculamos $x_6 = x_5 + d_k$ y posteriormente calculamos el nuevo vector gradiente $g(x_6)$

$$x_6 = [-0.0010 \quad 5.8038]$$

$$g(x_6) = [-0.6336 \quad -0.3956]$$

Iteración 7

Calculamos el vector Gradiente para posteriormente calcular el vector dirección gk.

$$V_{gk} = -g(x_6) = [0.63 \quad 0.4]^T$$

Calculamos la Hessiana evaluada en el punto x_6.

$$H(x_6) = \begin{bmatrix} 9.0884 & 3.2313 \\ 3.2313 & 2 \end{bmatrix}$$

Ahora resolvemos el sistema de ecuaciones dado por $H(x_6)[x\ y]^T = V_{gk}$ para obtener d_k.

$$\begin{array}{ccc} 9.0884x & 3.2313y & = 0.63 \\ 3.2313x & 2y & = 0.4 \end{array}$$

$$d_k = [-0.0015 \quad 0.2002]$$

Calculamos $x_7 = x_6 + d_k$ y posteriormente calculamos el nuevo vector gradiente $g(x_7)$

$$x_7 = [-0.0010 \quad 5.8038]$$

$$g(x_7) = [-0.0025 \quad 6.0040]$$

Iteración 8

Calculamos el vector Gradiente para posteriormente calcular el vector dirección gk.

$$V_{gk} = -g(x_7) = [-0.01 \quad 0]^T$$

Calculamos la Hessiana evaluada en el punto x_6.

$$H(x_6) = \begin{bmatrix} -0.6289 & 3.3043 \\ 3.3043 & 2 \end{bmatrix}$$

Ahora resolvemos el sistema de ecuaciones dado por $H(x_6)[x\ y]^T = V_{gk}$ para obtener d_k.

$$\begin{array}{ccc} -0.6289x & 3.3043y & = 0.01 \\ 3.3043x & 2y & = 0 \end{array}$$

$$d_k = [0.0025 \quad -0.0040]$$

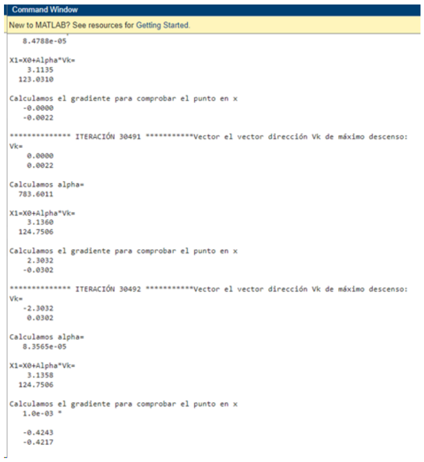
Calculamos $x_8 = x_7 + d_k$ y posteriormente calculamos el nuevo vector gradiente $g(x_8)$

$$x_8 = [-0.0000 \quad 5.9999]$$

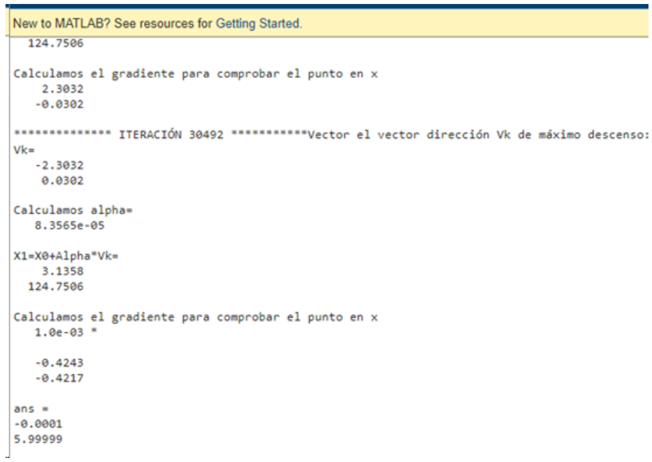
$$g(x_8) = [-0.1937 \quad -0.1452]$$

$$\therefore x^* = [0, 6]$$

Como nos dimos cuenta el programa de newton lo realizó en 8 iteraciones las cuales son muy pocas, sin embargo con el método de Cauchy es todo lo contrario puesto que alcanzamos unas iteraciones exhorbitantes, agregaremos una imagen como muestra de lo dicho anteriormente pero aun así si se llega al mismo resultado.



```
Command Window
New to MATLAB? See resources for Getting Started.
  8.4788e-05

X1=X0+Alpha*Vk=
    3.1135
  123.0310

Calculamos el gradiente para comprobar el punto en x
   -0.0000
   -0.0022

************** ITERACIÓN 30491 ***********Vector el vector dirección Vk de máximo descenso:
Vk=
    0.0000
    0.0022

Calculamos alpha=
  783.6011

X1=X0+Alpha*Vk=
    3.1360
  124.7506

Calculamos el gradiente para comprobar el punto en x
    2.3032
   -0.0302

************** ITERACIÓN 30492 ***********Vector el vector dirección Vk de máximo descenso:
Vk=
   -2.3032
    0.0302

Calculamos alpha=
   8.3565e-05

X1=X0+Alpha*Vk=
    3.1358
  124.7506

Calculamos el gradiente para comprobar el punto en x
   1.0e-03 *

   -0.4243
   -0.4217
```



```
New to MATLAB? See resources for Getting Started.
  124.7506

Calculamos el gradiente para comprobar el punto en x
    2.3032
   -0.0302

************** ITERACIÓN 30492 ***********Vector el vector dirección Vk de máximo descenso:
Vk=
   -2.3032
    0.0302

Calculamos alpha=
   8.3565e-05

X1=X0+Alpha*Vk=
    3.1358
  124.7506

Calculamos el gradiente para comprobar el punto en x
   1.0e-03 *

   -0.4243
   -0.4217

ans =
-0.0001
5.99999
```

3. Multistart

1. Genere 2500 puntos uniformemente distribuidos en $[-5, 10] \times [0, 15]$. Tome cada uno de estos puntos como punto inicial y pruebe sus programas del inciso anterior (Newton y pendiente máxima). Reporte cuántos y cuáles óptimos distintos se hallaron en total.

   Los puntos generados distintos por el programa son:

   - Newton

$$
\begin{bmatrix}
-182.22 & 4585.09 \\
-182.22 & 4585.1 \\
-166.51 & 3852.47 \\
-147.66 & 3057.47 \\
-131.95 & 2465.1 \\
-125.67 & 2246 \\
-122.53 & 2140.27 \\
-103.68 & 1559.47 \\
-97.39 & 1386.27 \\
-84.83 & 1070.47 \\
-72.26 & 795.47 \\
-59.7 & 561.27 \\
-56.55 & 509.1 \\
-53.41 & 459.47 \\
-50.27 & 412.4 \\
-40.85 & 286.47 \\
-37.7 & 249.6 \\
-34.56 & 215.27 \\
-31.42 & 183.49 \\
-28.28 & 154.27 \\
-25.14 & 127.59
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
-25.14 & 127.6 \\
-22 & 103.47 \\
-18.85 & 81.89 \\
-18.85 & 81.9 \\
-15.71 & 62.87 \\
-12.57 & 46.39 \\
-12.57 & 46.4 \\
-9.43 & 32.47 \\
-6.29 & 21.09 \\
-6.29 & 21.1 \\
-3.15 & 12.27 \\
-0.01 & 5.99 \\
-0.01 & 6 \\
0 & 5.99 \\
0 & 6 \\
3.14 & 2.27 \\
6.28 & 1.09 \\
6.28 & 1.1 \\
9.42 & 2.47 \\
12.56 & 6.39 \\
12.56 & 6.4
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
15.7 & 12.87 \\
18.84 & 21.89 \\
18.84 & 21.9 \\
21.99 & 33.47 \\
25.13 & 47.59 \\
28.27 & 64.27 \\
34.55 & 105.27 \\
37.69 & 129.59 \\
37.69 & 129.6 \\
40.84 & 156.47 \\
43.98 & 185.89 \\
43.98 & 185.9 \\
47.12 & 217.87 \\
53.4 & 289.47 \\
56.54 & 329.1 \\
62.83 & 415.99 \\
62.83 & 416 \\
65.97 & 463.27 \\
87.96 & 865.6 \\
109.95 & 1392.87 \\
113.09 & 1478.4 \\
226.19 & 6255.59
\end{bmatrix}
$$

- Pendiente Maxima

$$\begin{bmatrix} -15.71 & 62.87 \\ -3.15 & 12.27 \\ 21.99 & 33.47 \end{bmatrix}$$

2. Compare el número (promedio sobre los 2500 puntos) de evaluaciones de la función objetivo utilizadas para obtener los óptimos con cada algoritmo, cuente cuántas veces se calculó el gradiente de la función objetivo y cuántas veces la matríz Hessiana en cada caso.

   Llamadas promedio a la función

   - Newton
     - Llamadas a la función: 87.9
     - Llamadas a la gradiente: 4.3
     - Llamadas a la hessiana: 4.3
   - Pendiente Maxima
     - Llamadas a la función: 302.7
     - Llamadas a la gradiente: 75.4
     - Llamadas a la hessiana: 0

3. Escriba sus conclusiones.

   El método de Newton genera más puntos que el método de Pendiente Máxima, sin embargo, estos no son los óptimos de la función pues el método de Newton se "atora" en las curvas de la función, lo que ocasiona que arroje mínimos locales. Pese a que el método de Pendiente Máxima realiza más llamadas a la función y, por ende, más cálculos del gradiente, consideramos este método mejor por la reducción significativa en el número de puntos óptimos, además de estos ser verdaderos óptimos locales.

4. ¿Se obtienen más óptimos si en vez de usar 2500 puntos de inicio se prueba con 10,000?

   No, entre más puntos se evaluen sobre el intervalo el programa de Newton funciona peor, en cambio pendiente máxima se obtienen los mismos resultados aunque aumenten los puntos.

4. Codigos

El codigo para el punto de Multistart contiene tanto el programa de Newton como el de Pendiente Maxima.

```
clear
format long g

global fc %Llamadas a la funcion
global hc % # veces que se calcula la matriz hessiana
global gc % # veces que se calcula el gradiente

%Puntos que requerimos obtener
k = 2500;

X = linspace(-5, 0, k); % Vector de puntos en x
Y = linspace(10, 15, k); %Vector de puntos en y
NW = []; %Matriz donde se guardan los puntos de Newton
PM = []; %Matriz donde se guardan los puntos de Pendiente

fc = 0; %Se inicializan en 0 los contadores
hc = 0;
gc = 0;

%Hacer Newton en cada punto
for i=1:k
    valor=[X(i), Y(i)]; %Armar el vector de valores iniciales
    n = Newton(fx, valor); %Ejecutar Newton con ese punto
    NW = [NW;n]; %Agregar el nuevo punto a la matriz
end

% Eliminar los optimos repetidos
NW = NW.*100; %Truncar valores a 2 digitos despues del punto
NW = floor(NW);
NW = NW./100;
NW = unique(NW,"rows");
NW = rmmissing(NW); %Se guardan los optimos una vez por aparicion

% Promedio de la llamada a funcion, calculo del gradiente y la hessiana
fc = fc/k;
hc = hc/k;
gc = gc/k;

fprintf('\n---PUNTOS EN NEWTON---\n')
disp(NW) %Mostrar arreglo de puntos
fprintf('--Llamadas--\nFuncion:%d\nGradiente:%d\nHessiana:%d\n',fc,gc,hc)

fc = 0; %Se inicializan en 0 los contadores
hc = 0;
gc = 0;

% Hacer pendiente en cada punto
```

```
    for i=1:k
        valor=[X(i), Y(i)]; %Armar el vector de valores iniciales
        p = Steepest_Descent(fx, valor, 1E-4); %Ejecutar Newton con ese ...
            punto
        PM = [PM;p]; %Agregar el nuevo punto a la matriz
    end

    % Eliminar los optimos repetidos
    PM = PM.*100; %Truncar valores a 2 digitos despues del punto
    PM = floor(PM);
    PM = PM./100;
    PM = unique(PM,"rows");
    PM = rmmissing(PM); %Se guardan los optimos una vez por aparicion

    % Promedio de la llamada a funcion, calculo del gradiente y la hessiana
    fc = fc/k;
    hc = hc/k;
    gc = gc/k;

    fprintf('\n---PUNTOS EN PENDIENTE---\n')
    disp(PM) %Mostrar arreglo de puntos
    fprintf('--Llamadas--\nFuncion:%d\nGradiente:%d\nHessiana:%d\n',fc,gc,hc)

    %%%%---------------------%%%%
    % FUNCIONES %

    function y = fx(~)
        global fc
        y = @(x) (x(2) - (5.1 * x(1)^2) / (4 * pi^2) + (5 * x(1)) / ...
            (pi) - 6)^2 + 10 * (1 - 1 / (8 * pi)) * cos(x(1)) + 10;
        fc = fc + 1;
    end

    %Newton
    function a = Newton(f, a)
        i = 0;
        e = 1;

        while e > 1E-4
            H = Hess(f, a);
            G = Gradiente(f, a);
            G = (G(1, :))';
            d = H \ (-G);
            b = a + d';
            e = norm(b - a);
            a = b;
            i = i + 1;
        end
    end

    %Hessiana
    function hes = Hess(f, v)
        global fc
        global hc
```

```
        h = 1E-5;
        n = length(v);
        hes = zeros(n);

        for i = 1:n

            for j = 1:n
                ei = zeros(1, n);
                ei(i) = 1;
                ej = zeros(1, n);
                ej(j) = 1;
                f1 = f(v + h * ei + h * ej);
                f2 = f(v + h * ei - h * ej);
                f3 = f(v - h * ei + h * ej);
                f4 = f(v - h * ei - h * ej);
                diff = (f1 - f2 - f3 + f4) / (4 * h^2);
                hes(i, j) = diff;
                fc = fc + 4;
            end

        end
        hc = hc + 1;

    end

    %Maxima pendiente
    function x1 = Steepest_Descent(f, x0, eps1)
        iter = 0;
        h = 0.01;
        gx0 = Gradiente(f, x0);
        eps2 = eps1;
        norma = norm(gx0);

        while norma > eps1
            nu = -gx0;
            f_nu = @(x) f(x0 + x * nu);
            fp_nu = @(x) DifFin1(f_nu, x, h);
            alpha = UnivarNewton(fp_nu, 0, eps1, eps2);
            x1 = x0 + alpha * nu;
            x0 = x1;
            gx0 = Gradiente(f, x0);
            iter = iter + 1;
            norma = norm(gx0);
        end
    end

    %Calculo del tamano de paso
    function xn = UnivarNewton(f, x, eps1, eps2)
        cond = true;
        itern = 0;

        while cond
            x = x - f(x) / DifFin1(f, x, eps2);
            xn = x;
```

```
            cond = (abs(f(x)) > eps1);
            itern = itern + 1;
        end

    end

    %Derivada por diferencias finitas
    function df = DifFin1(f, x, h)
        df = (f(x + h / 2) - f(x - h / 2)) / h;
    end

    %Gradiente
    function r = Gradiente(f, v)
        global fc
        global gc
        h = 1E-8;
        n = length(v);
        r = zeros(1, n);
        a = h * eye(n);

        for k = 1:n
            r(1, k) = (1 / (2 * h)) * (f(v + a(k, :)) - f(v - a(k, :)));
            fc = fc + 2;
        end
        gc = gc + 1;
    end
```