정의 0.1 (Graph) 정점과 정점을 잇는 간선들로 이루어진 것을 그래프라한다.

- $V(G)$: 정점의 집합
- $E(G)$: 간선의 집합
- $\psi_G(e_n)$: 각 간선(e_n)의 정점의 쌍
- $\nu(G)$: 정점의 갯수
- $\varepsilon(G)$: 간선의 갯수

Simple graph : loop가 없고 두 정점쌍에 두개이상의 간선이 존재하지않는 그래프

incident : 한 간선에 양 정점 근접 adjacent : 두 간선에 공통된 정점 인접

정의 0.2 (planar) 그래프를 간선들이 교차하지않게 그릴수 있는 것을 plannar graph라 한다.

plannar graph가 아닌 것을 nonplanar graph라한다.

정의 0.3 (isomophic) 두 그래프 G와 H가 전단사 함수 $\theta : V(G) \longrightarrow V(H)$와 $\phi : E(G) \to E(H)$이 성립하면 두 그래프는 동형(isomophic)이다. 또한 다음이 성립한다.

- $\psi(e) = us(e \in E(G), u, s \in V(G))$
- $\psi(\phi(e)) = \theta(u)\theta(v)$

정의 0.4 (e special classes of graphs)

- complete graph(완전 그래프) : 모든 정점에 간선이 연결된 그래프 정점의 개수가 n일때 K_n로 표현한다.
- empty graph : 정점이 한개고 간선이 없는 그래프
- bipartite graph(이분 그래프) : 정점이 두 집합으로 이루어져 집합 내에는 연결된 간선이 없는 그래프
- complete bipartite graph(완전 이분 그래프) : 한 집합의 모든 정점이 각각 반대 집합의 모든 정점에 연결된 그래프 두 정점 집합의 갯수가 각각 m과 n일때 $K_{m,n}$으로 표현한다.
- (1.2.9)k-partite graph : 정점이 적어도하나 포함된 k개의 부분 집합으로 이루어진 그래프이다 한 부분집합 내에 연결된 간선은 존재하지 않고 다른 부분집합의 정점에만 간선이 존재할수있다. (원문)a complete k-partite graph is one that is simple and in which each vertex is joined to every vertex that is not in the same subset
- (1.2.9)complete k-partite graph : k-partite graph의 각 정점이 포함된 부분집합을 제외한 모든 정점에 간선이 연결된 그래프

  (원문)complete k-partite graph is one that is simple and in which each vertex is joined to every vertex that is not in the same subset.
- (1.2.10)k -cube : 각 정점은 하나의 ordered k-tuple(k-비트 이진수)이고, 두 정점이 1비트만 서로 다를 때 두 정점간에 에지가 있다.
- (1.2.11)여 그래프(complement graph) : 모든 정점에 대해서 포함하고 있는 존재하는 간선은 제거, 존재하지않는 간선을 생성해서 만든 그래프 G^c로 표현한다.
- (1.2.11)자기 여 그래프 (self-complementary graph) : 여그래프와 자기자신이 동형인 그래프

week1

- 1.2.5 $G \cong H$, simple

  bijection $\theta : V(G) \longrightarrow V(H)$ $uv \in E(G) \Leftrightarrow \theta(u)\theta(v) \in E(H)$

정의로 부터 $\psi(e) = us$인 간선 e ($e \in E(G)$)에 대해 대응되는 $\psi(\phi(e)) = \theta(u)\theta(v)$인 $\phi(e)(\phi(e) \in E(H))$가 존재함을 알 수 있다. 따라서 $uv \in E(G) \to \theta(u)\theta(v) \in E(H)$ 성립, 반대의 경우도 마찬가지로 성립한다.

- 1.2.9

$$\binom{n}{2} - (m(k+1) - n)\binom{k}{2} - (n - mk)\binom{k+1}{2} \tag{1}$$
$$= \binom{n}{2} - m(k+1)\binom{k}{2} - n\binom{k}{2} - (n - mk)\binom{k+1}{2} \tag{2}$$
$$= \binom{n}{2} - m(k-1)\binom{k+1}{2} + n\binom{k}{2} - (n - mk)\binom{k+1}{2} \tag{3}$$
$$= \binom{n}{2} + n\binom{k}{2} - (n - m)\binom{k+1}{2} \tag{4}$$
$$= \binom{n}{2} + n\binom{k}{2} - (n - m)\binom{k+1}{2} + (n-1)\binom{k+1}{2} - (n-1)\binom{k+1}{2} \tag{5}$$
$$= \binom{n}{2} + n\binom{k}{2} - (n-1)\binom{k+1}{2} + (m-1)\binom{k+1}{2} \tag{6}$$
$$= \frac{n^2 - n - nk + k^2 + k - nk}{2} + (m-1)\binom{k+1}{2} \tag{7}$$
$$= \frac{(n-k)(n-k-1)}{2} = \binom{n-k}{2} + (m-1)\binom{k+1}{2} \tag{8}$$

- 1.2.11 (a):
  - K_n^c : 간선이 없는 그래프이다.
  - $K_{n,m}^c$: 두 집합사이의 간선이 없이 두 집합이 각각 완전그래프인 subgraph를 이루고있다.

  (b): 자기 여 그래프가 되기위해선 일단 동형 이전에 간선의 갯수가 동일해야하는데 여기서 총 생길수있는 간선의 갯수는 $\frac{v(v-1)}{2}$가 최댓값이자 그래프의 간선수 + 여그래프의 간선수 입니다. 그래프의 간선수 = 여그래프의 간선수 이므로 v나 $v-1$은 적어도 둘 중 하나는(적어도지만 사실 둘다 4의 배수인 경우의 수는 존재하지않습니다) 4의 배수여야합니다 따라서 $v \pmod 4$는 0 또는 1

- 추가문제 :

인접성 : 두 그래프가 인접성을 보존할때, u와 v가 인접하면 $\theta(u)$와 $\theta(v)$가 인접하고 그 역도 성립한다.

두 그래프 G와 H에 대해서 G의 정점들을 H의 정점들에 일대일로 대응하면서 인접성을 보존하는 함수 f가 존재하면 두 그래프 G와 H는 동형(isomorphic)이다.

Proof: $E(G)$의 임의의 간선 e에 대해 임의의 정점 u, v가 인접할때, 인접성이 보존되므로 $\theta(u)$와 $\theta(v)$ 또한 인접한다. $\theta(u)$와 $\theta(v)$를 잇는 간선을 e'이라 할때 $\phi(e) = e'$인 $\phi : E(G) \longrightarrow E(H)$를 정의할 수 있다. 따라서 정의에 의해 G와 H는 동형이다.

week2

정의 0.5 (subgraph) 그래프 H, G가 $V(H) \subset V(G), E(H) \subset E(G)$, and ψ_H is restricton ψ_G [a] 일때 $H \subseteq G$ 라쓰고 $H(G)$를 subgraph(supergraph)라 한다.

- $H \subseteq G$,$H \neq G$이면 $H \subset G$라 표기하고, H를 G의 proper graph라 한다.
- $V(H) = V(G), H \subseteq G$이면 $H(G)$를 spaning subgraph(supergraph)라 한다.
- spaning subgraph과 동시에 simple graph이면, undelying simple graph라한다.

[a] ψ_H가 제한적으로 ψ_G이다.

정의 0.6 (degree(차수)) $d_G(v)$는 정점 v에 연결된 간선의 갯수를 나타낸다. 그래프의 정점의 차수의 최솟값을 $\delta(G)$, 최댓값을 $\Delta(G)$로 표기한다.

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2\varepsilon$$

k-regular graph(정규그래프) : $d(v) = k \; \forall v \in V$ $|A|$: 집합 A의 원소의 갯수

Theorem 0.1.

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2\varepsilon$$

Proof. 근접행렬 M을 생각해보자 각 열은 정점으로 이루어져있으므로 행의 합은 해당 정점의 차수이다. 따라서 모든 행과 열의 합은 $\sum_{v \in V} d(v)$이며 또한 2ε이다. 예제 1.3.1(a)에 따라서 각 열의 합이 2이다. □

Corollary 0.1.1. 어떤 그래프의 차수가 홀수인 정점의 갯수는 짝수이다.

Proof. 차수가 홀수와 짝수인 V_1, V_2로 정점을 나누었을 때,

$$\sum_{v \in V_1} d(v) + \sum_{v \in V_2} d(v) = \sum_{v \in V} d(v)$$

는 짝수이다. $\sum_{v \in V_2} d(v)$는 짝수이므로 $\sum_{v \in V_1} d(v)$ 또한 짝수이다. 그러므로 $|V_1|$은 짝수이다. □

- 1.5.2

  M'는 M의 전치행렬 원표기 M^T, $MM'[v_i][v_i] = \sum_{j=1}^{n} M[v_i][e_j] \cdot M'[e_j][v_i]$

  $M'[e_j][v_i] = M[v_i][e_j]$이며 simple graph일때 각 값은 0 또는 1이기 때문에 결과적으로 대각선의 값은 해당 정점의 차수가 된다.

  A 행렬에서 $A[v_i][v_j] = A[v_j][v_i]$

  $d(i) = \sum_{j=1}^{n} A[v_i][v_j] = \sum_{j=1}^{n} A[v_j][v_i]$이다. 마찬가지로 simple graph에서 $A[v_i][v_j]$은 무조건 0 또는 1을 가지므로 $A[v_i][v_j] \cdot A[v_j][v_i] = A[v_i][v_j]$이다.

  A^2에서 $A^2[v_i][v_i] = \sum_{j=1}^{n} A[v_i][v_j] \cdot A[v_j][v_i] = \sum_{j=1}^{n} A[v_i][v_j] = d(i)$

- 1.5.3

  k-regular bipartite graph의 bipartition(X,Y)이 $|X| \neq |Y|$라 하자. $d(v) = |Y|$, $d(u) = |X| (v \in X, u \in Y)$ $d(v) \neq d(u)$ 이는 k-regular graph의 조건에 모순

- 1.5.4

  두명 이상의 사람이 있는 그룹에서 그룹 내 친구의 수(그룹 내부의 사람으로 제한)가 같은 사람이 반드시 두명이 있음을 보여라

  사람이 n명일때 친구의 수는 최대 n-1명이기때문에 비둘기집의 원리에 의해 친구 수가 같은 사람이 무조건 두명이 존재한다.

각각의 사람을 정점, 친구관계를 간선으로 나타낸다면은 해당 그룹은 simple graph로 볼수있으며 친구의 수는 각 정점의 차수가 된다.

따라서 해당 문제는 simple graph일때 반드시 두 정점의 차수가 같음을 보이는 것과 같다.

- 1.5.5 만약 G가 정점 $v_1, v_2, ..., v_n$을 가질때 $(d(v_1), d(v_2), ..., d(v_n))$ 을 그래프 G의 차수 수열(degrees sequence)라 부른다.

  음이 아닌 정수들의 시퀀스 $(d_1, d_2, ..., d_n)$가 어떤 그래프의 차수 시퀀스임이 $\sum_{i=1}^{n} d_i$가 짝수임과 필요충분 조건임을 보여라.

  그래프의 차수의 합은 2ε임이 $Theorem 1.1$에 이미 증명되어 있다. 따라서 차수 수열의 합은 짝수이며 반대의 경우도 성립한다.

  If G has vertices $(v_1, v_2, ..., v_n)$ the sequence $(d(v_l), d(v_2), ..., d(v_n))$ is called a degree sequence of G. Show that a sequence $(d_1, d_2, ..., d_n)$ of non-negative integers is a degree sequence of some n graph if and only if $\sum_{i=1}^{n} d_i$ is even

- 1.5.6 : A sequence $d = (d_1, d_2, ..., d_n)$ is graphic if there is a simple graph with degree sequence d. Show that

  (a) (7,6,5,4,3,3,2) : 정점이 총 7갠데 첫번째 정점의 간선이 7개인것은 simple graph의 조건을 충족하지 못한다. (6,6,5,4,3,3,1) : 총 7개의 정점중 자신을 제외한 모든 정점에 간선을 잇는 차수가 6인 정점이 2개이지만 차수가 1인 정점이 있으므로 simple graph임이 모순이다.

  (b) if d is graphic and $d_1 \leq d_2 \leq ... \leq d_n$, then $\sum_{i=1}^{n} d_i$ is even and

  $$\sum_{i=l}^{k} d_i \leq k(k-1) + \sum_{i=k+1}^{n} \min(k, d_i) \text{ for } 1 \leq k \leq n$$

  그래프가 심플그래프일때 차수 수열이 $d_1 \leq d_2 \leq ... \leq d_n$이면, $\sum_{i=1}^{n} d_i$ 짝수인것과 다음이 성립함을 보이시오 $\sum_{i=1}^{k} d_i \leq k(k-1) + \sum_{i=k+1}^{n} \min(k, d_i)$ for $1 \leq k \leq n$

  d는 차수수열이므로 d의 합은 2ε이다. ???

- 1.5.10

  The edge graph of a graph G is the graph with vertex set E(G) in which two vertices are joined if and only if they are adjacent edges in G.

  Show that, if G is simple (a) the edge graph of G has e(G) vertices and L (d2 (V)) edges; vEVlG) . (b) the edge graph of Ks is isomorphic to the complement of the graph featured in exercise 1.2.6.

  그래프 G의 엣지 그래프는 꼭지점 집합 E (G)가있는 그래프로 두 개의 꼭지점이 G의 인접 엣지 인 경우에만 결합됩니다.

  ???

정의 0.7 (walk) 순차적으로 이어지는 정점, 간선의 연결을 walk라한다. $v_0e_1v_1e_2v_2...e_kv_k$인 walk를 v_0 to v_k 또는 (v_0, v_k)-walk라 한다.

- 지나는 간선을 한번씩만 쓴 walk를 trail이라한다.
- simple graph G의 모든 간선을 지나는 trail의 길이는 $\varepsilon(W)$이다.
- 지나는 정점을 한번씩만 쓴 walk를 path라 한다
- 그래프 G가 두 정점 u,v의 (u,v)-path가 존재할때, connected graph 라한다.
- 그래프의 정점을 쪼갠 부분 그래프들이 모두 각각의 연결된 그래프일 때, 부분 그래프들을 그래프 G의 component라 한다.
- 그래프 G의 componet의 수를 $\omega(G)$라 쓴다.

- 1.6.1 (u,v)-walk사이에 사이클이 존재 할 경우 겹치는 정점을 중복사용하지않는 walk를 짤수있다 따라서 (u,v)-path가 존재한다.
- 1.6.2 ????
- 1.6.3 한 정점을 패스의 시작정점으로 잡았을때 $\delta \leq k$ 이기때문에 lenth가 k인 path를 만들기위해 서로 다른 k개의 연결된 정점을 선택해 path를 생성할수있다.
- 1.6.4 ????

- 1.6.5 (a) : 최대한 적은 정점에 많은 간선을 사용한 그래프를 세팅하기위해, 정점 하나를 제외한 $\varepsilon - 1$개의 정점으로 $\binom{\varepsilon - 1}{2}$개의 엣지를 사용한 완전 그래프를 만들면 완전 그래프내의 정점들로는 더이상 간선을 연결 할 수 없기 때문에 조건의 그래프는 무조건 connected가 된다.

  (b) : 정점 하나를 제외한 $\varepsilon - 1$개의 정점으로 $\binom{\varepsilon - 1}{2}$개의 엣지를 사용해 완전 그래프를 만들면 정점하나는 연결되어 있지않으므로 disconnected그래프이다.

- 1.6.6

- 1.6.7

- 1.6.8

  (a)간선 e가 빠짐으로서 하나였던 component가 두개의 component가 될 요지가 있다. 따라서 $\omega(G) \leq \omega(G - e) \leq \omega(G) + 1$가 성립한다.

  (b) inequality: 부등식 반례: $V(G) = v_1, v_2, v_3,\ E(G) = e_1, e_2,\ \psi_H(e_1) = v_1v_1, \psi_H(e_2) = v_2v_3$ v_1과 v_2v_3가 각각 연결되어있는 $\omega(G) = 2$인 그래프이다v_1을 제거할때 component가 하나 사라지므로 주어진 부등식을 만족하지 못한다.

- 1.6.9

- 1.6.10

- 1.6.11

- 1.6.12

- 1.6.13

- 1.6.14 $uv, uw, uw \in E$이면 G는 complete가 되기때문에 $uw \notin E$

정의 0.8 (cycle) walk가 양의 길이이고 시작점과 끝점이 같을때 닫혀있다(closed)고 한다.

닫힌 트레일을 cycle이라고한다.

Theorem 0.2. 그래프가 이분그래프인것과 홀수개의 사이클을 가지지 않는것은 필요충분조건이다.

Proof. □

- 1.7.1

- 1.7.2 simple graph가 아닌경우 루프를 포함하는경우 v_0v_0는 정의에 의해 사이클이다. 임의의 정점v_0, v_1에 간선이 2개이상인경우 $v_0v_1v_0$사이클을 이룬다

  simple graph인경우 정점의 개수가 k인 그래프를 생각하자. 이때 $v_0v_1v_2...v_i$인 서로 다른 정점만 최대한 이어진 연결을 생각해볼때 v_0과 v_i의 차수는 명제의 조건에의해서 무조건 $0 \le j \le k$인 정점 v_j에 연결이 되어있어야한다. 따라서 $v_jv_{j+1}...v_k$인 사이클을 이룬다.

- 1.7.4

- 1.7.5

- 1.7.6

  week 3

- 1.8.5

  가능한 모든 경우의 수를 센다. 이때 양방향이아닌 한방향 간선은 사이클을 형성하므로 최적의 경로로서 제외해도 문제없다.

  1. 시작 (8,0,0) → 2,3
  2. (3,5,0) → 1,4,5
  3. (5,0,3) → 1,4,6
  4. (0,5,3) → 2,3,5
  5. (3,2,3) → 2,4,7
  6. (5,3,0) → 3, 8
  7. (6,2,0) → 5,9
  8. (2,3,3) → 6
  9. (6,0,2) → 7,10
  10. (1,5,2) → 9,11
  11. (1,4,3) → 10,12

12. 끝 (4,4,0) $\rightarrow$ 11,13,14
13. (4,1,3) $\rightarrow$ 12
14. (1,4,3) $\rightarrow$ 12

$1 \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 7 \rightarrow 9 \rightarrow 10 \rightarrow 11 \rightarrow 12$

- 1.8.6

정의 0.9 (tree) connected acyclic graph
acyclic graph : 사이클이 없는 그래프

week 4

- 2.1.5 Let 0 be a graph with v-I edges. Show that the following three statements are equivalent: (a) G is connected; (b) G is acyclic; (c) G is a tree.

  연결된 acyclic graph는 정의에 의해 tree임이 자명하므로 간선의 개수가 $\nu-1$ 일때, acyclic graph일때 connected한것과 connected graph일때 acyclic 그래프임이 필요충분조건임을 보이는 것으로 충분하다.

  acyclic $\rightarrow$ connected graph

  acyclic그래프가 connected graph가 아니라고 가정해보자.

  그러면 각 component는 connected graph이므로 트리이다. 각 component의 간선의 갯수의 합은 $v(G_1)-1+v(G_2)-1+...+v(G_n)-1 \neq v(G)-1$ 따라서 가정에 모순 다음 명제가 성립한다.

  connected graph $\rightarrow$ acyclic

  acyclic graph가 아니라고 하자 cycle이 형성된곳의 간선을 하나씩 제거해서 acyclic 그래프가 되도록 만들면 트리가 된다. $\nu-1-n \neq \nu-1$ 가정에 모순이라 다음 명제가 성립한다.

- 2.1.8 A centre of G is a vertex u such that max d(u, v) is as small as possible. Show that a tree has either exactly one centre or two, adj acent, centres.

  G의 중심은 최대 d(u, v)가 가능한 한 작은 꼭지점 u이다.

  트리 하나가 정확히 하나의 중심 또는 두 개의 인접한 중심을 가지고 있음을 보여라

  week5

정의 0.10 (spanning tree) 그래프 G의 트리인 spanning subgraph를 G의 신장 트리라고 부른다.

Corollary 0.2.1. 2.4.1 모든 연결된 그래프는 스패닝 트리를 가진다.

Proof. 그래프 G가 connected graph이면 G의 cennected spanning subgraph가 존재한다. 그래프 H를 G의 최소한의 connected spanning subgraph라 하자. 이때 H가 acyclic가 아니라고 가정 해보자. 그래프 H가 사이클이 존재하는 경우,간선 사이클 경로의 임의의 인접한 정점 u, v를 잡았을때 u, v의 간선을 제거해도 u, v는 여전이 연결되어있다. 이는 최소한의 connected spanning subgraph라는 것에 모순이다. 따라서 그래프 H는 connected spaning graph이며 acyclic함으로 스패닝 트리이다. □

Theorem 0.3. *T가 연결된 그래프 G의 스패닝 트리라고 하고 e를 T에 속하지 않은 G의 에지라고 하자. 그러면 $T + e$는 유일한 사이클을 가진다.*

Proof. $\psi_G(e) = xy$라 할때, 유일한 사이클이아닌 두 개 이상의 사이클이 생성될 경우 e의 에지 추가하기전의 x, y 유일한 경로가아닌 두개이상의 경로가 있다는 것을 의미하는데 트리는 유일한 경로임이 이미 증명되었으므로 유일한 사이클을 가진다. □

정의 0.11 (contract) 그래프 G의 한 에지e를 수축한다는 것은 에지 e를 그래프에서 삭제하고 양 끝점을 하나의 정점으로 합치는 것이다. 그 결과 만들어지는 그래프를 $G \cdot e$로 표시한다.

- $\nu(G \cdot e) = \nu(G \cdot e) - 1$
- $\varepsilon(G \cdot e) = \varepsilon(G \cdot e) - 1$
- $\omega(G \cdot e) = \omega(G)$
- T가 트리이면 $T \cdot e$도 트리이다.
- 그래프 G의 스패닝 트리의 개수를 $\tau(G)$로 표시한다.

Theorem 0.4. *2.8* 그래프 G의 임의의 에지 e에 대해서 $\tau(G) = \tau(G - e) + \tau(G \cdot e)$이 성립한다.

Proof. 그래프 G에서 에지e를 포함하지 않는 스패닝 트리는 $G-e$의 스패닝 트리 또한 된다. 따라서 $\tau(G-e)$는 그래프 G에서 에지 e를 포함하지 않는 스패닝 트리의 개수와 같다. 에지 e를 포함하는 G의 임의의 스패닝 트리 T는 $G\cdot e$의 스패닝 트리 $T\cdot e$에 일대일 대응한다.(추가적인 논리 필요) 따라서 $\tau(G\cdot e)$는 G에서 에지 e를 포함하는 스패닝 트리의 개수이다. 따라서 정리가 성립한다. □

Fortunately, and rather surprisingly, there is a closed formula for T(G) which expresses T(G) as a determinant; we shall present this result in chapter 12.

Theorem 0.5. *$Cayley'sfolmula$: $\tau(K_n) = n^{n-2}$*

Proof. K_n의 정점 집합을 $N = \{1, 2, ..., n\}$라 놓자. 그러면 n^{n-2}는 N으로부터 길이가 $n-2$인 수열[1]을 만드는 수로 볼 수 있다. 따라서 이 수열이 K_n의 spanning tree와 1:1대응을 하는걸로 이 증명이 완성된다. K_n의 spanning tree T에 대해서 특정 수열 $t_1, t_2, ..., t_{n-2}$과 연관지으려 한다. N을 정렬된 셋이라 가정하고, s_1은 T의 차수가 1인 첫번째 정점이라하자. s_1은 t_1과 인접한 정점이다. 그다음에 s_1를 T에서 제거하자 그다음 $T-s_1$에 차수가 1인 정점 한개를 s_2라 하자 이 짓거리를 t_{n-2}가 지워져 두 정점이 남을때 까지 반복한다. 총 반복은 $n-2$번 반복한다. 따라서 spanning tree가 수열에 대응함을 보였다. 수열이 spanning tree에 대응함을 보이자. sequence P에 없는 1에서 n중 가장 작은 숫자를 찾아 P의 첫번째 숫자에 연결한다. 그 후 P의 첫번째 숫자를 제거한다. P가 존재하지않을 때 까지 반복한다. 마지막 연결되는 숫자는 n이다. 이렇게 함으로써 수열이 트리에 대응됨을 보일수있다. 수열의 갯수가 n^{n-2}개 이므로 트리의 개수도 n^{n-2}개이다. □

[1] $Pr\ddot{u}fer\ sequences$라 한다.