

치환법, 마스터 정리

EUnS

May 5, 2020

치환법

- ① 해의 모양을 추측한다.
- ② 상수들의 값을 찾아내기 위해 수학적 귀납법을 사용하고 제대로 동작함을 보인다.

치환법

$$T(n) = 2T(n/2) + n$$

- ① $T(n) \leq cn \lg n$ 이라고 추측

$$T(n) \leq 2c(n/2 \lg(n/2)) + n$$

치환법

$$T(n) = 2T(n/2) + n$$

- ① $T(n) \leq cn \lg n$ 이라고 추측

$$\begin{aligned} T(n) &\leq 2c(n/2 \lg(n/2)) + n \\ &= cn \lg n - n + n \end{aligned}$$

치환법

$$T(n) = 2T(n/2) + n$$

① $T(n) \leq cn \lg n$ 이라고 추측

$$\begin{aligned} T(n) &\leq 2c(n/2 \lg(n/2)) + n \\ &= cn \lg n - n + n \\ &\leq cn \lg n \end{aligned}$$

치환법

$$T(n) = 2T(n/2) + 1$$

- $T(n) = O(n)$ 이라고 추측

$$T(n) \leq 2c(n/2) + 1$$

치환법

$$T(n) = 2T(n/2) + 1$$

- $T(n) = O(n)$ 이라고 추측

$$\begin{aligned} T(n) &\leq 2c(n/2) + 1 \\ &= cn + 1 \end{aligned}$$

- $T(n) \leq cn$ X

치환법

$$T(n) = 2T(n/2) + 1$$

- $T(n) = O(n)$ 이라고 추측

$$\begin{aligned} T(n) &\leq 2c(n/2) + 1 \\ &= cn + 1 \end{aligned}$$

- $T(n) \leq cn$ X
- cn 보다 좀더 작은 값을 추측할것.

치환법

$$T(n) = 2T(n/2) + 1$$

- $T(n) \leq cn - d$ 이라고 추측

$$T(n) \leq 2c(n/2) - d + 1$$

치환법

$$T(n) = 2T(n/2) + 1$$

- $T(n) \leq cn - d$ 이라고 추측

$$\begin{aligned} T(n) &\leq 2c(n/2) - d + 1 \\ &= cn - 2d + 1 \end{aligned}$$

치환법

$$T(n) = 2T(n/2) + 1$$

- $T(n) \leq cn - d$ 이라고 추측

$$\begin{aligned} T(n) &\leq 2c(n/2) - d + 1 \\ &= cn - 2d + 1 \\ &\leq cn - d \end{aligned}$$

마스터 정리

$a(\geq 1)$ 와 $b(> 1)$ 가 상수고 $f(n)$ 이 양의 함수라 하고, 음이 아닌 정수에 대해 $T(n)$ 이 다음 점화식에 의해 정의된다고 하자.

$$T(n) = aT(n/b) + f(n)$$

여기서 n/b 는 $\lfloor n/b \rfloor$ 또는 $\lceil n/b \rceil$ 를 뜻한다. 이때 $T(n)$ 의 점근적 한계는 다음과 같다.

- ① 상수 $\epsilon(> 0)$ 에 대해 $f(n) = O(n^{\log_b a - \epsilon})$ 이면, $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$ 이다.
- ② $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$ 이면, $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \lg n)$ 이다.
- ③ 상수 $c(< 1)$ 와 충분히 큰 모든 n 에 대해 $af(n/b) \leq cf(n)$ 이면, $T(n) = \Theta(f(n))$ 이다.

ex

$$T(n) = 9T(n/3) + n$$

ex

$$T(n) = 9T(n/3) + n$$

- $a = 9$

ex

$$T(n) = 9T(n/3) + n$$

- $a = 9$
- $b = 3$

ex

$$T(n) = 9T(n/3) + n$$

- $a = 9$
- $b = 3$
- $f(n) = n = O(n^{\log_3 9 - \epsilon})$

ex

$$T(n) = 9T(n/3) + n$$

- $a = 9$
- $b = 3$
- $f(n) = n = O(n^{\log_3 9 - \epsilon})$
- case 1

ex

$$T(n) = 9T(n/3) + n$$

- $a = 9$
- $b = 3$
- $f(n) = n = O(n^{\log_3 9 - \epsilon})$
- case 1

$$\Theta(n^2)$$

$$T(n) = T(2n/3) + 1$$

ex

$$T(n) = 9T(n/3) + n$$

- $a = 9$
- $b = 3$
- $f(n) = n = O(n^{\log_3 9 - \epsilon})$
- case 1

$$\Theta(n^2)$$

$$T(n) = T(2n/3) + 1$$

- $a = 1$

ex

$$T(n) = 9T(n/3) + n$$

- $a = 9$
- $b = 3$
- $f(n) = n = O(n^{\log_3 9 - \epsilon})$
- case 1

$$\Theta(n^2)$$

$$T(n) = T(2n/3) + 1$$

- $a = 1$
- $b = 3/2$

ex

$$T(n) = 9T(n/3) + n$$

- $a = 9$
- $b = 3$
- $f(n) = n = O(n^{\log_3 9 - \epsilon})$
- case 1

$$\Theta(n^2)$$

$$T(n) = T(2n/3) + 1$$

- $a = 1$
- $b = 3/2$
- $f(n) = 1 = \Theta(n^{\log_{3/2} 1}) = \Theta(1)$

ex

$$T(n) = 9T(n/3) + n$$

- $a = 9$
- $b = 3$
- $f(n) = n = O(n^{\log_3 9 - \epsilon})$
- case 1

$$\Theta(n^2)$$

$$T(n) = T(2n/3) + 1$$

- $a = 1$
- $b = 3/2$
- $f(n) = 1 = \Theta(n^{\log_{3/2} 1}) = \Theta(1)$
- case 2

ex

$$T(n) = 9T(n/3) + n$$

- $a = 9$
- $b = 3$
- $f(n) = n = O(n^{\log_3 9 - \epsilon})$
- case 1

$$\Theta(n^2)$$

$$T(n) = T(2n/3) + 1$$

- $a = 1$
- $b = 3/2$
- $f(n) = 1 = \Theta(n^{\log_{3/2} 1}) = \Theta(1)$
- case 2

$$\Theta(\lg n)$$

ex

$$T(n) = 3T(n/4) + n \lg n$$

ex

$$T(n) = 3T(n/4) + n \lg n$$

- $a = 3$

ex

$$T(n) = 3T(n/4) + n \lg n$$

- $a = 3$
- $b = 4$

ex

$$T(n) = 3T(n/4) + n \lg n$$

- $a = 3$
- $b = 4$
- $c = 3/4$ 일 때 $af(n/b) = 3(n/4) \lg(n/4) \leq (3/4)n \lg n = cf(n)$

ex

$$T(n) = 3T(n/4) + n \lg n$$

- $a = 3$
- $b = 4$
- $c = 3/4$ 일 때 $af(n/b) = 3(n/4) \lg(n/4) \leq (3/4)n \lg n = cf(n)$
- case 3

$$T(n) = 3T(n/4) + n \lg n$$

- $a = 3$
- $b = 4$
- $c = 3/4$ 일 때 $af(n/b) = 3(n/4) \lg(n/4) \leq (3/4)n \lg n = cf(n)$
- case 3

$$\Theta(n \lg n)$$

스트라센 알고리즘

$$T(n) = 7T(n/2) + \Theta(n^2)$$

스트라센 알고리즘

$$T(n) = 7T(n/2) + \Theta(n^2)$$

- $a = 7$

스트라센 알고리즘

$$T(n) = 7T(n/2) + \Theta(n^2)$$

- $a = 7$
- $b = 2$

스트라센 알고리즘

$$T(n) = 7T(n/2) + \Theta(n^2)$$

- $a = 7$
- $b = 2$
- $f(n) = n^2 = O(n^{\log_2 7 - \epsilon})$

스트라센 알고리즘

$$T(n) = 7T(n/2) + \Theta(n^2)$$

- $a = 7$
- $b = 2$
- $f(n) = n^2 = O(n^{\log_2 7 - \epsilon})$
- case 1

스트라센 알고리즘

$$T(n) = 7T(n/2) + \Theta(n^2)$$

- $a = 7$
- $b = 2$
- $f(n) = n^2 = O(n^{\log_2 7 - \epsilon})$
- case 1

$$\Theta(n^{\lg 7})$$

적용할 수 없는 점화식

$$T(n) = 2T(n/2) + n \lg n$$

적용할 수 없는 점화식

$$T(n) = 2T(n/2) + n \lg n$$

- $a = 2$

적용할 수 없는 점화식

$$T(n) = 2T(n/2) + n \lg n$$

- $a = 2$
- $b = 2$

적용할 수 없는 점화식

$$T(n) = 2T(n/2) + n \lg n$$

- $a = 2$
- $b = 2$
- $af(n/b) = 2(n/2) \lg(n/2) \leq (3/4)n \lg n = cf(n)$ 인 c 를 잡을 수 없음.
- case 3 X
- ???
- $f(n)$ 이 $n^{\log_b a}$ 보다 다항식적으로 크지않다면 구할 수 없음.