AULA 15 – AJUSTE DE CURVA (PARTE 2)

Prof. Gustavo Resque
gustavoresqueufpa@gmail.com

CASO NÃO LINEAR

- Em alguns casos podemos escolher funções não lineares nos parâmetros
  - Por exemplo, para ajustar uma curva exponencial
- Então, para aplicar o método dos quadrados mínimos estudado na aula passada é necessário linearizar o problema
- Por exemplo

$$y \approx \alpha_1 e^{-\alpha_2 x} \Rightarrow z = \ln(y) \approx \ln(\alpha_1) - \alpha_2 x.$$

Se $a_1 = \ln(\alpha_1)$ e $a_2 = -\alpha_2 \Rightarrow \ln(y) \approx a_1 - a_2 x = \phi(x)$ que é um problema linear nos parâmetros a_1 e a_2.

CASO NÃO LINEAR

- Observações
  - Esse ajuste torna a solução não necessariamente ótima
  - Portanto, não se pode afirmar que sempre o ajuste da curva encontra a solução ótima para o problema, o que ocorre para a solução linear

CASO NÃO LINEAR

- Exemplo 6

Suponhamos que num laboratório obtivemos experimentalmente os seguintes valores para f(x) sobre os pontos x_i, i = 1, 2, …, 8:

x	–1.0	–0.7	–0.4	–0.1	0.2	0.5	0.8	1.0
f(x)	36.547	17.264	8.155	3.852	1.820	0.860	0.406	0.246

Fazendo o diagrama de dispersão dos dados acima, obtemos

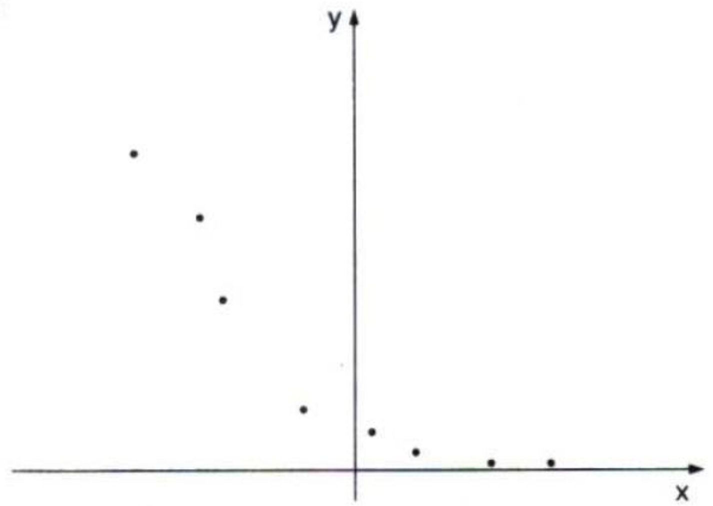


Figura 6.3

- Que nos sugere um ajuste:

$$y \approx \varphi(x) = \alpha_1 e^{-\alpha_2 x}$$

CASO NÃO LINEAR

- Exemplo 6
  - A linearização a ser feita é
$$z = \ln(y) \approx \ln(\alpha_1 e^{-\alpha_2 x}) = \ln(\alpha_1) - \alpha_2 x = \phi(x)$$
  - Assim, ao invés de ajustar y, ajustaremos $z = \ln(y)$ encontrando
$$\phi(x) = a_1 + a_2 x$$
  - Onde
    - $a_1 = \ln(\alpha_1)$ e
    - $a_2 = -\alpha_2$
  - Assim
    - $g_1(x) = 1$ e
    - $g_2(x) = x$

CASO NÃO LINEAR

- Exemplo 6
  - Temos pois

x	–1	–0.7	–0.4	–0.1	0.2	0.5	0.8	1
z = ln(y)	3.599	2.849	2.099	1.349	0.599	–0.151	–0.901	–1.402

$$\begin{cases} \left[\sum_{k=1}^{8} g_1(x_k)g_1(x_k)\right]a_1 + \left[\sum_{k=1}^{8} g_2(x_k)g_1(x_k)\right]a_2 = \sum_{k=1}^{8} z(x_k)g_1(x_k) \\ \left[\sum_{k=1}^{8} g_1(x_k)g_2(x_k)\right]a_1 + \left[\sum_{k=1}^{8} g_2(x_k)g_2(x_k)\right]a_2 = \sum_{k=1}^{8} z(x_k)g_2(x_k) \end{cases}$$

$$g_1(x) = 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{8} g_1(x_k)g_1(x_k) = \sum_{k=1}^{8} 1 = a_{11} = 8$$

$$g_2(x) = x \Rightarrow \sum_{k=1}^{8} g_2(x_k)g_2(x_k) = \sum_{k=1}^{8} x_k^2 = a_{22} = 3.59$$

$$\sum_{k=1}^{8} g_1(x_k)g_2(x_k) = \sum_{k=1}^{8} 1x_k = a_{12} = a_{21} = 0.3$$

$$b_1 = \sum_{k=1}^{8} z(x_k)g_1(x_k) = \sum_{k=1}^{8} z(x_k) = 8.041$$

$$b_2 = \sum_{k=1}^{8} z(x_k)g_2(x_k) = \sum_{k=1}^{8} z(x_k)\, x_k = -8.646$$

CASO NÃO LINEAR

- Exemplo 6
  - Temos pois

x	–1	–0.7	–0.4	–0.1	0.2	0.5	0.8	1
z = ln(y)	3.599	2.849	2.099	1.349	0.599	–0.151	–0.901	–1.402

donde

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 0.3 \\ 0.3 & 3.59 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 0.041 \\ -8.646 \end{bmatrix}$$

CASO NÃO LINEAR

- Exemplo 6
  - Temos pois

x	–1	–0.7	–0.4	–0.1	0.2	0.5	0.8	1
z = ln(y)	3.599	2.849	2.099	1.349	0.599	–0.151	–0.901	–1.402

donde

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 0.3 \\ 0.3 & 3.59 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 0.041 \\ -8.646 \end{bmatrix}$$

e o sistema fica

$$\begin{cases} 8.0a_1 + 0.3a_2 = 8.041 \\ 0.3a_1 + 3.59a_2 = -8.646 \end{cases} \Rightarrow a_1 = 1.099 \text{ e } a_2 = -2.5$$

Agora, $\alpha_1 = e^{a_1} \Rightarrow \alpha_1 = e^{1.099} = 3.001$

$\alpha_2 = -a_2 \Rightarrow \alpha_2 = 2.5.$

Assim, a função $\varphi(x) = \alpha_1 e^{-\alpha_2 x} = 3.001e^{-2.5x}$.

CASO NÃO LINEAR

- Assim como no exemplo anterior onde ajustamos uma exponencial com expoente negativo, podemos linearizar algumas situações comuns

1) Uma hipérbole: $y \approx \dfrac{1}{\alpha_1 + \alpha_2 x} = \varphi(x)$

$$\left(z = \frac{1}{y} \approx \alpha_1 + \alpha_2 x\right).$$

2) Uma curva exponencial: $y \approx \alpha_1 \alpha_2^x = \varphi(x)$

$$\left(\text{se } y > 0,\ z = \ln(y) \approx \underbrace{\ln(\alpha_1)}_{a_1} + x\underbrace{\ln(\alpha_2)}_{a_2} = a_1 + a_2 x = \phi(x)\right).$$

CASO NÃO LINEAR

3) Uma curva geométrica: $y \approx \alpha_1 x^{\alpha_2} = \varphi(x)$

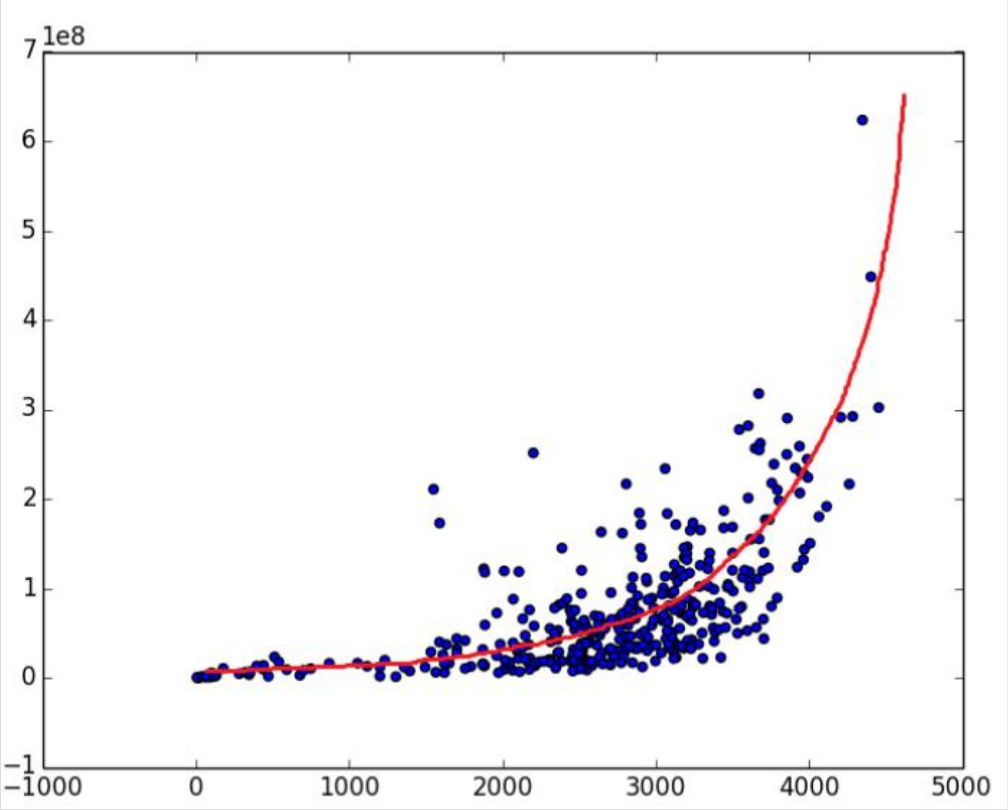
$$(\text{se } x > 0 \text{ e } y > 0,\ z = \ln(y) \approx \underbrace{\ln(\alpha_1)}_{a_1} + \underbrace{\alpha_2}_{a_2}\underbrace{\ln(x)}_{t} = a_1 + a_2 \ln(x)$$

$\Rightarrow z = \ln(y) \approx a_1 + a_2 t = \phi(t))$. (Aqui minimizamos a soma dos quadrados dos desvios nos logaritmos de y, para os logaritmos de x.)

4) Uma curva trigonométrica: $y \approx \alpha_1 + \alpha_2 \cos(wx) = \varphi(x)$. ($t = \cos(wx) \Rightarrow \varphi(t) = \alpha_1 + \alpha_2 t$ e, neste caso, estamos minimizando a soma dos quadrados dos desvios em y.)

CASO NÃO LINEAR

- Para fazer o teste de alinhamento da solução é possível plotar um gráfico para analisar o ajuste visualmente
- Exemplo



EXERCÍCIO

- Gerar 3 conjunto de dados (X e Y) com modelos diferentes (contendo pelo menos 1 polinomial e 1 não polinomial)

- Ajustar uma função que intuitivamente melhor descreve cada conjunto de dados gerados

  - Utilize um ajuste linear e um ajuste não linear para cada um dos 3 conjuntos

- Plote o gráfico com os dados e a curva ajustada