AULA 14 – AJUSTE DE CURVA

Prof. Gustavo Resque
gustavoresqueufpa@gmail.com

INTRODUÇÃO

- Vimos nas aulas anteriores que uma forma de encontrar a função polinomial a partir de uma tabela de valores é a interpolação.

- Entretanto, a interpolação (ajuste exato) não é aconselhável em algumas situações:
  - Obter um valor fora do intervalo de tabelamento
  - Valores tabelados advêm de algum experimento suscetível a erros e ruídos

- Surge então a necessidade de fazer uma boa aproximação ao invés de um ajuste exato. Essa aproximação é chamada de ajuste de curva.

INTRODUÇÃO

- O problema do ajuste de curvas no caso em que temos uma tabela pontos $(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2)), \dots, (x_m, f(x_m))$ com $x_1, x_2, \dots x_m$, pertencentes a um intervalo $[a, b]$, consiste em:
  - Escolhidas n funções $g_1(x), g_2(x), \dots, g_n(x)$, contínuas em $[a, b]$, obter n constantes $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, tais que a função

$$\varphi(x) = \alpha_1 g_1(x) + \alpha_2 g_2(x) + \cdots + \alpha_n g_n(x)$$

  - Se aproxime ao máximo de $f(x)$
  - A escolha das funções podem ser feitas observando os pontos tabelados ou baseando-se em fundamentos teóricos

INTRODUÇÃO

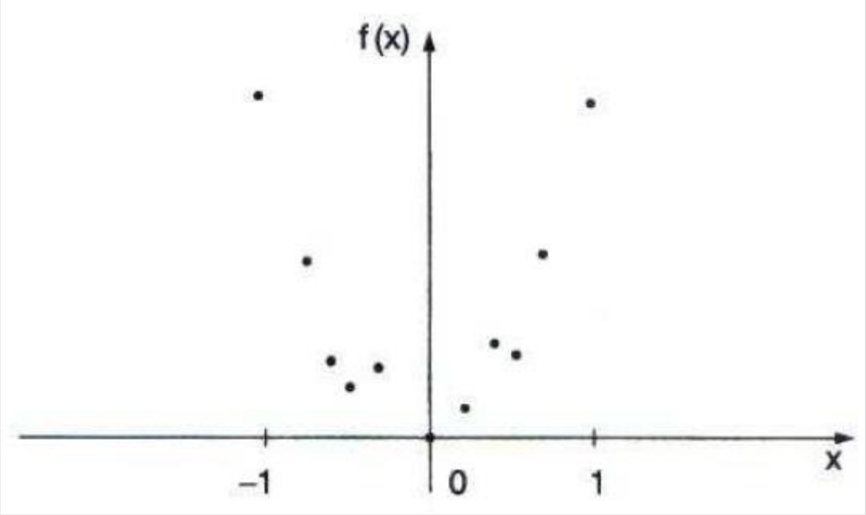
- Exemplo 1

a) Seja a tabela

x	–1.0	– 0.75	– 0.6	– 0.5	– 0.3	0	0.2	0.4	0.5	0.7	1.0
f(x)	2.05	1.153	0.45	0.4	0.5	0	0.2	0.6	0.512	1.2	2.05

- Observando o gráfico é natural escolhermos apenas uma função quadrática

$$\varphi(x) = \alpha x^2$$



MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS

- Consiste em escolher os α_j's de tal forma que a soma dos quadrados dos desvios, $d_k = f(x_k) - \varphi(x_k)$, seja mínima, ou seja a somatória abaixo deve ser mínima

$$\sum_{k=1}^{m} \left(f(x_k) - \varphi(x_k)\right)^2 = \sum_{k=1}^{m} \left(f(x_k) - \alpha_1 g_1(x) - \cdots - \alpha_n g_n(x)\right)^2$$
$$= F(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$$

- Para encontrar o valor mínimo usamos o cálculo diferencial para se obter o ponto crítico dessa somatória

MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS

- Aplicando a derivada temos:

$$\left.\frac{\partial F}{\partial \alpha_j}\right|_{(\alpha_1,\, \alpha_2,\, \ldots,\, \alpha_n)} = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Calculando estas derivadas parciais para cada $j = 1, 2, \ldots, n$, temos

$$\left.\frac{\partial F}{\partial \alpha_j}\right|_{(\alpha_1,\, \alpha_2,\, \ldots,\, \alpha_n)} = 2 \sum_{k=1}^{m} [f(x_k) - \alpha_1 g_1(x_k) - \ldots - \alpha_n g_n(x_k)]\,[-g_j(x_k)].$$

Impondo a condição

$$\left.\frac{\partial F}{\partial \alpha_j}\right|_{(\alpha_1,\, \alpha_2,\, \ldots,\, \alpha_n)} = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS

- Dessa forma, temos:

$$\sum_{k=1}^{m} [f(x_k) - \alpha_1 g_1(x_k) - \dots - \alpha_n g_n(x_k)]\,[g_j(x_k)] = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Assim,

$$\left.\begin{array}{l}
\sum\limits_{k=1}^{m} [f(x_k) - \alpha_1 g_1(x_k) - \dots\ \alpha_n g_n(x_k)]\, g_1(x_k) = 0 \\
\sum\limits_{k=1}^{m} [f(x_k) - \alpha_1 g_1(x_k) - \dots\ \alpha_n g_n(x_k)]\, g_2(x_k) = 0 \\
\vdots \\
\sum\limits_{k=1}^{m} [f(x_k) - \alpha_1 g_1(x_k) - \dots\ \alpha_n g_n(x_k)]\, g_n(x_k) = 0
\end{array}\right\} \Rightarrow$$

MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS

- E, temos:

$$\Rightarrow \begin{cases} [\sum_{k=1}^{m} g_1(x_k)g_1(x_k)]\,\alpha_1 + \ldots + [\sum_{k=1}^{m} g_n(x_k)g_1(x_k)]\,\alpha_n = \sum_{k=1}^{m} f(x_k)g_1(x_k) \\ [\sum_{k=1}^{m} g_1(x_k)g_2(x_k)]\,\alpha_1 + \ldots + [\sum_{k=1}^{m} g_n(x_k)g_2(x_k)]\,\alpha_n = \sum_{k=1}^{m} f(x_k)g_2(x_k) \\ \vdots \\ [\sum_{k=1}^{m} g_n(x_k)g_1(x_k)]\,\alpha_1 + \ldots + [\sum_{k=1}^{m} g_n(x_k)g_n(x_k)]\,\alpha_n = \sum_{k=1}^{m} f(x_k)g_n(x_k) \end{cases} \qquad (1)$$

- Que é um sistema linear com n equações e n incógnitas: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$

MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS

- O sistema linear pode ser escrito da seguinte forma:

$$\begin{cases} a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \dots + a_{1n}\alpha_n = b_1 \\ a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \dots + a_{2n}\alpha_n = b_2 \\ \quad\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \dots + a_{nn}\alpha_n = b_n \end{cases}$$

onde $A = (a_{ij})$ é tal que $a_{ij} = \sum_{k=1}^{m} g_j(x_k)g_i(x_k) = a_{ji}$ (ou seja, A é simétrica)

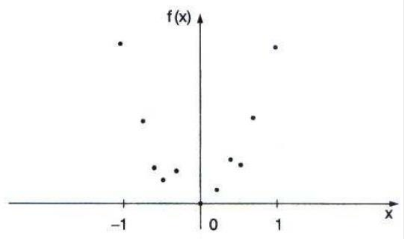
$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)^t \text{ e } b = (b_1, b_2, \dots, b_n)^t \text{ é tal que}$$

$$b_i = \sum_{k=1}^{m} f(x_k)g_i(x_k).$$

INTRODUÇÃO

- Exemplo 3 – Resolveremos o exemplo dado no início

x	–1.0	– 0.75	– 0.6	– 0.5	– 0.3	0	0.2	0.4	0.5	0.7	1.0
f(x)	2.05	1.153	0.45	0.4	0.5	0	0.2	0.6	0.512	1.2	2.05



- Usaremos somente uma parábola passando pela origem para esse caso, $f(x) \approx \varphi(x) = \alpha x^2$

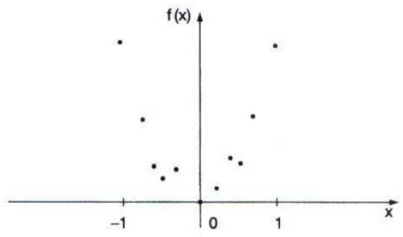
Temos, pois, de resolver apenas a equação

$$\left[\sum_{k=1}^{11} g(x_k)g(x_k)\right]\alpha = \sum_{k=1}^{11} f(x_k)g(x_k)$$

INTRODUÇÃO

- Exemplo 3 – Resolveremos o exemplo dado no início

x	–1.0	– 0.75	– 0.6	– 0.5	– 0.3	0	0.2	0.4	0.5	0.7	1.0
f(x)	2.05	1.153	0.45	0.4	0.5	0	0.2	0.6	0.512	1.2	2.05



$$\left[\sum_{k=1}^{11} g(x_k)g(x_k)\right]\alpha = \sum_{k=1}^{11} f(x_k)g(x_k)$$

$$\left[\sum_{k=1}^{11} g(x_k)^2\right]\alpha = \sum_{k=1}^{11} f(x_k)g(x_k)$$

$$\left[\sum_{k=1}^{11} (x_k^2)^2\right]\alpha = \sum_{k=1}^{11} (x_k^2)\, f(x_k)$$

INTRODUÇÃO

- Exemplo 3 – Resolveremos o exemplo dado no início

Continuando a tabela com $g(x_k)g(x_k)$ e $g(x_k)f(x_k)$, temos

x	−1.0	−0.75	−0.6	−0.5	−0.3	0	0.2	0.4	0.5	0.7	1	SOMAS
$(x^2).(x^2)$	1	0.3164	0.1296	0.0625	0.0081	0	0.0016	0.0256	0.0625	0.2401	1	2.8464
$f(x)x^2$	2.05	0.6486	0.162	0.1	0.045	0	0.008	0.096	0.128	0.588	2.05	5.8756

Assim, nossa equação é $2.8464\alpha = 5.8756 \Rightarrow \alpha = \dfrac{5.8756}{2.8464} \simeq 2.0642$

Então $\varphi(x) = 2.0642x^2$ é a parábola que melhor se aproxima, no sentido dos quadrados mínimos, da função tabelada.