

# 시간복잡도 기초

EUnS

May 3, 2020

$O, \Omega, \Theta$ 

- $O(g(n)) = \{f(n) \text{ 모든 } n \geq n_0 \text{에 대해 } 0 \leq f(n) \leq cg(n) \text{ 인 양의 상수 } c, n_0 \text{이 존재한다.}\}$

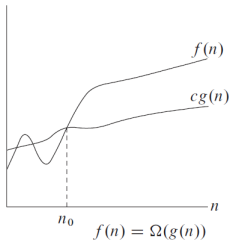
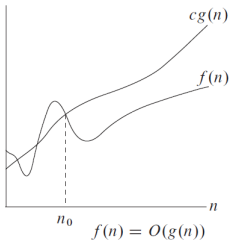
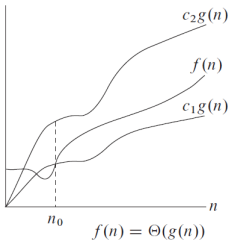
$O, \Omega, \Theta$ 

- $O(g(n)) = \{f(n) \text{ 모든 } n \geq n_0 \text{에 대해 } 0 \leq f(n) \leq cg(n) \text{ 인 양의 상수 } c, n_0 \text{이 존재한다.}\}$
- $\Omega(g(n)) = \{f(n) \text{ 모든 } n \geq n_0 \text{에 대해 } 0 \leq cg(n) \leq f(n) \text{ 인 양의 상수 } c, n_0 \text{이 존재한다.}\}$

$O, \Omega, \Theta$ 

- $O(g(n)) = \{f(n) \text{ 모든 } n \geq n_0 \text{에 대해 } 0 \leq f(n) \leq cg(n) \text{ 인 양의 상수 } c, n_0 \text{이 존재한다.}\}$
- $\Omega(g(n)) = \{f(n) \text{ 모든 } n \geq n_0 \text{에 대해 } 0 \leq cg(n) \leq f(n) \text{ 인 양의 상수 } c, n_0 \text{이 존재한다.}\}$
- $\Theta(g(n)) = \{f(n) \text{ 모든 } n \geq n_0 \text{에 대해 } 0 \leq c_1g(n) \leq f(n) \leq c_2g(n) \text{ 인 양의 상수 } c_1, c_2, n_0 \text{이 존재한다.}\}$

# 그래프 모형



ex

- $f(n) = n^2 + n + 3$

ex

- $f(n) = n^2 + n + 3$
- $O(2^n)$

ex

- $f(n) = n^2 + n + 3$
- $O(2^n)$
- $O(n^3)$



ex

- $f(n) = n^2 + n + 3$
- $O(2^n)$
- $O(n^3)$
- $O(n^2)$

ex

- $f(n) = n^2 + n + 3$
- $O(2^n)$
- $O(n^3)$
- $O(n^2)$
- $\Omega(1)$

ex

- $f(n) = n^2 + n + 3$
- $O(2^n)$
- $O(n^3)$
- $O(n^2)$
- $\Omega(1)$
- $\Omega(n)$

ex

- $f(n) = n^2 + n + 3$
- $O(2^n)$
- $O(n^3)$
- $O(n^2)$
- $\Omega(1)$
- $\Omega(n)$
- $\Omega(n^2)$

- $f(n) = n^2 + n + 3$
- $O(2^n)$
- $O(n^3)$
- $O(n^2)$
- $\Omega(1)$
- $\Omega(n)$
- $\Omega(n^2)$
- $\Theta(n^2)$

- $n_0$ 와  $c$ 는 내 마음대로 잡는다.

- $n_0$ 와  $c$ 는 내 마음대로 잡는다.
- 극한에서 함수의 대소관계로 생각하면 제일 편함!

# 조화 급수의 상한과 하한

$$f(x) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$



## 조화 급수의 상한과 하한

$$f(x) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq \sum_{i=0}^{\lg n} \sum_{j=0}^{2^i-1} \frac{1}{2^i+j}$$

## 조화 급수의 상한과 하한

$$f(x) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} &\leq \sum_{i=0}^{\lg n} \sum_{j=0}^{2^i-1} \frac{1}{2^i + j} \\ &\leq \sum_{i=0}^{\lg n} \sum_{j=0}^{2^i-1} \frac{1}{2^i} \end{aligned}$$

## 조화 급수의 상한과 하한

$$f(x) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} &\leq \sum_{i=0}^{\lg n} \sum_{j=0}^{2^i-1} \frac{1}{2^i + j} \\ &\leq \sum_{i=0}^{\lg n} \sum_{j=0}^{2^i-1} \frac{1}{2^i} \\ &= \sum_{i=0}^{\lg n} 1 \end{aligned}$$

## 조화 급수의 상한과 하한

$$f(x) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

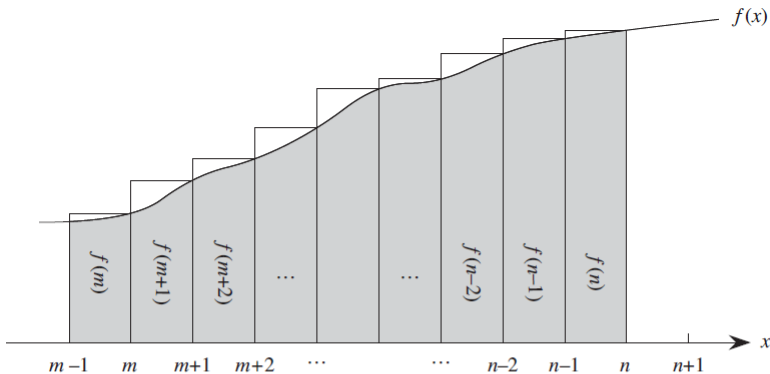
$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} &\leq \sum_{i=0}^{\lg n} \sum_{j=0}^{2^i-1} \frac{1}{2^i + j} \\ &\leq \sum_{i=0}^{\lg n} \sum_{j=0}^{2^i-1} \frac{1}{2^i} \\ &= \sum_{i=0}^{\lg n} 1 \\ &\leq \lg(n) + 1 \end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = O(\lg n)$$

## 적분을 이용한 상한, 하한

단조 증가 함수  $f(k)$ 에 대해서 다음이 성립한다.

$$\int_{m-1}^n f(x)dx \leq \sum_{k=m}^n f(k) \leq \int_m^{n+1} f(x)dx$$



(a)

## 적분을 이용한 상한,하한

단조 감소 함수  $f(k)$ 에 대해서 다음이 성립한다

$$\int_m^{n+1} f(x)dx \leq \sum_{k=m}^n f(k) \leq \int_{m-1}^n f(x)dx$$

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k} + 1 \leq \int_2^{n+1} f(x) dx + 1 = \ln(x) + 1 = O(\ln x)$$

$$\int_1^{n+1} f(x) dx = \ln(x+1) = \Omega(\ln x) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

$$\therefore \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \Theta(\lg n)$$

# 스털링 근사

$$\lg(n!)$$



## 스털링 근사

 $\lg(n!)$ 

$$\int_1^n \lg(k) dx + 1 \leq \sum_{k=2}^n \lg k + 1 \leq \int_2^{n+1} \lg(k) dx + 1$$

## 스털링 근사

 $\lg(n!)$ 

$$\int_1^n \lg(k) dx + 1 \leq \sum_{k=2}^n \lg k + 1 \leq \int_2^{n+1} \lg(k) dx + 1$$

$$n \lg(n) - n + 1 \leq \lg(n!) \leq (n+1) \lg(n+1) - (n+1) - (2 \lg 2 - 2)$$

## 스털링 근사

 $\lg(n!)$ 

$$\int_1^n \lg(k) dx + 1 \leq \sum_{k=2}^n \lg k + 1 \leq \int_2^{n+1} \lg(k) dx + 1$$

$$n \lg(n) - n + 1 \leq \lg(n!) \leq (n+1) \lg(n+1) - (n+1) - (2 \lg 2 - 2)$$

$$\therefore \lg(n!) = \Theta(n \lg n)$$