Harris 角点检测

1. 读取 rice.png 文件，这是一张 256 x 256 的 8-bit 灰度图像。将该图像记作I.
2. 计算图像每个像素的梯度I_x, I_y. 对于第 i 行第 j 列的像素，

$$I_x(i,j) = \frac{I(i,j+1) - I(i,j-1)}{2}$$
$$I_y(i,j) = \frac{I(i-1,j) - I(i+1,j)}{2}$$

   将$I_x(i,j)$，$I_y(i,j)$贴在实验报告中。提示：可以使用卷积来计算。

3. 对于每个像素，计算其附近 3x3 的邻域内$I_x^2, I_y^2, I_x I_y$的和，即：

$$A(i,j) = \sum_{m=-1}^{1} \sum_{n=-1}^{1} I_x^2(i+m, j+n)$$
$$B(i,j) = \sum_{m=-1}^{1} \sum_{n=-1}^{1} I_x(i+m, j+n) \times I_y(i+m, j+n)$$
$$C(i,j) = \sum_{m=-1}^{1} \sum_{n=-1}^{1} I_y^2(i+m, j+n)$$

4. 对于每个像素，$A(i,j)$,$B(i,j)$,$C(i,j)$可构成矩阵 M

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix}$$

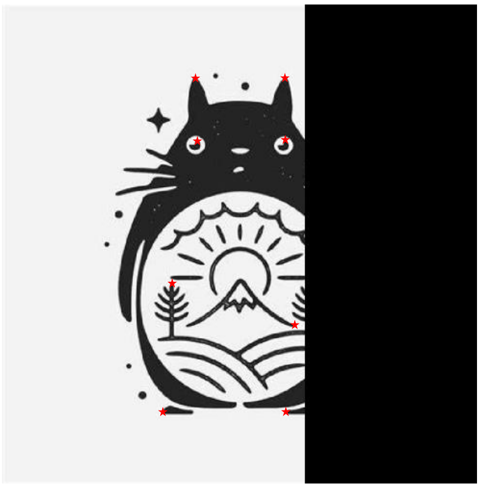
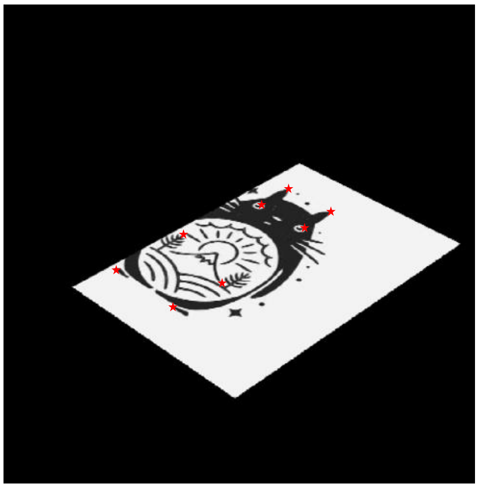
   计算矩阵 M 的 R 值

$$R = Det(M) - k\big(Tr(M)\big)^2 = (AC - B^2) - k \times (A+C)^2$$

   本题中 k 取 0.02。计算每一个像素的 R 值。
5. 统计 R 值图像的最大值，记为 R_{max}。将 R 值图像中大于 0.2 x R_{max} 的位置标为角点，记角点位置图像为C。**注意**：由于取了 3x3 的领域，图像边缘部分（例如第一行和第二行像素）理论上无法计算 R 值，在统计最大值时需要忽略边缘区域。
6. 将原图像中被标为角点的位置增亮显示（例如可显示图像$C \times 100 + I$），判断 Harris 算法是否准确提取了米粒的角点。

Perspective transform

1. 导入 img_1.txt 及 img_2.txt,这是两者 474x474 8-bit 的灰度图像。img_2 是 img_1 中的物体经过一个透视变换获得的。但是 img_1 缺少右半边，img_2 缺少左半边。这个作业将利用 img_1 补全 img_2 缺失的部分。
2. 为实现这一目的，我们需要寻找 img_1 到 img_2 的变换，利用此变换将 img_1 变换成 img_1’，再将 img_1’ 与 img_2 拼合。具体操作如下

img_1	img_2
	

3. 首先记录 img_2 与 img_1 中相对应的特征点的坐标。手动寻找即可。特征点的分布应越广越好，而不是集中在某个小的区域。上图用红色小五角星标注了几个建议的特征点位置。需要寻找大于等于 9 个特征点对，本作业中建议找 12 个特征点对。
4. 将 img_1 中的特征点坐标记为$\{(x_{1,1},y_{1,1}),(x_{1,2},y_{1,2}),\dots,(x_{1,n},y_{1,n})\}$,对应的 img_2 中的特征点坐标记为 $\{(x_{2,1},y_{1,1}),(x_{2,2},y_{1,2}),\dots,(x_{2,n},y_{2,n})\}$. 将你选取的特征点位置和具体坐标值写在实验报告中。（统一将行数记为 x，列数记为 y）
5. 我们试图寻找 img_2 中坐标到 img_1 中坐标的变换，该变换可写作

$$P\begin{bmatrix}x_2\\y_2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}mx_1\\my_1\\m\end{bmatrix}$$

其中矩阵 P 为一个 3x3 的矩阵，具体表示为

$$P=\begin{bmatrix}p_{11}&p_{12}&p_{13}\\p_{21}&p_{22}&p_{23}\\p_{31}&p_{32}&1\end{bmatrix}$$

矩阵 P 的求解方式如下:将 P 的 8 个未知元素排为一列 $\vec{p}=(p_{11},p_{12},p_{13},\dots,p_{32})^T$，则$\vec{p}$满足方程

$$\mathrm{A}\vec{p}=\begin{bmatrix}x_{1,1}\\y_{1,1}\\x_{1,2}\\y_{1,2}\\\dots\\x_{1,n}\\y_{1,n}\end{bmatrix}$$

矩阵 A 为

$$A=\begin{bmatrix} x_{2,1} & y_{2,1} & 1, & 0 & 0 & 0 & -x_{2,1}x_{1,1} & -y_{2,1}x_{1,1} \\ 0 & 0 & 0 & x_{2,1} & y_{2,1} & 1, & -x_{2,1}y_{1,1} & -y_{2,1}y_{1,1} \\ x_{2,2} & y_{2,2} & 1, & 0 & 0 & 0 & -x_{2,2}x_{1,2} & -y_{2,2}x_{1,2} \\ 0 & 0 & 0 & x_{2,2} & y_{2,2} & 1, & -x_{2,2}y_{1,1} & -y_{2,2}y_{1,2} \\ & \cdots & & & \cdots & & & \cdots \\ & \cdots & & & \cdots & & & \cdots \\ x_{2,n} & y_{2,n} & 1, & 0 & 0 & 0 & -x_{2,n}x_{1,n} & -y_{2,n}x_{1,n} \\ 0 & 0 & 0 & x_{2,n} & y_{2,n} & 1, & -x_{2,n}y_{1,1} & -y_{2,n}y_{1,n} \end{bmatrix}$$

A 为 2n 行 8 列矩阵，$\vec{p}$为 8 行 1 列向量。利用伪逆矩阵求解$\vec{p}$：

$$\vec{p}=\left(\mathrm{A}^{\mathrm{T}}A\right)^{-1}A^{T}\begin{bmatrix} x_{1,1} \\ y_{1,1} \\ x_{1,2} \\ y_{1,2} \\ \dots \\ x_{1,n} \\ y_{1,n} \end{bmatrix}.$$

将$\vec{p}$还原为矩阵形式的P。将矩阵 P 写在报告中。

6. 假设 img_1’是 img_1 经过变换后的图像。对于 img_1’中的坐标（x_1'，y_1'），将其改为齐次坐标形式$\begin{bmatrix} x_1' \\ y_1' \\ 1 \end{bmatrix}$，计算$P\begin{bmatrix} x_1' \\ y_1' \\ 1 \end{bmatrix}$。所得的向量即为$\begin{bmatrix} mx_1 \\ my_1 \\ m \end{bmatrix}$。为获得$(x_1, y_1)$，将此向量第一个和第二个元素除以第三个元素即可，即$x_1=\frac{mx_1}{m}, y_1=\frac{my_1}{m}$。对 img_1’中的所有坐标(1,1),(1,2),⋯,(474,474)重复此计算，获得 img_1’的坐标经变换后在 img_1 对应的坐标位置，记位置为(x_1, y_1)。注意(x_1, y_1)可能不为整数，且不一定落在 1 - 474 的范围内。
7. 寻找(x_1, y_1)在 img_1 上对应的值。如果x_1或y_1不在 1 - 474 的范围内，则将此值设置为 0。如果x_1及y_1不在 1-474 的范围内，直接使用最近邻插值法，即取$([x_1],[y_1])$，[]代表取整操作，将 img_1 在$([x_1],[y_1])$的值填入在 img_1’对应位置。例：
img_1’中的坐标(1,1)经过变换后对应的$(x_1, y_1)=(-27.6,-719)$，x_1或y_1不在 1-474 的范围内，因此 img_1’在(1,1)位置处的值设为 0.
img_1’中的坐标(292，8)经过变换后对应的$(x_1, y_1)=(557.9,107.3)$，取整数后为(558,107). 因此 img_1’在(292，8)位置处的值为img_1在(558,107)处的值。
对 img_1’中的所有坐标重复上述计算和操作，得到 img_1’图像。将 img_1’图像贴在实验报告中。
8. 将 img_1’与 img_2 融合，具体方法是计算 img_1’与 img_2 点对点的最大值：记融合后图像为 img_3，则

$$\mathrm{img}_3(i,j)=\max(\mathrm{img}_1'(\mathrm{i},\mathrm{j}),\mathrm{img}_2(i,j))$$

将 img_3 图像贴在实验报告中。