벡터와 공간에 대한 이해

EUnS

2020년 2월 29일

여기서 대부분의 좌표표현은 벡터이고 행이아닌 열벡터로 표현합니다

$(1,1,1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ [1] 는 같습니다

1 일차결합

정의 1.1 (일차결합) $v_1, v_2, ..., v_k$를 n차원 벡터라 하자. 임의의 스칼라 $a_1, a_2, ..., a_k$에 대하여 벡터 $v = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_kv_k$ 는 R^n에 속하는 한 벡터이다. 이것을 주어진 벡터 $v_1, v_2, ..., v_k$의 **일차결합(linear combination)** 이라 한다.

ex : 임의의 3차원 벡터 x는 $x = x_1i + x_2j + x_3k$와 같이 벡터 $i = (1,0,0), j = (0,1,0), k = (0,0,1)$의 일차결합으로 나타낼 수 있다.

내분점 외분점은 모두 일차결합의 한 형태입니다.

i, j, k벡터(물리에서 주로사용)는 고등학교에서 기본 단위벡터로 e_1, e_2, e_3와 같습니다.

[1]좌식을 행벡터라하고 우식을 열벡터라고 합니다.

2 span

정의 2.1 (span) 유클리드 벡터공간 R^n의 벡터 $v_1, v_2, ..., v_k$에 대하여, 이 벡터의 일차결합 의 전체집합을 $Span(v_1, v_2, ..., v_k)$으로 나타내자. 즉,

$$Span(v_1, v_2, ..., v_k) = \{a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_kv_k \mid a_1, a_2, ..., a_k \in R\}$$

유클리드 벡터공간 R^n의 벡터 $v_1, v_2, ..., v_k$에 대하여,

$$W = Span(v_1, v_2, ..., v_k)$$

일 때, $v_1, v_2, ..., v_k$은 W를 **생성(span)**한다고 하고, W를 $v_1, v_2, ..., v_k$에 의하여 생성된 공간(span)이라고 한다 즉, $v_1, v_2, ..., v_k$가 W 를 생성한다는 것은 W가 $v_1, v_2, ..., v_k$의 모든 일차결합을 포함하고 W의 임의의 벡터를 $v_1, v_2, ..., v_k$의 일차결합으로 나타낼 수 있다는 것을 의미한다.

ex

$$Span(e_1, e_2, e_3) = R^3$$

$$Span(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}) \neq R^3$$

(추후에 더 다룹니다)

여기서 좌표는 시점인 원점과 종점인 한점을 잇는 벡터(=위치벡터)를 기본단위벡터 e_1, e_2, e_3의 일차결합으로 나타내고 계수만을 따온것이라는걸 알 수 있습니다.

즉 좌표 = 위치벡터 그자체로도 볼수있는셈 또한 우리가 왜 내분점 외분점을 이용해서 한 벡터를 여러 가지의 벡터로서 표현하는지를 알 수 있습니다

3 부분집합

정의 3.1 (부분집합) 다음 세 조건을 만족하는 R n의 부분집합 를 R n의 **부분공간(subspace)**이라고 한다.

1. $0 \in S$
2. $x, y \in S$이면 $x + y \in S$이다.
3. $x\ inS$이면, 임의의 스칼라 α에 대하여 $\alpha x \in S$이다.

   조건 2)와 3)은 다음 하나의 조건 4)로 바꿀 수 있다.
4. $x, y \in S$이면, 임의의 스칼라 α, β에 대하여 $\alpha x + \beta y \in S$이다.

Corollary 3.0.1. $W = Span(v_1, v_2, ..., v_k)$ 은 R^n의 부분공간이다

Proof. 증명은 충분히 혼자 직접하실 수 있습니다. □

4 일차독립과 일차종속

정의 4.1 (일차종속, 일차독립) 유클리드 벡터공간 R^n의 벡터 $v_1, v_2, ..., v_k$를 생각하자. 이 벡터에 의하여 생성된 부분공간을 W라 하자.

$$W = Span(v_1, v_2, ..., v_k)$$

벡터 $v_1, v_2, ..., v_k$ 가운데 어떤 한 벡터를 제외한 나머지 벡터들이 여전히 W를 생성한다고 하자. 이것은 v_i제외된 벡터 를 나머지 벡터들의 일차결합으로 나타낼 수 있음을 의미한다.

이와 같이, 가운데 어떤 한 벡터를 나머지 벡터들의 일차결합으로 나타낼 수 있을 때, 벡터 $v_1, v_2, ..., v_k$는 **일차종속 (linearly dependent)**이라고 한다.[a]

일차종속이 아닌 경우 즉, 벡터 가운데 어느 것도 나머지 벡터들의 일차결합으로 나타낼 수 없을 때는 **일차독립(linearly independent)**이라고 한다.

[a]단, 영벡터 0는 일차종속으로 정한다.

$v_1, v_2, ..., v_k$가 일차종속일 필요충분조건은 적어도 하나는 0이 아닌 어떤 스칼라 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$에 대하여 $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_k v_k = 0$

$v_1, v_2, ..., v_k$가 일차독립일 필요충분조건은 임의의 스칼라 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$에 대하여 $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_k v_k = 0$일때, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_k = 0$ 이다. ex)

1. $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}$는 일차 종속이다.

   $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-3\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}$ (같은 줄끼리 계산했다고 생각하시면됩니다)

   눈에 잘보여서 이렇게 끝낼수도 있지만 잘안보일때는 $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix}-3\\1\\1\end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix} x_3 = 0$인 x_1, x_2, x_3의 값을 찾는겁니다.

   이는 다음 연립방정식을 푸는것과 같습니다

   $x_1 - 3x_2 - x_3 = 0$

   $x_2 + x_3 = 0$

   $x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$

2. e_1, e_2, e_3는 일차 독립이다

5 기저(basis)

정의 5.1 (기저) R^n의 부분공간V의 벡터 $v_1, v_2, ..., v_k$에 대하여

1. $v_1, v_2, ..., v_k$가 V를 생성하고
2. $v_1, v_2, ..., v_k$가 일차독립일 때,

$v_1, v_2, ..., v_k$를 의 기저(basis)라고 한다.

기저의 개수가 기저를 만드는 공간의 차원을 나타낸다.

ex)

$\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$과 $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$은 둘 다 R^3의 기저이다. 당연히 정의만 만족 하면되므로 하나의 공간에 여러개의 기저가 정의될 수 있습니다. 기저

의 가장 대표적인결로 기본 단위 벡터가있죠. 이를 이용하면 R 상에서 좌표계를 45도 꺽어서 새로운 좌표계를 정의 할수도 있습니다. 이를 선형변환이라 합니다.

앞의 예제에 나온 $Span(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix})$ 은 결국에 뭘 나타낼까라는 의문이 들 수 있습니다 세 벡터는 일차종속이며 따라서

$Span(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}) = Span(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\1\\1\end{pmatrix})$입니다.

이 두 벡터는 일차독립이므로 기저가 될 수 있고 이 공간이 2차원 평면이라는 정보까지 알 수 있습니다.

이 평면상의 한점을 (x, y, z)라 했을 때, 이는 곧

$$\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\alpha + \begin{pmatrix}-3\\1\\1\end{pmatrix}\beta = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

라는 일차결합 식으로 나타낼 수 있습니다. 임의의 스칼라 α, β에 대해서 생성된 공간의 모든 점을 나타낼 수 있습니다.

이를 풀어쓰면

$\alpha - 3\beta = x$

$\beta = y$

$\alpha + \beta = z$

어디서 많이 보던 모양아닌가요

직선의 방정식을 나타내는 여러 가지 방법중 벡터 방정식

정의 5.2 (직선의 방정식: 벡터방정식) 방향벡터 $\vec{u} = (a, b, c)$와 직선 위의 한 점 (x_1, y_2, z_1)이 주어질 때, 직선위의 점 (x, y, z)는 매개변수 t로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$x = at + x_1$

$y = bt + y_1$

$z = ct + z_1$

이것과 똑같은 생김새죠 (x_1, y_2, z_1)가 평행이동을 나타내는 것이였다면 $\vec{u} = (a, b, c)$는 직선의 기저를 나타내는 것입니다. 평면의 방정식을 구할 때도 직선의 방정식을 구할때의 t를 소거하는 식과 마찬가지로 α, β를 소거하여 구하면 $x + 4y - z = 0$ 이라는 평면의 방정식이 나옵니다

6 정리

벡터들을 가지고 다른 벡터를 표현하는걸 일차결합이라고 합니다. 최소한의 벡터 갯수만으로 공간을 만들어 낼때 그 벡터들을 기저라하고, 좌표는 기저의 일차결합을 계수만 따온 표현법이죠, 근본에는 기저가 깔려있습니다. 좌표는 시점이 원점인 위치벡터와 완전히 1:1 대응합니다. 따라서 모든 기하문제는 벡터문제로 생각해서 풀수있죠. 기저는 언제든지 바뀔 수 있으며 그에 따라서 좌표도 달라지지만 나타내는 좌표(벡터)가 나타내는 위치는 여전히 같습니다. 예를들어 기저가 $(1,0),(0,1)$일때 $(1,1)$은 기저가 $(1,1),(-1,0)$일때, $(1,0)$인 것과 나타내는 위치가 같습니다.