

## 차례

차례 . . . . .	1
1 GRAPHS AND SUBGRAPHS . . . . .	2
1.1 Graphs and simple Graphs . . . . .	2
1.2 Graph Isomorphism . . . . .	2
1.3 The Incidence and Adjacency Matrices . . . . .	5
1.4 Subgraphs . . . . .	6
1.5 Vertex Degrees . . . . .	6
1.6 Paths and Connection . . . . .	9
1.7 Cycles . . . . .	10
1.8 The Shortest Path Problem . . . . .	11
1.9 Sperner's Lemma. . . . .	12
2 Tree . . . . .	15
2.1 Trees . . . . .	15
2.2 Cut Edges and Bonds . . . . .	16
2.3 Cut Vertexes . . . . .	17
2.4 Cayley's Formula . . . . .	18
2.5 THE CONNECfOR PROBLEM . . . . .	19
3 Connectivity . . . . .	20
3.1 Connectivity . . . . .	20
3.2 BLOCKS . . . . .	21
4 Euler Tours and Hamilton Cycles . . . . .	22
4.1 Euler Tours . . . . .	22
4.2 HAMILTON CYCLES . . . . .	22

# 1 GRAPHS AND SUBGRAPHS

## 1.1 Graphs and simple Graphs

**정의 1.1** (Graph) 정점과 정점을 잇는 간선들로 이루어진 것을 그래프라한다.

- $V(G)$  : 정점의 집합
- $E(G)$  : 간선의 집합
- $\psi_G(e_n)$  : 각 간선( $e_n$ )의 정점의 쌍
- $\nu(G)$  : 정점의 갯수
- $\varepsilon(G)$  : 간선의 갯수

그래프를 간선들이 교차하지않게 그릴수 있는 것을 planar graph라 한다. planar graph가 아닌 것을 nonplanar graph라한다.

정점이 한개인 그래프를 trivial graph라고 한다. 이외의 모든 그래프는 non-trivial 그래프이다.

Simple graph : loop가 없고 두 정점쌍에 두개이상의 간선이 존재하지않는 그래프

incident : 한 간선에 양 정점 근접 adjacent : 두 간선에 공통된 정점 인접

## 1.2 Graph Isomorphism

**정의 1.2** (isomorphic) 두 그래프 G와 H가 전단사 함수  $\theta : V(G) \rightarrow V(H)$ 와  $\phi : E(G) \rightarrow E(H)$ 이 성립하면 두 그래프는 동형(isomorphic)이다. 또한 다음이 성립한다.

- $\psi(e) = us(e \in E(G), u, s \in V(G))$
- $\psi(\phi(e)) = \theta(u)\theta(v)$

**정의 1.3** (a special classes of graphs) 특징에 따른 그래프 이름

- complete graph(완전 그래프) : 모든 정점에 간선이 연결된 그래프 정점의 개수가  $n$ 일때  $K_n$ 로 표현한다.
- empty graph : 정점이 한개고 간선이 없는 그래프
- bipartite graph(이분 그래프) : 정점이 두 집합으로 이루어져 집합 내에는 연결된 간선이 없는 그래프
- complete bipartite graph(완전 이분 그래프) : 한 집합의 모든 정점이 각각 반대 집합의 모든 정점에 연결된 그래프 두 정점 집합의 갯수가 각각  $m$ 과  $n$ 일때  $K_{m,n}$ 으로 표현한다.
- (1.2.9)k-partite graph : 정점이 적어도하나 포함된 k개의 부분 집합으로 이루어진 그래프이다 한 부분집합 내에 연결된 간선은 존재하지 않고 다른 부분집합의 정점에만 간선이 존재할수있다. (원문)a complete k-partite graph is one that is simple and in which each vertex is joined to every vertex that is not in the same subset
- (1.2.9)complete k-partite graph : k-partite graph의 각 정점이 포함된 부분집합을 제외한 모든 정점에 간선이 연결된 그래프  
(원문)complete k-partite graph is one that is simple and in which each vertex is joined to every vertex that is not in the same subset.
- (1.2.10)k -cube : 각 정점은 하나의 ordered k-tuple(k-비트 이진수)이고, 두 정점이 1비트만 서로 다를 때 두 정점간에 에지가 있다.
- (1.2.11)여 그래프(complement graph) : 모든 정점에 대해서 포함하고 있는 존재하는 간선은 제거, 존재하지않는 간선을 생성해서 만든 그래프  $G^c$ 로 표현한다.
- (1.2.11)자기 여 그래프 (self-complementary graph) : 여그래프와 자기자신이 동형인 그래프

week1

### 1.2.1

### 1.2.2

### 1.2.3

### 1.2.4

### 1.2.5

$G \cong H$  , simple

bijection  $\theta : V(G) \longrightarrow V(H)$   $uv \in E(G) \Leftrightarrow \theta(u)\theta(v) \in E(H)$

정의로 부터  $\psi(e) = us$ 인 간선  $e$  ( $e \in E(G)$ )에 대해 대응되는  $\psi(\phi(e)) = \theta(u)\theta(v)$ 인  $\phi(e)$  ( $\phi(e) \in E(H)$ )가 존재함을 알 수 있다. 따라서  $uv \in E(G) \rightarrow \theta(u)\theta(v) \in E(H)$  성립, 반대의 경우도 마찬가지로 성립한다.

### 1.2.6

### 1.2.7

### 1.2.8

### 1.2.9

$$\binom{n}{2} - (m(k+1) - n) \binom{k}{2} - (n - mk) \binom{k+1}{2} \quad (1)$$

$$= \binom{n}{2} - m(k+1) \binom{k}{2} - n \binom{k}{2} - (n - mk) \binom{k+1}{2} \quad (2)$$

$$= \binom{n}{2} - m(k-1) \binom{k+1}{2} + n \binom{k}{2} - (n - mk) \binom{k+1}{2} \quad (3)$$

$$= \binom{n}{2} + n \binom{k}{2} - (n - m) \binom{k+1}{2} \quad (4)$$

$$= \binom{n}{2} + n \binom{k}{2} - (n - m) \binom{k+1}{2} + (n-1) \binom{k+1}{2} - (n-1) \binom{k+1}{2} \quad (5)$$

$$= \binom{n}{2} + n \binom{k}{2} - (n-1) \binom{k+1}{2} + (m-1) \binom{k+1}{2} \quad (6)$$

$$= \frac{n^2 - n - nk + k^2 + k - nk}{2} + (m-1) \binom{k+1}{2} \quad (7)$$

$$= \frac{(n-k)(n-k-1)}{2} = \binom{n-k}{2} + (m-1) \binom{k+1}{2} \quad (8)$$

### 1.2.10

### 1.2.11

(a):

- $K_n^c$  : 간선이 없는 그래프이다.
- $K_{n,m}^c$  : 두 집합사이의 간선이 없이 두 집합이 각각 완전그래프인 subgraph를 이루고있다.

(b): 자기 여 그래프가 되기위해선 일단 동형 이전에 간선의 갯수가 동일해야하는데 여기서 총 생길수있는 간선의 갯수는  $\frac{v(v-1)}{2}$ 가 최댓값이자 그래프의 간선수 + 여그래프의 간선수 입니다. 그래프의 간선수 = 여그래프의 간선수 이므로  $v$ 나  $v-1$ 은 적어도 둘 중 하나는(적어도지만 사실 둘다 4의 배수인 경우의 수는 존재하지않습니다) 4의 배수여야합니다 따라서  $v \pmod{4}$ 는 0 또는 1

- 추가문제 :

인접성 : 두 그래프가 인접성을 보존할때,  $u$ 와  $v$ 가 인접하면  $\theta(u)$ 와  $\theta(v)$ 가 인접하고 그 역도 성립한다.

두 그래프  $G$ 와  $H$ 에 대해서  $G$ 의 정점들을  $H$ 의 정점들에 일대일로 대응하면서 인접성을 보존하는 함수  $f$ 가 존재하면 두 그래프  $G$ 와  $H$ 는 동형(isomorphic)이다.

Proof:  $E(G)$ 의 임의의 간선  $e$ 에 대해 임의의 정점  $u, v$ 가 인접할때, 인접성이 보존되므로  $\theta(u)$ 와  $\theta(v)$  또한 인접한다.  $\theta(u)$ 와  $\theta(v)$ 를 잇는 간선을  $e'$ 이라 할때  $\phi(e) = e'$ 인  $\phi : E(G) \rightarrow E(H)$ 를 정의할 수 있다. 따라서 정의에 의해  $G$ 와  $H$ 는 동형이다.

week2

## 1.3 The Incidence and Adjacency Matrices

(대충 그래프를 나타내는 표현에 대한 내용)

## 1.4 Subgraphs

**정의 1.4** (subgraph) 그래프  $H, G$ 가  $V(H) \subset V(G), E(H) \subset E(G)$ , and  $\psi_H$  is restriction  $\psi_G$ <sup>a</sup> 일때  $H \subseteq G$  라쓰고  $H(G)$ 를 subgraph(supergraph)라 한다.

- $H \subseteq G, H \neq G$ 이면  $H \subset G$ 라 표기하고,  $H$ 를  $G$ 의 proper graph라 한다.
- $V(H) = V(G), H \subseteq G$ 이면  $H(G)$ 를 spanning subgraph(supergraph)라 한다.
- spanning subgraph과 동시에 simple graph이면, underlying simple graph라 한다.

---

<sup>a</sup> $\psi_H$ 가 제한적으로  $\psi_G$ 이다.

## 1.5 Vertex Degrees

**정의 1.5** (degree(차수))  $d_G(v)$ 는 정점  $v$ 에 연결된 간선의 갯수를 나타낸다. 그래프의 정점의 차수의 최솟값을  $\delta(G)$ , 최댓값을  $\Delta(G)$ 로 표기한다.

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2\varepsilon$$

k-regular graph(정규그래프) :  $d(v) = k \forall v \in V$   $|A|$  : 집합  $A$ 의 원소의 갯수

**Theorem 1.1.**

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2\varepsilon$$

*Proof.* 근접행렬  $M$ 을 생각해보자 각 열은 정점으로 이루어져있으므로 행의 합은 해당 정점의 차수이다. 따라서 모든 행과 열의 합은  $\sum_{v \in V} d(v)$ 이며 또한  $2\varepsilon$ 이다. 예제 1.3.1(a)에 따라서 각 열의 합이 2이다.  $\square$

**Corollary 1.1.1.** 어떤 그래프의 차수가 홀수인 정점의 갯수는 짝수이다.

*Proof.* 차수가 홀수와 짝수인  $V_1, V_2$ 로 정점을 나누었을 때,

$$\sum_{v \in V_1} d(v) + \sum_{v \in V_2} d(v) = \sum_{v \in V} d(v)$$

는 짝수이다.  $\sum_{v \in V_2} d(v)$ 는 짝수이므로  $\sum_{v \in V_1} d(v)$  또한 짝수이다. 그러므로  $|V_1|$ 은 짝수이다.  $\square$

### 1.5.1

### 1.5.2

$M'$ 는  $M$ 의 전치행렬 원표기  $M^T$ ,  $MM'[v_i][v_i] = \sum_{j=1}^n M[v_i][e_j] \cdot M'[e_j][v_i]$

$M'[e_j][v_i] = M[v_i][e_j]$ 이며 simple graph일때 각 값은 0 또는 1이기 때문에 결과적으로 대각선의 값은 해당 정점의 차수가 된다.

$A$  행렬에서  $A[v_i][v_j] = A[v_j][v_i]$

$d(i) = \sum_{j=1}^n A[v_i][v_j] = \sum_{j=1}^n A[v_j][v_i]$ 이다. 마찬가지로 simple graph에서  $A[v_i][v_j]$

은 무조건 0 또는 1을 가지므로  $A[v_i][v_j] \cdot A[v_j][v_i] = A[v_i][v_j]$ 이다.

$A^2$ 에서  $A^2[v_i][v_i] = \sum_{j=1}^n A[v_i][v_j] \cdot A[v_j][v_i] = \sum_{j=1}^n A[v_i][v_j] = d(i)$

### 1.5.3

$k$ -regular bipartite graph의 bipartition( $X, Y$ )이  $|X| \neq |Y|$ 라 하자.  $d(v) = |Y|, d(u) = |X|$  ( $v \in X, u \in Y$ )  $d(v) \neq d(u)$  이는  $k$ -regular graph의 조건에 모순

### 1.5.4

두명 이상의 사람이 있는 그룹에서 그룹 내 친구의 수(그룹 내부의 사람으로 제한)가 같은 사람이 반드시 두명이 있음을 보여라

사람이  $n$ 명일때 친구의 수는 최대  $n-1$ 명이기때문에 비둘기집의 원리에 의해 친구 수가 같은 사람이 무조건 두명이 존재한다.

각각의 사람을 정점, 친구관계를 간선으로 나타낸다면은 해당 그룹은 simple graph로 볼수있으며 친구의 수는 각 정점의 차수가 된다.

따라서 해당 문제는 simple graph일때 반드시 두 정점의 차수가 같음을 보이는 것과 같다.

### 1.5.5

만약  $G$ 가 정점  $v_1, v_2, \dots, v_n$ 을 가질때  $(d(v_1), d(v_2), \dots, d(v_n))$  을 그래프  $G$ 의 차수 수열(degrees sequence)라 부른다.

음이 아닌 정수들의 시퀀스  $(d_1, d_2, \dots, d_n)$ 가 어떤 그래프의 차수 시퀀스임이  $\sum_{i=1}^n d_i$ 가 짝수임과 필요충분 조건임을 보여라.

그래프의 차수의 합은  $2\varepsilon$ 임이 *Theorem 1.1*에 이미 증명되어 있다. 따라서 차수 수열의 합은 짝수이며 반대의 경우도 성립한다.

If  $G$  has vertices  $(v_1, v_2, \dots, v_n)$  the sequence  $(d(v_1), d(v_2), \dots, d(v_n))$  is called a degree sequence of  $G$ . Show that a sequence  $(d_1, d_2, \dots, d_n)$  of non-negative integers is a degree sequence of some  $n$  graph if and only if  $\sum_{i=1}^n d_i$  is even

### 1.5.6

A sequence  $d = (d_1, d_2, \dots, d_n)$  is graphic if there is a simple graph with degree sequence  $d$ . Show that

(a)  $(7, 6, 5, 4, 3, 3, 2)$  : 정점이 총 7개인데 첫번째 정점의 간선이 7개인것은 simple graph의 조건을 충족하지 못한다.  $(6, 6, 5, 4, 3, 3, 1)$  : 총 7개의 정점중 자신을 제외한 모든 정점에 간선을 잇는 차수가 6인 정점이 2개이지만 차수가 1인 정점이 있으므로 simple graph임이 모순이다.

(b) if  $d$  is graphic and  $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$ , then  $\sum_{i=1}^n d_i$  is even and  $\sum_{i=1}^k d_i \leq k(k-1) + \sum_{i=k+1}^n \min(k, d_i)$  for  $1 \leq k \leq n$

그래프가 심플그래프일때 차수 수열이  $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$ 이면,  $\sum_{i=1}^n d_i$  짝수인것과 다음이 성립함을 보이시오  $\sum_{i=1}^k d_i \leq k(k-1) + \sum_{i=k+1}^n \min(k, d_i)$  for  $1 \leq k \leq n$

$d$ 는 차수수열이므로  $d$ 의 합은  $2\varepsilon$ 이다.

### 1.5.7

### 1.5.8

### 1.5.9

### 1.5.10

The edge graph of a graph  $G$  is the graph with vertex set  $E(G)$  in which two vertices are joined if and only if they are adjacent edges in  $G$ .

Show that, if  $G$  is simple (a) the edge graph of  $G$  has  $e(G)$  vertices and  $L(d_2(V))$  edges;  $vE(VG)$ . (b) the edge graph of  $K_n$  is isomorphic to the complement of the graph featured in exercise 1.2.6.



그래프  $G$ 의 엣지 그래프는 꼭지점 집합  $E(G)$ 가있는 그래프로 두 개의 꼭지점이  $G$ 의 인접 엣지 인 경우에만 결합됩니다.

## 1.6 Paths and Connection

**정의 1.6** (walk) 순차적으로 이어지는 정점, 간선의 연결을 walk라한다.  $v_0e_1v_1e_2v_2...e_kv_k$ 인 walk를  $v_0$  to  $v_k$  또는  $(v_0, v_k)$ -walk라 한다.

- 지나는 간선을 한번씩만 쓴 walk를 trail이라한다.
- simple graph  $G$ 의 모든 간선을 지나는 trail의 길이는  $\varepsilon(W)$ 이다.
- 지나는 정점을 한번씩만 쓴 walk를 path라 한다
- 그래프  $G$ 가 두 정점  $u, v$ 의  $(u, v)$ -path가 존재할때, connected graph라한다.
- 그래프의 정점을 쪼개 부분 그래프들이 모두 각각의 연결된 그래프일때, 부분 그래프들을 그래프  $G$ 의 component라 한다.
- 그래프  $G$ 의 componet의 수를  $\omega(G)$ 라 쓴다.

### 1.6.1

$(u, v)$ -walk사이에 사이클이 존재 할 경우 겹치는 정점을 중복사용하지않는 walk를 짧수있다 따라서  $(u, v)$ -path가 존재한다.

### 1.6.2

????

### 1.6.3

한 정점을 패스의 시작정점으로 잡았을때  $\delta \leq k$  이기때문에 lenth가  $k$ 인 path를 만들기위해 서로 다른  $k$ 개의 연결된 정점을 선택해 path를 생성할수있다.

### 1.6.4

????

### 1.6.5

(a) : 최대한 적은 정점에 많은 간선을 사용한 그래프를 세팅하기 위해, 정점 하나를 제외한  $\varepsilon - 1$ 개의 정점으로  $\binom{\varepsilon - 1}{2}$ 개의 엣지를 사용한 완전 그래프를 만들면 완전 그래프내의 정점들로는 더이상 간선을 연결 할 수 없기 때문에 조건의 그래프는 무조건 connected가 된다.

(b) : 정점 하나를 제외한  $\varepsilon - 1$ 개의 정점으로  $\binom{\varepsilon - 1}{2}$ 개의 엣지를 사용해 완전 그래프를 만들면 정점 하나는 연결되어 있지않으므로 disconnected 그래프이다.

### 1.6.6

### 1.6.7

### 1.6.8

(a) 간선  $e$ 가 빠짐으로서 하나였던 component가 두개의 component가 될 요지가 있다. 따라서  $\omega(G) \leq \omega(G - e) \leq \omega(G) + 1$ 가 성립한다.

(b) inequality: 부등식 반례:  $V(G) = v_1, v_2, v_3$ ,  $E(G) = e_1, e_2$ ,  $\psi_H(e_1) = v_1v_1, \psi_H(e_2) = v_2v_3$   $v_1$ 과  $v_2v_3$ 가 각각 연결되어있는  $\omega(G) = 2$ 인 그래프이다  $v_1$ 을 제거할때 component가 하나 사라지므로 주어진 부등식을 만족하지 못한다.

### 1.6.9

### 1.6.10

### 1.6.11

### 1.6.12

### 1.6.13

### 1.6.14

$uv, uw, uw \in E$ 이면  $G$ 는 complete가 되기때문에  $uw \notin E$

## 1.7 Cycles

**정의 1.7** (cycle) walk가 양의 길이이고 시작점과 끝점이 같을때 닫혀있다 (closed)고 한다.

닫힌 트레일을 cycle이라고한다.

**Theorem 1.2.** 그래프가 이분그래프인것과 홀수개의 사이클을 가지지 않는것은 필요충분조건이다.

*Proof.*

□

### 1.7.1

### 1.7.2

simple graph가 아닌경우 루프를 포함하는경우  $v_0v_0$ 는 정의에 의해 사이클이다.

임의의 정점  $v_0, v_1$ 에 간선이 2개이상인경우  $v_0v_1v_0$ 사이클을 이룬다

simple graph인경우 정점의 개수가  $k$ 인 그래프를 생각하자. 이때  $v_0v_1v_2...v_i$  인 서로 다른 정점만 최대한 이어진 연결을 생각해볼때  $v_0$ 과  $v_i$ 의 차수는 명제의 조건에의해서 무조건  $0 \leq j \leq k$ 인 정점  $v_j$ 에 연결이 되어있어야한다. 따라서  $v_jv_{j+1}...v_k$ 인 사이클을 이룬다.

### 1.7.3

### 1.7.4

### 1.7.5

week 3

## 1.8 The Shortest Path Problem

(대충 Dijkstra's Algorithm에 대한 내용)

### 1.8.1

### 1.8.2

### 1.8.3

### 1.8.4

### 1.8.5

가능한 모든 경우의 수를 센다. 이때 양방향이나닌 한방향 간선은 사이클을 형성하므로 최적의 경로로서 제외해도 문제없다.

1. 시작  $(8,0,0) \rightarrow 2,3$

2.  $(3,5,0) \rightarrow 1,4,5$
  3.  $(5,0,3) \rightarrow 1,4,6$
  4.  $(0,5,3) \rightarrow 2,3,5$
  5.  $(3,2,3) \rightarrow 2,4,7$
  6.  $(5,3,0) \rightarrow 3, 8$
  7.  $(6,2,0) \rightarrow 5,9$
  8.  $(2,3,3) \rightarrow 6$
  9.  $(6,0,2) \rightarrow 7,10$
  10.  $(1,5,2) \rightarrow 9,11$
  11.  $(1,4,3) \rightarrow 10,12$
  12. 끝  $(4,4,0) \rightarrow 11,13,14$
  13.  $(4,1,3) \rightarrow 12$
  14.  $(1,4,3) \rightarrow 12$
- $1 \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 7 \rightarrow 9 \rightarrow 10 \rightarrow 11 \rightarrow 12$

### 1.8.6

### 1.9 Sperner's Lemma.

2차원 평면상의 삼각형  $T$  에 대해서 이를 작은 삼각형으로 쪼갤때 교차하는 삼각형이 꼭지점 또는 전체면을 공통으로 가질때 이 삼각형을 쪼갬것을 단순하다 (be simplicial)라고 한다.

그다음 단순한 삼각형의 쪼갬에 대해서 쪼개진 각 정점에 대해서 다음이 성립할때, 0,1,2 세개의 분류(labeling)가 적절(be proper)하다고 한다.

- $T$ 의 세개의 정점에는 0,1,2가 하나씩 붙는다.
- 그리고  $T$ 의 정점 사이의 정점에는 양 끝  $T$ 의 정점의 두 값만 값이 붙을 수 있다.

각 정점을 0,1,2로 가지는 삼각형을 구별된 삼각형이라한다.

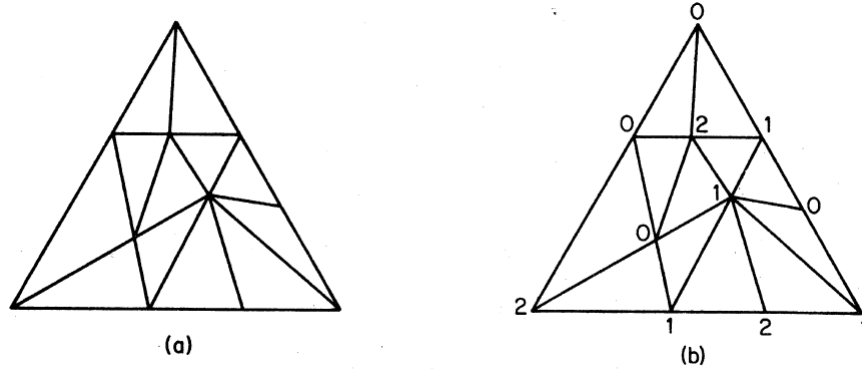


그림 1: (a) Asimplicial subdivision of a triangle (b) a proper labelling of the subdivision

**Theorem 1.3** (Sperner's lemma). 적절히 분류되고(*properly labelled*) 단순하게(*simplicial*) 삼각형을 쪼개것은 내부에 홀수개의 구별된 삼각형을 가진다.

*Proof.*  $T$ 를  $T_0$ 라 하자. 그다음  $T_1, T_2, \dots, T_n$ 을 쪼개진 삼각형들이라고 하자. 0과 1로 각각 분류된  $T_i$ 와  $T_j$ 가 공통 간선일때  $v_i, v_j$ 에 간선이 존재하는 정점 집합  $\{v_0, v_1, \dots, v_n\}$ 을 정의하자.(이 정점은  $T$ 에 대응할수있다.)

이 그래프에서  $v_0$ 는 명백하게 차수가 홀수값을 가진다.(1.9.1) 따라서  $v_1, v_2, \dots, v_n$  중에 홀수개가 홀수값 차수를 가지게 된다. 삼각형이라서 이 홀수개의 차수를 가지는 정점들이 차수값이 오직 1만을 가짐을 알 수 있다.  $v_i$ 의 차수가 1임은  $T_i$ 가 구별된 삼각형인 경우만이다.  $\square$

### 1.9.1

경계 사이의 정점의 갯수를  $n$ 이라하고 수학적 귀납법을 적용한다. 사이에 정점이 없다고 생각해보자. 그러면  $0 - 1$ 로  $v_0$ 의 차수는 1이다. 경계 사이의 정점이  $N$ 에서  $v_0$ 의 차수가 홀수임이 성립한다 치고  $N + 1$ 일 때를  $N$ 에 정점 한개를 삽입할때 양 끝 정점은 네가지 경우가 나온다.

- $0 - 1$
- $0 - 0$

- $1 - 0$

- $1 - 1$

$1 - 0$ ,  $0 - 1$ 는 대칭이므로 똑같이 생각해도 되며  $1 - 1$ 과  $0 - 0$  또한 대칭이다.

$1 - 1$  일때는 가운데에 0을 삽입할경우에 차수가 +2가되며 1일때는 그대로 홀수이다.  $0 - 0$  일때도 마찬가지로  $1 - 0$  일때는 가운데에 0을 삽입할 경우  $1 - 0 - 1$  연결되는 간선은 달라졌지만 차수는 그대로다 1을 삽입해도 마찬가지로이며  $0 - 1$  일때도 마찬가지이다. 따라서  $N + 1$ 에서도 홀수임이 증명되어 수학적 귀납법에 따라  $v_0$ 는 항상 홀수이다.

## 2 Tree

### 2.1 Trees

**정의 2.1** (tree) connected acyclic graph

acyclic graph(forest) : 사이클이 없는 그래프

**Theorem 2.1.** 트리에서 두 정점은 서로 유일한 경로를 가진다.

*Proof.*

□

**Theorem 2.2.** 그래프  $G$ 가 트리이면  $\epsilon = \nu - 1$

*Proof.*

□

**Corollary 2.2.1.** 정점이 한개가 아닌 트리(*nontrivial tree*)는 적어도 두개의 정점의 차수가 1이다.

#### 2.1.1

#### 2.1.2

#### 2.1.3

#### 2.1.4

#### 2.1.5

Let  $G$  be a graph with  $\nu$  vertices and  $\epsilon$  edges. Show that the following three statements are equivalent: (a)  $G$  is connected; (b)  $G$  is acyclic; (c)  $G$  is a tree.

연결된 acyclic graph는 정의에 의해 tree임이 자명하므로 간선의 개수가  $\nu - 1$  일때, acyclic graph일때 connected한것과 connected graph일때 acyclic 그래프임이 필요충분조건임을 보이는 것으로 충분하다.

acyclic  $\rightarrow$  connected graph

acyclic 그래프가 connected graph가 아니라고 가정해보자.

그러면 각 component는 connected graph이므로 트리이다. 각 component의 간선의 갯수의 합은  $v(G_1) - 1 + v(G_2) - 1 + \dots + v(G_n) - 1 \neq v(G) - 1$  따라서 가정에 모순 다음 명제가 성립한다.

connected graph  $\rightarrow$  acyclic

acyclic graph가 아니라고 하자 cycle이 형성된곳의 간선을 하나씩 제거해서 acyclic 그래프가 되도록 만들면 트리가 된다.  $\nu - 1 - n \neq \nu - 1$  가정에 모순이라 다음 명제가 성립한다.

#### 2.1.6

#### 2.1.7

#### 2.1.8

A centre of  $G$  is a vertex  $u$  such that  $\max d(u, v)$  is as small as possible. Show that a tree has either exactly one centre or two, adjacent, centres.

$G$ 의 중심은 최대  $d(u, v)$ 가 가능한 한 작은 꼭지점  $u$ 이다.

트리 하나가 정확히 하나의 중심 또는 두 개의 인접한 중심을 가지고 있음을 보여라

### 2.2 Cut Edges and Bonds

**정의 2.2** (cut edge) 그래프  $G$ 에 대해  $\omega(G - e) > \omega(G)$ 인 간선  $e$ 를 절단 간선 (a cut edge)이라고 한다.

**Theorem 2.3.** 그래프  $G$ 의 간선  $e$ 가 사이클에 속하지 않으면 간선  $e$ 는 절단 간선이다.

*Proof.*

□

**Theorem 2.4.** 모든 간선이 절단 간선이면 연결된 그래프는 트리이다.

*Proof.*

□

**정의 2.3** (spanning tree) 그래프  $G$ 의 트리인 spanning subgraph를  $G$ 의 신장 트리(spanning tree)라고 부른다.

**Corollary 2.4.1.** 그래프  $G$ 가 *connected graph*이면  $G$ 의 *connected spanning subgraph*가 존재한다.

*Proof.* 그래프  $H$ 를  $G$ 의 최소한의 connected spanning subgraph라 하자. 이때  $H$ 가 acyclic가 아니라고 가정 해보자. 그래프  $H$ 가 사이클이 존재하는 경우, 간선 사이클 경로의 임의의 인접한 정점  $u, v$ 를 잡았을때  $u, v$ 의 간선을 제거해도  $u, v$



는 여전이 연결되어있다. 이는 최소한의 connected spanning subgraph라는 것에 모순이다. 따라서 그래프  $H$ 는 connected spanning graph이며 acyclic함으로 스패닝 트리이다.  $\square$

**Corollary 2.4.2.** 그래프가 연결되어 있으면  $\epsilon \geq v - 1$

*Proof.*  $\square$

**Theorem 2.5.** 연결된 그래프  $G$ 의 스패닝트리를  $T$ 라 하자  $e$ 를  $T$ 에 속하지않은 그래프  $G$ 의 간선이라할때  $T + e$ 는 유일한 사이클을 가진다.

**정의 2.4** (an edge cut) •  $[S, S'] : S, S' \leq V$ 이고, 정점이 각각  $S, S'$ 에 하나씩 있는 간선 집합을  $e$ 에 있는것을  $[S, S']$ 라 표현 한다.

- An edge cut of  $G : S$ 는 비어있지 않은 적절한  $V$ 의 부분 집합이고,  $\bar{S} = V/S$ 인  $[S, \bar{S}]$ 를  $G$ 의 간선 절단(an edge cut of  $G$ )이라고 한다.
- Bond : 최소한의 비지않은  $G$ 의 간선 절단을 본드(bond) 라고한다.
- $\bar{H}(G) : H$ 를  $G$ 의 부분 그래프라고 할때  $\bar{H}(G)$ 를  $G - E(H)$ 라고 한다.
- cotree : 연결 그래프  $G$ 에서, 스패닝 트리  $T$ 의  $\bar{T}$  형태를  $G$ 의 cotree라고 한다.

**Theorem 2.6.**  $T$ 를 그래프  $G$ 의 스패닝 트리라고 할때,  $e$ 를  $T$ 의 어떤 간선이라고 하자. 그러면

- cotree  $\bar{T}$ 는  $G$ 의 본드를 가지고 있지않다.
- $\bar{T} + e$ 는  $G$ 의 유일한 본드를 가지고있다

*Proof.*  $\square$

### 2.2.1

포레스트  $G$ 의 컴포넌트는 트리이므로 트리의 간선은 컷엣지이 따라서 그래프의 모든 간선 또한 컷엣지이다. 반대로 모든 간선이 컷엣지임은 연결된 각각의 그래프를 모으면 트리가 되며 이를 모아 포레스트를 형성할수있다.

### 2.2.2

(a)  $e$ 가 컷엣지가 일때 간선  $e$ 가 모든 스패닝 트리에 속하지 않는다고 생각하자. 그러면  $e$ 가 속하지 않은 스패닝 트리는  $e$ 에 인접한 두정점  $a, b$ 에 이르는 경로가 하나 더 있다. 하지만 컷엣지  $e$ 에 인접한  $a, b$ 는  $e$ 를 유일한 경로로 가지므로 모순이다.

(b)  $e$ 가 루프일때 스패닝 트리에 속한다고 하자. 하지만  $e$ 는 자체만으로 사이클을 형성 하므로 트리의 정의에 위배된다. 반대로 트리는 루프를 간선으로 가질수없다.

### 2.2.3

2.2.2(a)에 의해 스패닝트리에 사용되는 모든 간선이 컷 엣지일시에 스패닝트리는 단 한개만을 가지며 2.2.2(b)에 의해 루프인 간선은 스패닝트리의 간선이 될수가없다. 따라서 루프가 없고 모든간선이 컷 엣지인 그래프는 Theorem 2.4에의해 그자체로 트리가 된다.

### 2.2.4

maximal forst : 그래프  $G$ 에서 간선뺀거 떼서 트리로 만들어  $G$ 자체가 컴포넌트가 있음을 가정해 가장 큰 포레스트로 만드는것

(a) 트리는 그자체로 스패닝 트리를 가진다. forest의 정의에 따라  $F$ 의 모든 component는 스패닝 트리이다.  $F \cap H$  이 교집합은  $H$ 의 스패닝 트리를 나타낸다.

(b): 2.2.5와 증명이 같다.

### 2.2.5

한 component  $i$ 의 간선의 갯수를  $\epsilon_i$ , 정점의 갯수를  $v_i$ 라하자 이때 Corollary 2.4.2에 의해  $\epsilon_i \geq v_i - 1$ 이 성립한다. 모든 컴포넌트에 의해 성립하므로 이를 모두 더하면  $\epsilon \geq v - \omega$ 가 성립한다.  $v - \omega$ 보다 큰 간선의 갯수 하나마다 사이클을 무조건 형성하므로 따라서 최소한의 만들어지는 사이클의 갯수는  $\epsilon - v + \omega$ 이다.

### 2.2.6

(a) : 모든 차수가 짝수일때, 컷 엣지가 존재한다고 하자. 그러면 해당 컷엣지를 제거했을때 컷엣지의 인접한 두 정점은 차수가 홀수가 된다. 이때 corollary 1.1

에 의해 각각의 component는 홀수의 정점을 무조건 한개씩 더 가져야하는데 이는 모든 차수가 짝수임에 모순이다. (b) :

2.2.7

2.2.8

2.2.9

### 2.3 Cut Vertices

**정의 2.5** (cut vertex)  $E$ 가 두개의 비지않은 부분집합 정점  $v$ 만을 유일하게 가지는  $G[E_1], G[E_2]$ 로 분할 될수 있을때 정점  $v$ 를 절단 정점(a cut vertex)라 한다.

$G$ 가 loop간선이없고 nontrivial일때,  $\omega(G - v) > \omega(G)$ 인 정점  $v$ 를 절단 정점이라 한다.

**Theorem 2.7.** 트리  $G$ 에 대해  $d(v) > 1$ 일때  $v$ 는 절단 정점이다.

*Proof.*

□

**Corollary 2.7.1.** 모든 *nontrivial, loopless* 연결 그래프는 절단 정점이 아닌 정점을 적어도 두개이상 가진다.

*Proof.*

□

week5

**Theorem 2.8.**  $T$ 가 연결된 그래프  $G$ 의 스패닝 트리라고 하고  $e$ 를  $T$ 에 속하지 않은  $G$ 의 에지라고 하자. 그러면  $T + e$ 는 유일한 사이클을 가진다.

*Proof.*  $\psi_G(e) = xy$ 라 할때, 유일한 사이클이아닌 두 개 이상의 사이클이 생성될 경우  $e$ 의 에지 추가하기전의  $x, y$  유일한 경로가아닌 두개이상의 경로가 있다는 것을 의미하는데 트리는 유일한 경로임이 이미 증명되었으므로 유일한 사이클을 가진다.

□

## 2.4 Cayley's Formula

**정의 2.6** (contract) 그래프  $G$ 의 한 에지  $e$ 를 수축한다는 것은 에지  $e$ 를 그래프에서 삭제하고 양 끝점을 하나의 정점으로 합치는 것이다. 그 결과 만들어지는 그래프를  $G \cdot e$ 로 표시한다.

- $\nu(G \cdot e) = \nu(G) - 1$
- $\varepsilon(G \cdot e) = \varepsilon(G) - 1$
- $\omega(G \cdot e) = \omega(G)$
- $T$ 가 트리이면  $T \cdot e$ 도 트리이다.
- 그래프  $G$ 의 스패닝 트리의 개수를  $\tau(G)$ 로 표시한다.

**Theorem 2.9.** 2.8 그래프  $G$ 의 임의의 에지  $e$ 에 대해서  $\tau(G) = \tau(G - e) + \tau(G \cdot e)$ 이 성립한다.

*Proof.* 그래프  $G$ 에서 에지  $e$ 를 포함하지 않는 스패닝 트리는  $G - e$ 의 스패닝 트리 또한 된다. 따라서  $\tau(G - e)$ 는 그래프  $G$ 에서 에지  $e$ 를 포함하지 않는 스패닝 트리의 개수와 같다. 에지  $e$ 를 포함하는  $G$ 의 임의의 스패닝 트리  $T$ 는  $G \cdot e$ 의 스패닝 트리  $T \cdot e$ 에 일대일 대응한다.(추가적인 논리 필요) 따라서  $\tau(G \cdot e)$ 는  $G$ 에서 에지  $e$ 를 포함하는 스패닝 트리의 개수이다. 따라서 정리가 성립한다.  $\square$

Fortunately, and rather surprisingly, there is a closed formula for  $T(G)$  which expresses  $T(G)$  as a determinant; we shall present this result in chapter 12.

**Theorem 2.10.** Cayley's formula :  $\tau(K_n) = n^{n-2}$

*Proof.*  $K_n$ 의 정점 집합을  $N = \{1, 2, \dots, n\}$ 라 놓자. 그러면  $n^{n-2}$ 는  $N$ 으로부터 길이가  $n - 2$ 인 수열<sup>1</sup>을 만드는 수로 볼 수 있다. 따라서 이 수열이  $K_n$ 의 spanning tree와 1:1대응을 하는걸로 이 증명이 완성된다.  $K_n$ 의 spanning tree  $T$ 에 대해서 특정 수열  $t_1, t_2, \dots, t_{n-2}$ 과 연관지으려 한다.  $N$ 을 정렬된 셋이라 가정하고,  $s_1$ 은  $T$ 의 차수가 1인 첫번째 정점이라 하자.  $s_1$ 은  $t_1$ 과 인접한 정점이다. 그다음에  $s_1$ 를  $T$ 에서 제거하자 그다음  $T - s_1$ 에 차수가 1인 정점 한개를  $s_2$ 라 하자 이 짓거리를  $t_{n-2}$ 가 지워져 두 정점이 남을때 까지 반복한다. 총 반복은  $n - 2$

<sup>1</sup>Prüfer sequences라 한다.

번 반복한다. 따라서 spanning tree가 수열에 대응함을 보였다. 수열이 spanning tree에 대응함을 보이자. sequence P에 없는 1에서 n중 가장 작은 숫자를 찾아 P의 첫번째 숫자에 연결한다. 그 후 P의 첫번째 숫자를 제거한다. P가 존재하지 않을 때 까지 반복한다. 마지막 연결되는 숫자는 n이다. 이렇게 함으로써 수열이 트리에 대응됨을 보일수있다. 수열의 갯수가  $n^{n-2}$ 개 이므로 트리의 개수도  $n^{n-2}$ 개이다.  $\square$

## 2.5 THE CONNECfOR PROBLEM

(대충 크루스칼 알고리즘에 대한 내용)

### 3 Connectivity

#### 3.1 Connectivity

**정의 3.1** (Connectivity) Connectivity

- A vertex cut :  $G - V'$ 가 연결되지않은 그래프인  $V$ 의 부분 집합  $V'$ 를 정점 절단(A vertex cut) 이라고한다.
- k-vertex cut : k개의 원소를 가진 정점 절단. 완전 그래프(complete graph)는 정점 절단을 가지지 않는다.
- 스페닝 서브 그래프로써 완전 그래프를 가지는 그래프는 정점 절단을 가지지 않는다.
- connectivity  $\kappa(G)$  : 그래프  $G$ 가 가지는  $k$ -vertexcut의 최소값  $k$ 를  $\kappa(G)$ 라고 한다.그래프  $G$ 가 trivial이거나 연결되지않은 그래프일때  $\kappa(G) = 0$ 이다.
- $k$ -connected :  $\kappa(G) \geq k$ 일때 그래프  $G$ 는  $k$ -connected이다.
- 모든 nontrivial connected graph는 1-connected이다.

**정의 3.2** (Edge connectivity) Edge connectivity

- k-edge cut : k개의 원소를 가지는 간선 절단(edge cut).
- Edge connectivity  $\kappa'(G)$  : nontrivial 그래프  $G$ 의 k-edge cut  $E' \subseteq E$ 로  $G - E'$ 는 연결되어있지않다.  $k$ -edgecut를 가지는  $G$ 의 최소한의  $k$ 를  $\kappa'(G)$ 라 표현한다.  $G$ 가 trivial이거나 연결되지않은 그래프 일때,  $\kappa'(G) = 0$ 이다.
- $\kappa(G) \geq k$ 일때  $G$ 는 k-edge-connected이다.
- 그래프  $G$ 가 연결된 그래프일때  $\kappa'(G) = 1$ 이고 모든 nontrivial connected 그래프는 1-edge-connected이다.

## 3.2 BLOCKS

**정의 3.3** (Blocks) Block : 절단 정점들이 존재 하지않는 연결된 그래프를 block 이라한다. 적어도 세개 이상의 정점을 가진 모든 블록은 2-connected이다. 그래프의 블록은 최대로 블록의 성질을 가질수있는 상태이다.(대충 블록이 또 블록으로 쪼개지는 경우는 생각 안한다는것.)

**Theorem 3.1.**

## 4 Euler Tours and Hamilton Cycles

### 4.1 Euler Tours

**정의 4.1** (Euler Tours) Euler는 7개의 Königsberg 다리를 마을을 한번만 거쳐서 갈수 없음을 보였다

- Euler trail : 모든 간선을 지나는 trail
- tour : 적어도 하나의 간선을 가지는 닫힌(closed) walk
- Euler tour : 각 간선이 정확히 한번 사용된 tour
- eulerian: Euler tour을 가지는 그래프

**Theorem 4.1.** 홀수 차수의 정점을 가지지않는 비지않은 연결된 그래프는 *eulerian*이다.

*Proof.*

□

### 4.2 HAMILTON CYCLES

Hamilton이 Graves에게 보낸 편지에서 유래했다.

**정의 4.2** (Hamilton cycle) hmm..

- Hamilton path : 모든 정점을 포함한 path
- Hamilton cycles : 모든 정점을 포함한 cycle