차 례

차 례 1
1 GRAPHS AND SUBGRAPHS 2
1.1 Graphs and simple Graphs 2
1.2 Graph Isomorphism 2
1.3 The Incidence and Adjacency Matrices 5
1.4 Subgraphs 6
1.5 Vertex Degrees 6
1.6 Paths and Connection 9
1.7 Cycles 10
1.8 The Shortest Path Problem 11
1.9 Sperner's Lemma. 12
2 Tree 15
2.1 Trees 15
2.2 Cut Edges and Bonds 16
2.3 Cut Vertexes 19
2.4 Cayley's Formula 20
2.5 THE CONNECfOR PROBLEM 21
3 Connectivity 22
3.1 Connectivity 22
3.2 BLOCKS 23
4 Euler Tours and Hamilton Cycles 24
4.1 Euler Tours 24
4.2 HAMILTON CYCLES 24

1 GRAPHS AND SUBGRAPHS

1.1 Graphs and simple Graphs

정의 1.1 (Graph) 정점과 정점을 잇는 간선들로 이루어진 것을 그래프라한다.

- $V(G)$: 정점의 집합
- $E(G)$: 간선의 집합
- $\psi_G(e_n)$: 각 간선(e_n)의 정점의 쌍
- $\nu(G)$: 정점의 갯수
- $\varepsilon(G)$: 간선의 갯수

그래프를 간선들이 교차하지않게 그릴수 있는 것을 plannar graph라 한다. plannar graph가 아닌 것을 nonplanar graph라한다.

정점이 한개인 그래프를 trivial graph라고 한다. 이외의 모든 그래프는 non-trivial 그래프이다.

Simple graph : loop가 없고 두 정점쌍에 두개이상의 간선이 존재하지않는 그래프

incident : 한 간선에 양 정점 근접 adjacent : 두 간선에 공통된 정점 인접

1.2 Graph Isomorphism

정의 1.2 (isomophic) 두 그래프 G와 H가 전단사 함수 $\theta : V(G) \longrightarrow V(H)$와 $\phi : E(G) \rightarrow E(H)$이 성립하면 두 그래프는 동형(isomophic)이다. 또한 다음이 성립한다.

- $\psi(e) = us(e \in E(G), u, s \in V(G))$
- $\psi(\phi(e)) = \theta(u)\theta(v)$

정의 1.3 (a special classes of graphs) 특징에 따른 그래프 이름

- complete graph(완전 그래프) : 모든 정점에 간선이 연결된 그래프 정점의 개수가 n일때 K_n로 표현한다.
- empty graph : 정점이 한개고 간선이 없는 그래프
- bipartite graph(이분 그래프) : 정점이 두 집합으로 이루어져 집합 내에는 연결된 간선이 없는 그래프
- complete bipartite graph(완전 이분 그래프) : 한 집합의 모든 정점이 각각 반대 집합의 모든 정점에 연결된 그래프 두 정점 집합의 갯수가 각각 m과 n일때 $K_{m,n}$으로 표현한다.
- (1.2.9)k-partite graph : 정점이 적어도하나 포함된 k개의 부분 집합으로 이루어진 그래프이다 한 부분집합 내에 연결된 간선은 존재하지 않고 다른 부분집합의 정점에만 간선이 존재할수있다. (원문)a complete k-partite graph is one that is simple and in which each vertex is joined to every vertex that is not in the same subset
- (1.2.9)complete k-partite graph : k-partite graph의 각 정점이 포함된 부분집합을 제외한 모든 정점에 간선이 연결된 그래프

  (원문)complete k-partite graph is one that is simple and in which each vertex is joined to every vertex that is not in the same subset.
- (1.2.10)k -cube : 각 정점은 하나의 ordered k-tuple(k-비트 이진수)이고, 두 정점이 1비트만 서로 다를 때 두 정점간에 에지가 있다.
- (1.2.11)여 그래프(complement graph) : 모든 정점에 대해서 포함하고 있는 존재하는 간선은 제거, 존재하지않는 간선을 생성해서 만든 그래프 G^c로 표현한다.
- (1.2.11)자기 여 그래프 (self-complementary graph) : 여그래프와 자기자신이 동형인 그래프

week1

1.2.1

1.2.2

1.2.3

1.2.4

1.2.5

$G \cong H$, simple

bijection $\theta : V(G) \longrightarrow V(H)$ $uv \in E(G) \Leftrightarrow \theta(u)\theta(v) \in E(H)$

정의로 부터 $\psi(e) = us$인 간선 e $(e \in E(G))$에 대해 대응되는 $\psi(\phi(e)) = \theta(u)\theta(v)$인 $\phi(e)(\phi(e) \in E(H))$가 존재함을 알 수 있다. 따라서 $uv \in E(G) \rightarrow \theta(u)\theta(v) \in E(H)$ 성립, 반대의 경우도 마찬가지로 성립한다.

1.2.6

1.2.7

1.2.8

1.2.9

$$\binom{n}{2} - (m(k+1) - n)\binom{k}{2} - (n - mk)\binom{k+1}{2} \tag{1}$$
$$= \binom{n}{2} - m(k+1)\binom{k}{2} - n\binom{k}{2} - (n - mk)\binom{k+1}{2} \tag{2}$$
$$= \binom{n}{2} - m(k-1)\binom{k+1}{2} + n\binom{k}{2} - (n - mk)\binom{k+1}{2} \tag{3}$$
$$= \binom{n}{2} + n\binom{k}{2} - (n - m)\binom{k+1}{2} \tag{4}$$
$$= \binom{n}{2} + n\binom{k}{2} - (n - m)\binom{k+1}{2} + (n-1)\binom{k+1}{2} - (n-1)\binom{k+1}{2} \tag{5}$$
$$= \binom{n}{2} + n\binom{k}{2} - (n-1)\binom{k+1}{2} + (m-1)\binom{k+1}{2} \tag{6}$$
$$= \frac{n^2 - n - nk + k^2 + k - nk}{2} + (m-1)\binom{k+1}{2} \tag{7}$$
$$= \frac{(n-k)(n-k-1)}{2} = \binom{n-k}{2} + (m-1)\binom{k+1}{2} \tag{8}$$

1.2.10

1.2.11

(a):

- K_n^c : 간선이 없는 그래프이다.
- $K_{n,m}^c$: 두 집합사이의 간선이 없이 두 집합이 각각 완전그래프인 subgraph 를 이루고있다.

(b): 자기 여 그래프가 되기위해선 일단 동형 이전에 간선의 갯수가 동일해야하는데 여기서 총 생길수있는 간선의 갯수는 $\dfrac{v(v-1)}{2}$가 최댓값이자 그래프의 간선수 + 여그래프의 간선수 입니다. 그래프의 간선수 = 여그래프의 간선수 이므로 v나 $v-1$은 적어도 둘 중 하나는(적어도지만 사실 둘다 4의 배수인 경우의 수는 존재하지않습니다) 4의 배수여야합니다 따라서 $v \pmod 4$는 0 또는 1

- 추가문제 :

  인접성 : 두 그래프가 인접성을 보존할때, u와 v가 인접하면 $\theta(u)$와 $\theta(v)$가 인접하고 그 역도 성립한다.

  두 그래프 G와 H에 대해서 G의 정점들을 H의 정점들에 일대일로 대응하면서 인접성을 보존하는 함수 f가 존재하면 두 그래프 G와 H는 동형(isomorphic)이다.

  Proof: $E(G)$의 임의의 간선 e에 대해 임의의 정점 u, v가 인접할때, 인접성이 보존되므로 $\theta(u)$와 $\theta(v)$ 또한 인접한다. $\theta(u)$와 $\theta(v)$를 잇는 간선을 e'이라 할때 $\phi(e) = e'$인 $\phi : E(G) \longrightarrow E(H)$를 정의할 수 있다. 따라서 정의에 의해 G와 H는 동형이다.

week2

1.3 The Incidence and Adjacency Matrices

(대충 그래프를 나타내는 표현에 대한 내용)

1.4 Subgraphs

정의 1.4 (subgraph) 그래프 H, G가 $V(H) \subset V(G), E(H) \subset E(G)$, and ψ_H is restricton ψ_G [a] 일때 $H \subseteq G$ 라쓰고 $H(G)$를 subgraph(supergraph)라 한다.

- $H \subseteq G$,$H \neq G$이면 $H \subset G$라 표기하고, H를 G의 proper graph라 한다.
- $V(H) = V(G), H \subseteq G$이면 $H(G)$를 spaning subgraph(supergraph)라 한다.
- spaning subgraph과 동시에 simple graph이면, undelying simple graph라 한다.

[a] ψ_H가 제한적으로 ψ_G이다.

1.5 Vertex Degrees

정의 1.5 (degree(차수)) $d_G(v)$는 정점 v에 연결된 간선의 갯수를 나타낸다. 그래프의 정점의 차수의 최솟값을 $\delta(G)$, 최댓값을 $\Delta(G)$로 표기한다.

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2\varepsilon$$

k-regular graph(정규그래프) : $d(v) = k \; \forall v \in V$ $|A|$: 집합 A의 원소의 갯수

Theorem 1.1.

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2\varepsilon$$

Proof. 근접행렬 M을 생각해보자 각 열은 정점으로 이루어져있으므로 행의 합은 해당 정점의 차수이다. 따라서 모든 행과 열의 합은 $\sum_{v \in V} d(v)$이며 또한 2ε이다. 예제 1.3.1(a)에 따라서 각 열의 합이 2이다. □

Corollary 1.1.1. 어떤 그래프의 차수가 홀수인 정점의 갯수는 짝수이다.

Proof. 차수가 홀수와 짝수인 V_1, V_2로 정점을 나누었을 때,

$$\sum_{v \in V_1} d(v) + \sum_{v \in V_2} d(v) = \sum_{v \in V} d(v)$$

는 짝수이다. $\sum_{v \in V_2} d(v)$는 짝수이므로 $\sum_{v \in V_1} d(v)$ 또한 짝수이다. 그러므로 $|V_1|$은 짝수이다. □

1.5.1

1.5.2

M'는 M의 전치행렬 원표기 M^T, $MM'[v_i][v_i] = \sum_{j=1}^{n} M[v_i][e_j] \cdot M'[e_j][v_i]$

$M'[e_j][v_i] = M[v_i][e_j]$이며 simple graph일때 각 값은 0 또는 1이기 때문에 결과적으로 대각선의 값은 해당 정점의 차수가 된다.

A 행렬에서 $A[v_i][v_j] = A[v_j][v_i]$

$d(i) = \sum_{j=1}^{n} A[v_i][v_j] = \sum_{j=1}^{n} A[v_j][v_i]$이다. 마찬가지로 simple graph에서 $A[v_i][v_j]$은 무조건 0 또는 1을 가지므로 $A[v_i][v_j] \cdot A[v_j][v_i] = A[v_i][v_j]$이다.

A^2에서 $A^2[v_i][v_i] = \sum_{j=1}^{n} A[v_i][v_j] \cdot A[v_j][v_i] = \sum_{j=1}^{n} A[v_i][v_j] = d(i)$

1.5.3

k-regular bipartite graph의 bipartition(X,Y)이 $|X| \neq |Y|$라 하자. $d(v) = |Y|, d(u) = |X| (v \in X, u \in Y)$ $d(v) \neq d(u)$ 이는 k-regular graph의 조건에 모순

1.5.4

두명 이상의 사람이 있는 그룹에서 그룹 내 친구의 수(그룹 내부의 사람으로 제한)가 같은 사람이 반드시 두명이 있음을 보여라

사람이 n명일때 친구의 수는 최대 n-1명이기때문에 비둘기집의 원리에 의해 친구 수가 같은 사람이 무조건 두명이 존재한다.

각각의 사람을 정점, 친구관계를 간선으로 나타낸다면은 해당 그룹은 simple graph로 볼수있으며 친구의 수는 각 정점의 차수가 된다.

따라서 해당 문제는 simple graph일때 반드시 두 정점의 차수가 같음을 보이는 것과 같다.

1.5.5

만약 G가 정점 $v_1, v_2, ..., v_n$을 가질때 $(d(v_1), d(v_2), ..., d(v_n))$ 을 그래프 G의 차수 수열(degrees sequence)라 부른다.

음이 아닌 정수들의 시퀀스 $(d_1, d_2, ..., d_n)$가 어떤 그래프의 차수 시퀀스임이 $\sum_{i=1}^{n} d_i$가 짝수임과 필요충분 조건임을 보여라.

그래프의 차수의 합은 2ε임이 $Theorem 1.1$에 이미 증명되어 있다. 따라서 차수 수열의 합은 짝수이며 반대의 경우도 성립한다.

If G has vertices $(v_1, v_2, ..., v_n)$ the sequence $(d(v_l), d(v_2), ..., d(v_n))$ is called a degree sequence of G. Show that a sequence $(d_1, d_2, ..., d_n)$ of non-negative integers is a degree sequence of some n graph if and only if $\sum_{i=1}^{n} d_i$ is even

1.5.6

A sequence $d = (d_1, d_2, ..., d_n)$ is graphic if there is a simple graph with degree sequence d. Show that

(a) (7,6,5,4,3,3,2) : 정점이 총 7갠데 첫번째 정점의 간선이 7개인것은 simple graph의 조건을 충족하지 못한다. (6,6,5,4,3,3,1) : 총 7개의 정점중 자신을 제외한 모든 정점에 간선을 잇는 차수가 6인 정점이 2개이지만 차수가 1인 정점이 있으므로 simple graph임이 모순이다.

(b) if d is graphic and $d_1 \leq d_2 \leq ... \leq d_n$, then $\sum_{i=1}^{n} d_i$ is even and $\sum_{i=l}^{k} d_i \leq k(k-1) + \sum_{i=k+1}^{n} \min(k, d_i)$ for $1 \leq k \leq n$

그래프가 심플그래프일때 차수 수열이 $d_1 \leq d_2 \leq ... \leq d_n$이면, $\sum_{i=1}^{n} d_i$ 짝수인것과 다음이 성립함을 보이시오 $\sum_{i=1}^{k} d_i \leq k(k-1) + \sum_{i=k+1}^{n} \min(k, d_i)$ for $1 \leq k \leq n$

d는 차수수열이므로 d의 합은 2ε이다.

1.5.7

1.5.8

1.5.9

1.5.10

The edge graph of a graph G is the graph with vertex set E(G) in which two vertices are joined if and only if they are adjacent edges in G.

Show that, if G is simple (a) the edge graph of G has e(G) vertices and L (d2 (V)) edges; vEVlG) . (b) the edge graph of Ks is isomorphic to the complement of the graph featured in exercise 1.2.6.

그래프 G의 엣지 그래프는 꼭지점 집합 E (G)가있는 그래프로 두 개의 꼭지점이 G의 인접 엣지 인 경우에만 결합됩니다.

1.6 Paths and Connection

정의 1.6 (walk) 순차적으로 이어지는 정점, 간선의 연결을 walk라한다. $v_0e_1v_1e_2v_2...e_kv_k$인 walk를 v_0 to v_k 또는 (v_0, v_k)-walk라 한다.

- 지나는 간선을 한번씩만 쓴 walk를 trail이라한다.
- simple graph G의 모든 간선을 지나는 trail의 길이는 $\varepsilon(W)$이다.
- 지나는 정점을 한번씩만 쓴 walk를 path라 한다
- 그래프 G가 두 정점 u,v의 (u,v)-path가 존재할때, connected graph라한다.
- 그래프의 정점을 쪼갠 부분 그래프들이 모두 각각의 연결된 그래프일때, 부분 그래프들을 그래프 G의 component라 한다.
- 그래프 G의 componet의 수를 $\omega(G)$라 쓴다.

1.6.1

(u,v)-walk사이에 사이클이 존재 할 경우 겹치는 정점을 중복사용하지않는 walk를 짤수있다 따라서 (u,v)-path가 존재한다.

1.6.2

????

1.6.3

한 정점을 패스의 시작정점으로 잡았을때 $\delta \leq k$ 이기때문에 lenth가 k인 path를 만들기위해 서로 다른 k개의 연결된 정점을 선택해 path를 생성할수있다.

1.6.4

????

1.6.5

(a) : 최대한 적은 정점에 많은 간선을 사용한 그래프를 세팅하기위해, 정점 하나를 제외한 $\varepsilon - 1$개의 정점으로 $\binom{\varepsilon-1}{2}$개의 엣지를 사용한 완전 그래프를 만들면 완전 그래프내의 정점들로는 더이상 간선을 연결 할 수 없기 때문에 조건의 그래프는 무조건 connected가 된다.

(b) : 정점 하나를 제외한 $\varepsilon - 1$개의 정점으로 $\binom{\varepsilon-1}{2}$개의 엣지를 사용해 완전 그래프를 만들면 정점하나는 연결되어 있지않으므로 disconnected그래프이다.

1.6.6

1.6.7

1.6.8

(a)간선 e가 빠짐으로서 하나였던 component가 두개의 component가 될 요지가 있다. 따라서 $\omega(G) \leq \omega(G-e) \leq \omega(G)+1$가 성립한다.

(b) inequality: 부등식 반례: $V(G) = v_1, v_2, v_3$, $E(G) = e_1, e_2$, $\psi_H(e_1) = v_1v_1, \psi_H(e_2) = v_2v_3$ v_1과 v_2v_3가 각각 연결되어있는 $\omega(G) = 2$인 그래프이다v_1을 제거할때 component가 하나 사라지므로 주어진 부등식을 만족하지 못한다.

1.6.9

1.6.10

1.6.11

1.6.12

1.6.13

1.6.14

$uv, uw, uw \in E$이면 G는 complete가 되기때문에 $uw \notin E$

1.7 Cycles

정의 1.7 (cycle) walk가 양의 길이이고 시작점과 끝점이 같을때 닫혀있다(closed)고 한다.

닫힌 트레일을 cycle이라고한다.

Theorem 1.2. 그래프가 이분그래프인것과 홀수개의 사이클을 가지지 않는것은 필요충분조건이다.

Proof. □

1.7.1

1.7.2

simple graph가 아닌경우 루프를 포함하는경우 v_0v_0는 정의에 의해 사이클이다. 임의의 정점v_0, v_1에 간선이 2개이상인경우 $v_0v_1v_0$사이클을 이룬다

simple graph인경우 정점의 개수가 k인 그래프를 생각하자. 이때 $v_0v_1v_2...v_i$인 서로 다른 정점만 최대한 이어진 연결을 생각해볼때 v_0과 v_i의 차수는 명제의 조건에의해서 무조건 $0 \leq j \leq k$인 정점 v_j에 연결이 되어있어야한다. 따라서 $v_jv_{j+1}...v_k$인 사이클을 이룬다.

1.7.3

1.7.4

1.7.5

week 3

1.8 The Shortest Path Problem

(대충 Dijkstra's Algorithm에 대한 내용)

1.8.1

1.8.2

1.8.3

1.8.4

1.8.5

가능한 모든 경우의 수를 센다. 이때 양방향이아닌 한방향 간선은 사이클을 형성하므로 최적의 경로로서 제외해도 문제없다.

1. 시작 (8,0,0) $\rightarrow$ 2,3

2. (3,5,0) $\rightarrow$ 1,4,5
3. (5,0,3) $\rightarrow$ 1,4,6
4. (0,5,3) $\rightarrow$ 2,3,5
5. (3,2,3) $\rightarrow$ 2,4,7
6. (5,3,0) $\rightarrow$ 3, 8
7. (6,2,0) $\rightarrow$ 5,9
8. (2,3,3) $\rightarrow$ 6
9. (6,0,2) $\rightarrow$ 7,10
10. (1,5,2) $\rightarrow$ 9,11
11. (1,4,3) $\rightarrow$ 10,12
12. 끝 (4,4,0) $\rightarrow$ 11,13,14
13. (4,1,3) $\rightarrow$ 12
14. (1,4,3) $\rightarrow$ 12

$1 \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 7 \rightarrow 9 \rightarrow 10 \rightarrow 11 \rightarrow 12$

1.8.6

1.9 Sperner's Lemma.

2차원 평면상의 삼각형T 에 대해서 이를 작은 삼각형으로 쪼갤때 교차하는 삼각형이 꼭지점 또는 전체면을 공통으로 가질때 이 삼각형을 쪼갠것을 단순하다 (be simplicial)라고 한다.

그다음 단순한 삼각형의 쪼갬에 대해서 쪼개진 각 정점에 대해서 다음이 성립할때, 0,1,2 세개의 분류(labelling)가 적절(be proper)하다고 한다.

- T의 세개의 정점에는 0,1,2가 하나씩 붙는다.
- 그리고 T의 정점 사이의 정점에는 양 끝 T의 정점의 두 값만 값이 붙을 수 있다.

각 정점을 0,1,2로 가지는 삼각형을 구별된 삼각형이라한다.

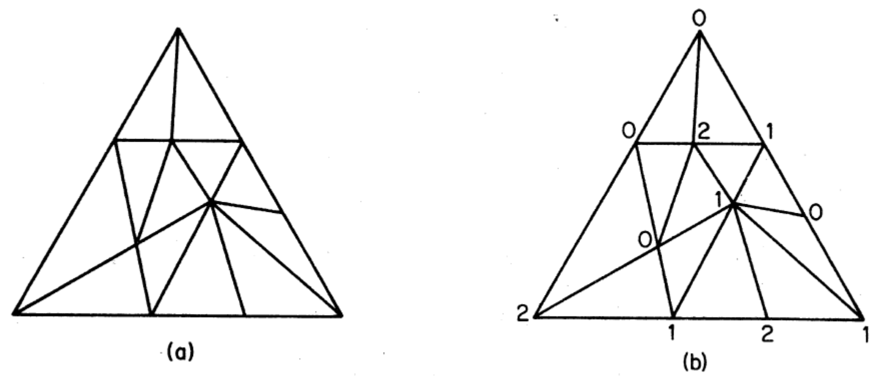

그림 1: (a) Asimplicial subdivision of a triangle (b) a proper labelling of the subdivision

Theorem 1.3 (Sperner's lemma)**.** 적절히 분류되고*(properly labelled)* 단순하게 *(simplicial)* 삼각형을 쪼갠것은 내부에 홀수개의 구별된 삼각형을 가진다.

Proof. T를 T_0라 하자. 그다음 $T_1, T_2, ..., T_n$을 쪼개진 삼각형들이라고 하자. 0과 1로 각각 분류된 T_i와 T_j가 공통 간선일때 v_i,v_j에 간선이 존재하는 정점 집합 $\{v_0, v_1, ..., v_n\}$을 정의하자.(이 정점은 T에 대응할수있다.)

이 그래프에서 v_0는 명백하게 차수가 홀수값을 가진다.(1.9.1) 따라서 $v_1, v_2, ..., v_n$ 중에 홀수개가 홀수값 차수를 가지게 된다. 삼각형이라서 이 홀수개의 차수를 가지는 정점들이 차수값이 오직 1만을 가짐을 알 수 있다. v_i의 차수가 1임은 T_i가 구별된 삼각형인 경우만이다. □

1.9.1

경계 사이의 정점의 갯수를 n이라하고 수학적 귀납법을 적용한다. 사이에 정점이 없다고 생각해보자. 그러면 $0-1$로 v_0의 차수는 1이다. 경계 사이의 정점이 N 에서 v_0의 차수가 홀수임이 성립한다 치고 $N+1$일 때를 N에 정점 한개를 삽입 할때 양 끝 정점은 네가지 경우가 나온다.

- $0-1$

- $0-0$

- $1-0$

- $1-1$

$1-0$, $0-1$는 대칭이므로 똑같이 생각해도 되며 $1-1$과 $0-0$ 또한 대칭이다.

$1-1$ 일때는 가운데에 0을 삽입할경우에 차수가 +2가되며 1일때는 그대로 홀수이다. $0-0$ 일때도 마찮가지 $1-0$ 일때는 가운데에 0을 삽입할 경우 $1-0-1$ 연결되는 간선은 달라졌지만 차수는 그대로다 1을 삽입해도 마찮가지이며 $0-1$ 일때도 마찮가지이다. 따라서 $N+1$에서도 홀수임이 증명되어 수학적 귀납법에 따라 v_0는 항상 홀수이다.

week 4

2 Tree

2.1 Trees

정의 2.1 (tree) connected acyclic graph

acyclic graph(forest) : 사이클이 없는 그래프

Theorem 2.1. 트리에서 두 정점은 서로 유일한 경로를 가진다.

Proof. □

Theorem 2.2. 그래프 G가 트리이면 $\epsilon = \nu - 1$

Proof. □

Corollary 2.2.1. 정점이 한개가 아닌 트리*(nontrivial tree)*는 적어도 두개의 정점의 차수가 *1*이다.

2.1.1

2.1.2

2.1.3

2.1.4

2.1.5

Let 0 be a graph with v-I edges. Show that the following three statements are equivalent: (a) G is connected; (b) G is acyclic; (c) G is a tree.

연결된 acyclic graph는 정의에 의해 tree임이 자명하므로 간선의 개수가 $\nu - 1$일때, acyclic graph일때 connected한것과 connected graph일때 acyclic 그래프임이 필요충분조건임을 보이는 것으로 충분하다.

acyclic $\rightarrow$ connected graph

acyclic그래프가 connected graph가 아니라고 가정해보자.

그러면 각 component는 connected graph이므로 트리이다. 각 component의 간선의 갯수의 합은 $v(G_1) - 1 + v(G_2) - 1 + ... + v(G_n) - 1 \neq v(G) - 1$ 따라서 가정에 모순 다음 명제가 성립한다.

connected graph $\rightarrow$ acyclic

acyclic graph가 아니라고 하자 cycle이 형성된곳의 간선을 하나씩 제거해서 acyclic 그래프가 되도록 만들면 트리가 된다. $\nu - 1 - n \neq \nu - 1$ 가정에 모순이라 다음 명제가 성립한다.

2.1.6

2.1.7

2.1.8

A centre of G is a vertex u such that max d(u, v) is as small as possible. Show that a tree has either exactly one centre or two, adj acent, centres.

G의 중심은 최대 d(u, v)가 가능한 한 작은 꼭지점 u이다.

트리 하나가 정확히 하나의 중심 또는 두 개의 인접한 중심을 가지고 있음을 보여라

2.2 Cut Edges and Bonds

정의 2.2 (cut edge) 그래프 G에 대해 $\omega(G-e) > \omega(G)$인 간선 e를 절단 간선 (a cut edge)이라고 한다.

Theorem 2.3. 그래프G의 간선 e가 사이클에 속하지 않으면 간선e는 절단 간선이다.

Proof. □

Theorem 2.4. 모든 간선이 절단 간선이면 연결된 그래프는 트리이다.

Proof. □

정의 2.3 (spanning tree) 그래프 G의 트리인 spanning subgraph를 G의 신장 트리(spaning tree)라고 부른다.

Corollary 2.4.1. 그래프 G가 *connected graph*이면 G의 *cennected spanning subgraph*가 존재한다.

Proof. 그래프 H를 G의 최소한의 connected spanning subgraph라 하자. 이때 H가 acyclic가 아니라고 가정 해보자. 그래프 H가 사이클이 존재하는 경우,간선 사이클 경로의 임의의 인접한 정점 u, v를 잡았을때 u, v의 간선을 제거해도 u, v

는 여전이 연결되어있다. 이는 최소한의 connected spanning subgraph라는 것에 모순이다. 따라서 그래프 H는 connected spaning graph이며 acyclic함으로 스패닝 트리이다. $\square$

Corollary 2.4.2. 그래프가 연결되어 있으면 $\epsilon \geq v - 1$

Proof. $\square$

Theorem 2.5. 연결된 그래프 G의 스패닝트리를 T라 하자 e를 T에 속하지않은 그래프 G의 간선이라할때 $T + e$는 유일한 사이클을 가진다.

정의 2.4 (an edge cut)

- $[S, S']$: $S, S' \leq V$이고, 정점이 각각 S, S'에 하나씩 있는 간섭 집합을 에 있는것을 $[S, S']$라 표현 한다.
- An edge cut of G : S는 비어있지 않은 적절한 V의 부분 집합이고, $\bar{S} = V/S$인 $[S, \bar{S}]$를 G의 간선 절단(an edge cut of G)이라고 한다.
- Bond : 최소한의 비지않은 G의 간선 절단을 본드(bond) 라고한다.
- $\bar{H}(G)$: H를 G의 부분 그래프라고 할때 $\bar{H}(G)$를 $G - E(H)$라고 한다.
- cotree :연결 그래프 G에서, 스패닝 트리 T의 $\bar{T}$ 형태를 G의 cotree라고 한다.

Theorem 2.6. T를 그래프 G의 스패닝 트리라고 할때, e를 T의 어떤 간선이라고 하자. 그러면

- *cotree* $\bar{T}$는 G의 본드를 가지고 있지않다.
- $\bar{T} + e$는 G의 유일한 본드를 가지고있다

Proof. $\square$

2.2.1

포레스트 G의 컴포넌트는 트리이므로 트리의 간선은 컷엣지이 따라서 그래프의 모든 간선 또한 컷엣지이다. 반대로 모든 간선이 컷엣지임은 연결된 각각의 그래프를 모으면 트리가 되며 이를 모아 포레스트를 형성할수있다.

2.2.2

(a)e가 컷엣지가 일때 간선 e가 모든 스패닝 트리에 속하지 않는다고 생각하자. 그러면 e가 속하지 않은 스패닝 트리는 e에 인접한 두정점 a,b에 이르는 경로가 하나 더 있다. 하지만 컷엣지 e에 인접한 a,b는 e를 유일한 경로로 가지므로 모순이다.

(b) e가 루프일때 스패닝 트리에 속한다고 하자. 하지만 e는 자체만으로 사이클을 형성 하므로 트리의 정의에 위배된다. 반대로 트리는 루프를 간선으로 가질수없다.

2.2.3

2.2.2(a)에 의해 스패닝트리에 사용되는 모든 간선이 컷 엣지일시에 스패닝트리는 단 한개만을 가지며 2.2.2(b)에 의해 루프인 간선은 스패닝트리의 간선이 될수가없다. 따라서 루프가 없고 모든간선이 컷 엣지인 그래프는 Theorem2.4에의해 그자체로 트리가 된다.

2.2.4

maximal forst : 그래프 G에서 간선뗄거 떼서 트리로 만들어 G자체가 컴포넌트가 있음을 가정해 가장 큰 포레스트로 만드는것

(a) 트리는 그자체로 스패닝 트리를 가진다. forest의 정의에 따라 F의 모든 component는 스패닝 트리이다. $F \cap H$ 이 교집합은 H의 스패닝 트리를 나타낸다.

(b): 2.2.5와 증명이 같다.

2.2.5

한 component i의 간선의 갯수를 ϵ_i,정점의 갯수를 v_i라하자 이때 $Corollary$2.4.2에 의해 $\epsilon_i \geq v_i - 1$이 성립한다. 모든 컴포넌트에 의해 성립하므로 이를 모두 더하면 $\epsilon \geq v - \omega$가 성립한다. $v - \omega$보다 큰 간선의 갯수 하나마다 사이클을 무조건 형성하므로 따라서 최소한의 만들어지는 사이클의 갯수는 $\epsilon - v + \omega$이다.

2.2.6

(a) : 모든 차수가 짝수일때, 컷 엣지가 존재한다고 하자. 그러면 해당 컷엣지를 제거했을때 컷엣지의 인접한 두 정점은 차수가 홀수가 된다. 이때 corollary 1.1

에 의해 각각의 component는 홀수의 정점을 무조건 한개씩 더 가져야하는데 이는 모든 차수가 짝수임에 모순이다. (b) :

2.2.7

2.2.8

2.2.9

2.3 Cut Vertexes

정의 2.5 (cut vertex) E가 두개의 비지않은 부분집합 정점 v만을 유일하게 가지는 $G[E_1]$,$G[E_2]$로 분할 될수 있을때 정점 v를 절단 정점(a cut vertex)라 한다.

G가 loop간선이없고 nontrivial일때, $\omega(G-v) > \omega(G)$인 정점 v를 절단 정점이라 한다.

Theorem 2.7. 트리 G에 대해 $d(v) > 1$일때 v는 절단 정점이다.

Proof. □

Corollary 2.7.1. 모든 *nontrivial,loopless* 연결 그래프는 절단 정점이 아닌 정점을 적어도 두개이상 가진다.

Proof. □

week5

Theorem 2.8. T가 연결된 그래프 G의 스패닝 트리라고 하고 e를 T에 속하지 않은 G의 에지라고 하자. 그러면 $T+e$는 유일한 사이클을 가진다.

Proof. $\psi_G(e) = xy$라 할때, 유일한 사이클이아닌 두 개 이상의 사이클이 생성될 경우 e의 에지 추가하기전의 x, y 유일한 경로가아닌 두개이상의 경로가 있다는 것을 의미하는데 트리는 유일한 경로임이 이미 증명되었으므로 유일한 사이클을 가진다. □

2.4 Cayley's Formula

정의 2.6 (contract) 그래프 G의 한 에지e를 수축한다는 것은 에지 e를 그래프에서 삭제하고 양 끝점을 하나의 정점으로 합치는 것이다. 그 결과 만들어지는 그래프를 $G \cdot e$로 표시한다.

- $\nu(G \cdot e) = \nu(G \cdot e) - 1$
- $\varepsilon(G \cdot e) = \varepsilon(G \cdot e) - 1$
- $\omega(G \cdot e) = \omega(G)$
- T가 트리이면 $T \cdot e$도 트리이다.
- 그래프 G의 스패닝 트리의 개수를 $\tau(G)$로 표시한다.

Theorem 2.9. *2.8* 그래프 G의 임의의 에지 e에 대해서 $\tau(G) = \tau(G-e) + \tau(G \cdot e)$이 성립한다.

Proof. 그래프 G에서 에지e를 포함하지 않는 스패닝 트리는 $G-e$의 스패닝 트리 또한 된다. 따라서 $\tau(G-e)$는 그래프 G에서 에지 e를 포함하지 않는 스패닝 트리의 개수와 같다. 에지 e를 포함하는 G의 임의의 스패닝 트리 T는 $G \cdot e$의 스패닝 트리 $T \cdot e$에 일대일 대응한다.(추가적인 논리 필요) 따라서 $\tau(G \cdot e)$는 G에서 에지 e를 포함하는 스패닝 트리의 개수이다. 따라서 정리가 성립한다. □

Fortunately, and rather surprisingly, there is a closed formula for T(G) which expresses T(G) as a determinant; we shall present this result in chapter 12.

Theorem 2.10. $Cayley'sfolmula$: $\tau(K_n) = n^{n-2}$

Proof. K_n의 정점 집합을 $N = \{1, 2, ..., n\}$라 놓자. 그러면 n^{n-2}는 N으로부터 길이가 $n-2$인 수열[1]을 만드는 수로 볼 수 있다. 따라서 이 수열이 K_n의 spanning tree와 1:1대응을 하는걸로 이 증명이 완성된다. K_n의 spanning tree T에 대해서 특정 수열 $t_1, t_2, ..., t_{n-2}$과 연관지으려 한다. N을 정렬된 셋이라 가정하고, s_1은 T의 차수가 1인 첫번째 정점이라하자. s_1은 t_1과 인접한 정점이다. 그다음에 s_1를 T에서 제거하자 그다음 $T - s_1$에 차수가 1인 정점 한개를 s_2라 하자 이 짓거리를 t_{n-2}가 지워져 두 정점이 남을때 까지 반복한다. 총 반복은 $n-2$

[1] $Pr\ddot{u}fer\ sequences$라 한다.

번 반복한다. 따라서 spanning tree가 수열에 대응함을 보였다. 수열이 spanning tree에 대응함을 보이자. sequence P에 없는 1에서 n중 가장 작은 숫자를 찾아 P의 첫번째 숫자에 연결한다. 그 후 P의 첫번째 숫자를 제거한다. P가 존재하지 않을 때 까지 반복한다. 마지막 연결되는 숫자는 n이다. 이렇게 함으로써 수열이 트리에 대응됨을 보일수있다. 수열의 갯수가 n^{n-2}개 이므로 트리의 개수도 n^{n-2} 개이다. □

2.5 THE CONNECfOR PROBLEM

(대충 크루스칼 알고리즘에 대한 내용)

3 Connectivity

3.1 Connectivity

정의 3.1 (Connectivity) Connectivity

- A vertex cut : $G - V'$가 연결되지않은 그래프인 V의 부분 집합 V'를 정점 절단(A vertex cut) 이라고한다.
- k-vertex cut : k개의 원소를 가진 정점 절단. 완전 그래프(complete graph)는 정점 절단을 가지지 않는다.
- 스패닝 서브 그래프로서 완전 그래프를 가지는 그래프는 정점 절단을 가지지 않는다.
- connectivity $\kappa(G)$: 그래프 G가 가지는 $k - vertexcut$의 최소값 k를 $\kappa(G)$ 라고 한다.그래프 G가 trivial이거나 연결되지않은 그래프일때 $\kappa(G) = 0$ 이다.
- $k - connected$: $\kappa(G) \geq k$일때 그래프 G는 $k - connected$이다.
- 모든 nontrivial connected graph는 $1 - connected$이다.

정의 3.2 (Edge connectivity) Edge connectivity

- k-edge cut : k개의 원소를 가지는 간선 절단(edge cut).
- Edge connectivity $\kappa'(G)$: nontrivial 그래프 G의 k-edge cut E' $G - E'$는 연결되어있지않다. $k - edgecut$를 가지는 G의 최소한의 k를 $\kappa'(G)$라 표현한다. G가 trivial이거나 연결되지않은 그래프 일때, $\kappa'(G) = 0$이다.
- $\kappa(G) \geq k$일때 G는 k-edge-connected이다.
- 그래프 G가 연결된 그래프일때 $\kappa'(G) = 1$이고 모든 nontrivial connected 그래프는 1-edge-connected이다.

Theorem 3.1.

3.1.1

(a) Show that if G is k-edge-connected, with $k > 0$, and if E' is a set of k. edges of G, then $w(G - E') < 2$

$\omega(G) = 1$

case 1) $k'(G) > k \to \omega(G - E') = 1$

case 2) $k'(G) = k \to \omega(G - E') = 2$

$\therefore \omega(G - E') \leq 2$

(b) .For $k > 0$, find a k -connected graph G and a set V' of kvertices of G such that $\omega(G - V') > 2$.

모래시계모양에 가운데 정점에 추가 한 간선에 다른 한 정점이 이어진 모양

3.1.2

Show that if G -is k-edge-connected,.then $\epsilon > kv/2$.

Theoream 3.1에 의해 $k \leq \delta$ 따라서 $k \times v \leq 2\epsilon$

3.1.3

(a) :

case 1) $\delta = v - 1$

csae 2) $\delta = v - 2$

(b) : 모래시계

3.1.4

(b) : 모래시계 가운데 정점이 나뉘어져 가운데 간선이 하나 있는경우

3.1.5

3.2 BLOCKS

정의 3.3 (Blocks) Block : 절단 정점들이 존재 하지않는 연결된 그래프를 block 이라한다. 적어도 세개 이상의 정점을 가진 모든 블록은 2-connected이다. 그래프의 블록은 최대로 블록의 성질을 가질수있는 상태이다.(대충 블록이 또 블록으로 쪼개지는 경우는 생각 안한다는것.)

Theorem 3.2.

4 Euler Tours and Hamilton Cycles

4.1 Euler Tours

정의 4.1 (Euler Tours) Euler는 7개의 Konigsberg 다리를 마을을 한번만 거쳐서 갈수 없음을 보였다

- Euler trail : 모든 간선을 지나는 trail
- tour : 적어도 하나의 간선을 가지는 닫힌(closed) walk
- Euler tour : 각 간선이 정확히 한번 사용된 tour
- eulerian: Euler tour을 가지는 그래프

Theorem 4.1. 홀수 차수의 정점을 가지지않는 비지않은 연결된 그래프는 *eulerian*이다.

Proof. □

4.2 HAMILTON CYCLES

Hamilton이 Graves에게 보낸 편지에서 유래했다.

정의 4.2 (Hamilton cycle) hmm..

- Hamilton path : 모든 정점을 포함한 path
- Hamilton cycles : 모든 정점을 포함한 cycle