AULA 13 – INTERPOLAÇÃO (PARTE 3)

Prof. Gustavo Resque
gustavoresqueufpa@gmail.com

LAB
VIS

INTERPOLAÇÃO INVERSA

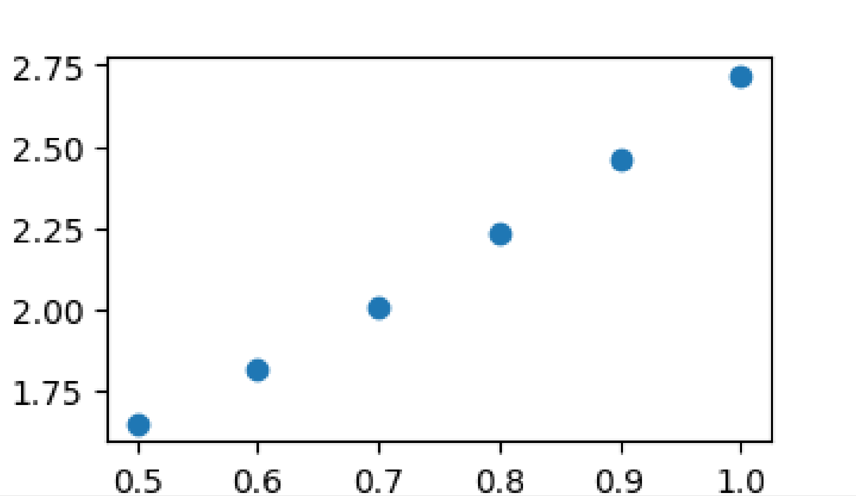
- O problema da interpolação inversa consiste em obter x tal que $f(x) = y$.

- Pode-se resolver esse problema:
    1. Encontrando a $p_n(x)$ que interpola $f(x)$ para $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, em seguida, resolver o polinômio para $f(x) = y$, sendo y um valor dado.

    2. Ou, quando $f(x)$ é inversível dentro do intervalo $[x_1, x_n]$
        - Para que $f(x)$ seja inversível é necessário que ela seja monotonamente crescente ou decrescente

INTERPOLAÇÃO INVERSA

- Exemplo 10
  - Caso 1



Dada a tabela abaixo, encontrar $\overline{x}$ tal que $f(\overline{x}) = 2$:

x	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
f(x)	1.65	1.82	2.01	2.23	2.46	2.72

INTERPOLAÇÃO INVERSA

- Exemplo 10
  - Caso 1

Dada a tabela abaixo, encontrar $\bar{x}$ tal que $f(\bar{x}) = 2$:

x	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
f(x)	1.65	1.82	2.01	2.23	2.46	2.72

Como $2 \in (1.82, 2.01)$, usaremos interpolação linear sobre $x_0 = 0.6$ e $x_1 = 0.7$.

Assim,

$$p_1(x) = f(x_0)\,\frac{x - x_0}{x_0 - x_1} + f(x_1)\,\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

$$= 1.82\,\frac{x - 0.7}{-0.1} + 2.01\,\frac{x - 0.6}{0.1}$$

$$= -18.2x + 12.74 + 20.1x - 12.06$$

$$= 1.9x + 0.68.$$

Então $p_1(\bar{x}) = 2 \Leftrightarrow 1.9\bar{x} + 0.68 = 2 \Leftrightarrow \bar{x} = \dfrac{2 - 0.68}{1.9} = 0.6947368.$

INTERPOLAÇÃO INVERSA

- Exemplo 11
  - Caso 2

Dada a tabela

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$y = e^x$	1	1.1052	1.2214	1.3499	1.4918	1.6487

Obter x, tal que $e^x = 1.3165$, usando um processo de interpolação quadrática.

Usaremos a forma de Newton para obter $p_2(y)$ que interpola $f^{-1}(y)$.

Assim, vamos construir a tabela de diferenças divididas

INTERPOLAÇÃO INVERSA

- Exemplo 11
  - Caso 2

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$y = e^x$	1	1.1052	1.2214	1.3499	1.4918	1.6487

y	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2	Ordem 3
1	0			
		0.9506		
1.1052	0.1		-0.4065	
		0.8606		0.1994
1.2214	0.2		–0.3367	
		0.7782		0.1679
1.3499	0.3		–0.2718	
		0.7047		0.1081
1.4918	0.4		–0.2256	
		0.6373		
1.6487	0.5			

INTERPOLAÇÃO INVERSA

- Exemplo 11
  - Caso 2

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$y = e^x$	1	1.1052	1.2214	1.3499	1.4918	1.6487

y	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2	Ordem 3
1	0			
		0.9506		
1.1052	0.1		-0.4065	
		0.8606		0.1994
1.2214	0.2		–0.3367	
		0.7782		0.1679
1.3499	0.3		–0.2718	
		0.7047		0.1081
1.4918	0.4		–0.2256	
		0.6373		
1.6487	0.5			

$p_2(y) = g(y_0) + (y - y_0)g[y_0, y_1] + (y - y_0)(y - y_1)\, g[y_0, y_1, y_2]$

$p_2(y) = 0.2 + (y - 1.2214)\, 0.7782 + (y - 1.2214)(y - 1.3499)\, (-0.2718)$

$p_2(1.3165) = 0.27487.$

Assim, $e^{0.27487} \approx 1.3165$ (na calculadora, $e^{0.27487} = 1.31659$).

ESCOLHA DO GRAU DE P(X)

- A tabela das diferenças divididas da forma de Newton no ajuda a escolher um polinômio de grau menor para a interpolação
  - Ao construir a tabela examina-se os vizinhos de mesma ordem.
  - Se nessa vizinhança de mesma ordem k os valores são praticamente constantes, podemos concluir que um polinômio de ordem k é bom.

ESCOLHA DO GRAU DE P(X)

- Por exemplo

x	1	1.01	1.02	1.03	1.04	1.05
$\sqrt{x}$	1	1.005	1.01	1.0149	1.0198	1.0247

- Dessa forma, um polinômio de grau 1 já é uma boa aproximação para $f(x)$

x	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2
1	1		
		0.5	
1.01	1.005		0
		0.5	
1.02	1.01		–0.5
		0.49	
1.03	1.0149		0
		0.49	
1.04	1.0198		0
		0.49	
1.05	1.0247		
		↑ constantes	

FENÔMENO DE RUNGE

- Uma consequência do que vimos no exemplo anterior é que podemos utilizar um polinômio de grau menor em certo intervalo [a,b] mesm que f(x) não tenha grau ou complexidade maior.

- Então podemos nos perguntar se ao utilizar mais pontos dentro de um intervalo [a,b] faz com que o $p_n(x), n \to \infty$ convirja para $f(x)$

- O fenômeno de Runge nos mostra
  - para $x_{i+1} - x_i = h, i = 0,1, \dots, n$, ou seja, são igualmente espaçados
  - Que há divergências quando se aumenta n

FENÔMENO DE RUNGE

- Exemplo 12

Considere $f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}$ tabelada no intervalo $[-1, 1]$ nos pontos $x_i = -1 + \frac{2i}{n}$, $i = 0, 1, \ldots, n$.

O gráfico a seguir apresenta a curva $f(x)$, o polinômio de grau $n = 10$ que interpola $f(x)$ em x_i, $i = 0, \ldots, 10$ e o polinômio de Chebyshev que a interpola em $\bar{x}_i = \cos\left(\frac{2i + 1}{n + 1} \frac{\pi}{2}\right)$.

FENÔMENO DE RUNGE

- Exemplo 12

Considere $f(x) = \dfrac{1}{1 + 25x^2}$ tabelada no intervalo $[-1, 1]$ nos pontos $x_i = -1 + \dfrac{2i}{n}$, $i = 0, 1, \ldots, n$.

grau $n = 10$ que

ue a interpola em

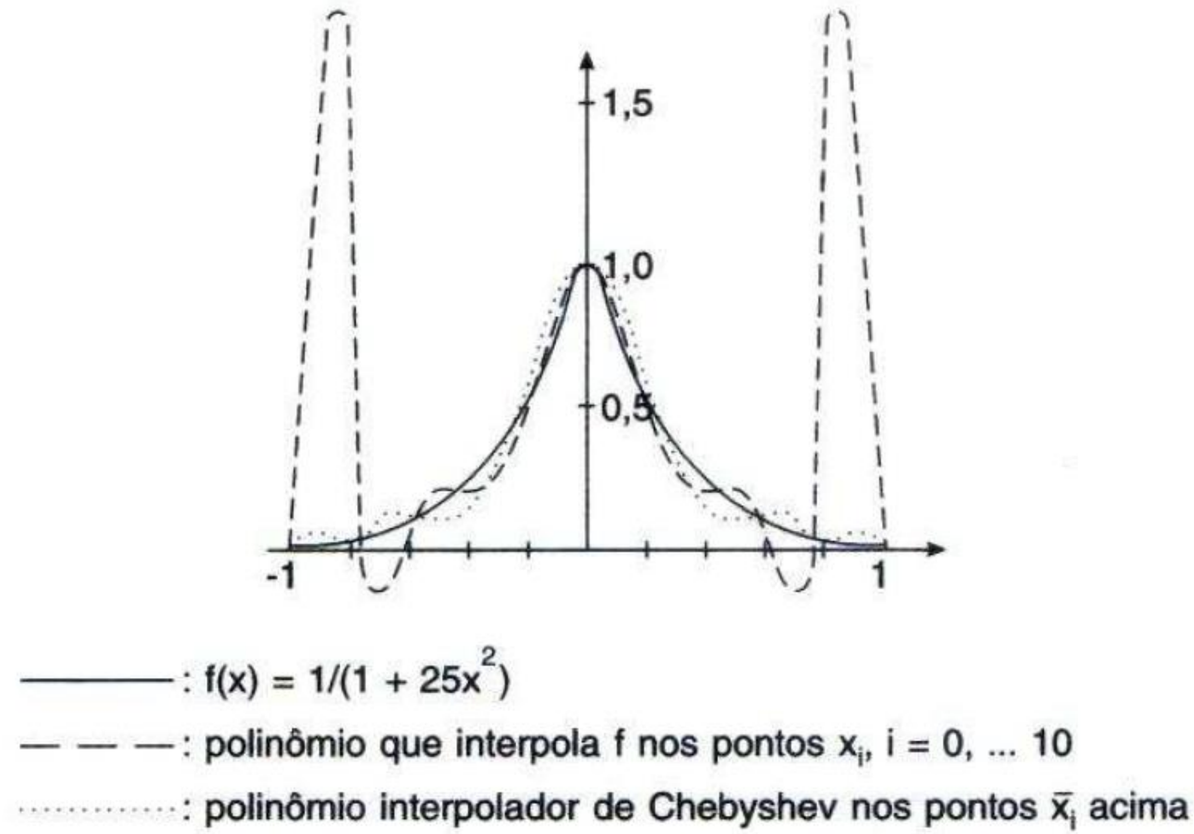
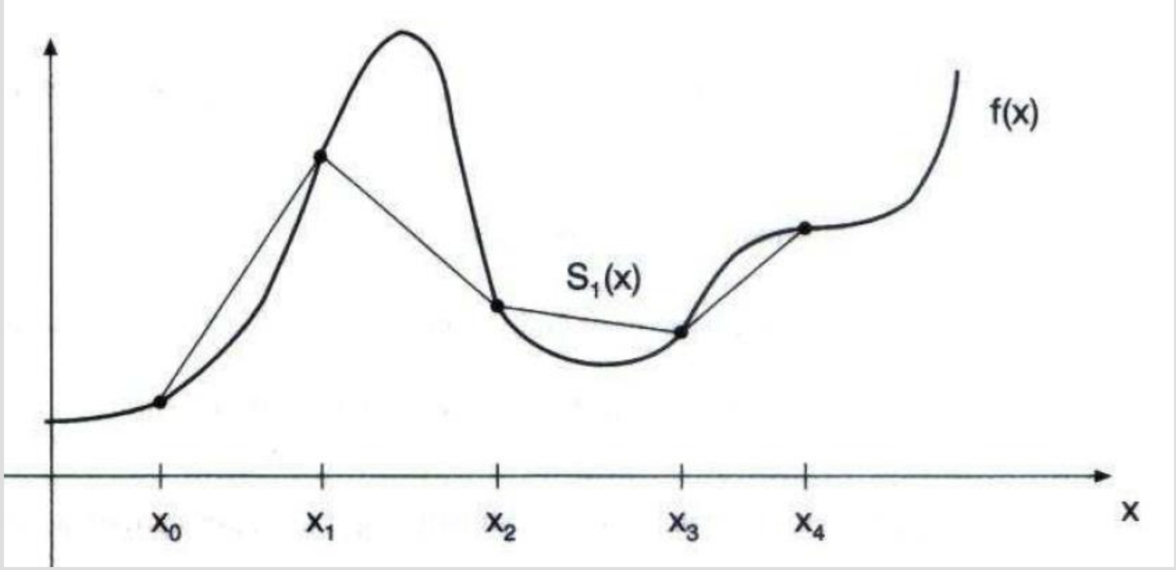


Figura 5.3

FUNÇÕES SPLINE EM INTERPOLAÇÃO

- Uma alternativa à interpolação com polinômio de grau alto para se evitar o fenômeno de Runge é o uso do conceito de funções spline

- Ou seja, interpolar f(x) em grupos de poucos pontos com polinômios de grau menor



FUNÇÕES SPLINE EM INTERPOLAÇÃO

- Pode-se optar também por a cada 3 pontos interpolar um polinômio de grau 2 e assim sucessivamente.

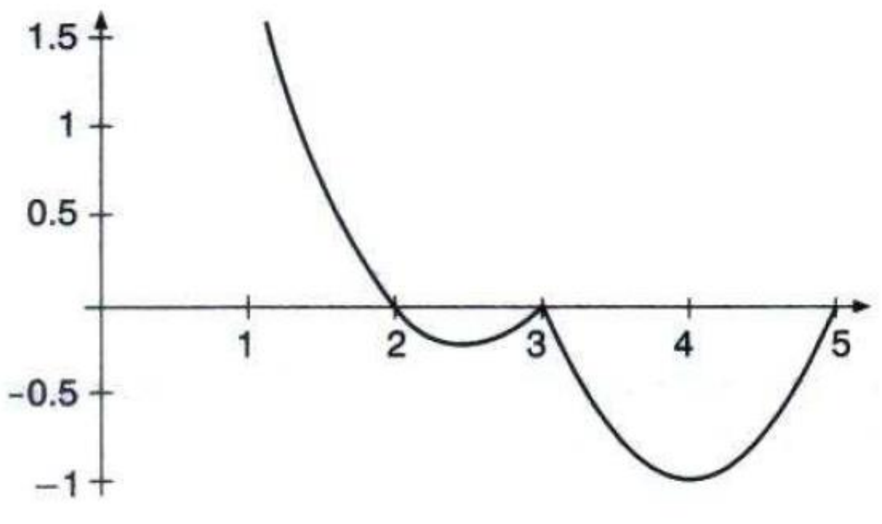


Figura 5.5

EXERCÍCIO

- Implementar dois algoritmos de interpolação, sendo um deles pela forma de Newton
- Escolha 2 funções polinomiais de graus entre 10 e 20 e obtenha o polinômio interpolador dessas 3 funções para 5, 8 e 10 pontos na tabela
- Para 10 pontos igualmente espaçados use a função Spline quadrática e compare com a interpolação de 10 pontos acima.
- Escolha 20 pontos aleatórios dentro do intervalo tabelado, mas diferente dos valores na tabela, e compare o valor da interpolação com o valor da função original.
- Plote os resultados graficamente