

策略研究

大类配置系列

从未来到现在——动态资产配置策略框架介绍

分析师：包赞 S1230518090006
baozan@stocke.com.cn TEL: 021-80108127

◆引言

去年底我们完成了离散时间下简略版动态资产配置模型的写作，当时在路演时，我承诺今年一季度完成更完美的模型也就是本文的写作，可是数值计算处理难度超过了预期，但自己吹下的牛含着泪也要吹完，我们还是完成模型的编写，因为拖延了一个季度，在此向路演过的机构客户致歉。动态资产配置策略由于其对未来的目标函数进行优化，在长期配置方面有其优点。我们欣喜发现，从长期来看，模型业绩对风险厌恶系数不敏感，较高的风险厌恶系数会带来回撤的显著下降，而对收益率的影响不大。风险厌恶系数较高情况下，以各指数（货币基金、债券、沪深 300、中证 500、标普、黄金）为基础资产，年化收益能到 4% 以上，在实际操作中，如果选取指数增强基金等收益更好的产品作为基础资产，年化收益可能达到 6% 以上。

◆方法简介

本文站在长期投资者角度，试图通过 Brandt、Goyal、Santa Clara 和 Stroud 基于模拟的方法寻找最优动态策略，实现了对整个投资规划期进行过程控制，为多资产的动态规划提供思路与实践。这一基于模拟的方法，其求解过程用到泰勒展开、倒向递归和回归分析，具体流程见正文。

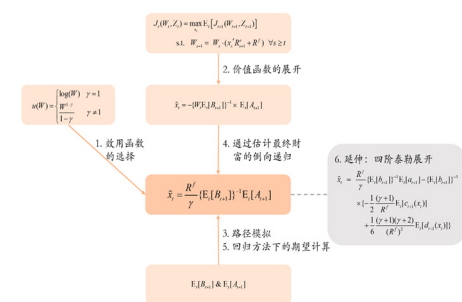
◆方法优点

该方法以资产收益模拟路径作为输入，在投资期内进行多期规划，可以全面考虑诸如交易限制和比例限制等因素，更具灵活性。区别于之前报告的两资产配置方案，本文则更加贴近市场的投资情形，探讨了该方法在多资产配置时的应用方案，具体包含美股、国内大市值股票、国内中小市值股票、债券、黄金、现金这六大类资产，更具实用性。此外，本文还提供了更高阶泰勒展开下的配置方案研究，更具精准性。

◆回测效果

我们既进行了距离目标日期较远的组合构建，也进行了距离目标日期较近的组合构建。回测结果显示，BGSS 方法下的大类资产配置组合可获得更高的收益、更低的风险。2011 年初到 19 年 4 月，年化收益 4% 以上，最大回撤 13.91%，如果采取指数增强基金作为基础资产，应该会有更好的收益表现。2018 年到 2019 年四月底这个区间的收益为 6% 左右，最大回撤 7.75%。

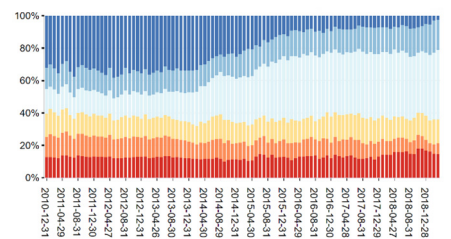
BGSS 方法框架：



不同风险厌恶系数下的资产配置组合累计收益表现：



201101-201904 组合配置比例 (gamma=10)：



正文目录

| | |
|-------------------------------|----|
| 1. 引言 | 4 |
| 2. BGSS 框架介绍 | 5 |
| 2.1. 效用函数的选择 | 7 |
| 2.2. 价值函数的展开 | 8 |
| 2.3. 路径模拟 | 10 |
| 2.4. 通过估计最终财富的倒向递归 | 10 |
| 2.5. 回归方法下的期望计算 | 11 |
| 2.6. 四阶泰勒展开 | 14 |
| 2.7. 资产权重限制 | 16 |
| 3. BGSS 模型实证 | 16 |
| 3.1. 选取状态变量及代表资产 | 16 |
| 3.2. 采用跨路径回归方法求解条件期望值 | 17 |
| 3.3. 求解资产配置比例 | 20 |
| 4. BGSS 方法下的大类资产配置回测结果 | 21 |
| 4.1. 距离目标日期较远的组合构建及回测展示 | 21 |
| 4.2. 距离目标日期较近的组合构建及回测展示 | 23 |
| 4.3. 未来一年组合构建 | 25 |
| 5. 总结及展望 | 27 |
| 5.1. 改良后的 BGSS 方法 | 27 |
| 5.2. 研究展望 | 27 |

附录:

参考文献

Dynamic Asset Allocation —— A Simulation Approach with an Application to Multiple Assets

Abstract

We presented and extended a methodology published by Brandt, Goyal, Santa-Clara and Stroud to find an optimal, dynamic portfolio strategy in a more realistic investor's environment with multiple assets with non-standard return dynamics, constraints on his portfolio weights and with different risk averseness. It is a simulation-based method with as main features a Taylor-expansion, backward recursion and robust regression analysis to predict returns. The method is flexible, accurate and practical.

图表目录

| | |
|--|----|
| 图 1: BGSS 方法框架..... | 7 |
| 图 2: 最小二乘及 bisquare 估计量 ($k=4.685$) 的权重方程..... | 14 |
| 图 3: 201801-201904 经汇率调整后的 SPDR 黄金 ETF 累计收益表现..... | 17 |
| 图 4: 201101-201904 各资产代表标的累计收益表现..... | 21 |
| 图 5: 201101-201904 不同风险厌恶系数下的组合配置比例..... | 22 |
| 图 6: 201101-201904 不同风险厌恶系数下的资产配置组合累计收益表现..... | 23 |
| 图 7: 201801-201904 各资产代表标的累计收益表现..... | 23 |
| 图 8: 201801-201904 不同风险厌恶系数下的组合配置比例..... | 24 |
| 图 9: 201801-201904 不同风险厌恶系数下的资产配置组合累计收益表现..... | 25 |
| 图 10: 201905-202004 不同风险厌恶系数下的组合配置比例..... | 26 |
| 表 1: 状态变量及代表资产选取..... | 17 |
| 表 2: 各资产类别的代表标的及其 WIND 代码..... | 21 |
| 表 3: 201101-201904 各资产代表标的表现..... | 22 |
| 表 4: 201101-201904 不同风险厌恶系数下的资产配置组合表现..... | 23 |
| 表 5: 201801-201904 各资产代表标的表现..... | 24 |
| 表 6: 201801-201904 不同风险厌恶系数下的资产配置组合表现..... | 25 |
| 表 7: 201905-202004 不同风险厌恶系数下的组合配置比例建议..... | 26 |

投资者在进行投资时,需要选取最符合其个人偏好的资产组合。资产组合有千千万万种,那么何种才是“最”符合特定投资者偏好的组合呢?诚然,投资者期待更高的投资回报,然而伴随而来的往往是更大的风险。Burton G. Malkiel 曾说道,每个投资者必须在吃得好还是睡得好之间权衡。也就是说,如何找到那个能产生足够收益让自己“吃得好”,同时又不至于冒太大风险而让自己“睡不好”的投资策略,成为投资者们关注的焦点。

1. 引言

世界金融形式波诡云谲,当投资者们在单一资产上孤注一掷时,将如何在单边下跌的形式中独善其身,或者又如何承受重压守得云开见月明。随着世界范围内的金融流动加强,居民收入水平的增加,国内各类基金规模的不断扩大……,国内市场投资风格不再单一地追逐收益最大化,稳健投资的概念逐渐深入人心,投资者对全球大类资产配置的需求越来越旺盛。

提出现代资产组合理论的马科维兹(1952)以简洁的公式揭示了资产配置在控制组合整体风险上的优势。大类资产配置,并非对各类资产单独分析简单加总,其核心思想在于组合之后各时期不同比例各项资产间的相互联系。

自大类资产配置的概念提出后,其理论及方法涌现创新。当下主流模型主要包括定性及定量两类。定性模型中以美林时钟为代表,定量模型则包含以马科维兹均值方差模型思想为核心的各类量化衍生模型。

美林时钟根据经济增长率和通货膨胀率两个宏观指标的高低变动将经济周期区分成四种状态:衰退期(经济下行通胀下行)、复苏期(经济上行通胀下行)、过热期(经济上行通胀上行)、滞胀期(经济下行通胀上行)。在各期中,最优投资资产分别为债券、股票、商品、现金。美林时钟总结了投资标的选择的精髓,以其简单易懂的经济逻辑而受投资者青睐。然而,该模型在实际决策中面临很多难处:但其对经济周期的判别以及配置标的和分配比例的选取均过于主观,难以对大多数投资者形成指导意义。

均值方差模型理论假设理性投资者倾向于在低波动率的水平下寻求期望收益最大化。他将收益及风险结合风险厌恶程度进行了量化研究。该方法的核心步骤可分为两大部分:首先是对未来预期收益和预期风险的预测,其次是目标函数及限制条件的选取。该方法的不足之处也分别体现在这两大方面:(1)依赖历史平均收益率及方差来定义预期收益及风险的不合理性,(2)选取的优化目标(均值方差效用函数)中,风险厌恶系数及风险指标(方差)选取的粗糙性,以及指标间平衡规则选取的粗糙性。

正是根据均值方差模型理论在这两方面的不足,衍生了大量的资产配置量化模型。他们或(1)根据更为严谨的方法(时间序列方法、Monte Carlo 模拟等)预测各资产走势,或(2)引入下偏距、CVaR、最大回撤等以丰富收益及风险的代理指标。其中在实际投资中具有较大影响力的著名模型包括 Black-Litterman 模型、风险平价理论。

Black-Litterman 模型主要的改进在于第一步中对未来预期收益及风险的预测部分。均值方差理论中对于预测收益及风险的预测往往被人诟病,其过于依赖历史的资产收益表现,并颇受历史选取区间时长影响。BL 模型则通过引入投资者的预期并结合历史的先验数据,计算出后验的期望收益用以资产配置。其结合了经济事实与投资者主观预期,使得收益率数据更具可用性。然而也正是因为投资者预期的主观性,该模型在实际运用中也遇到种种困难。

风险平价模型则克服了均值方差模型对资产收益率及相关系数预测的依赖。该模型之所以备受瞩目，是因为其涵盖了桥水基金“全天候策略”的投资理念。他是对组合中不同资产分配相同的风险权重的一种投资策略。虽然风险平价模型在实际应用中大获成功，但许多投资者对其仅关注风险均配的规则仍持保留意见。

以上我们讨论了一些传统的资产配置模型，然而这些模型的目标函数只对投资期末的收益及风险损失进行控制，它们都是仅考虑静态（或单阶段）的投资组合选择问题。这些方法并不适用于投资期跨度大的投资者，这不仅仅是因为市场条件千变万化，还由于投资者的个人偏好也在改变。随着市场上目标日期产品的增多，人们对于根据投资环境的变化动态调整组合头寸的需求也不断加强。

本文则站在长期投资者角度，试图通过 Brandt 等人基于模拟的方法寻找最优动态策略，实现了对整个投资规划期进行过程控制，为多资产的动态规划提供思路与实践。该方法以资产收益模拟路径作为输入，在投资期内进行多期规划，可以全面考虑诸如交易限制和比例限制等因素，更具灵活性。区别于原方法的两资产配置方案，本文则更加贴近市场的投资情形，探讨了该方法在多资产配置时的应用方案，具体包含美股、国内大市值股票、国内中小市值股票、债券、黄金、现金这六大类资产，更具实用性。此外，本文还提供了更高阶泰勒展开下的配置方案研究，更具精准性。

本文结构如下：第二节进行了该方法的理论介绍。第三节描述了应用该方法的具体过程。第四节给出了基于模拟的方法寻找最优动态策略的数值实例。

2. BGSS 框架介绍

在求解动态资产配置的问题上，Merton 和 Wachter 都给出过解析解，然而要想得到这些解析表达式，都需要满足一系列严格要求，这使得该方法在现实中很难得到应用。所以实际中我们常常将连续时间离散化，以求得数值解。并且，投资者在现实中也往往只在某几个时点进行调仓，所以将**时间离散化**也是合情合理的。

假设在时间 t ，投资者以最大化目标日 T 时的财富期望效用为目标，确定其从 t 至 T 时的资产配置策略。该投资者在任意时点的财富都与其前一时点的财富直接相关。求解该资产配置问题相当于求解以下问题：

$$J_t(W_t, Z_t) = \max_{\{x_s\}_{s=t}^{T-1}} E[u(W_T) | W_t, Z_t]$$

$$\text{s.t. } W_{s+1} = W_s \cdot (x_s' R_{s+1}^e + R^f) \quad \forall s \geq t$$

其中， x_s 为一列风险资产在 s 时至 $s+1$ 时的配置比例； R_{s+1}^e 为这些风险资产的总体超额回报， R^f 为总体无风险收益。 W_t 为 t 时刻投资者的财富，其值受组合变动影响，因此为内生变量。 Z_t 是一系列外生状态变量（state variables），在这里往往是经济因素，例如利率、通货膨胀率等。

$J_t(W_t, Z_t)$ 被称为价值函数。它是最终财富 W_T 的效用在时间 t 的条件期望，由当前财富 W_t 、外生状态变量

Z_t 生成。价值函数是 Merton 投资组合问题的离散化版本。

显然，对投资组合的未来决策将取决于先前的决策：可以想象，投资组合回报率高低不一的投资者会有不同的投资行为。在时间 t 和 T 之间的每一个时刻，投资者要想做出一个“最优决策”，需要意识到未来的最优决策也将与当下的决策息息相关。

这一思想是由 Richard Bellman 提出的。Bellman 提出了最优性原则：最优策略具有这样的性质：无论初始状态和初始决策是什么，其余的决策都必须是第一个决策之后的状态下的最优策略。

Bellman 在 ‘Dynamic Programming and Stochastic Control Processes’ 一文中推导出求解以上方程相当于求解以下递归问题：

$$J_t(W_t, Z_t) = \max_{x_t} E_t [J_{t+1}(W_{t+1}, Z_{t+1})] \quad (1)$$

$$\text{s.t. } W_{s+1} = W_s \cdot (x_s' R_{s+1}^e + R^f) \quad \forall s \geq t \quad (2)$$

要证明 Bellman 方程，首先应用期望迭代定律，可以得到：

$$\begin{aligned} J_t(W_t, Z_t) &= \max_{\{x_s\}_{s=t}^{T-1}} E_t [u(W_T)] \\ &= \max_{x_t} \max_{\{x_s\}_{s=t+1}^{T-1}} E_t [E_{t+1} [u(W_T)]] \end{aligned}$$

第二步即证明求期望值和求最大值的顺序可以交换（尽管这一步骤非常直观正确，但其实证明是严格复杂的，由于篇幅限制不在此展示）：

$$\max_{x_t} \max_{\{x_s\}_{s=t+1}^{T-1}} E_t [E_{t+1} [u(W_T)]] = \max_{x_t} E_t \left[\max_{\{x_s\}_{s=t+1}^{T-1}} E_{t+1} [u(W_T)] \right]$$

我们发现时间 t 的价值函数和时间 $t+1$ 的价值函数的条件期望之间存在递归关系。方程 (1) 被称为 Bellman 方程，是基于离散化投资组合选择问题。目前的财富与先前时刻财富之间的关系，方程 (2)，被称为预算约束。

由于计算能力和数值方法已经发展到可以用数值方法解决现实的多周期投资组合选择问题的地步，动态投资组合优化的数值方法已经成为一个热门话题。在过去的二十多年中，许多论文讨论了不同的数值方法，其中包括 Brennan, Schwartz and Lagnado (1997)，Campbell and Viceira (1999)，Barberis (2000)。然而几乎所有的方法在面临更复杂（因而更现实）的资产回报情况时都缺乏灵活性，它们往往无法处理多个资产或状态变量，或者对投资组合权重没有约束。

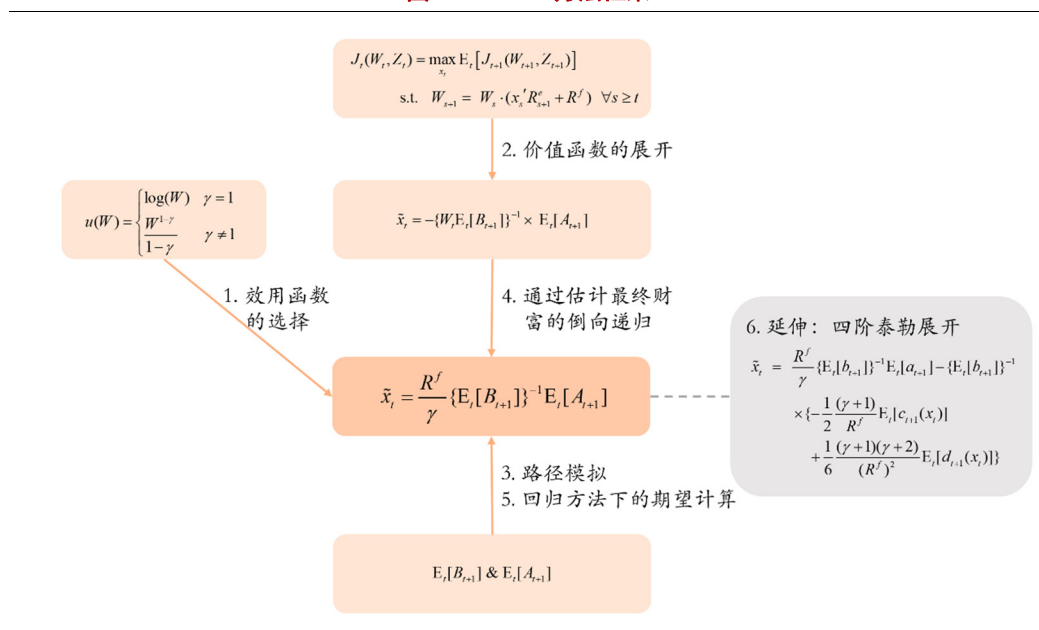
Dempsey, Garcia and Rindocacher (2003) 提出了一个非常优雅的数值方法。他们运用一种特殊的随机演算方法，

即 Malliavin derivatives，来解决动态投资组合选择问题。然而，他们的方法在市场建模方面有严格的假设。

2005 年，Brandt, Goyal, Santa Clara 和 Stroud 提出的一种基于模拟的方法（简称 BGSS）对资产配置问题进行求解。该方法在 Longstaff 和 Schwartz 的思想下，对所有模拟样本路径使用了泰勒展开和回归。BGSS 方法在以下两个方面表现都很突出：运算速度，以及资产收益和状态变量动态的灵活性。因此，我们选择进一步发展这种方法。在他们的文章中，他们只将该方法应用于两资产问题。本报告将该模型应用于多资产案例。正如 Dempel, Garlapi 和 Skoulakis 已经指出的那样，增加对投资组合权重的约束可能是限制方法误差的必要条件。

以下，我们将具体介绍 BGSS 方法。为了更好地理解该方法的框架，以下给出其流程图。

图 1：BGSS 方法框架



2.1. 效用函数的选择

为了更好地理解下文中的理论，我们首先需要回顾效用函数的具体定义并选择合理的效用函数。

效用函数往往是关于最终财富 W 或消费 C 的一个函数，其曲率体现了投资者的风险厌恶程度。投资者的投资目标将是最大化财富的期望效用，而不是最大化期望财富。

函数 $u: S \rightarrow R$ 若满足严格凹 (concave)，严格单调递增，并在 S 内连续，则称其为效用函数。其中， $f: R \rightarrow R$ 为凹函数若：

$$f(\rho x + (1-\rho)y) \geq \rho f(x) + (1-\rho)f(y) \quad \forall x, y \in R, \rho \in (0,1)$$

严格凹的限制体现了投资者在风险与收益之间的权衡:如果效用函数非凹,也就意味着投资者是风险偏好者,即在相同收益的情形下更偏好高风险的组合,显然这是不切实际的。

效用函数的曲率决定了投资者的风险厌恶程度。其可以用效用函数的二次导除以一次导来衡量。

相对风险厌恶系数定义为:

$$RRA(W) := -W \frac{u''(W)}{u'(W)}$$

本文中,我们研究符合常理的效用函数:恒定型相对风险厌恶 (Constant Relative Risk Aversion, CRRA) 下的效用函数。

对数效用函数 (log utility)

$$\gamma = 1 \text{ 时, } u(W) = \log(W)$$

幂效用函数 (power utility)

$$\gamma \neq 1 \text{ 时, } u(W) = \frac{W^{1-\gamma}}{1-\gamma}$$

可以简单验证,上述效用函数的相对风险厌恶系数均为 γ , 是一个恒定的常数。

更通俗地解释该类效用函数,即假设有两位投资者 A 与 B, 投资者 A 拥有 1 元而 B 拥有 1 万元。在 CRRA 下,这两位投资者每增加 10% 的财富,他们的效用函数将增加相同大小。在现实投资中,恒定型相对风险厌恶 CRRA 相较恒定型绝对风险厌恶 CARA 更为合理(后者假设这两位投资者每增加 1 单位的财富,他们的效用函数将增加相同大小,这显然是不切实际的)。

2.2. 价值函数的展开

BGSS 方法首先将预算约束代入到 Bellman 方程中去,并在点 $W_t R^f$ 处二阶泰勒展开,我们将得到的 $J_t(W_t, Z_t)$ 的估计 $\tilde{J}_t(W_t, Z_t)$ 。

具体来讲,首先,我们已知 Bellman 方程及其预算约束为:

$$\begin{aligned} J_t(W_t, Z_t) &= \max_{x_t} E_t [J_{t+1}(W_{t+1}, Z_{t+1})] \\ \text{s.t. } W_{s+1} &= W_s \cdot (x_s' R_{s+1}^e + R^f) \quad \forall s \geq t \end{aligned}$$

将预算约束代入 $J_{t+1}(W_{t+1}, Z_{t+1})$ 可得：

$$J_{t+1}(W_{t+1}, Z_{t+1}) = J_{t+1}(W_t(x'_t R_{t+1}^e + R^f), Z_{t+1})$$

利用二阶泰勒展开可得：

$$\begin{aligned} J_{t+1}(W_t(x'_t R_{t+1}^e + R^f), Z_{t+1}) &\approx J_{t+1}(W_t R^f, Z_{t+1}) \\ &\quad + \partial_1 J_{t+1}(W_t R^f, Z_{t+1})(W_t x'_t R_{t+1}^e) \\ &\quad + \frac{1}{2} \partial_1^2 J_{t+1}(W_t R^f, Z_{t+1})(W_t x'_t R_{t+1}^e)^2 \end{aligned}$$

再将上式代入 Bellman 方程，将得到 $J_t(W_t, Z_t)$ 的估计 $\tilde{J}_t(W_t, Z_t)$ ：

$$\begin{aligned} \tilde{J}_t(W_t, Z_t) &= \max_{x_t} E_t[J_{t+1}(W_t R^f, Z_{t+1}) + \partial_1 J_{t+1}(W_t R^f, Z_{t+1})(W_t x'_t R_{t+1}^e) \\ &\quad + \frac{1}{2} \partial_1^2 J_{t+1}(W_t R^f, Z_{t+1})(W_t x'_t R_{t+1}^e)^2] \end{aligned}$$

进一步求导并应用控制收敛定理 (DCT) 后，可得到 x_t 的估计 \tilde{x}_t ：

$$\tilde{x}_t = -\{W_t E_t[\partial_1^2 J_{t+1}(W_t R^f, Z_{t+1})(R_{t+1}^e R_{t+1}^{e'})]\}^{-1} \times E_t[\partial_1 J_{t+1}(W_t R^f, Z_{t+1})(R_{t+1}^e)]$$

$$\text{定义 } A_{t+1} := \partial_1 J_{t+1}(W_t R^f, Z_{t+1}) R_{t+1}^e$$

$$B_{t+1} := \partial_1^2 J_{t+1}(W_t R^f, Z_{t+1}) R_{t+1}^e R_{t+1}^{e'}$$

其中关于 J_{t+1} 的偏导，可利用 Bellman 方程及其预算约束带入计算后得到：

$$\psi_{t+1} := \frac{W_t}{W_{t+1}} = \prod_{s=t+1}^{T-1} (\hat{x}_s' R_{s+1}^e + R^f)$$

$$\partial_1 J_{t+1}(W_{t+1}, Z_{t+1}) = E_{t+1}[\partial u(W_{t+1} \psi_{t+1}) \psi_{t+1}]$$

$$\partial_1^2 J_{t+1}(W_{t+1}, Z_{t+1}) = E_{t+1}[\partial^2 u(W_{t+1} \psi_{t+1}) \psi_{t+1}^2]$$

表达式最终可以简化为： $\tilde{x}_t = -\{W_t E_t[B_{t+1}]\}^{-1} \times E_t[A_{t+1}]$

2.3. 路径模拟

接下来为 Monte Carlo 模拟,用以生成 $\{Y_s\}_{s=1}^T = \{(R_s^e, Z_s)\}_{s=1}^T$ 的 M 条独立样本路径: $Y_{t+1} = f(Y_t, Y_{t-1}, \dots; \varepsilon_{t+1})$ 。每条样本路径 m 包含了各类资产及状态变量在时间 1 至 T 内的收益率变化情况。本文使用经济学上常用的向量自回归建模构造路径。

向量自回归模型简称 VAR 模型 (Vector Autoregressive Model), 是一种常用的计量经济模型, 1980 年由克里斯托弗·西姆斯 (Christopher Sims) 提出。VAR 模型是用模型中所有当期变量对所有变量的若干滞后变量进行回归。VAR 模型用来估计联合内生变量的动态关系, 而不带有任何事先约束条件。此模型目前已得到广泛应用。

一个 VAR(p) 模型可以写成:

$$y_t = c + A_1 y_{t-1} + A_2 y_{t-2} + \dots + A_p y_{t-p} + \varepsilon_t$$

其中 $c \in R^k$ 是 $k \times 1$ 常数向量, $A_i \in R^{k \times k}$ 是 $k \times k$ 矩阵, $\varepsilon_t \in R^k$ 是 $k \times 1$ 误差向量, 满足:

- (1) $E(\varepsilon_t) = 0$ —— 误差项的均值为 0
- (2) $E(\varepsilon_t \varepsilon_t') = \Sigma$ —— 误差项的同期协方差矩阵恒定, 不随时间变化而变化
- (3) $E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-k}') = 0 \quad \forall k \neq 0$ —— 误差项不存在自相关

本文应用目标研究时段前多年的月度数据拟合 VAR (1) 模型, 得到系数估计及残差协方差矩阵, 向后迭代得到路径模拟。

2.4. 通过估计最终财富的倒向递归

我们采用**倒向递归**求解最优资产比例。

由 2.2 中的推导及定义, 可得:

$$E_t[A_{t+1}] = E_t[\partial u(W_t R^f \psi_{t+1}) \psi_{t+1} R_{t+1}^e]$$

$$E_t[B_{t+1}] = E_t[\partial^2 u(W_t R^f \psi_{t+1}) \psi_{t+1}^2 R_{t+1}^e R_{t+1}^{e'}]$$

在假设投资者为恒定型相对风险厌恶 (CRRA) 时, 不论在对数效用函数还是在幂效用函数下, 我们都有

$\partial u(W) = W^{-\gamma}$, $\partial^2 u(W) = -\gamma W^{-\gamma-1}$ 。带入上式, 可得:

$$E_t[A_{t+1}] = (W_t R^f)^{-\gamma} E_t[\psi_{t+1}^{1-\gamma} R_{t+1}^e]$$

$$E_t[B_{t+1}] = -\gamma (W_t R^f)^{-\gamma-1} E_t[\psi_{t+1}^{1-\gamma} R_{t+1}^e R_{t+1}^{e'}]$$

则资产配置比例 \tilde{x}_t 可表示为:

$$\tilde{x}_t = \frac{R^f}{\gamma} \{E_t[\psi_{t+1}^{1-\gamma} R_{t+1}^e R_{t+1}^{e'}]\}^{-1} E_t[\psi_{t+1}^{1-\gamma} R_{t+1}^e]$$

$$\tilde{x}_{T-1} = \frac{R^f}{\gamma} \{E_{T-1}[R_T^e R_T^{e'}]\}^{-1} E_{T-1}[R_T^e]$$

特别地, 对数效用函数的 $\gamma = 1$, \tilde{x}_t 可简化为:

$$\tilde{x}_t = R^f \{E_t[R_{t+1}^e R_{t+1}^{e'}]\}^{-1} E_t[R_{t+1}^e]$$

由最终的表达式可以看出, 在恒定型相对风险厌恶 (CRRA) 下, 投资者的投资表现独立于初始或者当下的财富值。更特殊地, 如果 $\gamma = 1$, 资产配置比例也与组合未来收益 ψ_{t+1} 相独立。

x_t 与 R^f 之间的线性关系乍看之下不太符合常识: 当无风险利率更高、超额收益不变时, 对风险资产的配置比例会更高。但在 CRRA 的假设下, 我们可以更好地理解这一关系: 当无风险利率更高、超额收益不变, 这意味着风险资产的相对波动 (较平均收益的波动) 就会减小, 这就促使 CRRA 的投资者配置更多的风险资产。

2.5. 回归方法下的期望计算

接下来, 我们需要估计 \tilde{x}_t 表达式中的条件期望。本文采用 Longstaff 和 Schwartz 的跨路径回归方法, 我们首先阐述该方法的概况, 紧接着给出具体介绍。

已知:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_t &= \frac{R^f}{\gamma} \{E_t[\psi_{t+1}^{1-\gamma} R_{t+1}^e R_{t+1}^{e'}]\}^{-1} E_t[\psi_{t+1}^{1-\gamma} R_{t+1}^e] \\ &= \frac{R^f}{\gamma} \{E_t[B_{t+1}]\}^{-1} E_t[A_{t+1}] \end{aligned}$$

假设已算得 $t+1$ 至 $T-1$ 时的权重。在 M 条模拟样本路径下，我们有 M 个 $a_{t+1}^m \in R^n$ 及 $b_{t+1}^m \in R^{n \times n}$ （对应于向量 A_{t+1} 及矩阵 B_{t+1} ）。为了说明简便，我们在下文记 $a_{t+1}^m \in R^n$ 及 $b_{t+1}^m \in R^{n \times n}$ 为 y_{t+1} 。

接着，我们对每个元素 y_{t+1} 进行跨路径回归。在每个时点 t ，应用 M 条路径数据来拟合元素 y_{t+1} 与状态变量 X_t 间的关系。

假设存在下述线性关系：

$$y_{m,t+1} = X_{m,t} \beta + \varepsilon_m$$

则通过回归，我们探寻关于 β 的估计 $\hat{\beta}$ ：

$$y_{m,t+1} = X_{m,t} \hat{\beta} + e_m$$

由此得到

$$\hat{y}_{m,t+1|t} = X_{m,t} \hat{\beta}$$

在本文中， $y_{m,t+1}$ 的具体形式如下所示：

由于 $E_t[A_{t+1}] = E_t[\psi_{t+1}^{1-\gamma} R_{t+1}^e]$ 、 $E_t[B_{t+1}] = E_t[\psi_{t+1}^{1-\gamma} R_{t+1}^e R_{t+1}^{e'}]$ ， $y_{m,t+1}$ 为 a_{t+1}^m 时，其具体表达式为 $y_{m,t+1} = a_{t+1}^m = \psi_{t+1}^{1-\gamma} R_{t+1}^e$ ； $y_{m,t+1}$ 为 b_{t+1}^m 时，其具体表达式为 $y_{m,t+1} = b_{t+1}^m = \psi_{t+1}^{1-\gamma} (R_{t+1}^e)^2$ 。

$$\text{其中，} \psi_{t+1} := \frac{W_T}{W_{t+1}} = \prod_{s=t+1}^{T-1} (\hat{x}_s' R_{s+1}^e + R^f)$$

X_t 的具体形式如下所示：

回归矩阵包括资产超额收益、状态变量及状态变量交叉项，那么回归矩阵 X_t 的每一行包含 26 个项目。矩阵形式为：

$$X_t = \begin{pmatrix} 1 & R_{1,t}^{(1)} & R_{2,t}^{(1)} & \cdots & R_{5,t}^{(1)} & Z_{1,t}^{(1)} & \cdots & Z_{5,t}^{(1)} & Z_{1,t}^{2(1)} & \cdots & Z_{5,t}^{2(1)} & Z_{1,t}^{(1)} \cdot Z_{2,t}^{(1)} & Z_{1,t}^{(1)} \cdot Z_{3,t}^{(1)} & \cdots & Z_{4,t}^{(1)} \cdot Z_{5,t}^{(1)} \\ 1 & R_{1,t}^{(2)} & R_{2,t}^{(2)} & \cdots & R_{5,t}^{(2)} & Z_{1,t}^{(2)} & \cdots & Z_{5,t}^{(2)} & Z_{1,t}^{2(2)} & \cdots & Z_{5,t}^{2(2)} & Z_{1,t}^{(2)} \cdot Z_{2,t}^{(2)} & Z_{1,t}^{(2)} \cdot Z_{3,t}^{(2)} & \cdots & Z_{4,t}^{(2)} \cdot Z_{5,t}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & R_{1,t}^{(M)} & R_{2,t}^{(M)} & \cdots & R_{5,t}^{(M)} & Z_{1,t}^{(M)} & \cdots & Z_{5,t}^{(M)} & Z_{1,t}^{2(M)} & \cdots & Z_{5,t}^{2(M)} & Z_{1,t}^{(M)} \cdot Z_{2,t}^{(M)} & Z_{1,t}^{(M)} \cdot Z_{3,t}^{(M)} & \cdots & Z_{4,t}^{(M)} \cdot Z_{5,t}^{(M)} \end{pmatrix}$$

进行以上描述的回归处理后，我们可以得到每条路径在时刻 t 的 $\hat{a}_{m,t+1|t}$ 及 $\hat{b}_{m,t+1|t}$ ，据此可得到资产配置比例：

$$\tilde{x}_{m,t} = \frac{R^f}{\gamma} (\hat{b}_{m,t+1|t})^{-1} \hat{a}_{m,t+1|t}$$

至此我们完成了对跨路径回归方法的概述，紧接着我们注意到受样本数据异常值 (outliers) 的影响，普通最小二乘法估计的结果往往会严重脱离事实，其修补措施并不是简单地剔除，当然，在回归分析中也不应与正常数据一样对待，合理的做法应当是：采用稳健估计 (M-估计量)，以消除 OLS 对异常数据的易受影响性。因此，在回归过程中，区别于普通最小二乘法 (OLS)，本文采用的 M-估计量为 bisquare 估计量。

M-估计量最小化目标方程：

$$\sum_{m=1}^M \rho(e_m) = \sum_{m=1}^M \rho(y_{m,t+1} - X_{m,t} \hat{\beta})$$

其中，函数 ρ 决定了每个残差对目标方程的贡献度。最小二乘估计量和 bisquare 估计量都是 M-估计量的一种。通俗来讲，最小二乘估计量对每个残差给予相同大小的权重，而 bisquare 估计量则给予离群值更小的权重。

定义权重方程 $w(e) = \rho'(e) / e$ ，令 $w_m = w(e_m)$ ，可得到估计方程为：

$$\sum_{m=1}^M w_m (y_{m,t+1} - X_{m,t} \hat{\beta}) X_{m,t} = 0$$

这就变成了一个加权最小二乘问题，目标为最小化 $\sum_{m=1}^M w_m^2 e_m^2$ 。我们采用以下算法步骤：

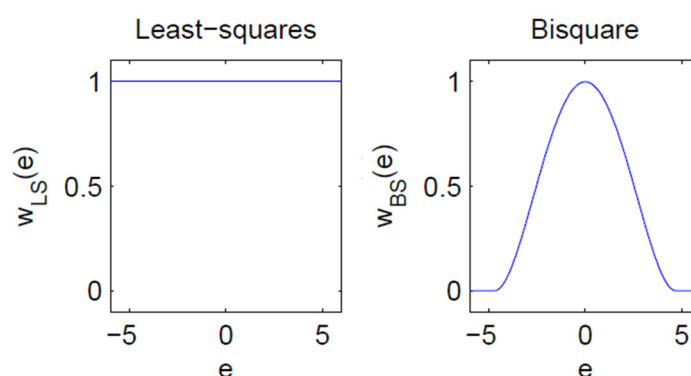
- (1) 选取一个迭代初始值 $\hat{\beta}^{(0)}$ ，例如最小二乘估计 $\hat{\beta}^{(0)} = (X_t' X_t)^{-1} X_t' y_{t+1}$
- (2) 按此初始值进行迭代，在迭代的第 j 步，都计算上次迭代的残差 $e_m^{(j-1)}$ 及相应权重 $w_m^{(j-1)} = w(e_m^{(j-1)})$
- (3) 计算出按新的加权最小二乘法估计的结果： $\hat{\beta}^{(j)} = [X_t' W^{(j-1)} X_t]^{-1} X_t' W^{(j-1)} y_{t+1}$ ，其中 $W^{(j-1)} = \text{diag}(w_m^{(j-1)})$ 为当下的加权矩阵。
- (4) 重复 (2) 步和 (3) 步，直到估计的参数收敛。

在上文中，我们提到，最小二乘估计量和 bisquare 估计量都是 M-估计量的一种。其中，最小二乘估计量下的 $\rho_{LS}(e) = e^2$ ，则 $w_{LS}(e) = 2$ 。bisquare 估计量下，对于 $|e| > k$ ，其权重为 0，其中 $k = 4.685\sigma$ 。bisquare 估计量的目标及权重函数如下所示：

$$\rho_{BS}(e) = \begin{cases} \frac{k^2}{6} (1 - [1 - (\frac{e}{k})^2]^3) & \text{for } |e| \leq k \\ \frac{k^2}{6} & \text{for } |e| > k \end{cases}$$

$$w_{BS}(e) = \begin{cases} [1 - (\frac{e}{k})^2]^2 & \text{for } |e| \leq k \\ 0 & \text{for } |e| > k \end{cases}$$

图 2：最小二乘及 bisquare 估计量 (k=4.685) 的权重方程



*数据来源：浙商证券研究所

通过对比两者的权重函数可以发现，bisquare 估计中，在阈值以内的样本点的权重随残差绝对值离 0 越远，权重递减，阈值以外的样本点权重为 0。这一特点既保留了大部分残差信息，又减弱了异常值点对回归分析的影响，实现了稳健回归的目的。

2.6. 四阶泰勒展开

目前为止，我们讨论的都是二阶泰勒展开下的价值方程。为了提高精度，以下我们给出四阶泰勒展开下的价值方程：

$$\begin{aligned}\tilde{J}_t(W_t, Z_t) = \max_{x_t} E_t[J_{t+1}(W_t R^f, Z_{t+1}) \\ + \partial_1 J_{t+1}(W_t R^f, Z_{t+1})(W_t x'_t R_{t+1}^e) \\ + \frac{1}{2} \partial_1^2 J_{t+1}(W_t R^f, Z_{t+1})(W_t x'_t R_{t+1}^e)^2 \\ + \frac{1}{6} \partial_1^3 J_{t+1}(W_t R^f, Z_{t+1})(W_t x'_t R_{t+1}^e)^3 \\ + \frac{1}{24} \partial_1^4 J_{t+1}(W_t R^f, Z_{t+1})(W_t x'_t R_{t+1}^e)^4]\end{aligned}$$

同理，参照第一部分中的方法，可得到资产配置比例的估计：

$$\begin{aligned}\tilde{x}_t = - \{W_t^2 E_t[\partial_1^2 J_{t+1}(W_t R^f, Z_{t+1}) R_{t+1}^e R_{t+1}^{e'}]\}^{-1} \\ \times \{W_t E_t[\partial_1 J_{t+1}(W_t R^f, Z_{t+1}) R_{t+1}^e] \\ + \frac{1}{2} W_t^3 E_t[\partial_1^3 J_{t+1}(W_t R^f, Z_{t+1}) (x'_t R_{t+1}^e)^2 R_{t+1}^e] \\ + \frac{1}{6} W_t^4 E_t[\partial_1^4 J_{t+1}(W_t R^f, Z_{t+1}) (x'_t R_{t+1}^e)^3 R_{t+1}^e]\}\end{aligned}$$

可写成

$$\tilde{x}_t = - \{W_t E_t[B_{t+1}]\}^{-1} \times \{E_t[A_{t+1}] + \frac{W_t^2}{2} E_t[C_{t+1}(x_t)] + \frac{W_t^3}{6} E_t[D_{t+1}(x_t)]\}$$

其中，新增的 $C_{t+1}(x_t)$ 及 $D_{t+1}(x_t)$ 定义为：

$$C_{t+1}(x_t) := \partial_1^3 J_{t+1}(W_t R^f, Z_{t+1}) (x'_t R_{t+1}^e)^2 R_{t+1}^e$$

$$D_{t+1}(x_t) := \partial_1^4 J_{t+1}(W_t R^f, Z_{t+1}) (x'_t R_{t+1}^e)^3 R_{t+1}^e$$

仍然假设投资者为恒定型相对风险厌恶（CRRA），可得：

$$\begin{aligned}\tilde{x}_t &= \frac{R^f}{\gamma} \{E_t[\psi_{t+1}^{1-\gamma} R_{t+1}^e R_{t+1}^{e'}]\}^{-1} E_t[\psi_{t+1}^{1-\gamma} R_{t+1}^e] \\ &\quad - \{E_t[\psi_{t+1}^{1-\gamma} R_{t+1}^e R_{t+1}^{e'}]\}^{-1} \times \{-\frac{1}{2} \frac{(\gamma+1)}{R^f} E_t[\psi_{t+1}^{1-\gamma} (x'_t R_{t+1}^e)^2 R_{t+1}^e] \\ &\quad + \frac{1}{6} \frac{(\gamma+1)(\gamma+2)}{(R^f)^2} E_t[\psi_{t+1}^{1-\gamma} (x'_t R_{t+1}^e)^3 R_{t+1}^e]\} \\ &= \frac{R^f}{\gamma} \{E_t[b_{t+1}]\}^{-1} E_t[a_{t+1}] - \{E_t[b_{t+1}]\}^{-1} \\ &\quad \times \{-\frac{1}{2} \frac{(\gamma+1)}{R^f} E_t[c_{t+1}(x_t)] + \frac{1}{6} \frac{(\gamma+1)(\gamma+2)}{(R^f)^2} E_t[d_{t+1}(x_t)]\}\end{aligned}$$

2.7. 资产权重限制

实际资产配置中存在一些权重限制，当市场无法做空时，意味着 $0 \leq x_t \leq 1$ 。

当我们仅面临一个风险资产时，该权重限制较为简单：

$$x_t^{constr} = \max(0, \min(x_t^{unconstr}, 1))$$

但当处理多资产问题时，我们需要在每个路径的每个时点应用优化算法，这将大大增加计算时间。本文使用了 MATLAB 中的 fmincon 默认例程。在二阶泰勒展开下，我们有：

$$\max_{x_t} x_t' E_t[A_{t+1}] - \frac{1}{2} \frac{\gamma}{R^f} x_t' E_t[B_{t+1}] x_t, \quad \text{s.t.} : 0 \leq x_t \leq 1$$

由于 x_t 在条件期望内，fmincon 例程无法计算更高阶数的泰勒展开，我们首先得到二阶泰勒展开下的资产配置比例，再进行递归。若递归后的结果不满足资产权重限制，我们选取二阶泰勒展开下的资产配置比例作为结果。

3. BGSS 模型实证

3.1. 选取状态变量及代表资产

一个优秀的经济情形模拟模型（ESG），应该包含所投资的资产类别及重要经济变量的信息。许多风险管理应用程序都需要对以下变量进行建模：

- (1) 主权利率（国债利率）
- (2) 通货膨胀率
- (3) 外汇汇率

本文采用以下五种状态变量，以反映重要的经济信息：中债国债到期收益率（1 个月）、中债国债到期收益率（1 年）、美元兑人民币中间价、消费者价格指数 CPI、美国国债收益率（1 个月）。

选取六类资产，具体包含美股、国内大市值股票、国内中小市值股票、国内债券、黄金及现金。分别用标普 500 指数、沪深 300 指数、中证 500 指数、中债总财富指数、经汇率调整后的全球最大黄金 ETF 基金（SPDR 黄金 ETF）来代表以上几类风险资产。应用 VAR 方法模拟路径。

表 1：状态变量及代表资产选取

| 状态变量 | | 资产 | |
|----------------|----------|----------------|-------------|
| 中债国债到期收益率：1 个月 | M1004677 | 标普 500 | SPX.GI |
| 中债国债到期收益率：1 年 | M1000158 | 沪深 300 | 000300.SH |
| 美元兑人民币中间价 | M0000185 | 中证 500 | 000905.SH |
| 消费者价格指数 CPI：同比 | M0000612 | 中债总财富指数 | CBA00301.CS |
| 美国国债收益率：1 个月 | G0000883 | 黄金 ETF 基金 SPDR | S0105518 |

由于我们研究的时间跨度较大,而国内黄金 ETF 的成立时间均较近(例如华安黄金 ETF 成立于 2013-07-31),为了找到一个有足够多历史收益数据的国内黄金资产代表标的,我们拟使用经汇率调整后的全球最大黄金 ETF 基金 (SPDR 黄金 ETF)。下图将 201801-201904 经汇率调整后的 SPDR 黄金 ETF 累计收益表现与华安黄金 ETF (518880.OF) 累计收益表现进行了对比,两者走势相似,证明了使用经汇率调整后的 SPDR 黄金 ETF 作为国内黄金资产的代表标的是合理的。

图 3：201801-201904 经汇率调整后的 SPDR 黄金 ETF 累计收益表现



*数据来源：浙商证券研究所

3.2. 采用跨路径回归方法求解条件期望值

采用二次多项式回归。回归矩阵包括五个状态变量的交叉项。此外,我们假设 $t+1$ 处的超额收益与 t 处的超额收益具有相关性,那么回归矩阵 X_t 的每一行包含 26 个项目。矩阵形式为:

$$X_t = \begin{pmatrix} 1 & R_{1,t}^{(1)} & R_{2,t}^{(1)} & \cdots & R_{5,t}^{(1)} & Z_{1,t}^{(1)} & \cdots & Z_{5,t}^{(1)} & Z_{1,t}^{2(1)} & \cdots & Z_{5,t}^{2(1)} & Z_{1,t}^{(1)} \cdot Z_{2,t}^{(1)} & Z_{1,t}^{(1)} \cdot Z_{3,t}^{(1)} & \cdots & Z_{4,t}^{(1)} \cdot Z_{5,t}^{(1)} \\ 1 & R_{1,t}^{(2)} & R_{2,t}^{(2)} & \cdots & R_{5,t}^{(2)} & Z_{1,t}^{(2)} & \cdots & Z_{5,t}^{(2)} & Z_{1,t}^{2(2)} & \cdots & Z_{5,t}^{2(2)} & Z_{1,t}^{(2)} \cdot Z_{2,t}^{(2)} & Z_{1,t}^{(2)} \cdot Z_{3,t}^{(2)} & \cdots & Z_{4,t}^{(2)} \cdot Z_{5,t}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & R_{1,t}^{(M)} & R_{2,t}^{(M)} & \cdots & R_{5,t}^{(M)} & Z_{1,t}^{(M)} & \cdots & Z_{5,t}^{(M)} & Z_{1,t}^{2(M)} & \cdots & Z_{5,t}^{2(M)} & Z_{1,t}^{(M)} \cdot Z_{2,t}^{(M)} & Z_{1,t}^{(M)} \cdot Z_{3,t}^{(M)} & \cdots & Z_{4,t}^{(M)} \cdot Z_{5,t}^{(M)} \end{pmatrix}$$

由于 $E_t[A_{t+1}] = E_t[\psi_{t+1}^{1-\gamma} R_{t+1}^e]$ 、 $E_t[B_{t+1}] = E_t[\psi_{t+1}^{1-\gamma} R_{t+1}^e R_{t+1}^{e'}]$ ，对每个资产，分别以下期 ($t=T$) 的 $\psi_{t+1}^{1-\gamma} R_{t+1}^e$ 及 $\psi_{t+1}^{1-\gamma} R_{t+1}^e R_{t+1}^{e'}$ 为应变变量，应用回归矩阵 X_t ，进行 bisquare 稳健回归。

$$\text{其中, } \psi_{t+1} := \frac{W_T}{W_{t+1}} = \prod_{s=t+1}^{T-1} (\hat{x}_s' R_{s+1}^e + R^f)$$

用回归所得的系数矩阵乘以回归矩阵 X_t ，即得到了条件期望值 $E_t[A_{t+1}]$ 、 $E_t[B_{t+1}]$ 。

Bisquare 回归代码:

```
function [BS] = bisquare(X, y, k)
%X is regression matrix, y are values of dependent variables
N_max = 20; % maximum number of iterations
[M,N]=size(X);
beta = zeros(N,N_max);

beta(:,1)=lscov(X,y);
e = y-X*beta(:,1);
sigmahat = mad(e)/0.6745;
k=sigmahat*4.685;

j=1;
beta(:,j+1)=
inv(X'*spdiags(W_BS(e,k),0,M,M)*X)*X'*spdiags(W_BS(e,k),0,M,M)*y;
while (max(abs(beta(:,j+1)-beta(:,j)))>0.001 && j<N_max)
    e = y-X*beta(:,j+1);
    sigmahat = mad(e)/0.6745;
    k=sigmahat*4.685;
    j=j+1;
    beta(:,j+1)=
inv(X'*spdiags(W_BS(e,k),0,M,M)*X)*X'*spdiags(W_BS(e,k),0,M,M)*y;
end
if j==N_max
```

```
disp('Bisquare uses maximal number of iterations')  
end  
BS = beta(:,j+1);  
  
end
```

Across-path regression 代码 (部分) :

```
for tt=3:T-1  
    t=T-tt;  
    x = [ones(M,1), r(:,t,1), r(:,t,2), r(:,t,3), r(:,t,4), r(:,t,5),...  
        z(:,t,1), z(:,t,1).^2, z(:,t,2), z(:,t,2).^2, z(:,t,3),...  
        z(:,t,3).^2, z(:,t,4), z(:,t,4).^2, z(:,t,5), z(:,t,5).^2, ...  
        z(:,t,1).*z(:,t,2), z(:,t,1).*z(:,t,3), z(:,t,1).*z(:,t,4),...  
        z(:,t,1).*z(:,t,5), z(:,t,2).*z(:,t,3), z(:,t,2).*z(:,t,4),...  
        z(:,t,2).*z(:,t,5), z(:,t,3).*z(:,t,4), z(:,t,3).*z(:,t,5),...  
        z(:,t,4).*z(:,t,5)];  
  
    for m=1:M  
        Psi(m)=Psi(m).*((squeeze(x(m,t+1,:))'*squeeze(r(m,t+2,:))+r_f).^(1-  
gamma));  
    end  
  
    for i=1:N_assets  
        abeta = bisquare(x, Psi.*r(:,t+1,i),1);  
        ahat(:,i) = x*abeta;  
    end  
  
    for m=1:M  
        B(m, :, :) = squeeze(r(m,t+1,:))*squeeze(r(m,t+1,:))';  
    end  
    for i=1:N_assets  
        for j=1:N_assets  
            bbeta = bisquare(x, Psi.*B(:,i,j),1);  
            Bhat(:,i,j)= x*bbeta;  
        end  
    end  
    LB = max(0,x(:,t+1,:)-0.2);  
    UB = min(1,x(:,t+1,:)+0.2);  
    for m=1:M  
        x(m,t,:) = fmincon(@(y) -(y'*ahat(m,:))'-  
0.5*gamma/r_f*y'*squeeze(Bhat(m, :, :))*y), ...  
            x_0, ones(1,N_assets), 1, [], [], LB(m,:)', UB(m,:)', [], options);  
    end
```

3.3. 求解资产配置比例

使用 fmincon 函数，在二阶泰勒展开下，对有约束优化问题进行求解，得到 t 时的资产配置比例。

$$\max_{x_t} x_t' E_t[A_{t+1}] - \frac{1}{2} \frac{\gamma}{R^f} x_t' E_t[B_{t+1}] x_t, \quad \text{s.t.} : 0 \leq x_t \leq 1$$

(若) 使用四阶泰勒展开:

在之前的基础上，使用跨路径回归方法求解条件期望值 $E_t[C_{t+1}]$ 、 $E_t[D_{t+1}]$ 。

那么记 $\tilde{x}_{t,0}$ 为先前二阶泰勒展开求得的比例，在此基础上，四阶泰勒展开下的比例则用以下表达式计算：

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{t,i+1} = \tilde{x}_{t,0} - \{E_t[b_{t+1}]\}^{-1} \times \{ & -\frac{1}{2} \frac{(\gamma+1)}{R^f} E_t[c_{t+1}(\tilde{x}_{t,i})] \\ & + \frac{1}{6} \frac{(\gamma+1)(\gamma+2)}{(R^f)^2} E_t[d_{t+1}(\tilde{x}_{t,i})] \} \end{aligned}$$

相关代码：

```
if it_ON ==1
    disp('4th order Taylor iteration used')
    x_it = zeros(M,N_assets,N_max+1);
    x_it(:,:,1)=squeeze(x(:,t,:));
    xrprod=zeros(M,1);
    for i=1:N_max
        for m=1:M
            xrprod(m,1) =squeeze(x(m,t,:))'*squeeze(r(m,t+1,:));
        end
        for j=1:N_assets
            cbeta = bisquare(x, Psi.*xrprod.^3.*squeeze(r(:,t+1,j)),1);
            chat(:,j) = x*cbeta;
            dbeta = bisquare(x, Psi.*xrprod.^4.*squeeze(r(:,t+1,j)),1);
            dhat(:,j) = x*dbeta;
        end
        for m = 1:M
            x_it(m,:,i+1)=(x_it(m,:,1)'-squeeze(Bhat(m,:,:))^(1)*...
                (0.5*(-gamma-1)/r_f*chat(m,:))'+...
                1/6*(-gamma-1)*(-gamma-2)/r_f^2*dhat(m,:)'))';
        end
    end
end
```



```

for m=1:M
    if sum(x_it(m,:,N_max+1)>=0)==N_assets && ...
        sum(x_it(m,:,i+1)<=1)==N_assets && sum(x_it(m,:,i+1))<=1
        x(m,t,:)=x_it(m,:,i+1);
    end
end
end
end

```

4. BGSS 方法下的大类资产配置回测结果

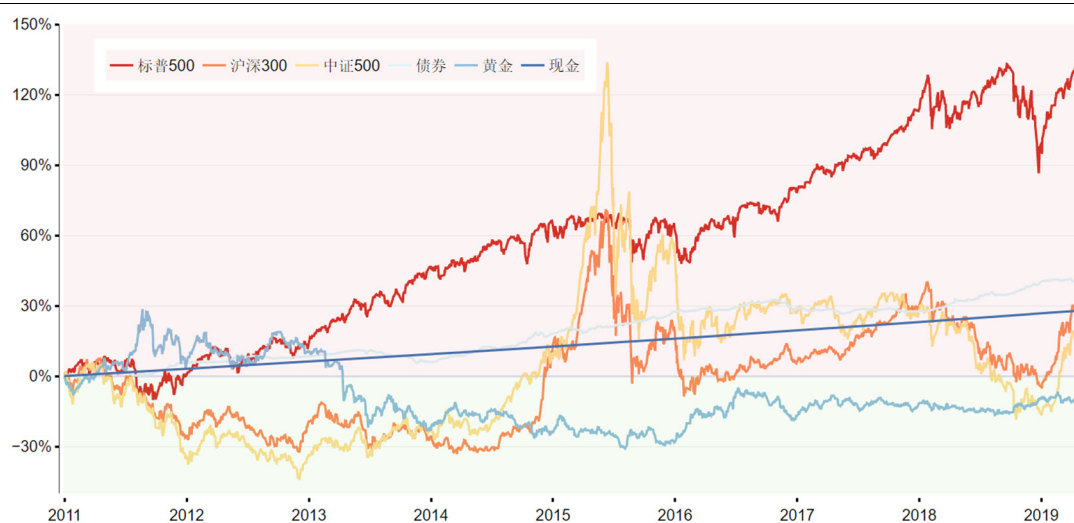
4.1. 距离目标日期较远的组合构建及回测展示

首先，我们展示六类资产（美股、沪深 300、中证 500、债券、黄金、现金）在 201101-201904 的表现，分别选取标普 500 指数、沪深 300 指数、中证 500 指数、中债总财富指数、经汇率调整后的全球最大黄金 ETF 基金（SPDR 黄金 ETF）作为前五类资产的代表标的。并取年化无风险利率为 3%。

表 2：各资产类别的代表标的及其 WIND 代码

| 资产类别 | 代表标的 | Wind 代码 |
|----------|--------------------|-------------|
| 美股 | 标普 500 | SPX.GI |
| 国内大市值股票 | 沪深 300 | 000300.SH |
| 国内中小市值股票 | 中证 500 | 000905.SH |
| 债券 | 中债总财富指数 | CBA00301.CS |
| 黄金 | SPDR 黄金 ETF（需汇率调整） | S0105518 |

图 4：201101-201904 各资产代表标的累计收益表现



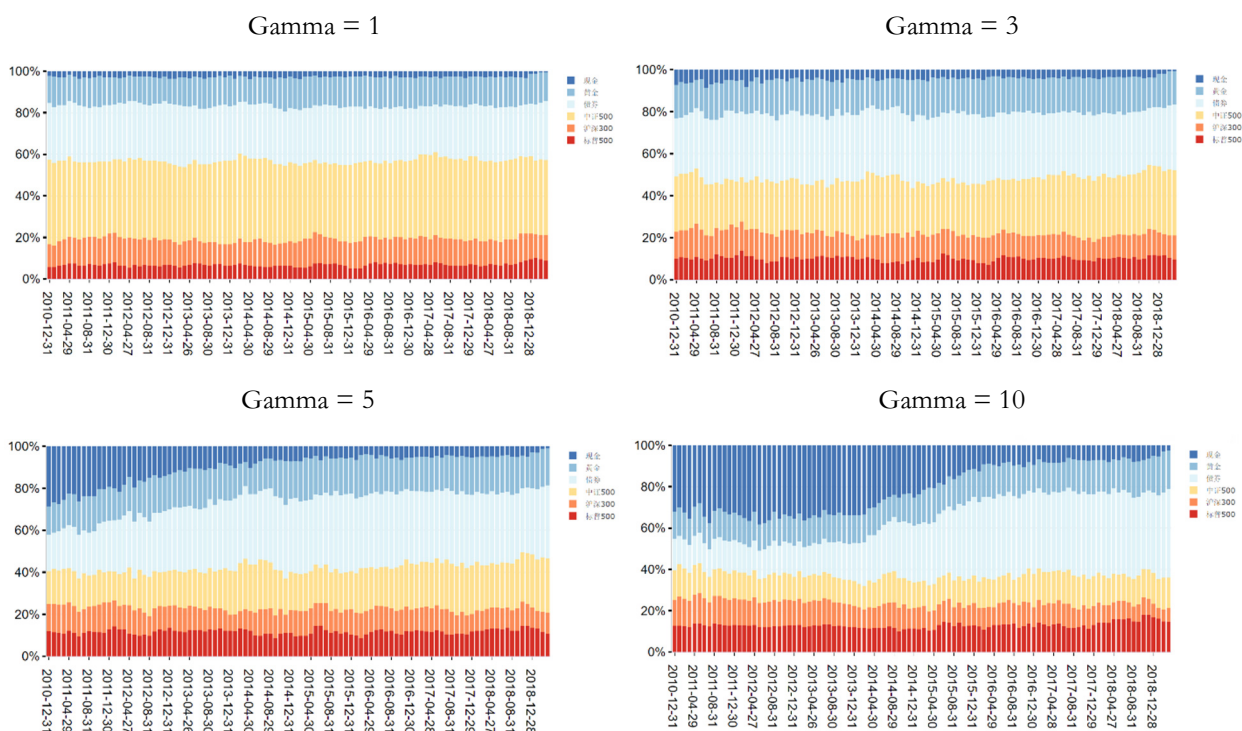
*数据来源：浙商证券研究所

表 3：201101-201904 各资产代表标的表现

| | 标普 500 | 沪深 300 | 中证 500 | 中债 总财富指数 | SPDR 黄金 ETF (调整后) |
|-------|--------|--------|--------|-------------|----------------------|
| 夏普比 | 0.74 | 0.12 | 0.03 | 2.21 | -0.09 |
| 年化收益 | 10.79% | 2.83% | 0.91% | 3.89% | -1.52% |
| 年化标准差 | 14.50% | 23.29% | 27.05% | 1.76% | 16.25% |
| 最大回撤 | 19.78% | 46.70% | 65.20% | 5.33% | 46.17% |

站在较长时间维度来看，使用 200501-201012 的月度数据，在 BGSS 方法下模拟路径 1000 条，得出的不同风险厌恶系数下的 201101-201904 的月度资产配置比例建议如下图所示。风险厌恶系数 Gamma 越大，代表投资者越保守。可以发现，随着风险厌恶系数的增大，前期（距离目标日期较远时）对无风险资产现金的建议配置比例提高，对债券的建议配置比例提高，对股票的建议配置比例降低。

图 5：201101-201904 不同风险厌恶系数下的组合配置比例

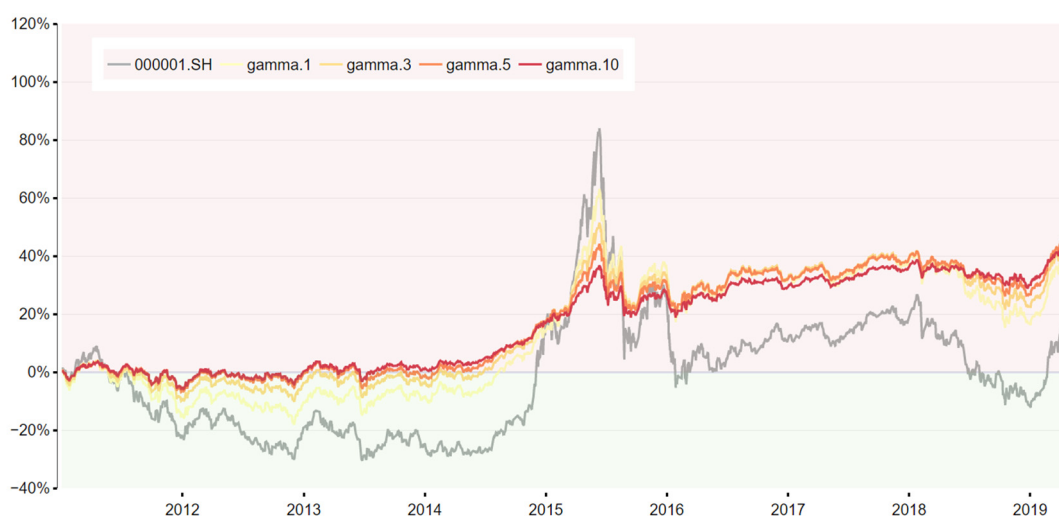


*数据来源：浙商证券研究所

注：资产类别从下至上为：美股、沪深 300、中证 500、债券、黄金、现金

若按照以上比例配置资产进行回测，组合累计收益情况如下所示。相较于仅投资于国内股票，进行 BGSS 方法下的大类资产配置组合可获得更高的收益、更低的风险。

图 6：201101-201904 不同风险厌恶系数下的资产配置组合累计收益表现



*数据来源：浙商证券研究所

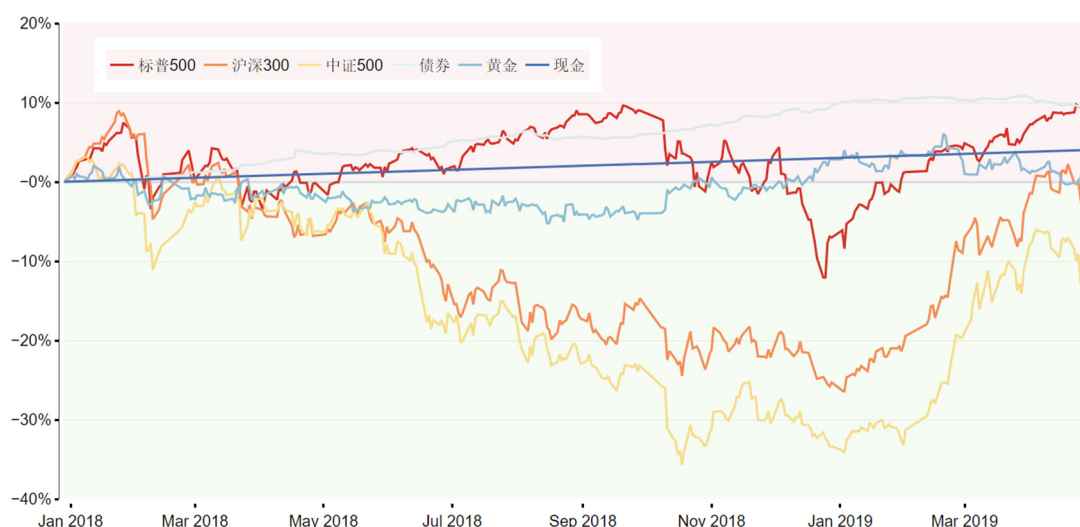
表 4：201101-201904 不同风险厌恶系数下的资产配置组合表现

| | Gamma=1 | Gamma=3 | Gamma=5 | Gamma=10 |
|-------|---------|---------|---------|----------|
| 夏普比 | 0.28 | 0.41 | 0.52 | 0.64 |
| 年化收益 | 3.65% | 4.09% | 4.34% | 4.28% |
| 年化标准差 | 12.91% | 10.05% | 8.28% | 6.71% |
| 最大回撤 | 29.36% | 21.19% | 16.83% | 13.19% |

4.2. 距离目标日期较近的组合构建及回测展示

上文提到的五类资产代表标的在 201801-201904 的表现如下图及下表所示。

图 7：201801-201904 各资产代表标的的累计收益表现



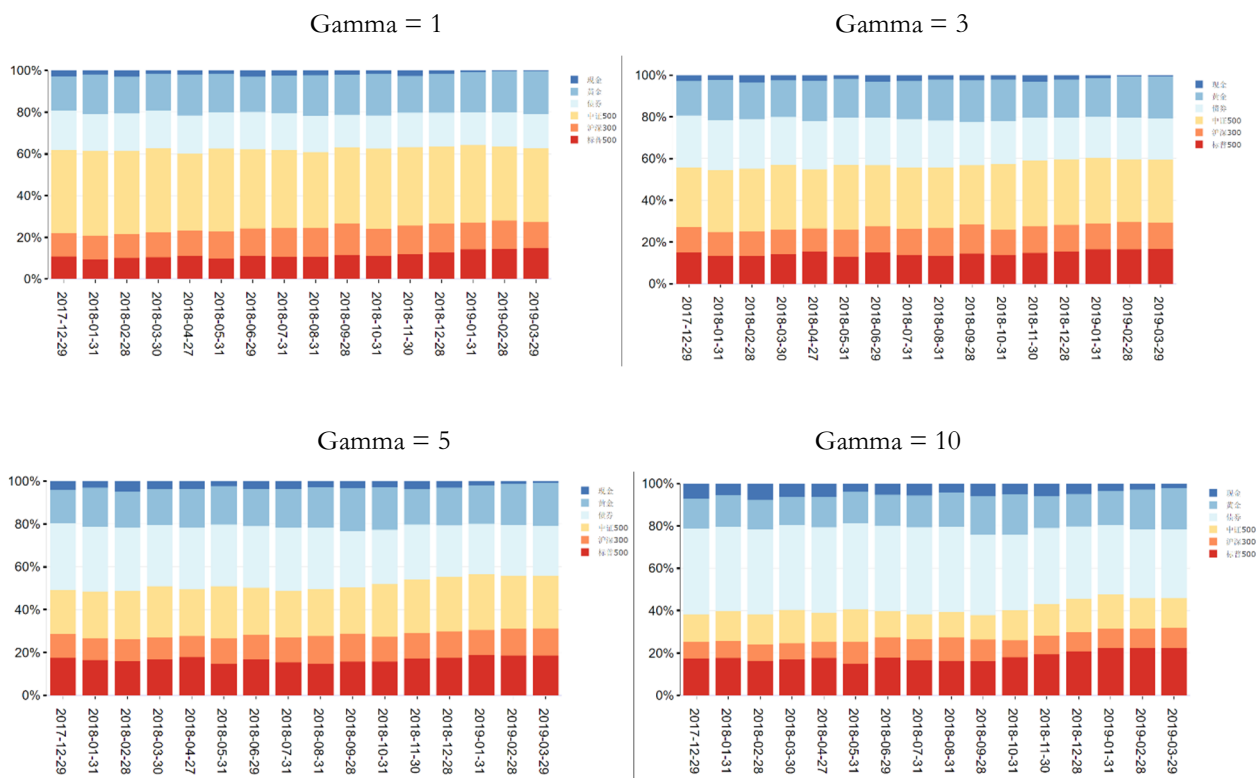
*数据来源：浙商证券研究所

表 5：201801-201904 各资产代表标的表现

| | 标普 500 | 沪深 300 | 中证 500 | 中债 总财富指数 | SPDR 黄金 ETF (调整后) |
|-------|--------|--------|---------|-------------|----------------------|
| 夏普比 | 0.48 | -0.10 | -0.48 | 4.20 | 0.07 |
| 年化收益 | 7.61% | -2.29% | -12.02% | 7.11% | 0.75% |
| 年化标准差 | 16.03% | 22.26% | 25.17% | 1.69% | 10.73% |
| 最大回撤 | 19.78% | 32.46% | 37.66% | 1.26% | 7.13% |

站在较短时间维度来看，使用 200501-201712 的月度数据，在 BGSS 方法下模拟路径 1000 条，得出的不同风险厌恶系数下的 201801-201904 的月度资产配置比例建议如下图所示。风险厌恶系数 Gamma 越大，代表投资者越保守。

图 8：201801-201904 不同风险厌恶系数下的组合配置比例

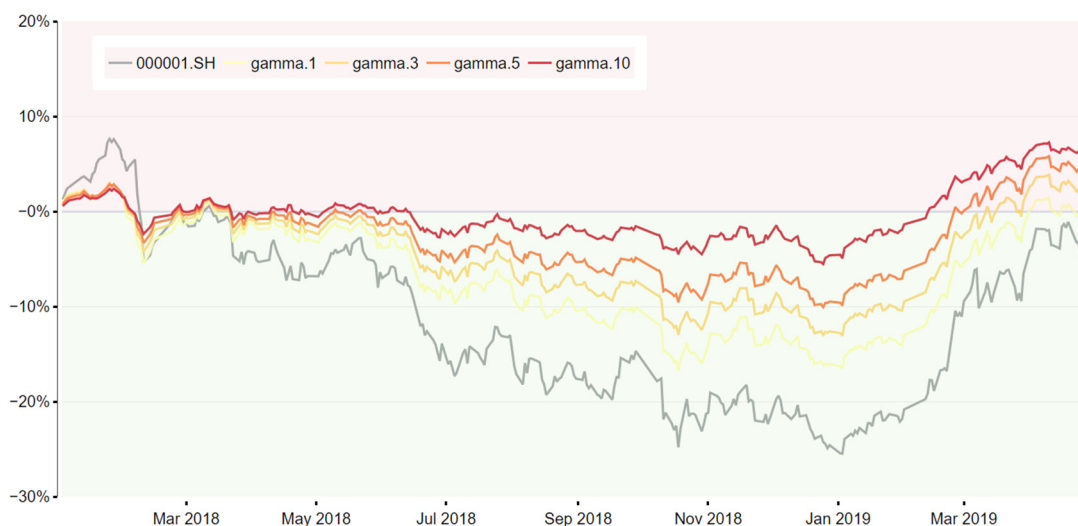


*数据来源：浙商证券研究所

注：资产类别从下至上为：美股、沪深 300、中证 500、债券、黄金、现金

若按照以上比例配置资产进行回测，组合累计收益情况如下所示。和长时间维度下的情况一样，在距离目标日期较近时，BGSS 方法下的大类资产配置组合仍可获得更高的收益、更低的风险。

图 9：201801-201904 不同风险厌恶系数下的资产配置组合累计收益表现



*数据来源：浙商证券研究所

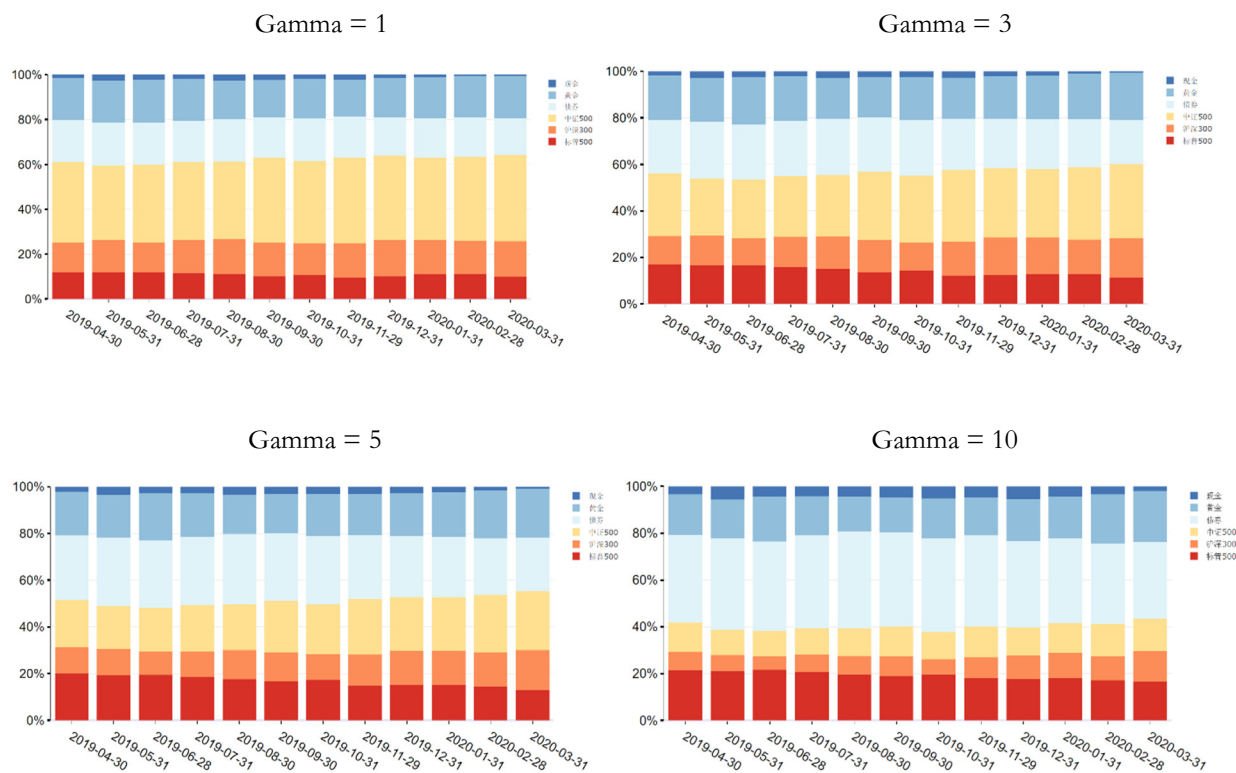
表 6：201801-201904 不同风险厌恶系数下的资产配置组合表现

| | Gamma=1 | Gamma=3 | Gamma=5 | Gamma=10 |
|-------|---------|---------|---------|----------|
| 夏普比 | -0.19 | -0.01 | 0.20 | 0.61 |
| 年化收益 | -2.43% | -0.13% | 1.83% | 4.00% |
| 年化标准差 | 12.54% | 10.74% | 9.13% | 6.52% |
| 最大回撤 | 19.16% | 15.61% | 12.58% | 7.75% |

4.3. 未来一年组合构建

使用 200501-201904 的月度数据，在 BGSS 方法下模拟路径 1000 条，得到在不同风险厌恶系数下对于未来一年（201905-202004）资产配置比例的建议如下图及下表所示。

图 10：201905-202004 不同风险厌恶系数下的组合配置比例



*数据来源：浙商证券研究所

注：资产类别从下至上为：美股、国内大市值股票、国内中小市值股票、债券、黄金、现金

表 7：201905-202004 不同风险厌恶系数下的组合配置比例建议

| 风险厌恶系数 | 资产类别 | 配置比例 | | | | | | | | | | | |
|--------|------|---------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|---------|-------|-------|-------|
| | | 2019 5月 | 6月 | 7月 | 8月 | 9月 | 10月 | 11月 | 12月 | 2020 1月 | 2月 | 3月 | 4月 |
| 1 | 美股 | 12.1% | 12.0% | 12.1% | 11.5% | 11.2% | 10.1% | 10.7% | 9.5% | 10.2% | 10.9% | 11.2% | 10.0% |
| | 大市值 | 13.0% | 14.3% | 13.1% | 15.0% | 15.7% | 15.0% | 14.2% | 15.4% | 16.3% | 15.3% | 14.8% | 15.8% |
| | 中小市值 | 36.1% | 33.2% | 34.6% | 34.5% | 34.4% | 37.9% | 36.8% | 38.2% | 37.6% | 36.8% | 37.5% | 38.5% |
| | 债券 | 18.7% | 19.4% | 18.8% | 18.5% | 19.1% | 18.1% | 18.8% | 18.1% | 17.0% | 17.6% | 17.5% | 16.3% |
| | 黄金 | 18.6% | 18.4% | 19.1% | 18.6% | 16.8% | 16.7% | 17.6% | 16.6% | 17.4% | 18.2% | 18.6% | 19.0% |
| | 现金 | 1.6% | 2.8% | 2.2% | 1.9% | 2.8% | 2.3% | 1.9% | 2.2% | 1.6% | 1.1% | 0.5% | 0.4% |
| 3 | 美股 | 17.0% | 16.7% | 16.6% | 15.8% | 15.0% | 13.6% | 14.3% | 12.3% | 12.6% | 12.7% | 12.6% | 11.3% |
| | 大市值 | 12.1% | 12.8% | 11.6% | 13.1% | 14.0% | 13.9% | 12.1% | 14.6% | 15.9% | 15.8% | 14.9% | 16.8% |
| | 中小市值 | 27.1% | 24.5% | 25.4% | 26.2% | 26.4% | 29.4% | 28.8% | 30.7% | 30.0% | 29.6% | 31.2% | 32.0% |
| | 债券 | 23.0% | 24.3% | 23.5% | 23.5% | 24.2% | 23.2% | 23.9% | 22.1% | 21.1% | 21.3% | 20.6% | 19.0% |
| | 黄金 | 19.2% | 18.8% | 20.4% | 19.4% | 17.4% | 17.3% | 18.3% | 17.6% | 18.3% | 18.8% | 19.6% | 20.2% |
| | 现金 | 1.6% | 2.9% | 2.5% | 2.1% | 2.9% | 2.6% | 2.6% | 2.7% | 2.1% | 1.8% | 1.0% | 0.6% |

| | | | | | | | | | | | | | |
|----|------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 5 | 美股 | 19.9% | 19.3% | 19.5% | 18.5% | 17.6% | 16.6% | 17.3% | 14.9% | 15.2% | 15.0% | 14.4% | 13.0% |
| | 大市值 | 11.3% | 11.3% | 9.9% | 11.0% | 12.4% | 12.5% | 10.9% | 13.3% | 14.6% | 14.6% | 14.5% | 17.1% |
| | 中小市值 | 20.1% | 18.4% | 18.8% | 19.8% | 19.8% | 22.1% | 21.3% | 23.7% | 23.1% | 23.1% | 24.7% | 25.3% |
| | 债券 | 27.7% | 29.3% | 28.6% | 29.3% | 30.0% | 28.9% | 29.3% | 27.4% | 26.1% | 25.8% | 24.3% | 22.8% |
| | 黄金 | 18.7% | 18.1% | 20.2% | 18.6% | 16.9% | 16.7% | 18.0% | 17.5% | 18.3% | 19.0% | 20.4% | 21.0% |
| | 现金 | 2.2% | 3.6% | 2.9% | 2.8% | 3.4% | 3.2% | 3.1% | 3.2% | 2.8% | 2.4% | 1.7% | 0.8% |
| 10 | 美股 | 21.5% | 21.1% | 21.7% | 20.7% | 19.7% | 18.9% | 19.7% | 18.3% | 17.8% | 18.2% | 17.1% | 16.5% |
| | 大市值 | 7.8% | 6.9% | 5.7% | 7.4% | 7.9% | 8.5% | 6.4% | 8.6% | 10.0% | 10.8% | 10.3% | 13.1% |
| | 中小市值 | 12.6% | 10.9% | 11.0% | 11.3% | 11.9% | 12.7% | 11.8% | 13.3% | 12.1% | 12.7% | 13.7% | 13.8% |
| | 债券 | 37.4% | 39.0% | 38.1% | 39.5% | 41.3% | 40.1% | 40.1% | 38.9% | 36.9% | 36.2% | 34.4% | 32.8% |
| | 黄金 | 17.3% | 16.5% | 19.0% | 16.9% | 14.9% | 15.0% | 16.9% | 16.2% | 17.9% | 17.8% | 21.0% | 21.9% |
| | 现金 | 3.4% | 5.7% | 4.5% | 4.2% | 4.5% | 4.7% | 5.1% | 4.7% | 5.3% | 4.4% | 3.4% | 2.0% |

注：大市值为国内大市值股票，中小市值为国内中小市值股票

5. 总结及展望

5.1. 改良后的 BGSS 方法

近几年来，动态投资组合选择已成为一个热门的研究课题。然而，若要求得解析解，数值方法及收益矩阵需要满足严格的假设。到目前为止，已经公布了许多方法，但几乎所有方法都面临着对资产数量缺乏灵活性或要求非常具体的资产回报结构等等问题。

Brandt、Goyal、Santa Clara 和 Stroud 发布的方法是一个例外。他们开发的这一基于模拟的方法，以泰勒展开、倒向递归和回归分析为主要特征来预测收益。用他们自己的话说，他们的方法是快速，准确，并在资产数量和收益构建上十分灵活的。

本文使用改良后的 BGSS 方法进行动态资产配置。我们实现了在不严格假设收益动态、各种状态变量和可选投资组合约束的情况下，研究具有多个资产的真实环境中长期投资者的动态投资组合选择。

5.2. 研究展望

本文所使用的方法显然很好地贴近了现实投资者的决策环境，更具灵活性、准确性和实用性，因此建议实施，当然我们还可以进一步研究以下内容。

在本文中我们采取了稳健估计 (bisquare 估计量) 代替普通最小二乘法来减少异常值的影响。为了进一步减少在复杂投资环境中仍然可能观察到的各类数值问题，我们可以进行进一步的研究。

当然，为了丰富该方法的应用场景，我们还可以进一步研究更为多样的投资情形。在本文仅考虑初始资本的基础上，我们还可以根据实际情况，设置金融负债、跨期消费或额外注入投资资本的情形。此外，本文中投资者的目标为最大化最终财富的效用，我们也可以进一步丰富目标的形式。

此外，如何量化客户的风险厌恶程度也很重要。由于对个人风险厌恶程度的准确估计比较困难，我们建议引入有效边界的可视化。基于这一边界，投资者可以决定何种最终财富的均值和标准差的组合最适合他，从而确定与此组合对应的风险厌恶参数。

除此之外，进一步合理地模拟资产未来走势也是一大研究方向，即研究改进的经济情景生成器（Economic Scenario Generator），以提高预测能力。如果我们对经济情景的直觉是正确的，那么本文的方法论将非常适合应用。

附录:

1、参考文献:

- [1] Michael W. Brandt, Amit Goyal, Pedro Santa-Clara, Jonathan R. Stroud, A Simulation Approach to Dynamic Portfolio Choice with an Application to Learning About Return Predictability, The Review of Financial Studies, Volume 18, Issue 3, Fall 2005, Pages 831–873, <https://doi.org/10.1093/rfs/hhi019>
- [2] Barberis, N. 2000. Investing for the Long Run when Returns Are Predictable. The Journal of Finance, 55: 225-264. doi:10.1111/0022-1082.00205
- [3] Barberis, N. (2000). Investing for the long run when returns are predictable. The Journal of Finance, 55(1), 225–264.
- [4] Cong, F., & Oosterlee, C. W. (2016). Multi-period mean-variance portfolio optimization based on Monte-Carlo simulation. Journal of Economic Dynamics and Control, 64(1), 23–38.
- [5] Jondeau, E., & Rockinger, M. (2006). Optimal portfolio allocation under higher moments. European Financial Management, 12(1), 29–55.
- [6] Samuelson, P. A. (1969). Lifetime portfolio selection by dynamic stochastic programming. The Review of Economics and Statistics, 51, 239–246.
- [7] van Binsbergen, J. H. & Brandt, M. W. (2007a). Optimal asset allocation in asset liability management. Technical report, National Bureau of Economic Research.
- [8] van Binsbergen, J. H., & Brandt, M. W. (2007b). Solving dynamic portfolio choice problems by recursing on optimized portfolio weights or on the value function? Computational Economics, 29(3–4), 355–367.
- [9] Jain, S., & Oosterlee, C. W. (2015). The stochastic grid bundling method: Efficient pricing of Bermudan options and their Greeks. Applied Mathematics and Computation, 269(1), 412–431.

股票投资评级说明

以报告日后的 6 个月内，证券相对于沪深 300 指数的涨跌幅为标准，定义如下：

- 1、买入：相对于沪深 300 指数表现 +20% 以上；
- 2、增持：相对于沪深 300 指数表现 +10% ~ +20%；
- 3、中性：相对于沪深 300 指数表现 -10% ~ +10% 之间波动；
- 4、减持：相对于沪深 300 指数表现 -10% 以下。

行业的投资评级：

以报告日后的 6 个月内，行业指数相对于沪深 300 指数的涨跌幅为标准，定义如下：

- 1、看好：行业指数相对于沪深 300 指数表现 +10% 以上；
- 2、中性：行业指数相对于沪深 300 指数表现 -10% ~ +10% 以上；
- 3、看淡：行业指数相对于沪深 300 指数表现 -10% 以下。

我们在此提醒您，不同证券研究机构采用不同的评级术语及评级标准。我们采用的是相对评级体系，表示投资的相对比重。

建议：投资者买入或者卖出证券的决定取决于个人的实际情况，比如当前的持仓结构以及其他需要考虑的因素。投资者不应仅仅依靠投资评级来推断结论

法律声明及风险提示

本报告由浙商证券股份有限公司（已具备中国证监会批复的证券投资咨询业务资格，经营许可证编号为：Z39833000）制作。本报告中的信息均来源于我们认为可靠的已公开资料，但浙商证券股份有限公司及其关联机构（以下统称“本公司”）对这些信息的真实性、准确性及完整性不作任何保证，也不保证所包含的信息和建议不发生任何变更。本公司没有将变更的信息和建议向报告所有接收者进行更新的义务。

本报告仅供本公司的客户作参考之用。本公司不会因接收人收到本报告而视其为本公司的当然客户。

本报告仅反映报告作者的出具日的观点和判断，在任何情况下，本报告中的信息或所表述的意见均不构成对任何人的投资建议，投资者应当对本报告中的信息和意见进行独立评估，并应同时考量各自的投资目的、财务状况和特定需求。对依据或者使用本报告所造成的一切后果，本公司及/或其关联人员均不承担任何法律责任。

本公司的交易人员以及其他专业人士可能会依据不同假设和标准、采用不同的分析方法而口头或书面发表与本报告意见及建议不一致的市场评论和/或交易观点。本公司没有将此意见及建议向报告所有接收者进行更新的义务。本公司的资产管理部门、自营部门以及其他投资业务部门可能独立做出与本报告中的意见或建议不一致的投资决策。

本报告版权均归本公司所有，未经本公司事先书面授权，任何机构或个人不得以任何形式复制、发布、传播本报告的全部或部分内容。经授权刊载、转发本报告或者摘要的，应当注明本报告发布人和发布日期，并提示使用本报告的风险。未经授权或未按要求刊载、转发本报告的，应当承担相应的法律责任。本公司将保留向其追究法律责任的权利。

浙商证券研究所

上海市杨高南路 729 号陆家嘴世纪金融广场 1 号楼 29 层

邮政编码：200120

电话：(8621)80108518

传真：(8621)80106010

浙商证券研究所：<http://research.stocke.com.cn>