AULA 16 – INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

Prof. Gustavo Resque
gustavoresqueufpa@gmail.com

INTRODUÇÃO

- Sabemos do Cálculo Diferencial que se $f(x)$ é contínua em $[a, b]$, então existe $F(x)$ tal que $F'(x) = f(x)$

- Assim,

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

- Existem alguns casos em quem se obter $F(x)$ é muito difícil ou se conhece apenas alguns pontos de $f(x)$

- Então, podemos obter a integral por meio de aproximações

FÓRMULAS DE NEWTON-COTES

- Consiste em
  - Dividir o intervalo $[a, b]$ em sub-intervalos igualmente espaçados de tamanho h.
  - Encontrar o polinômio que interpola cada sub-intervalo
  - Somar o valor da integral desses polinômios em cada sub-intervalo

$$x_0 = a, \; x_n = b \quad \text{e}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx \simeq A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1) + \ldots + A_n f(x_n) = \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i),$$

  - Sendo os coeficientes A_i dependentes do grau do polinômio interpolador

REGRA DOS TRAPÉZIOS

- Se usarmos a fórmula de Lagrange para interpolar um polinômio de grau 1, temos

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_{a=x_0}^{b=x_1} p_1(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{(x-x_1)}{-h} f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{h} f(x_1) \right] dx = I_T.$$

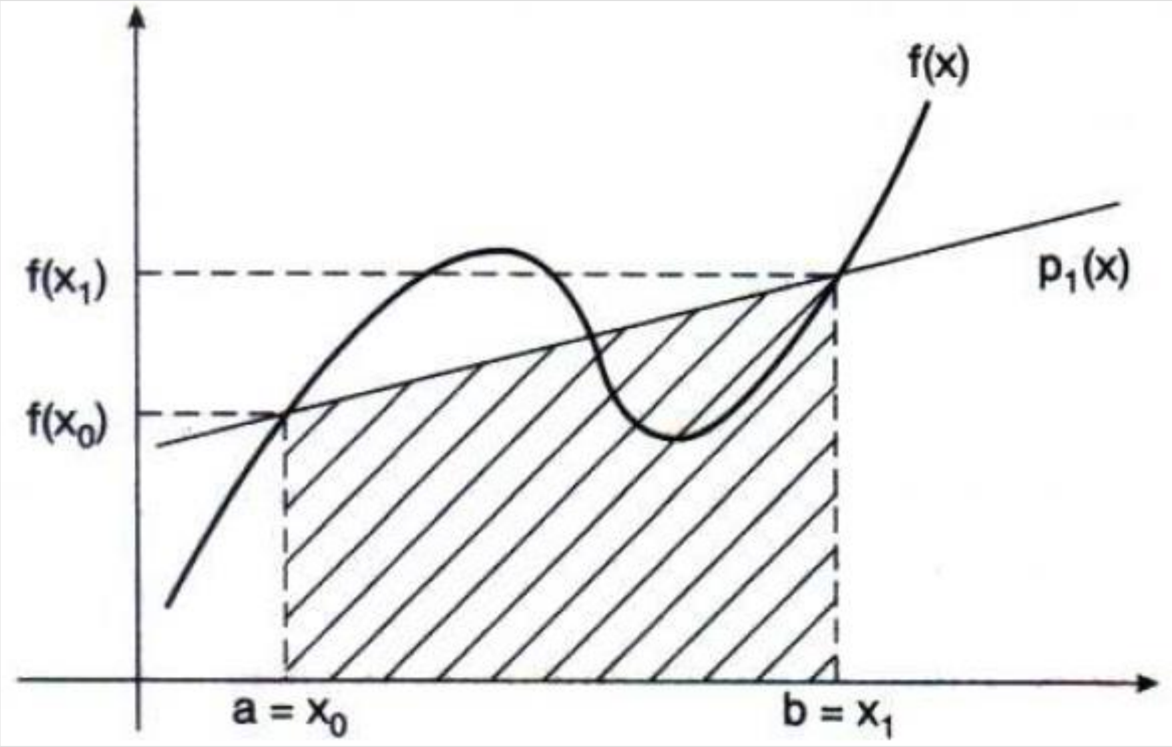
- Assim,

$$I_T = \frac{h}{2}\left[f(x_0) + f(x_1)\right]$$

- Que é a área do trapézio de altura $h = x_1 - x_0$ e bases $f(x_0)$ e $f(x_1)$

REGRA DOS TRAPÉZIOS

- Graficamente, temos



REGRA DOS TRAPÉZIOS

- Como vemos visualmente essa regra gera muitos erros se aplicada somente uma vez no intervalo todo

- Porém, esse erro diminui a medida que o intervalo h também reduz.

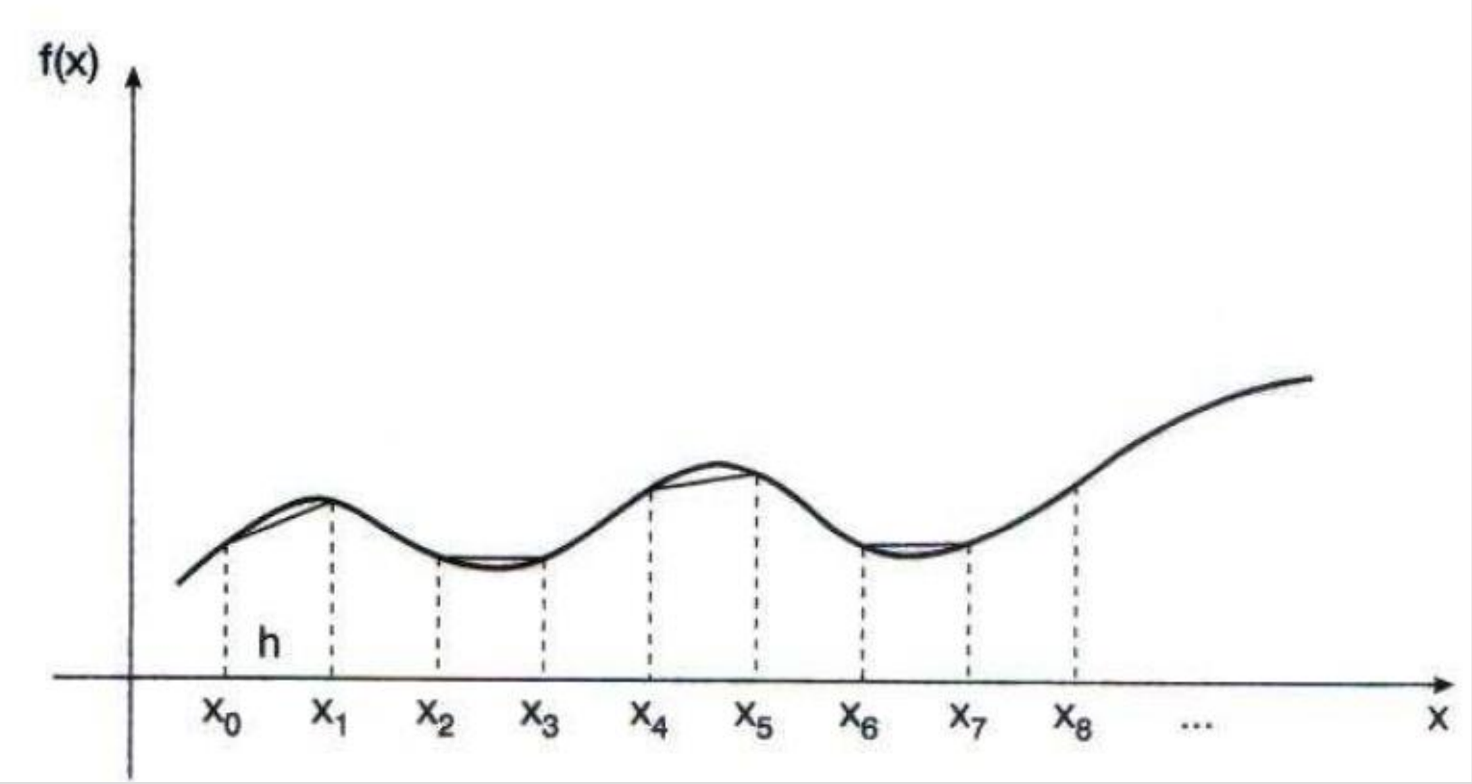
- Sendo assim, podemos subdividir o intervalo e somar suas integrais.

- Assim,

$$\int_{x_0}^{x_m} f(x)dx = \frac{h}{2}\,[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \ldots + 2f(x_{m-1}) + f(x_m)]$$

REGRA DOS TRAPÉZIOS

- Graficamente



REGRA 1/3 DE SIMPSON

- Novamente usa-se a fórmula de Lagrange, mas para interpolar um polinômio de grau 2. Neste caso precisamos de 3 pontos

$$p_2(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(-h)(-2h)} f(x_0) + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(h)(-h)} f(x_1) + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(2h)(h)} f(x_2).$$

Resolvendo as integrais obtemos a regra 1/3 de Simpson:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx \simeq \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] = I_S$$

- Porém, da mesma forma que na regra dos trapézios, deve-se subdividir o intervalo original para minimizar os erros

REGRA 1/3 DE SIMPSON

- Novamente usa-se a fórmula de Lagrange, mas para interpolar um polinômio de grau 2. Neste caso precisamos de 3 pontos

$$p_2(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(-h)(-2h)} f(x_0) + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(h)(-h)} f(x_1) + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(2h)(h)} f(x_2).$$

Resolvendo as integrais obtemos a regra 1/3 de Simpson:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx \simeq \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] = I_S$$

- Porém, da mesma forma que na regra dos trapézios, deve-se subdividir o intervalo original para minimizar os erros

REGRA 1/3 DE SIMPSON

- Porém, da mesma forma que na regra dos trapézios, deve-se subdividir o intervalo original para minimizar os erros

Assim,

$$I_{SR} = \frac{h}{3}\{[f(x_0) + f(x_m)] + 4[f(x_1) + f(x_3) + \ldots + f(x_{m-1})] + 2[f(x_2) +$$

$$+ f(x_4) + \ldots + f(x_{m-2})]\}$$

EXERCÍCIO

- Escolha 3 funções ao acaso, sendo uma polinomial, outra exponencial e outra senoidal.
- Calcule a integral numérica dessas funções em 5 pontos $(x_1 - x_0 \approx 0)$ igualmente espaçados;
- Utilize esses 5 pontos para fazer um ajuste de curva e encontrar a integral aproximada para qualquer ponto por meio da curva encontrada.
- Mostre a resposta visualmente por meio de um gráfico.