시간복잡도 기초

EUnS

May 7, 2020

O, Ω, Θ

- $O(g(n)) = \{f(n)$ 모든 $n \geq n_0$에 대해 $0 \leq f(n) \leq cg(n)$ 인 양의 상수 c, n_0이 존재한다. $\}$

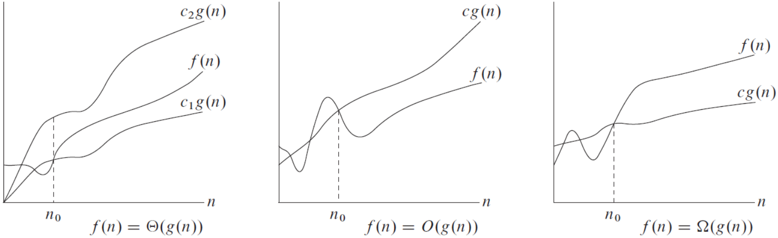
O, Ω, Θ

- $O(g(n)) = \{f(n)$ 모든 $n \geq n_0$에 대해 $0 \leq f(n) \leq cg(n)$ 인 양의 상수 c, n_0이 존재한다. $\}$
- $\Omega(g(n)) = \{f(n)$ 모든 $n \geq n_0$에 대해 $0 \leq cg(n) \leq f(n)$ 인 양의 상수 c, n_0이 존재한다. $\}$

O, Ω, Θ

- $O(g(n)) = \{f(n)$ 모든 $n \geq n_0$에 대해 $0 \leq f(n) \leq cg(n)$ 인 양의 상수 c, n_0이 존재한다. $\}$
- $\Omega(g(n)) = \{f(n)$ 모든 $n \geq n_0$에 대해 $0 \leq cg(n) \leq f(n)$ 인 양의 상수 c, n_0이 존재한다. $\}$
- $\Theta(g(n)) = \{f(n)$ 모든 $n \geq n_0$에 대해 $0 \leq c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n)$ 인 양의 상수 c_1, c_2, n_0이 존재한다. $\}$

그래프 모형


$c_2g(n)$
$f(n)$
$c_1g(n)$
n
n_0
$f(n) = \Theta(g(n))$
$cg(n)$
$f(n)$
n
n_0
$f(n) = O(g(n))$
$f(n)$
$cg(n)$
n
n_0
$f(n) = \Omega(g(n))$

ex

- $f(n) = n^2 + n + 3$

ex

- $f(n) = n^2 + n + 3$
- $O(2^n)$

ex

- $f(n) = n^2 + n + 3$
- $O(2^n)$
- $O(n^3)$

ex

- $f(n) = n^2 + n + 3$
- $O(2^n)$
- $O(n^3)$
- $O(n^2)$

ex

- $f(n) = n^2 + n + 3$
- $O(2^n)$
- $O(n^3)$
- $O(n^2)$
- $\Omega(1)$

ex

- $f(n) = n^2 + n + 3$
- $O(2^n)$
- $O(n^3)$
- $O(n^2)$
- $\Omega(1)$
- $\Omega(n)$

ex

- $f(n) = n^2 + n + 3$
- $O(2^n)$
- $O(n^3)$
- $O(n^2)$
- $\Omega(1)$
- $\Omega(n)$
- $\Omega(n^2)$

ex

- $f(n) = n^2 + n + 3$
- $O(2^n)$
- $O(n^3)$
- $O(n^2)$
- $\Omega(1)$
- $\Omega(n)$
- $\Omega(n^2)$
- $\Theta(n^2)$

- n_0와 c는 내 마음대로 잡는다.

- n_0와 c는 내 마음대로 잡는다.
- 극한에서 함수의 대소관계로 생각하면 제일 편함!

조화 급수의 상한과 하한

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

조화 급수의 상한과 하한

$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \le \sum_{i=0}^{\lg n} \sum_{j=0}^{2^i-1} \frac{1}{2^i + j}$$

조화 급수의 상한과 하한

$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq \sum_{i=0}^{\lg n} \sum_{j=0}^{2^i - 1} \frac{1}{2^i + j}$$
$$\leq \sum_{i=0}^{\lg n} \sum_{j=0}^{2^i - 1} \frac{1}{2^i}$$

조화 급수의 상한과 하한

$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} &\le \sum_{i=0}^{\lg n} \sum_{j=0}^{2^i - 1} \frac{1}{2^i + j} \\ &\le \sum_{i=0}^{\lg n} \sum_{j=0}^{2^i - 1} \frac{1}{2^i} \\ &= \sum_{i=0}^{\lg n} 1 \end{aligned}$$

조화 급수의 상한과 하한

$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

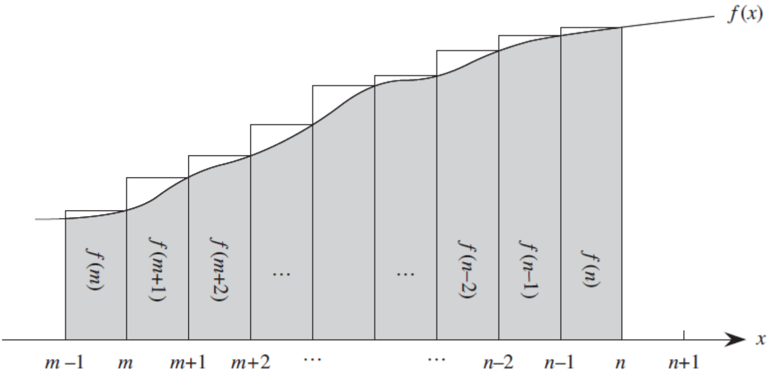
$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} &\le \sum_{i=0}^{\lg n} \sum_{j=0}^{2^i - 1} \frac{1}{2^i + j} \\
&\le \sum_{i=0}^{\lg n} \sum_{j=0}^{2^i - 1} \frac{1}{2^i} \\
&= \sum_{i=0}^{\lg n} 1 \\
&\le \lg(n) + 1
\end{aligned}
$$

$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = O(\lg n)$

적분을 이용한 상한,하한

단조 증가 함수 $f(k)$에 대해서 다음이 성립한다.

$$\int_{m-1}^{n} f(x)dx \leq \sum_{k=m}^{n} f(k) \leq \int_{m}^{n+1} f(x)dx$$



(a)

적분을 이용한 상한,하한

단조 감소 함수 $f(k)$에 대해서 다음이 성립한다

$$\int_{m}^{n+1} f(x)dx \leq \sum_{k=m}^{n} f(k) \leq \int_{m-1}^{n} f(x)dx$$

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}+1 \geq \int_{2}^{n+1} f(x)dx + 1 = \ln(n) + 1 = \Omega(\ln n)$$

$$\int_{1}^{n+1} f(x)dx = \ln(n+1) = O(\ln n) \geq \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = \Theta(\lg n)$$

스털링 근사

$\lg(n!)$

스털링 근사

$\lg(n!)$

$$\int_1^n \lg(k)dx + 1 \leq \sum_{k=2}^{n} \lg k + 1 \leq \int_2^{n+1} \lg(k)dx + 1$$

스털링 근사

$\lg(n!)$

$$\int_1^n \lg(k)dx + 1 \leq \sum_{k=2}^{n} \lg k + 1 \leq \int_2^{n+1} \lg(k)dx + 1$$

$$n\lg(n) - n + 1 \leq \lg(n!) \leq (n+1)\lg(n+1) - (n+1) - (2\lg 2 - 2)$$

스털링 근사

$\lg(n!)$

$$\int_1^n \lg(k)dx + 1 \le \sum_{k=2}^{n} \lg k + 1 \le \int_2^{n+1} \lg(k)dx + 1$$

$$n\lg(n) - n + 1 \le \lg(n!) \le (n+1)\lg(n+1) - (n+1) - (2\lg 2 - 2)$$

$$\therefore \lg(n!) = \Theta(n \lg n)$$