치환법, 마스터 정리

EUnS

May 3, 2020

치환법

1. 해의 모양을 추측한다.
2. 상수들의 값을 찾아내기 위해 수학적 귀납법을 사용하고 제대로 동작함을 보인다.

치환법

$$T(n) = 2T(n/2) + n$$

1. $T(n) \leq cn \lg n$이라고 추측

$$\begin{aligned} T(n) &\leq 2c(n/2 \lg(n/2)) + n \\ &= cn \lg n - n + n \\ &\leq cn \lg n \end{aligned}$$

치환법

$$T(n) = 2T(n/2) + 1$$

- $T(n) = O(n)$이라고 추측

$$\begin{aligned} T(n) &\leq 2c(n/2) + 1 \\ &= cn + 1 \end{aligned}$$

- $T(n) \leq cn$ X
- cn보다 좀더 작은 값을 추측할것.

치환법

$$T(n) = 2T(n/2) + 1$$

- $T(n) \leq cn - d$이라고 추측

$$\begin{aligned} T(n) &\leq 2c(n/2) - d + 1 \\ &= cn - 2d + 1 \\ &\leq cn - d \end{aligned}$$

마스터 정리

$a(\geq 1)$와 $b(> 1)$가 상수고 $f(n))$이 양의 함수라 하고, 음이 아닌 정수에 대해 $T(n)$이 다음 점화식에 의해 정의된다고 하자.

$$T(n) = aT(n/b) + f(n)$$

여기서 n/b는 $\lfloor n/b \rfloor \lceil n/b \rceil$를 뜻한다. 이때 $T(n)$의 점근적 한계는 다음과 같다.

1. 상수 $\epsilon(> 0)$에 대해 $f(n) = O(n^{\log_b a - \epsilon})$이면, $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$이다.
2. $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$이면, $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \lg n)$이다.
3. 상수 $c(< 1)$와 충분히 큰 모든 n에 대해 $af(n/b) \leq cf(n)$이면, $T(n) = \Theta(f(n))$이다.

ex

$T(n) = 9T(n/3) + n$

- $a = 9$
- $b = 3$
- $f(n) = n = O(n^{\log_3 9 - \epsilon})$
- case 1

$$\Theta(n^2)$$

$T(n) = T(2n/3) + 1$

- $a = 1$
- $b = 3/2$
- $f(n) = 1 = \Theta(n^{\log_{3/2} 1}) = \Theta(1)$
- case 2

$$\Theta(\lg n)$$

ex

$T(n) = 3T(n/4) + n \lg n$

- $a = 3$
- $b = 4$
- $c = 3/4$일 때 $af(n/b) = 3(n/4)\lg(n/4) \leq (3/4)n\lg n = cf(n)$
- case 3

$$\Theta(nlgn)$$

스트라센 알고리즘

$T(n) = 7T(n/2) + \Theta(n^2)$

- $a = 7$
- $b = 2$
- $f(n) = n^2 = O(n^{\log_2 7 - \epsilon})$
- case 1

$\Theta(n^{lg 7})$

적용할수 없는것들

$T(n) = 2T(n/2) + n \lg n$

- $a = 2$
- $b = 2$
- $af(n/b) = 2(n/2)\lg(n/2) \leq (3/4)n \lg n = cf(n)$ 인 c를 잡을 수 없음.
- case 3 X
- ???
- $f(n)$이 $n^{\log_b a}$보다 다항식적으로 크지않다면 구할 수 없음.