Hellsten – Linja-aho – Mauno – Mäkinen –
Piiroinen – Sottinen ...

Avoin matikka 1

Kirja on työn alla!

MAA1 – Funktiot ja yhtälöt

Sisältö

Luku 1 Esipuhe

Lorem ipsum...

Tässä on ältsin hieno teoriaboksi. Tänne voi laittaa myös kaavoja

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \tag{1.1}$$

ja toimii kuin junan vessa.

Teoreema 1 (Residue Theorem)**.** *Let f be analytic in the region G except for the isolated singularities $a_1, a_2, \ldots, a_m$. If γ is a closed rectifiable curve in G which does not pass through any of the points a_k and if $\gamma \approx 0$ in G then*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f = \sum_{k=1}^{m} n(\gamma; a_k) Res(f; a_k).$$

Esimerkki (Leivän paino)**.** *Leipä painaa kilon ja puolet leivästä. Painavako oli leipä?*

Ratkaisu. *Merkitään leivän painoa x:llä. Puolet leivästä on matemaattisesti ilmaistuna $\frac{x}{2}$ ja kun siihen lisätään kilogramma, saadaan leivän paino, joten saamme yhtälön*

$$\frac{x}{2} + 1 = x \tag{1.2}$$

josta ratkeaa

$$x = 2. \tag{1.3}$$

Leipä painaa siis 2 kilogrammaa.

Another nice theorem from complex analysis is

Teoreema 2 (Maximum Modulus)**.** *Let G be a bounded open set in $\mathbb{C}$ and suppose that f is a continuous function on G^- which is analytic in G. Then*

$$\max\{|f(z)| : z \in G^-\} = \max\{|f(z)| : z \in \partial G\}.$$

Osa I Lukualueet

Luku 2 Luonnolliset luvut

Tähän tekstiä luonnollisista luvuista.

Luku 3 Joukko-oppia

Luku 4 Logiikkaa

Luku 5 Kokonaisluvut

Luku 6 Kokonaislukujen aritmetiikkaa

Luku 7 Jaollisuus & tekijät

Luku 8 Rationaaliluvut ja laskusäännöt

Laske a) $\frac{6}{2} + \frac{3}{5}$ b) $\frac{7}{8} - \frac{1}{4}$ c) $2\frac{1}{3} + \frac{4}{6}$ Vastaus: a) $\frac{18}{5}$ b) $\frac{5}{8}$ c) 3

Luku 9 Potenssisäännöt & murtolausekkeiden sieventämistä

Luku 10 Juuret

10.1 Neliöjuuri

Luvun a neliöjuuri on ei-negatiivinen luku, jonka neliö on a. Tämä voidaan ilmaista lyhyemmin $\sqrt{b^2} = b$.

Neliöjuuren määritteleminen $\sqrt{a}^2 = a$ ei johda samaan lopputulokseen. Pohdi, miksi näin on. Jatkossa tälaisia määritelmän pieniä muokkauksia ja niistä aiheutuvia muutoksia olisi aina hyvä pohdiskella – saattavat jopa auttaa muistamaan määritelmän oikean muodon.

Neliöjuurta ei siis nyt määritelty ollenkaan negatiivisille luvuille.

Esimerkki

$$\sqrt{4} = 2\ qquad, \text{koska } 2 > 0 \text{ ja } 2^2 = 4$$

10.2 Kuutiojuuri

Luvun a kuutiojuuri on luku, jonka kuutio on a. Tämä voidaan ilmaista lyhyemmin $\sqrt[3]{b^3} = b$.

Määritelmäksi voisi ottaa myös $\sqrt[3]{b^3} = b$.

10.3 n.s juuri

Toista juurta $\sqrt[2]{a}$ merkitään $\sqrt{a}$

Luku 11 Murtopotenssi

Luku 12 Irrationaaliluvut

Luku 13 Reaaliluvut

Luku 14 Kompleksiluvut

Luku 15 Kertaustiivistelmä

Osa II Yhtälöt

Luku 16 Yhtälöiden teoriaa

Monissa käytännön tilanteissa saamme samalle asialle kaksi erilaista esitystapaa.

Esimerkki. *Meillä on orsivaaka, joka on tasapainossa. (kuva!) Toisessa vaakakupissa on kahden kilon siika ja toisessa puolen kilon ahven sekä tuntematon määrä lakritsia. Kuinka paljon vaakakupissa on lakritsia? (Ratkaistaan...) (Muita esimerkkejä, vähitellen vaikeutuvia (1. asteen) yhtälöitä)*

Määritelmä: Yhtälöksi kutsutaan kahden lausekkeen merkittyä yhtäsuuruutta. Siis mielivaltaisille lausekkeille A ja B merkitään A=B. (Esim. A=3x+5 ja B=7x+7). Jos yhtälön puolien lausekkeiden arvot ovat samat, sanotaan että yhtälö pätee.

Yhtälössä voi esiintyä myös muuttujia, eli symboleja joiden arvoa ei ole etukäteen määritelty. Muuttujia merkitään usein kirjaimilla x, y ja z. Niitä muuttujien arvoja, joilla yhtälö pätee, kutsutaan yhtälön ratkaisuiksi. Yhtälön ratkaisemisella tarkoitetaan kaikkien yhtälön ratkaisujen selvittämistä.

Eräs tapa ratkaista yhtälöitä on muokata niitä niin, että muokattu yhtälö pätee täsmälleen silloin kun alkuperäinen yhtälö pätee. Tällaisia sallittuja muunnoksia ovat esimerkiksi:

- Yhtälön molemmat puolet voidaan kertoa nollasta poikkeavalla luvulla m. Muutos tehdään aina molemmille puolille. Tällöin saadaan yhtälö $mA = mB$.
- Yhtälön molemmille puolille voidaan lisätä tai molemmilta puolilta vähentää luku n. Tällöin saadaan yhtälö $A + n = B + n$.

Monet yhtälöt ratkeavat toistamalla tällaisia muunnoksia kunnes yhtälö on niin yksinkertaisessa muodossa, että ratkaisu on helppo nähdä. Koska jokaisessa muokkausjonon yhtälössä ratkaisut ovat samat, näin saadaan alkuperäisen yhtälön ratkaisut.

[joku esimerkki tähän?]

Yhtälöitä on oleellisesti kolmenlaisia:
(1) Yhtälö, joka on aina tosi. Esimerkiksi yhtälöt $8 = 8$ ja $x = x$.
(2) Yhtälö, joka on joskus tosi. Esimerkiksi yhtälö $x = 1$ on tosi jos ja vain jos $x = 1$. Muuttujan arvoja, joilla tällainen yhtälö toteutuu, kutsutaan yhtälön ratkaisuiksi tai

juuriksi.
(3) Yhtälö, joka ei ole koskaan tosi. Esimerkiksi yhtälö $0 = 1$.
Tämän kurssin ja ylipäätään matematiikan kannalta selvästi tärkein yhtälötyyppi on (2).
Siirrymme nyt tarkastelemaan tärkeää erikoistapausta yhtälöistä, ensimmäisen asteen yhtälöitä.

Luku 17 Ensimmäisen asteen yhtälö

Ensimmäisen asteen yhtälö on yhtälö, joka on esitettävissä muodossa $ax + b = 0$, jossa $a \neq 0$.

Teoreema 3. *Kaikki muotoa $ax + b = cx + d$ olevat yhtälöt, joissa $a \neq c$, ovat ensimmäisen asteen yhtälöitä.*

Todistus.

$$\begin{aligned} ax + b &= cx + d && \textbf{| Vähennetään molemmilta puolilta } cx + d. \\ ax + b - (cx + d) &= 0 && | \end{aligned}$$

□

Teoreema 4. *Yleinen lähemistymistapa muotoa $ax + b = cx + d$ olevien yhtälöiden ratkaisuun on:*
(1) Vähennä molemmilta puolilta cx. Saat yhtälön $(a - c)x + b = d$.
(2) Vähennä molemmilta puolita b. Saat yhtälön $(a - c)x = d - b$.
(3) Jaa $(A - C)$:llä. Saat yhtälön ratkaistuun muotoon $x = \frac{d-b}{a-c}$.

Esimerkki. Yhtälön $7x + 4 = 4x + 7$ ratkaisu saadaan seuraavasti:

$$\begin{aligned} 7x + 4 &= 4x + 7 && |\text{Vähennetään molemmilta puolilta 4x.} \\ 3x + 4 &= 7 && |\text{Vähennetään molemmilta puolilta 4.} \\ 3x &= 3 && |\text{Jaetaan molemmat puolet kolmella eli kerrotaan } \frac{1}{3}\text{:lla.} \\ x &= 1 && |\text{Saimme yhtälön ratkaistuun muotoon. } x = 1 \text{ on siis yhtälön ratkaisu.} \end{aligned}$$

Luku 18 Yhtälöpari

Luku 19 Yleinen potenssi ja potenssiyhtälö

Esitä luku ilman kymmenpotenssia. a) $3,2 * 10^4$ b) $-7,03 * 10^{-5}$ c) $10,005 * 10^{-2}$ Vastaus a) 32000 b) $-0,0000703$ c) $0,10005$

Esitä luku ilman etuliitettä. a) $0,5dl$ b) $233mm$ c) $33cm$ d) $16kg$ e) $2MJ$ f) g) Vastaus: a) $0,05l$ b) $0,233m$ c) $0,33m$ d) $16000g$ e) $2000000J$ f) g)

Luku 20 Kertaustiivistelmä

Osa III Funktiot

Luku 21 Funktio

Luku 22 Erilaisia funktioita

Osa IV Sovelluksia

Luku 23 Verrannollisuus

Luku 24 Verrannollisuus: sovelluksia

Pohdi, kuinka toinen suure muuttuu, kun toinen suure kaksinkertaistuu, kolminkertaistuu, puolittuu jne. Ovatko suureet suoraan verrannolliset? a) kuljettu matka ja kulunut aika, kun keskinopeus on 30 km/h b) kananmunien lukumäärä ja niiden kovaksi keittämiseen tarvittava keittoaika c) hedelmätiskiltä valitun vesimelonin paino ja hinta d) neliön sivun pituus ja neliön pinta-ala Vastaus: a) Ovat. b) Eivät ole. c) Ovat. d) Eivät ole, sillä esimerkiksi kun neliön sivun pituus kaksinkertaistuu 1 cm:stä 2 cm:iin, niin neliön pinta-ala nelinkertaistuu 1 cm^2:stä 4 cm^2:iin.

Isi ja lapset ovat ajamassa mökille Sotkamoon. Ollaan ajettu jo neljä viidennestä matkasta ja aikaa on kulunut kaksi tuntia. "Joko ollaan perillä?"kysyvät lapset takapenkiltä. Kuinka pitkään vielä arviolta kuluu, ennen kuin ollaan mökillä? Vastaus: 1 h 15 min

Äidinkielen kurssilla annettiin tehtäväksi lukea eräs 300-sivuinen romaani. Eräs opiskelija otti aikaa ja selvitti lukevansa vartissa seitsemän sivua. Kuinka monta tuntia häneltä kuluu arviolta koko romaanin lukemiseen, jos taukoja ei lasketa? Vastaus: 642 minuuttia eli 10 h 42 min.

Luku 25 Prosenttilaskentaa - perustilanteet

Kun lukuja verrataan toisiinsa, lasketaan niiden suhde eli osamäärä. Tämä kertoo jaettavan suhteellisen osuuden jakajasta. Suhteellinen osuus ilmaistaan usein prosentteina. Yksi prosentti tarkoittaa yhtä sadasosaa. Prosentin merkki on %.

1 prosentti $= 1\% = \frac{1}{100} = 0,01$

Esimerkki:
$6\% = \frac{6}{100} = 0,06$, $48,2\% = \frac{48}{100} = 0,482$, $140\% = \frac{140}{100} = 1,40$

Minkä tahansa suhdeluvun voi muuttaa prosenteiksi laskemalla osamäärän desimaalilukuna ja ottamalla siitä sadasosat.

Kahden prosenttiluvun välisen erotuksen yksikköä kutsutaan prosenttiyksiköksi.

25.1 Perusprosenttilaskut

- Prosenttiluvun laskeminen
- Prosenttiarvon laskeminen
- Perusarvon laskeminen

25.2 Vertailu prosenttien avulla

- Muutosprosentti, vertailuprosentti
- Prosentuaalinen muutos
- Prosenttiyksikkö

Luku 26 Prosenttiyhtälöitä ja sovelluksia

Laukku maksaa 225 €ja on 25%:n alennuksessa. Paljonko alennettu hinta on? Vastaus: 168,75 €

Kirjan myyntihinta, joka sisältää arvolisäveron, on 8% suurempi kuin kirjan veroton hinta. Laske kirjan veroton hinta, kun myyntihinta on 15€. Vastaus: 13,89 €

Perussuomalaisten kannatus oli vuoden 2007 eduskuntavaaleissa 4,1% ja vuoden 2011 eduskuntavaaleissa 19,1%. Kuinka monta prosenttiyksikköä kannatus nousi? Kuinka monta prosenttia kannatus nousi? Vastaus: Kannatus nousi 15 %-yksikköä ja 365,9 %.

Askartelukaupassa on alennusviikot, ja kaikki tavarat myydään 60%n alennuksella. Viimeisenä päivänä kaikista hinnoista annetaan vielä lisäalennus, joka lasketaan aiemmin alennetusta hinnasta. Minkä suuruinen lisäalennus tulee antaa, jos lopullisen kokonaisalennuksen halutaan olevan 80%? Vastaus: 50%.

Erään pankin myöntämä opintolaina nousee korkoa 2% vuodessa. Kuinka monta prosenttia laina on noussut korkoa alkuperäiseen summaan verrattuna kymmenen vuoden kuluttua? Vastaus: 22%.

Ansiotuloverotus on Suomessa progressiivista: suuremmista tuloista maksetaan

Luku 27 Kertaustiivistelmä

Osa V Kertaus ja harjoituskokeita

Luku 28 Verrannollisuus

Kertausosio (teoria ja esimerkit) Kertaustehtäväsarjoja Harjoituskokeita "Näihin pystyt jo" -yo-tehtäviä (myös lyhyestä) "Näihin pystyt jo" -pääsykoetehtäviä (moooonilta eri aloilta! kauppatieteellinen, tradenomi (jos löytyy), kansantaloustiede, arkkitehtuuri, DI-haku, AMK tekniikan alat, fysiikka, tilastotiede, ...) Vastauksia ja ratkaisuja Suomi-ruotsi-englanti-sanasto ja hakemisto symbolitaulukko