

Hellsten – Linja-aho – Mauno – Mäkinen –

Piironen – Sottinen ...

---

# Avoim matikka 1

## Kirja on työn alla!

MAA1 – Funktiot ja yhtälöt

---

Oppikirjamaraton - tätä lukee kuin avointa kirjaa!

Sisältö on lisensoitu avoimella CC-BY-lisenssillä.

# Sisältö

## 1 Esipuhe 4

### *I Lukualueet*

5

## 2 Luonnolliset luvut 6

## 3 Joukko-oppia 7

## 4 Logiikkaa 8

## 5 Kokonaisluvut 9

## 6 Kokonaislukujen aritmetiikkaa 10

## 7 Jaollisuus & tekijät 11

## 8 Rationaaliluvut ja laskusäännöt 12

## 9 Potenssisäännöt & murtolausekkeiden sieventämistä 13

## 10 Juuret 14

## 11 Murtopotenssi 15

## 12 Irrationaaliluvut 16

## 13 Reaaliluvut 17

## 14 Kompleksiluvut 18

## 15 Kertaustiivistelmä 19

### *II Yhtälöt*

20

## 16 Yhtälöiden teoriaa 21

## 17 Ensimmäisen asteen yhtälö 23

## 18 Yleinen potenssi ja potenssiyhtälö 24

## 19 Kertaustiivistelmä 25

### *III Funktiot*

26

20 **Funktio 27**21 **Erilaisia funktioita 28***IV Lukualueet*

29

22 **Luonnolliset luvut 30**23 **Joukko-oppia 31**24 **Logiikkaa 32**25 **Kokonaisluvut 33**26 **Kokonaislukujen aritmetiikkaa 34**27 **Jaollisuus & tekijät 35**28 **Rationaaliluvut ja laskusäännöt 36**29 **Potenssisäännöt & murtolausekkeiden sieventämistä 37**30 **Juuret 38**31 **Murtopotenssi 39**32 **Irrationaaliluvut 40**33 **Reaaliluvut 41**34 **Kompleksiluvut 42**35 **Kertaustiivistelmä 43***V Sovelluksia*

44

36 **Verrannollisuus 45**37 **Verrannollisuus: sovelluksia 46**38 **Prosenttilaskentaa - perustilanteet 47**39 **Prosenttiyhtälöitä ja sovelluksia 48**40 **Kertaustiivistelmä 49***VI Kertaus ja harjoituskokeita*

50

41 **Verrannollisuus 51**

# Luku 1 Esipuhe

Lorem ipsum...

Tässä on ältsin hieno teoriaboksi. Tänne voi laittaa myös kaavoja

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad (1.1)$$

ja toimii kuin junan vessa.

**Teoreema 1** (Residue Theorem). *Let  $f$  be analytic in the region  $G$  except for the isolated singularities  $a_1, a_2, \dots, a_m$ . If  $\gamma$  is a closed rectifiable curve in  $G$  which does not pass through any of the points  $a_k$  and if  $\gamma \approx 0$  in  $G$  then*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f = \sum_{k=1}^m n(\gamma; a_k) \operatorname{Res}(f; a_k).$$

Another nice theorem from complex analysis is

**Teoreema 2** (Maximum Modulus). *Let  $G$  be a bounded open set in  $\mathbb{C}$  and suppose that  $f$  is a continuous function on  $G^-$  which is analytic in  $G$ . Then*

$$\max\{|f(z)| : z \in G^-\} = \max\{|f(z)| : z \in \partial G\}.$$

# Osa I Lukualueet

## Luku 2 Luonnolliset luvut

## Luku 3 Joukko-oppia

## Luku 4 Logiikkaa



## **Luku 5 Kokonaisluvut**

## Luku 6 Kokonaislukujen aritmetiikkaa

## Luku 7    Jaollisuus & tekijät

## Luku 8   Rationaaliluvut ja laskusäännöt

## Luku 9   Potenssisäännöt & murtolausekkeiden sieventämistä

## Luku 10 Juuret

# Luku 11 Murtopotenssi

## Luku 12 Irrationaaliluvut



## Luku 13 Reaaliluvut

## Luku 14 Kompleksiluvut

## Luku 15 Kertaustiivistelmä

## Osa II Yhtälöt

# Luku 16 Yhtälöiden teoriaa

Monissa käytännön tilanteissa saamme samalle asialle kaksi erilaista esitystapaa.

Esimerkki: Meillä on orsivaaka, joka on tasapainossa. (kuva!) Toisessa vaakakupissa on kahden kilon siika ja toisessa puolen kilon ahven sekä tuntematon määrä lakritsia. Kuinka paljon vaakakupissa on lakritsia? (Ratkaistaan...) (Muita esimerkkejä, vähitellen vaikeutuvia (1. asteen) yhtälöitä)

Määritelmä: Yhtälöksi kutsutaan kahden lausekkeen merkittävää yhtäsuuruutta. Siis mielivaltaisille lausekkeille  $A$  ja  $B$  merkitään  $A=B$ . (Esim.  $A=3x+5$  ja  $B=7x+7$ ). Yhtälö on tosi, jos sen molemmat puolet todella ovat yhtäsuuret. Jos yhtälö ei ole tosi, se on epätosi. Tosi ja epätosi ovat totuusarvoja.

Yhtälöitä voidaan muokata siten, että niiden totuusarvo ei muutu. Tällaisia sallittuja muunnoksia ovat: (A) Yhtälön molemmat puolet voidaan kertoa nollasta poikkeavalla luvulla  $a$ . Muutos tehdään aina molemmille puolille. Tällöin saadaan yhtälö  $aA = aB$ . (B) Yhtälön molemmille puolille voidaan lisätä tai molemmilta puolilta vähentää luku  $b$ . Tällöin saadaan yhtälö  $A + b = B + b$ .

Muuttujaksi kutsutaan symbolia, jonka arvoa ei ole kiinnitetty. Muuttujia merkitään usein kirjaimilla  $x$ ,  $y$  ja  $z$ . Yhtälöissä muuttujaa voidaan käyttää kuvaamaan tuntematonta määrää, jolloin yhtälöä muokkaamalla ("ratkaisemalla yhtälö") saadaan selville tuntematon.

Yhtälöitä on oleellisesti kolmenlaisia:

- (1) Yhtälö, joka on aina tosi. Esimerkiksi yhtälöt  $8 = 8$  ja  $x = x$ .
- (2) Yhtälö, joka on joskus tosi. Esimerkiksi yhtälö  $x = 1$  on tosi jos ja vain jos  $x = 1$ . Muuttujan arvoja, joilla tällainen yhtälö toteutuu, kutsutaan yhtälön ratkaisuiksi tai juuriksi.
- (3) Yhtälö, joka ei ole koskaan tosi. Esimerkiksi yhtälö  $0 = 1$ .

Tämän kurssin ja ylipäätään matematiikan kannalta selvästi tärkein yhtälötyyppi on (2). Siirrymme nyt tarkastelemaan tärkeää erikoistapausta yhtälöistä, ensimmäisen asteen

yhtälöitä.

# Luku 17 Ensimmäisen asteen yhtälö

Ensimmäisen asteen yhtälö on yhtälö, joka on esitettävissä muodossa  $ax + b = 0$ , jossa  $a \neq 0$ .

**Teoreema 3.** Kaikki muotoa  $ax + b = cx + d$  olevat yhtälöt, joissa  $a \neq c$ , ovat ensimmäisen asteen yhtälöitä.

*Todistus.*

$$\begin{array}{ll} ax + b = cx + d & | \text{Vähennetään molemmilta puolilta } cx + d. \\ ax + b - (cx + d) = 0 & | \end{array}$$

□

**Teoreema 4.** Yleinen lähestymistapa muotoa  $Ax + B = Cx + D$  olevien yhtälöiden ratkaisuun on:

- (1) Vähennä molemmilta puolilta  $Cx$ . Saat yhtälön  $(A - C)x + B = D$ .
- (2) Vähennä molemmilta puolilta  $B$ . Saat yhtälön  $(A - C)x = D - B$ .
- (3) Jaa  $(A - C)$ :llä. Saat yhtälön ratkaistuun muotoon  $x = \frac{D-B}{A-C}$ .

Esimerkki. Yhtälön  $7x + 4 = 4x + 7$  ratkaisu saadaan seuraavasti:

$$7x + 4 = 4x + 7 \quad | \text{Vähennetään molemmilta puolilta } 4x.$$

$$3x + 4 = 7 \quad | \text{Vähennetään molemmilta puolilta } 4.$$

$$3x = 3 \quad | \text{Jaetaan molemmat puolet kolmella eli kerrotaan } \frac{1}{3} \text{:lla.}$$

$$x = 1 \quad | \text{Saimme yhtälön ratkaistuun muotoon. } x = 1 \text{ on siis yhtälön ratkaisu.}$$

## Luku 18 Yleinen potenssi ja potenssiyhtälö



## Luku 19 Kertaustiivistelmä

## Osa III Funktiot

## Luku 20 Funktio

## Luku 21 Erilaisia funktioita

## Osa IV Lukualueet

## Luku 22 Luonnolliset luvut

## Luku 23 Joukko-oppia

## Luku 24 Logiikkaa



## Luku 25 Kokonaisluvut

## Luku 26 Kokonaislukujen aritmetiikkaa

## Luku 27    Jaollisuus & tekijät

## Luku 28   Rationaaliluvut ja laskusäännöt

## Luku 29   Potenssisäännöt & murtolausekkeiden sieventämistä

## Luku 30 Juuret

## Luku 31 Murtopotenssi

## Luku 32 Irrationaaliluvut



## Luku 33 Reaaliluvut

## Luku 34 Kompleksiluvut

## Luku 35 Kertaustiivistelmä

## Osa V Sovelluksia

## **Luku 36   Verrannollisuus**

## Luku 37 Verrannollisuus: sovelluksia

## Luku 38   Prosenttilaskentaa - perustilanteet

## Luku 39   Prosenttiyhtälöitä ja sovelluksia



## Luku 40 Kertaustiivistelmä

# Osa VI Kertaus ja harjoituskokeita

# Luku 41 Verrannollisuus

Kertausosio (teoria ja esimerkit) Kertaustehtäväsarjoja Harjoituskokeita "Näihin pystyt jo" -yo-tehtäviä (myös lyhyestä) "Näihin pystyt jo" -pääsykoetehtäviä (mooonilta eri aloilta! kauppatieteellinen, tradenomi (jos löytyy), kansantaloustiede, arkkitehtuuri, DI-haku, AMK tekniikan alat, fysiikka, tilastotiede, ...) Vastauksia ja ratkaisuja Suomi-ruotsi-englanti-sanasto ja hakemisto symbolitaulukko