Helsingin yliopisto
Matemaattis-luonnontieteellinen tiedekunta
Matematiikan ja tilastotieteen osasto

Kandidaatintutkielma

Ketjumurtoluvut ja irrationaalisin luku

Eetu Satukangas

Matemaattisten tieteiden kandiohjelma

Ohjaaja: Eero Saksman 26. maaliskuuta 2021

Sisältö

1 Johdanto **1**

2 Ketjumurtolukujen teoria **2**

2.1 Esitietoja ja Dirichlet'n sekä Liouvillen lauseet 2
2.2 Parhaat approksimaatiot reaaliluvulle 6
2.3 Parhaiden approksimaatioiden yhteys ketjumurtolukuihin 10
2.4 Ketjumurtoluvut irrationaaliluvuille 17

3 Irrationaalisin luku **21**

4 Todistus Neperin luvun ketjumurtoluvulle **24**

4.1 Todistuksen johdanto 24
4.2 Integrointia 26
4.3 Ketjumurtoluvun löytäminen 27
4.4 Luvun e ketjumurtoluvun johtaminen 31

5 Tiivistelmä **35**

1 Johdanto

Tutkielmassa käsitellään lukuteoriaan liittyvää aihetta ketjumurtoluvut. Ketjumurtoluku antaa esitystavan mille tahansa reaaliluvulle, jonka avulla voidaan löytää annetulle reaaliluvulle hyviä rationaaliapproksimaatioita. Luvussa 2 esitetään ketjumurtolukujen perusteoria, josta tutkielman kannalta olennaisimmat tulokset ovat ketjumurtoluvun yksikäsitteisyys ja ketjumurtoluvun antamien rationaalilukujen approksimaatiotarkkuus ketjumurtolukua vastaavalle reaaliluvulle. Näitä tuloksia käyttäen luvussa 3 määritetään reaaliluvun irrationaalisuus ja löydetään ”irrationaalisin luku”, sekä tutkitaan mitä ominaisuuksia irrationaalisimmalla luvulla on. Tutkielman päätteeksi luvussa 4 todistetaan Neperin (Napierin) luvun e ketjumurtolukuesitys. Luvun e ketjumurtoluvun alku löydetään laskemalla ja ketjumurtoluvun alusta nähdään toistuva kaava koko ketjumurtoluvulle. Tämän kaavan todistus ei kuitenkaan ole aivan yhtä suoraviivainen kuin kaavan löytämiseen tehty suora lasku.

2 Ketjumurtolukujen teoria

Tässä luvussa käydään läpi ketjumurtolukujen määritelmä, tavoitteet ja tulokset. Luku perustuu William J. LeVequen kirjan *Fundamentals of Number Theory* [2] lukuihin 8 ja 9. Ketjumurtoluvut antavat hyviä approksimaatioita jollekin annetulle reaaliluvulle x. Approksimaatiot ovat muotoa $\dfrac{p}{q}$, missä p, q ovat kokonaislukuja, ja nimittäjä q rajataan jollain kokonaisluvulla k siten että $0 < q \leq k$. Myöhemmin nähdään että ketjumurtoluvut antavat täsmälleen parhaat tällaiset rationaaliapproksimaatiot reaaliluvulle x. Oletetaan että tässä tekstissä rationaalilukujen $\dfrac{p}{q}$ osoittajalla p ja nimittäjällä q ei ole lukua 1 suurempia yhteisiä tekijöitä, eli ei ole olemassa lukua $a > 1$, jolla osamäärä $\dfrac{p}{q}$ voitaisiin supistaa. Sovitaan että tässä tekstissä merkintä ”joss” ilmaisee ekvivalenssia ”jos ja vain jos”.

2.1 Esitietoja ja Dirichlet'n sekä Liouvillen lauseet

Aloitetaan määrittelemällä tarpeelliset esitiedot ja merkintätavat.

Määritelmä 2.1. Merkitään reaaliluvun α kokonaislukuosaa merkinnällä $\lfloor \alpha \rfloor$ ja desimaaliosaa $\alpha - \lfloor \alpha \rfloor$, jolle pätee $0 \leq \alpha - \lfloor \alpha \rfloor < 1$.

Reaaliluvun kokonaislukuosan ja desimaaliosan erotteleminen tulee olemaan oleellinen osa ketjumurtolukukehitelmän löytämistä. Määritellään seuraavaksi algebrallisten lukujen joukko.

Määritelmä 2.2. Reaaliluku x on **algebrallinen luku** jos se on ratkaisu yhtälölle

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0, \tag{2.3}$$

missä $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ ovat kokonaislukuja ja $a_n \neq 0$. Sanotaan että pienin n, millä $a_n \neq 0$ ja reaaliluku x on ratkaisu yhtälölle (2.3), on algebrallisen luvun x aste n.

Myöhemmin tarvitaan asteen $n = 1$ ja $n > 1$ algebrallisten lukujen erottavaa ominaisuutta seuraavan lemman mukaan.

Lemma 2.4. *Asteen $n = 1$ algebrallisten lukujen joukko on täsmälleen rationaalilukujen joukko $\mathbb{Q}$ ja asteen $n > 1$ algebralliset luvut ovat irrationaalisia.*

Todistus. Olkoon reaaliluku x asteen $n = 1$ algebrallinen luku. Tällöin on olemassa $a_1, a_0 \in \mathbb{Z}$, $a_1 \neq 0$ siten että

$$a_1 x + a_0 = 0 \quad \text{joss} \quad x = -\frac{a_0}{a_1}, \text{ eli } x \text{ on rationaaliluku.}$$

Oletetaan seuraavaksi että $Q = \frac{p}{q}$, $q \neq 0$, on rationaaliluku. Tällöin se on yhtälön

$$q \cdot Q - p = 0$$

ratkaisu, eli Q on asteen $n = 1$ algebrallinen luku.

Olkoon reaaliluku y asteen $n > 1$ algebrallinen luku. Tehdään vastaoletus että luku y olisi rationaalinen. Tällöin olisi olemassa ensimmäisen asteen yhtälö, jonka ratkaisuna olisi luku y. Näin ollen luku y olisi asteen $n = 1$ algebrallinen luku. Päädyttiin ristiriitaan, joten y on irrationaalinen. $\square$

Käsitellään seuraavaksi ensimmäiset tulokset reaalilukujen rationaaliapproksimointiin. Ensimmäinen lause on Dirichlet'n vuonna 1842 löytämä ja toinen lause on Liouvillen vuonna 1844 löytämä. Dirichlet'n löytämän lauseen todistamiseen tarvitaan Dirichlet'n periaatetta, joka tunnetaan myös kyyhkyslakkaperiaatteena tai laatikkoperiaatteena.

Määritelmä 2.5. (kyyhkyslakkaperiaate) Jos joukko A jossa on n alkiota ositetaan m osajoukkoon $A_1, A_2, \ldots, A_m$, missä $1 \leq m < n$, niin jossain osajoukossa on enemmän kuin yksi joukon A alkioista.

Todistus. Osoitetaan väite ristiriidalla. Tehdään vastaoletus että on olemassa pienin joukon A ositus $A_1, A_2, \ldots, A_m$, missä jokaisessa osajoukossa on täsmälleen yksi joukon A alkio $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Koska osituksen yhdiste on joukko A, niin osituksen joukoille $A_1, A_2, \ldots, A_m$ pätee

$$A_i = \{a_i\} \quad \text{kaikilla } 1 \leq i \leq n,$$

eli $n = m$, joten päädyttiin ristiriitaan. $\square$

Lause 2.6. *(Dirichlet) Jos ξ on reaaliluku ja t on positiivinen kokonaisluku, niin on olemassa kokonaisluvut x ja y siten että*

$$|y\xi - x| \leq \frac{1}{t+1}, \quad 1 \leq y \leq t.$$

Todistus. Olkoon $\xi \in \mathbb{R}$. Tällöin välillä $[0, 1]$ on $t + 1$ desimaaliosaa

$$0 \cdot \xi - \lfloor 0 \cdot \xi \rfloor, \quad 1 \cdot \xi - \lfloor 1 \cdot \xi \rfloor, \ldots, t\xi - \lfloor t\xi \rfloor.$$

Tehdään näistä luvuista kasvava lukujono $(\xi_k)_{k=1}^t$ ja sijoitetaan luvut välille $[0, 1]$. Tällöin on $t + 1$ erotusta

$$\xi_1 - \xi_0, \quad \xi_2 - \xi_1, \ldots, \xi_t - \xi_{t-1}, \quad 1 - \xi_t,$$

jotka vastaavat välin $[0, 1]$ osittavien välien pituuksia. Tällöin erotukset ovat epänegatiivisia ja niiden summalle pätee

$$(\xi_1 - 0) + (\xi_2 - \xi_1) + \cdots + (1 - \xi_t) = 1 = \frac{t+1}{t+1}.$$

Kyyhkyslakkaperiaatteen nojalla ainakin yksi näistä erotuksista ei ylitä lukua $\frac{1}{t+1}$, joten voidaan valita tällainen erotus joka on muotoa $g_1\xi - g_2\xi - N$, missä g_1, g_2, N ovat kokonaislukuja, siten että $y = |g_1 - g_2|$ ja $x = \pm N$. Tällöin

$$|y\xi - x| = ||g_1 - g_2|\xi \pm N| \leq \frac{1}{t+1} \quad \square$$

Korollaari 2.7. *Jos ξ on irrationaaliluku, niin epäyhtälöllä*

$$|x - \xi y| < \frac{1}{y} \tag{2.8}$$

on äärettömän monta ratkaisua.

Todistus. Dirichlet'n lauseen 2.6 nojalla jos ξ on irrationaaliluku, niin epäyhtälöillä

$$0 < |x - \xi y| < \frac{1}{t}, \quad 1 \leq y \leq t$$

on ratkaisu jokaiselle positiiviselle kokonaisluvulle t. Tämä nähdään siitä että luvun ξ irrationaalisuuden nojalla ei ole olemassa kokonaislukuja x, y, jolla $\xi = \frac{x}{y}$, joten luku t voidaan valita mielivaltaisesti. Epäyhtälöistä saadaan

$$0 < |x - \xi y| < \frac{1}{t} \leq \frac{1}{y},$$

joten jokainen ratkaisu on myös ratkaisu väitteen epäyhtälölle (2.8).

Valitaan ensiksi $t_0 = 1$, jolloin $y = 1$. Tällöin on ratkaisupari x_1, y_1 epäyhtälölle

$$0 < |x_1 - \xi y_1| < \frac{1}{t_0} = \frac{1}{y_1} = 1.$$

Voidaan luvun ξ irrationaalisuuden nojalla valita $t_1 > 1$, jolla

$$|x_1 - \xi y_1| = |x_1 - \xi| > \frac{1}{t_1},$$

ja saadaan ratkaisupari x_2, y_2 epäyhtälölle

$$0 < |x_2 - \xi y_2| < \frac{1}{t_1} \leq \frac{1}{y_2}.$$

Koska

$$|x_2 - \xi y_2| < \frac{1}{t_1} < |x_1 - \xi y_1|,$$

niin ratkaisuparit x_1, y_1 ja x_2, y_2 eivät ole samoja. Valitaan $t_2 > t_1$ siten että

$$|x_2 - \xi y_2| > \frac{1}{t_2},$$

joten löydetään edellisistä ratkaisupareista poikkeava ratkaisupari x_3, y_3. Koska ξ on irrationaalinen, niin tätä rekursiota jatkamalla voidaan aina löytää t_n, jolla saadaan

$$|x_n - \xi y_n| > \frac{1}{t_n} > 0,$$

jonka avulla voidaan löytää uusi edellisistä ratkaisuista poikkeava ratkaisupari x_{n+1}, y_{n+1} epäyhtälölle (2.8), joka osoittaa väitteen. $\square$

Lause 2.9. *(Liouville) Jos α on algebrallinen luku, jonka aste on $n > 1$, niin voidaan löytää sopiva vakio $c = c(\alpha) > 0$, jolla epäyhtälö*

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{c}{q^n} \tag{2.10}$$

pätee kaikille kokonaislukupareille p, q, missä $q > 0$.

Todistus. Tehdään alkuun huomio että jos väite pätee jollekin c, niin väite pätee myös jokaisella pienemmällä luvulla c', joten voidaan olettaa $c < c_0$, missä $c_0 > 0$ on jokin kiinnitetty reaaliluku. Tällöin epäyhtälö (2.10) pätee kaikilla $\frac{p}{q}$ joilla

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > c_0,$$

joten voidaan olettaa että

$$0 < \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \leq c_0.$$

Täten luku $\frac{p}{q}$ on rajoitettu. Olkoon $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ sievennetty polynomi, eli a_0 ja a_n poikkeavat nollasta. Oletetaan että polynomin $f(x)$ kokonaislukukertoimilla $a_n, \ldots, a_0$ ei ole yhteisiä tekijöitä, ja että pokynomin juurena on luku α. Näin ollen jos valitaan c_0 siten että $f(x) = 0$ vain irrationaalisilla luvuilla välillä $[\alpha - c_0, \alpha + c_0]$, niin $f\left(\frac{p}{q}\right) \neq 0$ kaikilla $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ välillä $[\alpha - c_0, \alpha + c_0]$, sillä luku α oletettiin olevan asteen $n > 1$ algebrallinen luku. Tällöin

$$\left|q^n f\left(\frac{p}{q}\right)\right| = |a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \cdots + a_0 q^n| \geq 1,$$

sillä $f\left(\frac{p}{q}\right) \neq 0$ ja kaikki summan termit ovat kokonaislukuja. Väliarvolauseen nojalla

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = f\left(\frac{p}{q}\right) - f(\alpha) = \left(\frac{p}{q} - \alpha\right) f'(\xi),$$

missä ξ on lukujen $\frac{p}{q}$ ja α välillä, joten ξ on rajoitettu. Tällöin $f'(\xi)$ on ylhäältä rajoitettu jollain luvulla c_1, joka voidaan valita siten että $c_1 > 1$. Saadaan

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| = \frac{\left|f\left(\frac{p}{q}\right)\right|}{|f'(\xi)|} = \frac{\left|q^n f\left(\frac{p}{q}\right)\right|}{q^n |f'(\xi)|} > \frac{1}{c_1 q^n},$$

joten voidaan valita $c = \frac{1}{c_1}$, jolla

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{c_1 q^n} = \frac{c}{q^n}. \quad \square$$

Määritetään seuraavaksi merkintätapa, jolla voidaan ilmoittaa minkä suuruisia tutkittavien rationaalilukujen $\dfrac{p}{q}$ nimittäjät q ovat.

Määritelmä 2.11. Merkitään asteen n Fareyn lukujonoa $\mathcal{F}_n$. Fareyn lukujono sisältää kaikki rationaaliluvut $\dfrac{p}{q}$, missä p, q ovat kokonaislukuja ja $0 < q \leq n$. Tällöin Fareyn lukujonot ovat muotoa:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{F}_1: \quad \ldots, \frac{-1}{1}, \frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \ldots \\
&\mathcal{F}_2: \quad \ldots, \frac{-1}{2}, \frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \ldots \\
&\mathcal{F}_3: \quad \ldots, \frac{-1}{3}, \frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1}, \frac{4}{3}, \ldots \\
&\mathcal{F}_4: \quad \ldots, \frac{-1}{4}, \frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1}, \frac{4}{3}, \ldots \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Sanotaan että Fareyn lukujonon $\mathcal{F}_n$ alkiot ovat vierekkäisiä jos ne ovat peräkkäisiä alkioita lukujonossa.

2.2 Parhaat approksimaatiot reaaliluvulle

Tutkitaan seuraavaksi ketjumurtolukuja määrittävää ominaisuutta, eli parhaita rationaaliapproksimaatioita reaaliluvuille.

Määritelmä 2.12. Sanotaan että $\dfrac{p}{q}$ on paras approksimaatio reaaliluvulle x jos

$$|qx - p| < |q'x - p'|$$

kaikilla p', q', joilla $0 < q' \leq q$ ja $\dfrac{p'}{q'} \neq \dfrac{p}{q}$. Tällöin

$$\left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{q'}{q}\left|x - \frac{p'}{q'}\right| \leq \left|x - \frac{p'}{q'}\right|,$$

kaikilla p', q', joten $\dfrac{p}{q}$ on lukua x lähinnä oleva alkio Fareyn lukujonossa $\mathcal{F}_q$.

Muotoillaan seuraavaksi Dirichlet'n lause 2.6 positiiviselle reaaliluvulle τ.

Lause 2.13. *Olkoon $x \in \mathbb{R}$ ja $\tau \in \mathbb{R}^+$. Tällöin on olemassa kokonaisluvut p, q, joilla*

$$1 \leq q \leq \lfloor \tau \rfloor \leq \tau \quad \text{ja} \quad |qx - p| \leq \frac{1}{\lfloor \tau \rfloor + 1} < \frac{1}{\tau}. \tag{2.14}$$

Voidaan nyt määritellä lukujono parhaille rationaaliapproksimaatioille $\dfrac{P_k}{Q_k}$ ja sen ominaisuuksille seuraavassa lauseessa.

Lemma 2.15. *Reaaliluvulla x on jono $\frac{P_0}{Q_0}, \frac{P_1}{Q_1}, \ldots,$ parhaita rationaaliapproksimaatioita, joille pätee seuraavat*

$$\begin{aligned}
&1 = Q_0 \leq Q_1 < Q_2 < \ldots \\
&|Q_{k+1}x - P_{k+1}| < |Q_k x - P_k|, \quad k \geq 0, \\
&|qx - p| \geq |Q_k x - P_k|, \text{ kaikilla } 0 < q < Q_{k+1} \text{ ja } p, \text{ kun } k \geq 1 \\
&Q_{k+1} \leq \frac{1}{|Q_k x - P_k|}, \quad k \geq 0
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Todistus. Riittää löytää jono rationaaliapproksimaatioita, jotka toteuttavat lemman kaavat. Huomataan aluksi että jos etsitääm parasta approksimaatiota $\frac{p}{q}$ luvulle x Fareyn jonosta $\mathcal{F}_q$, niin etsinnän alussa voidaan luvun x kokonaislukuosa $\lambda_0 = \lfloor x \rfloor$ unohtaa ja tutkia desimaaliosan $x' = x - \lambda_0$ rationaaliapproksimaatioita.

Valitaan ensimmäiseksi mahdolliseksi parhaaksi approksimaatioksi $\frac{P_0}{Q_0}$, $P_0 = \lambda_0$, $Q_0 = 1$. Jos $Q_0 x - P_0 = 0$, niin $x = \frac{P_0}{Q_0}$ jolloin jono päättyy. Jos näin ei ole, niin valitaan

$$\tau = \frac{1}{|Q_0 x - P_0|}$$

ja lauseen 2.13 nojalla on pienin q, jolla

$$1 \leq q \leq \frac{1}{|Q_0 x - P_0|}, \text{ siten että } |qx - p| < |Q_0 x - P_0|, \text{ jollain luvulla } p.$$

Merkitään tätä paria p, q parina P_1, Q_1. Jos $\frac{P_0}{Q_0}$ ei ole paras approksimaatio luvulle x, niin $Q_1 = Q_0 = 1$, mutta tästä eteenpäin halutaan että Q_k kasvaa. Äskeinen havainto voidaan nähdä esimerkiksi sillä että luvun $2,9$ kokonaislukuosa on 2, mikä valitaan P_0 arvoksi, mutta luku 3 antaa tarkemman approksimaation.

Jälleen jos $Q_1 x - P_1 = 0$, niin jono päättyy, muulloin lauseen 2.13 nojalla on olemassa pienin $q > Q_1$, siten että

$$|qx - p| < |Q_1 x - P_1| \text{ jollain luvulla } p \text{ ja } q \leq \frac{1}{|Q_1 x - P_1|}.$$

Merkitään tätä uutta paria p, q parina P_2, Q_2, ja tätä rekursiota voidaan jatkaa kunnes $Q_k x - P_k = 0$ jollain $k \geq 0$. Rationaaliapproksimaation $\frac{P_k}{Q_k}$ paremmuus voidaan perustella sillä, että valitaan aina pienin $Q_{k+1} > Q_k$, jolla pätee (2.16), joten jos valitaan $q < Q_{k+1}$, niin ei päädytä parempaan rationaaliapproksimaatioon. □

Tarvitaan vielä seuraava tulos, jotta voidaan löytää kaikki parhaat rationaaliapproksimaatiot P_k, Q_k.

Lemma 2.17. *Parhaille luvun x rationaaliapproksimaatioille* $\dfrac{P_k}{Q_k}, \dfrac{P_{k+1}}{Q_{k+1}}$ *pätee*

$$Q_{k+1}P_k - Q_kP_{k+1} = \pm 1, \quad k \geq 0. \tag{2.18}$$

Merkitään $\alpha_k = Q_kx - P_k,\ k \geq 0.$

Todistus. Huomataan että

$$\begin{aligned}&Q_{k+1}P_k - Q_kP_{k+1} = Q_{k+1}P_k - Q_kP_{k+1} + Q_kQ_{k+1}x - Q_kQ_{k+1}x\\&= Q_k(Q_{k+1}x - P_{k+1}) - Q_{k+1}(Q_kx - P_k).\end{aligned}$$

Täten lemman 2.15 nojalla

$$\begin{aligned}&|Q_{k+1}P_k - Q_kP_{k+1}| \leq Q_k|\alpha_{k+1}| + Q_{k+1}|\alpha_k| < 2Q_{k+1}|\alpha_k|\\&= 2Q_{k+1}|Q_kx - P_k| \leq 2\frac{1}{|Q_kx - P_k|}|Q_kx - P_k| = 2\end{aligned}$$

Koska määritelmän 2.12 ja epäyhtälön (2.16) nojalla $\dfrac{P_k}{Q_k} \neq \dfrac{P_{k+1}}{Q_{k+1}}$, niin $Q_{k+1}P_k - Q_kP_{k+1} \neq 0$, ja koska $|Q_{k+1}P_k - Q_kP_{k+1}|$ on kokonaisluku joka on aidosti pienempi kuin 2, niin $|Q_{k+1}P_k - Q_kP_{k+1}| = 1$. □

Tutkitaan seuraavaksi miten äskeisen lemman yhtälön (2.18) oikea puolen etumerkki määräytyy.

Lemma 2.19. *Parhaille luvun x rationaaliapproksimaatioille* $\dfrac{P_k}{Q_k}, \dfrac{P_{k+1}}{Q_{k+1}}$ *pätee*

$$Q_{k+1}P_k - Q_kP_{k+1} = (-1)^{k+1}, \quad k \geq 0 \tag{2.20}$$

Todistus. Aloitetaan tutkimalla luvun α_k etumerkkiä. Huomataan että jos α_k ja α_{k+1} ovat samanmerkkiset, niin

$$\begin{aligned}|\alpha_k - \alpha_{k+1}| &= |(-1)| \cdot |\alpha_{k+1} - \alpha_k| = |(Q_{k+1} - Q_k)x - (P_{k+1} - P_k)|\\&< |Q_{k+1}x - P_{k+1}| < |Q_kx - P_k| = |\alpha_k|.\end{aligned}$$

Kuitenkin pätee että $0 < Q_{k+1} - Q_k < Q_{k+1}$, joten ollaan ristiriidassa sen kanssa että P_k, Q_k olisi paras rationaaliapproksimaatio. Näin ollen α_k ja α_{k+1} eivät voi olla samanmerkkisiä. Koska $\alpha_0 = 1 \cdot x - \lambda_0 > 0$, niin $\alpha_{2m} > 0$ ja $\alpha_{2m+1} < 0$ kaikilla kokonaisluvuilla $m \geq 0$. Tällöin koska

$$\begin{aligned}&Q_{k+1}P_k - Q_kP_{k+1} = Q_k(\alpha_{k+1}) - Q_{k+1}(\alpha_k),\ \text{niin}\\&\text{jos } k = 2m, \text{ niin } Q_{2m} \cdot \alpha_{2m+1} - Q_{2m+1} \cdot \alpha_{2m} < 0 \text{ ja}\\&\text{jos } k = 2m+1, \text{ niin } Q_{2m+1} \cdot \alpha_{2m+2} - Q_{2m+2} \cdot \alpha_{2m+1} > 0,\end{aligned}$$

sillä $Q_k > 0$ kaikilla $k \geq 0$. Näin ollen tapauksessa $k = 2m$ summataan kaksi negatiivista lukua ja tapauksessa $k = 2m+1$ summataan kaksi positiivista lukua. □

Seuraavaksi tarvitaan lukuteorian yleistä tulosta liittyen kahden kokonaisluvun suurimpaan yhteiseen tekijään. Seuraava määritelmä ja korollaari ovat erikoistapauksia yleistetyistä lauseista liittyen suurimpaan yhteiseen tekijään, ja niiden todistuksia löytää esimerkiksi LeVequen kirjan [2] toisesta luvusta.

Määritelmä 2.21. Se että kokonaisluvuilla a ja b ei ole lukua 1 suurempia yhteisiä tekijöitä on yhtäpitävää sen kanssa että lukujen a ja b suurin yhteinen tekijä on 1. Tällöin on olemassa kokonaisluvut x_0, y_0 siten että

$$ax_0 + by_0 = 1$$

Tämä määritelmä antaa olennaisen tavan tarkastella tekstissä esiintyvien rationaalilukujen osoittajan ja nimittäjän yhteyttä, sillä tekstin alussa oletettiin että kaikki käsiteltävien rationaalilukujen osoittaja ja nimittäjä täyttävät määritelmän ehdon. Seuraava tulos seuraa suoraan äskeisestä määritelmästä.

Korollaari 2.22. *Yhtälölle $ax + by = 1$ on äärettömän monta ratkaisua x, y, jos lukujen a, b suurin yhteinen tekijä on 1. Tällöin on olemassa jokin ratkaisu x_0, y_0, jonka avulla saadaan ratkaisut*

$$\begin{cases} x &= x_0 + b \cdot t, \\ y &= y_0 - a \cdot t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{Z}$$

Voidaan nyt määritellä rekursio, jolla löydetään luvut $\frac{P_k}{Q_k}$ kaikille $k \geq 0$.

Lemma 2.23. *Luvun x rationaaliapproksimaatiot $\frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}}$ saadaan rekursiolla*

$$\begin{cases} P_{k+1} &= \lambda_{k+1} P_k + P_{k-1} \\ Q_{k+1} &= \lambda_{k+1} Q_k + Q_{k-1} \end{cases}, \quad \textit{kaikilla } k \geq -1, \tag{2.24}$$

missä $\lambda_{k+1} \geq 1$ on jokin kokonaisluku, joka saadaan kaavalla $\lambda_{k+1} = \left\lfloor -\frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k} \right\rfloor$.

Todistus. Aloitetaan valitsemalla $P_{-2} = 0, Q_{-2} = 1, P_{-1} = 1$ ja $Q_{-1} = 0$. Saadaan

$$Q_{-1}P_{-2} - Q_{-2}P_{-1} = -1 \quad \text{ja} \quad Q_0 P_{-1} - Q_{-1} P_0 = 1,$$

joten (2.20) pätee myös indekseillä $k \geq -2$. Yhtälölle $P_k \cdot v - Q_k \cdot u = (-1)^{k+1}$ on olemassa ratkaisu $v = Q_{k-1}, u = P_{k-1}$ ja korollaarin 2.22 nojalla jonkin kokonaisluvun λ_{k+1} avulla saadaan yleinen ratkaisu $v = Q_{k+1}, u = P_{k+1}$ kaavan (2.24) tapaan. Nähdään että $\lambda_{k+1} \geq 1$, sillä $Q_{k+1} > Q_k$. Nyt rekursion (2.24) nojalla

$$\begin{aligned} &Q_{k+1}x - P_{k+1} = (Q_{k-1} + \lambda_{k+1} \cdot Q_k)x - P_{k-1} - \lambda_{k+1} \cdot P_k, \\ &\text{eli} \quad \alpha_{k+1} = \alpha_{k-1} + \lambda_{k+1}\alpha_k. \end{aligned}$$

Koska $\dfrac{\alpha_k}{|\alpha_k|} = (-1)^k$, niin saadaan yhtälö muotoon

$$
\begin{aligned}
(-1)\cdot(-1)^{k-1}|\alpha_{k-1}| &= (-1)\cdot(-1)^{k+1}|\alpha_{k+1}| + \lambda_{k+1}(-1)^k|\alpha_k| \\
\text{joss} \quad |\alpha_{k-1}| = |\alpha_{k+1}| + \lambda_{k+1}|\alpha_k| \quad \text{joss} \quad &\left|\frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k}\right| = \lambda_{k+1} + \left|\frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k}\right|.
\end{aligned}
$$

Koska $-1 \leq \dfrac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k} < 0$ ja $\left|\dfrac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k}\right| \geq 1$, niin äskeisestä yhtälöstä nähdään että $\lambda_{k+1} = \left\lfloor -\dfrac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k} \right\rfloor$. □

On löydetty rekursio, joka antaa luvun x parhaat rationaaliapproksimaatiot $\dfrac{P_k}{Q_k}$ lukujonojen λ_k ja α_k avulla. Näytetään vielä miten luvut λ_k löytää.

Lemma 2.25. *Lemman* 2.23 *lukujen* λ_{k+1} *sijasta voidaan tutkia lukuja* x_{k+1}*, joilla pätee* $\lambda_{k+1} = \lfloor x_{k+1} \rfloor$ *sekä*

$$
x_{k+1} = -\frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k} = \frac{1}{x_k - \lfloor x_k \rfloor} = \frac{1}{x_k - \lambda_k}, \quad k \geq 0,
$$

Todistus. Huomataan ensiksi että $\alpha_{-1} = 0 \cdot x - 1 = -1$ ja $\alpha_0 = 1 \cdot x - \lfloor x \rfloor$, joten $x_1 = \dfrac{1}{x - \lfloor x \rfloor}$ ja $x_0 = x$. Yleisemmin taas

$$
\begin{aligned}
x_{k+1} &= \frac{-\alpha_{k-1}}{Q_k x - P_k} = \frac{-\alpha_{k-1}}{(Q_{k-1}\lambda_k + Q_{k-2})x - (P_{k-1}\lambda_k + P_{k-2})} \\
&= \frac{-\alpha_{k-1}}{\lambda_k(Q_{k-1}x - P_{k-1}) + Q_{k-2}x - P_{k-2}} = \frac{-\alpha_{k-1}}{\lambda_k\alpha_{k-1} + \alpha_{k-2}} \\
&= \frac{1}{-\lambda_k - \frac{\alpha_{k-2}}{\alpha_{k-1}}} = \frac{1}{x_k - \lfloor x_k \rfloor}, \quad k \geq 1. \quad \square
\end{aligned}
$$

Merkitään indeksiä jolla rekursio $\dfrac{P_k}{Q_k}$ päättyy merkillä κ. On löydetty kaikki tarpeelliset tulokset parhaille rationaaliapproksimaatioille.

2.3 Parhaiden approksimaatioiden yhteys ketjumurtolukuihin

Yhdistetään seuraavaksi reaaliluvun parhaat rationaaliapproksimaatiot kyseisen luvun ketjumurtolukuun.

Lause 2.26. *Jos* κ *ja lukujonot* $(x_k), (\lambda_k), (P_k)$ *ja* (Q_k) *on määritelty kuten äskeisessä* *alaluvussa, niin seuraavat yhtälöt pätevät:*

$$x = \frac{P_{k-1}x_k + P_{k-2}}{Q_{k-1}x_k + Q_{k-2}}, \quad 1 \leq k < \kappa + 1 \tag{2.27}$$

$$x = \lambda_0 + \cfrac{1}{\lambda_1 + \cfrac{1}{\lambda_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{\lambda_{k-1} + \cfrac{1}{x_k}}}}}, \quad 1 \leq k < \kappa + 1 \tag{2.28}$$

$$\frac{P_k}{Q_k} = \lambda_0 + \cfrac{1}{\lambda_1 + \cfrac{1}{\lambda_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{\lambda_{k-1} + \cfrac{1}{\lambda_k}}}}}, \quad 1 \leq k < \kappa + 1 \tag{2.29}$$

Merkitään yhtälön (2.29) oikeaa puolta merkinnällä $\{\lambda_0; \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k\}$. Sanotaan että ketjumurtoluku on säännöllinen jos kaikki osoittajat ovat $+1$ ja ketjumurtoluvun **osanimittäjät** $\lambda_1, \ldots \lambda_k$ ovat positiivisia kokonaislukuja. Sanotaan että rationaaliluvut $\frac{P_0}{Q_0}, \frac{P_1}{Q_1}, \ldots,$ ovat ketjumurtoluvun **konvergentit**.

Todistus. Lukujonon x_k määritelmän nojalla

$$x_k = -\frac{Q_{k-2}x - P_{k-2}}{Q_{k-1}x - P_{k-1}} \quad \text{joss} \quad Q_{k-1}x \cdot x_k - P_{k-1}x_k = -Q_{k-2}x + P_{k-2}$$

$$\text{joss} \quad x(Q_{k-1}x_k + Q_{k-2}) = P_{k-1}x_k + P_{k-2} \quad \text{joss} \quad x = \frac{P_{k-1}x_k + P_{k-2}}{Q_{k-1}x_k + Q_{k-2}}.$$

Huomataan seuraavaksi että x_{k+1} ja λ_k määritelmien, eli lauseen 2.25, nojalla

$$x_{k+1} = \frac{1}{x_k - \lfloor x_k \rfloor} \quad \text{ja} \quad \lambda_k = \lfloor x_k \rfloor, \text{ joten saadaan rekursiivinen jono}$$

$$x = \lambda_0 + \frac{1}{x_1} = \lfloor x \rfloor + x - \lfloor x \rfloor, \quad x_1 = \lambda_1 + \frac{1}{x_2} = \lfloor x_1 \rfloor + x_1 - \lfloor x_1 \rfloor, \ldots,$$

$$x_{k-1} = \lambda_{k-1} + \frac{1}{x_k}$$

Sijoittamalla äskeisessä jonossa arvot $x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}$ jonon ensimmäiseen yhtälöön, niin saadaan

$$x = \lambda_0 + \cfrac{1}{\lambda_1 + \cfrac{1}{x_2}}, \quad x = \lambda_0 + \cfrac{1}{\lambda_1 + \cfrac{1}{\lambda_2 + \cfrac{1}{x_3}}}, \dots,$$

$$x = \lambda_0 + \cfrac{1}{\lambda_1 + \cfrac{1}{\lambda_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{\lambda_{k-1} + \cfrac{1}{x_k}}}}}.$$

Oletetaan seuraavaksi että osanimittäjät $\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}$ on kiinnitetty ja että luku x voidaan esittää muuttujan x_k funktiona $x = g(x_k)$, missä $x_k \geq 1$. Tällöin funktio $g(x_k)$ määrittyy yhtälön (2.28) avulla. Rekursion (2.24) nojalla $P_{k-1}, Q_{k-1}, P_{k-2}, Q_{k-2}$ riippuvat vain luvuista $\lambda_0, \dots, \lambda_{k-1}$, joten voidaan funktio $x = g(x_k)$ esittää myös muodossa

$$g(x_k) = \frac{P_{k-1}x_k + P_{k-2}}{Q_{k-1}x_k + Q_{k-2}}.$$

Oletetaan että x_k saa arvon $\lambda_k \geq 1$, jolloin $x = \dfrac{P_k}{Q_k}$ ja sijoittamalla tämä yhtälöön (2.28) saadaan

$$\frac{P_k}{Q_k} = \lambda_0 + \cfrac{1}{\lambda_1 + \cfrac{1}{\lambda_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{\lambda_{k-1} + \cfrac{1}{\lambda_k}}}}} \qquad \square$$

Tutkitaan vielä parhaiden rationaaliapproksimaatioiden ja ketjumurtolukujen yksikäsitteisyyttä.

Lemma 2.30. *Reaaliluvun x parhaat rationaaliapproksimaatiot ja ketjumurtoluku ovat yksikäsitteisiä, lukuunottamatta tapausta jossa ketjumurtoluku voidaan muuttaa seuraavasti*

$$x = \{a_0; a_1, \dots, a_\kappa\} = \{a_0; a_1, \dots, a_\kappa - 1, 1\}, \quad a_\kappa > 1. \tag{2.31}$$

Todistus. Osoitetaan ensin parhaiden rationaaliapproksimaatioiden yksikäsitteisyys. Oletetaan että ollaan saavutettu paras approksimaatio $\dfrac{P_{k-1}}{Q_{k-1}}$ ja että on olemassa luku $\dfrac{r}{s}$, missä $s > Q_{k-1}$ siten että

$$|sx - r| = |Q_{k-1}x - P_{k-1}|.$$

Koska $\frac{r}{s} \neq \frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}}$, niin tulee olla $sx - r = -(Q_{k-1}x - P_{k-1})$. Tällöin voidaan äskeisestä yhtälöstä ratkaista x, joten

$$x = \frac{P_{k-1} + r}{Q_{k-1} + s}.$$

Tällöin x on ensimmäinen rationaaliluku, joka on lukujen $\frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}}$ ja $\frac{r}{s}$ välissä Fareyn lukujonoissa $\mathcal{F}_{(s+Q_{k-1})}, \mathcal{F}_{(s+Q_{k-1}+1)}, \ldots$. Tämä nähdään siitä että jos merkitään

$$f\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{P_{k-1} + \frac{u}{v}r}{Q_{k-1} + \frac{u}{v}s} = \frac{vP_{k-1} + ur}{vQ_{k-1} + us},$$

missä kokonaisluvuilla u, v ei ole yhteisiä tekijöitä ja $u > 0, v > 0$, niin ensinnäkin funktion arvot $f\left(\frac{u}{v}\right)$ ovat selvästi lukujen $\frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}}$ ja $\frac{r}{s}$ välissä, sillä

$$\lim_{\frac{u}{v} \to \infty} f\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{r}{s}.$$

Toisekseen luku $f\left(\frac{u}{v}\right)$ jolla on pienin nimittäjä ja osoittaja on

$$f\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{P_{k-1} + r}{Q_{k-1} + s} = x.$$

Jos verrataan äskeistä tulosta yhtälöön (2.27), niin voidaan olettaa että pätee $|sP_{k-1} - rQ_{k-1}| = 1$. Osoitetaan että luvuilla $vP_{k-1} + ur$ ja $vQ_{k-1} + us$ ei ole lukua yksi suurempia yhteisiä tekijöitä, eli ei olla ristiriidassa äskeisen tuloksen kanssa. Huomataan että

$$\begin{aligned} Q_{k-1}(vP_{k-1} + ur) - P_{k-1}(vQ_{k-1} + us) &= u(Q_{k-1}r - P_{k-1}s) = \pm u|Q_{k-1}r - P_{k-1}s| = \pm u, \\ \text{ja} \quad s(vP_{k-1} + ur) - r(vQ_{k-1} + us) &= v(sP_{k-1} - rQ_{k-1}) = \mp v|sP_{k-1} - rQ_{k-1}| = \mp v. \end{aligned}$$

Tiedetään että suurimman yhteisen tekijän ominaisuuksien nojalla, esim. Levequen kirjan [2] lause 2.9, lukujen $vP_{k-1} + ur$ ja $vQ_{k-1} + us$ suurin yhteinen tekijä jakaa luvut u ja v äskeisten yhtälöiden perusteella. Kuitenkin oletettiin että luvuilla u ja v ei ole lukua yksi suurempia yhteisiä tekijöitä, niin luvuilla $vP_{k-1} + ur$ ja $vQ_{k-1} + us$ ei ole lukua yksi suurempia yhteisiä tekijöitä.

Tämän nojalla todistuksessa esiintyneelle indeksille pätee $k = \kappa$. Jos $\frac{r}{s}$ on parhaiden approksimaatioiden joukossa, ja jos merkitään $\frac{r}{s} = \frac{P_\kappa}{Q_\kappa}$, niin $x = \frac{P_{\kappa+1}}{Q_{\kappa+1}}$. Konvergenttien rekursion nojalla

$$\begin{cases} P_{\kappa+1} &= \lambda_{\kappa+1}P_\kappa + P_{\kappa+1} = r + P_{\kappa+1}, \\ Q_{\kappa+1} &= \lambda_{\kappa+1}Q_\kappa + Q_{\kappa-1} = s + Q_{\kappa-1}, \end{cases}$$

joten $\lambda_{\kappa+1} = 1$ ja lauseen 2.26 nojalla

$$x = \lambda_0 + \cfrac{1}{\lambda_1 + \cfrac{1}{\lambda_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{\lambda_\kappa + \cfrac{1}{1}}}}}.$$

Jos $\dfrac{r}{s}$ ei kuulu parhaisiin rationaaliapproksimaatioihin, niin

$$x = \frac{P_k}{Q_k} \quad \text{ja} \quad x = \lambda_0 + \cfrac{1}{\lambda_1 + \cfrac{1}{\lambda_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{\lambda_\kappa + 1}}}}.$$

Nähdään että luvun x ketjumurtoluku ei riipu siitä onko $\dfrac{r}{s}$ parhaiden approksimaatioiden joukossa vai ei, sillä luvun x ketjumurtoluvun arvo ei muutu jos tehdään viimeiselle osanimittäjälle muutos $\lambda_k + 1 = \lambda_k + \frac{1}{1}$. Tämä osoittaa yhtälön (2.31) ja sen että luvun x ketjumurtoluvun konvergentit $\dfrac{P_k}{Q_k}$ ovat kaikki luvun x parhaat rationaaliapproksimaatiot.

Tutkitaan seuraavaksi mielivaltaista äärellistä ketjumurtolukua $\{a_0; a_1, \ldots a_n\}$, millä on selvästi jokin rationaaliarvo x. Ketjumurtoluvun konvergentit $\dfrac{p_0}{q_0} = \{a_0\}, \dfrac{p_1}{q_1} = \{a_0; a_1\}, \ldots$ vastaavat summan osasummia. Indekseille $1 \leq k \leq n$ pätee

$$x = \{a_0; a_1, \ldots, a_{k-1}, x'_k\}, \quad \text{missä} \quad x'_k = \{a_k; a_{k+1}, \ldots, a_n\},$$

jonka nojalla $x'_k = a_k + \dfrac{1}{x'_{k+1}}$ indekseillä $k = 1, 2, \ldots, n-1$ kuten lauseen 2.26 todistuksessa. Koska $x'_k \geq 1$ kaikilla $k < n$, niin saadaan

$$\begin{aligned}
x'_1 &= \frac{1}{x - a_0} = \frac{1}{x - \lfloor x \rfloor}, \quad a_1 = \lfloor x'_1 \rfloor, \\
x'_2 &= \frac{1}{x'_1 - a_1} = \frac{1}{x'_1 - \lfloor x'_1 \rfloor}, \quad a_2 = \lfloor x'_2 \rfloor, \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Näin ollen lukujono (x'_k) on identtinen lukujonon (x_k) kanssa, mikä määriteltiin lauseessa 2.25. Tällöin lukujono (a_k) on vastaavasti identtinen lukujonon (λ_k) kanssa.

Tämän nojalla ketjumurtoluku on yksikäsitteinen, lukuunottamatta mainittua variaatiota, ja koska ketjumurtoluvun konvergentit antavat kaikki parhaat rationaaliapproksimaatiot, niin myös parhaat approksimaatiot ovat yksikäsitteisiä. $\square$

Huomautus. Lauseen 2.30 ketjumurtoluvun variaatio nähdään esimerkiksi tapauksessa

$$\frac{4}{3} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1}} = 1 + \frac{1}{3}.$$

Osoitetaan vielä seuraava hyödyllinen tulos.

Lemma 2.32. *Olkoon* $x = \{a_0; a_1, \ldots, a_\kappa\}$. *Tällöin*

$$q_k p_{k-2} - q_{k-2} p_k = (-1)^{k-1} a_k, \quad k \geq 0.$$

Todistus. Tulos seuraa suoraan lukujen p_k, q_k rekursiosta (2.24) ja yhtälöstä (2.18) seuraavasti

$$\begin{aligned}
&q_k p_{k-2} - q_{k-2} p_k = (a_k q_{k-1} + q_{k-2}) p_{k-2} - q_{k-2}(a_k p_{k-1} + p_{k-2}) \\
&= a_k q_{k-1} p_{k-2} + q_{k-2} p_{k-2} - a_k q_{k-2} p_{k-1} - q_{k-2} p_{k-2} \\
&= a_k (q_{k-1} p_{k-2} + q_{k-2} p_{k-1}) = a_k (-1)^{k-1}. \quad \square
\end{aligned}$$

Seuraavassa lauseessa on koottu kaikki äärellisiin ketjumurtolukuihin liittyvät tulokset joita tässä luvussa on löydetty.

Lause 2.33. *Ketjumurtolukukehitelmän konvergentit* $\frac{P_k}{Q_k}$, $0 < k$, *ovat parhaita approksimaatiota ketjumurtolukukehitelmää vastaavalle luvulle* x. *Jokaisella rationaaliluvulla on äärellinen ja säännöllinen ketjumurtoluku, joka on yksikäsitteinen lukuunottamatta variaatiota*

$$x = \{a_0; a_1, \ldots, a_\kappa\} = \{a_0; a_1, \ldots, a_\kappa - 1, 1\}, \quad a_\kappa > 1.$$

Jos konvergentit ja kokonaiset osamäärät määrittyvät siten että

$$\begin{aligned}
&\frac{p_0}{q_0} = a_0,\ \frac{p_1}{q_1} = \{a_0; a_1\},\ \frac{p_2}{q_2} = \{a_0; a_1, a_2\}, \ldots, \\
&x = \{a_0; a_1, \ldots, a_{k-1}, x'_k\},
\end{aligned} \tag{2.34}$$

missä $x'_k = \{a_k; a_{k+1}, \ldots, a_\kappa\}$, $1 \leq k \leq \kappa$, *siten että*

$$x'_k = a_k + \frac{1}{x'_{k+1}},$$

ja jos $\alpha_k = q_k x - p_k$, niin seuraavat yhtälöt pätevät kun $k \le \kappa$:

$$x_0 = x, \quad x_k = \frac{1}{x_{k-1} - \lfloor x_{k-1} \rfloor}, \quad k > 0 \tag{2.35}$$

$$a_k = \lfloor x_k \rfloor, \quad k \ge 0 \tag{2.36}$$

$$\begin{cases} p_{-2} = 0, \quad p_{-1} = 1, \quad p_k = a_k p_{k-1} + p_{k-2} \\ q_{-2} = 1, \quad q_{-1} = 0, \quad q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2} \end{cases}, \quad k \ge 0 \tag{2.37}$$

$$q_k p_{k-1} - q_{k-1} p_k = (-1)^k, \quad k \ge -1 \tag{2.38}$$

$$q_k p_{k-2} - q_{k-2} p_k = (-1)^{k-1} a_k, \quad k \ge 0 \tag{2.39}$$

$$x = \frac{p_{k-1} x_k + p_{k-2}}{q_{k-1} x_k + q_{k-2}}, \quad k \ge 0 \tag{2.40}$$

$$x_k = -\frac{\alpha_{k-2}}{\alpha_{k-1}}, \quad k \ge 0 \tag{2.41}$$

Tutkitaan vielä esimerkin avulla miten annetun reaaliluvun ketjumurtolukukehitelmän ja parhaat rationaaliapproksimaatiot voi löytää.

Esimerkki 2.42. Etsitään luvun e^{-1} parhaita rationaaliapproksimaatioita sen ketjumurtoluvun avulla. Osoittautuu että luvun e^{-1} ketjumurtoluvussa esiintyy luvun e ketjumurtoluku, joten etsitään ensin se.

$$\begin{aligned}
a_0 &= \lfloor \mathrm{e} \rfloor = 2, \quad x_1 = \frac{1}{\mathrm{e}-2}, \\
a_1 &= \left\lfloor \frac{1}{\mathrm{e}-2} \right\rfloor = 1, \quad x_2 = \frac{1}{\frac{1}{\mathrm{e}-2} - 1} = \frac{\mathrm{e}-2}{3-\mathrm{e}}, \\
a_2 &= \left\lfloor \frac{\mathrm{e}-2}{3-\mathrm{e}} \right\rfloor = 2, \quad x_3 = \frac{1}{\frac{\mathrm{e}-2}{3-\mathrm{e}} - 2} = \frac{3-\mathrm{e}}{3\mathrm{e}-8}, \\
a_3 &= \left\lfloor \frac{3-\mathrm{e}}{3\mathrm{e}-8} \right\rfloor = 1, \quad x_4 = \frac{1}{\frac{3-\mathrm{e}}{3\mathrm{e}-8} - 1} = \frac{3\mathrm{e}-8}{11-4\mathrm{e}}, \\
a_4 &= \left\lfloor \frac{3\mathrm{e}-8}{11-4\mathrm{e}} \right\rfloor = 1, \quad x_5 = \frac{1}{\frac{3\mathrm{e}-8}{11-4\mathrm{e}} - 1} = \frac{11-4\mathrm{e}}{7\mathrm{e}-19}, \\
a_5 &= \left\lfloor \frac{11-4\mathrm{e}}{7\mathrm{e}-19} \right\rfloor = 4.
\end{aligned}$$

Huomataan että luvun e^{-1} tapauksessa

$$a_0' = \left\lfloor \mathrm{e}^{-1} \right\rfloor = 0, \quad x_1' = \frac{1}{\mathrm{e}^{-1} - 0} = \mathrm{e}, \quad a_1' = \lfloor \mathrm{e} \rfloor = 2,$$

joten $\mathrm{e}^{-1} = \{0; 2, 1, 2, 1, 1, 4, \dots\}$. Seuraavassa alaluvussa käsitellään mitä kolme pistettä tarkoittavat ketjumurtoluvun tapauksessa. Tutkitaan seuraavaksi luvun e^{-1} rationaaliapproksimaatioita

$$p_0 = a_0' = 0, \quad q_0 = 1, \quad p_1 = a_0' \cdot a_1' + 1 = 1, \quad q_1 = a_1' = 2.$$

Rekursiota on helppo jatkaa tästä. Taulukoidaan muutama ensimmäinen approksimaatio

Taulukko 1: Luvun e^{-1} rationaaliapproksimaatioita ja niiden virheet

k	p_k	q_k	p_k/q_k	virhe $\approx$
0	0	1	0/1	$\mathrm{e}^{-1} \approx 0,37$
1	1	2	1/2	$0,13$
2	1	3	1/3	$0,035$
3	3	8	3/8	$7,1 \cdot 10^{-3}$
4	4	11	4/11	$4,2 \cdot 10^{-3}$
5	7	19	7/19	$5,4 \cdot 10^{-4}$

2.4 Ketjumurtoluvut irrationaaliluvuille

Jatketaan tutkimalla äärettömiä ketjumurtolukuja ja niiden ominaisuuksia. Olkoon $\lambda_0, \lambda_1, \ldots$ ääretön jono kokonaislukuja, joilla pätee $\lambda_k \geq 1$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$. Merkitään ääretöntä ketjumurtolukua seuraavasti:

$$\lambda_0 + \cfrac{1}{\lambda_1 + \cfrac{1}{\lambda_2 + \ddots}} = \{\lambda_0; \lambda_1, \lambda_2, \ldots\},$$

joka täsmällisemmin tarkoittaa raja-arvoa

$$\lim_{n\to\infty} \left(\lambda_0 + \cfrac{1}{\lambda_1 + \cfrac{1}{\ddots + \lambda_n}} \right) = \lim_{n\to\infty} \{\lambda_0; \lambda_1, \ldots, \lambda_n\} = \lim_{n\to\infty} \frac{P_n}{Q_n}, \tag{2.43}$$

missä P_n, Q_n on määritelty samalla rekursiolla (2.37) kuten aikaisemmin. Seuraavassa lauseessa nähdään että jokainen ääretön ketjumurtoluku, eli raja-arvo (2.43), suppenee.

Lause 2.44. *Jokainen ääretön säännöllinen ketjumurtoluku suppenee kohti irrationaalista lukua ξ, mille parhaat rationaaliapproksimaatiot ovat ketjumurtoluvun konvergentit.*

Jokainen irrationaaliluku ξ voidaan esittää äärettömällä ketjumurtolukukehitelmällä, joka on yksikäsitteinen. Tällöin jos

$$\xi = \{a_0; a_1, a_2, \ldots\} = \{a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}, \xi_k\}, \quad k > 0,$$

ja jos konvergentit $\dfrac{p_k}{q_k}$ on määritelty kaavan (2.34) *ja rekursion* (2.37) *mukaan, niin lauseen* 2.33 *yhtälöt* (2.35)–(2.41) *pätevät, kun lukujen x ja x_k tilalle sijoitetaan ξ ja ξ_k.*

Todistus. Aloitetaan tutkimalla mielivaltaista ääretöntä ketjumurtolukua $\{a_0; a_1, a_2, \ldots\}$ ja osoitetaan että se suppenee kohti lukua jotain ξ. Valitaan $n > 2$ ja merkitään

$$\frac{p}{q} = \frac{p_n}{q_n} = \{a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n\}.$$

Tällöin lauseen 2.33 nojalla osanimittäjät $a_0, a_1, \dots, a_{n-2}$ ovat yksikäsitteisesti määritelty luvulle $\frac{p}{q}$ ja konvergentit luvun $\frac{p}{q}$ ketjumurtoluvulle ovat myös konvergentteja ketjumurtoluvulle $\{a_0; a_1, a_2, \dots\}$. Kun $k \leq n-2$, niin konvergentit määrittyvät samalla rekursiolla ja täyttävät yhtälöt (2.38) ja (2.39). Nähdään että

$$\begin{aligned}
&\frac{p_{2k-2}}{q_{2k-2}} < \frac{p_{2k}}{q_{2k}} \quad \text{ja} \quad \frac{p_{2k-1}}{q_{2k-1}} > \frac{p_{2k+1}}{q_{2k+1}}, \text{ sillä} \\
&p_{2k-2}q_{2k} - p_{2k}q_{2k-2} = (-1)^{2k-1}a_{2k} < 0, \text{ sekä} \\
&q_{2k+1}p_{2k-1} - q_{2k-1}p_{2k+1} = (-1)^{2k}a_{2k+1} > 0.
\end{aligned}$$

Epäyhtälöiden nojalla

$$\frac{p_0}{q_0} < \frac{p_2}{q_2} < \frac{p_4}{q_4} < \dots, \quad \text{ja} \quad \frac{p_1}{q_1} > \frac{p_3}{q_3} > \frac{p_5}{q_5} > \dots.$$

Saadaan myös

$$\frac{p_{2k}}{q_{2k}} < \frac{p_{2k+1}}{q_{2k+1}}, \quad \text{sillä} \quad q_{2k+1}p_{2k} - q_{2k}p_{2k+1} = (-1)^{2k+1} < 0,$$

jonka nojalla erityisesti pätee $\frac{p_{2k}}{q_{2k}} < \frac{p_{2l+1}}{q_{2l+1}}$ kaikilla $l \geq k$. Näin ollen

$$\frac{p_0}{q_0} < \frac{p_2}{q_2} < \frac{p_4}{q_4} < \dots < \frac{p_5}{q_5} < \frac{p_3}{q_3} < \frac{p_1}{q_1},$$

joten lukujonot $\left(\frac{p_{2k}}{q_{2k}}\right)$ ja $\left(\frac{p_{2k+1}}{q_{2k+1}}\right)$ ovat monotonisia ja rajoitettuja, joten lukujonot suppenevat. Huomataan että

$$q_kp_{k-1} - q_{k-1}p_k = (-1)^k \quad \text{joss} \quad \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} - \frac{p_k}{q_k} = \frac{(-1)^k}{q_{k-1}q_k}.$$

Koska $q_k \to \infty$, kun $k \to \infty$, niin

$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{p_{2k-1}}{q_{2k-1}} - \frac{p_{2k}}{q_{2k}}\right) = \lim_{k\to\infty}\frac{(-1)^k}{q_{2k-1}q_{2k}} = 0,$$

joten raja-arvo (2.43) on olemassa mille tahansa äärettömälle ketjumurtoluvulle. Aikaisemmin todettiin että konvergentit vastaavat summan osasummia, joten raja-arvon tapauksessa konvergentit vastaavat sarjan osasummia.

Merkitään tätä raja-arvoa ξ, ja osoitetaan että ξ on irrationaalinen. Raja-arvon määritelmän nojalla kaikilla reaaliluvuille $\varepsilon > 0$ pätee

$$\left|\xi - \frac{P_n}{Q_n}\right| < \varepsilon, \quad \text{eli} \quad |Q_n\xi - P_n| < Q_n\varepsilon,$$

missä lukupareja P_n, Q_n on äärettömän monta. Tällöin jos $\varepsilon < \frac{1}{Q_n^2}$, niin kaikilla $\varepsilon' = \frac{1}{Q_n}$

$$|Q_n\xi - P_n| < Q_n\varepsilon < Q_n\frac{1}{Q_n^2} = \varepsilon'.$$

Oletetaan että ξ olisi rationaaliluku, eli $\xi = \dfrac{a}{b}$. Tällöin kaikilla P_n, Q_n, joilla pätee $Q_nP_{n-1} - Q_{n-1}P_n = (-1)^n$, eli luvuilla P_n, Q_n ei ole yhteisiä tekijöitä, ja joilla $\dfrac{P_n}{Q_n} \neq \dfrac{a}{b}$

$$\left| Q_n \cdot \frac{a}{b} - P_n \right| = \left| \frac{Q_n a - P_n b}{b} \right| \geq \frac{1}{|b|}, \quad \text{eli} \quad \frac{1}{Q_n} > \frac{1}{|b|}, \quad \text{joten} \quad |b| > Q_n.$$

Tällöin Q_n olisi ylhäältä rajoitettu, joten pareja P_n, Q_n olisi äärellinen määrä, joka on ristiriita. Näin ollen ξ on irrationaalinen.

Olkoon α irrationaalinen luku ja oletetaan että $\alpha = \{b_0; b_1, b_2, \dots\}$. Tällöin selvästi ketjumurtoluvun muodostamistavan perusteella $b_0 = \lfloor \alpha \rfloor$ ja $b_1 = \lfloor \alpha_1 \rfloor, \quad b_2 = \lfloor \alpha_2 \rfloor, \dots,$ missä

$$\alpha_1 = \frac{1}{\alpha - \lfloor \alpha \rfloor}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{\alpha_1 - \lfloor \alpha_1 \rfloor}, \dots.$$

Näin ollen $\{b_0; b_1, b_2, \dots\}$ on yksikäsitteinen. Toisaalta olemme edelle näyttäneet että ylläolevien kaavojen määrittämä ketjumurtoluku $\{b_0; b_1, b_2, \dots\}$ suppenee kohti lukua α, koska sen konvergentit $\dfrac{p_n}{q_n}$ antavat luvun α parhaita rationaaliapproksimaatioita.

Pätee että $\alpha = \{b_0; b_1, \dots, b_{n-1}, \alpha_n\}$, missä $\alpha_n = \{b_n; b_{n+1}, \dots\}$ kuten rationaalilukujen tapauksessa äärellisille ketjumurtoluvuille. Lisäksi konvergentit $\dfrac{p_n}{q_n}$ määrittyvät rekursion (2.37) mukaan. □

Huomautus. Esimerkissä 2.42 tutkittiin luvun e^{-1} ketjumurtolukua, josta voidaan huomata toistoa:

$$\mathrm{e}^{-1} = \{0; 2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, \dots\} = \{0; \mathrm{e}\}.$$

Tämä tulos voidaan havaita helposti Neperin luvun e ketjumurtoluvusta, joka on muotoa $\mathrm{e} = \{2; \overline{1, 2n, 1}\}$, missä n on luonnollinen luku ja yliviivaus tarkoittaa yliviivatun osan toistoa ketjumurtoluvussa, missä n kasvaa yhdellä joka toistolla. Luvun e ketjumurtoluku todistetaan luvussa 4.

Seuraava lause antaa tarvittavat tulokset ketjumurtoluvun konvergenttien approksimaatiotarkkuudelle.

Lause 2.45. *Jos $\xi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ja $k \geq 0$, niin saadaan seuraavat (epä)yhtälöt*

$$\begin{aligned} &\xi - \frac{p_k}{q_k} = \frac{(-1)^k}{q_k(q_k\xi_{k+1} + q_{k-1})}, \\ &\frac{1}{q_k(q_k + q_{k+1})} < \left| \xi - \frac{p_k}{q_k} \right| < \frac{1}{q_kq_{k+1}}, \\ &\left| \xi - \frac{p_k}{q_k} \right| < \frac{1}{q_k^2}. \end{aligned} \tag{2.46}$$

Todistus. Tiedetään että

$$q_kp_{k-1} - q_{k-1}p_k = (-1)^k \quad \text{ja} \quad \xi = \frac{p_{k-1}\xi_k + p_{k-2}}{q_{k-1}\xi_k + q_{k-2}}, \text{ missä } \xi_k = -\frac{\alpha_{k-2}}{\alpha_{k-1}}.$$

Saadaan

$$\xi - \frac{p_k}{q_k} = \frac{p_k\xi_{k+1} + p_{k-1}}{q_k\xi_{k+1} + q_{k-1}} - \frac{p_k}{q_k} = \frac{q_k p_k \xi_{k+1} + q_k p_{k-1} - p_k q_k \xi_{k+1} - p_k q_{k-1}}{q_k(q_k\xi_{k+1} + q_{k-1})}$$
$$= \frac{(-1)^k}{q_k(q_k\xi_{k+1} + q_{k-1})}.$$

Huomataan että

$$q_{k+1} = q_k a_{k+1} + q_{k-1} < q_k\xi_{k+1} + q_{k-1} < q_k(a_{k+1} + 1) + q_{k-1} = q_{k+1} + q_k.$$

Tällöin

$$\left|\xi - \frac{p_k}{q_k}\right| = \left|\frac{(-1)^k}{q_k(q_k\xi_{k+1} + q_{k-1})}\right| < \frac{1}{|q_k q_{k+1}|} = \frac{1}{q_k q_{k+1}}.$$

Vastaavasti

$$\left|\xi - \frac{p_k}{q_k}\right| > \frac{1}{|q_k(q_{k+1} + q_k)|} = \frac{1}{q_k(q_{k+1} + q_k)},$$

sillä $q_k \geq 1$ kaikilla $k \geq 1$. Koska $q_0 \leq q_1 < q_2 < \dots$, niin

$$\left|\xi - \frac{p_k}{q_k}\right| < \frac{1}{q_k q_{k+1}} \leq \frac{1}{q_k^2}. \quad \square$$

3 Irrationaalisin luku

Tässä luvussa määritellään mitä tarkoittaa luvun irrationaalisuus ja miten sitä voidaan tutkia. Tämän perusteella voidaan etsiä ”irrationaalisin luku” ja tutkia sen ominaisuuksia.

Määritelmä 3.1. Luvun $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ irrationaalisuus riippuu siitä kuinka paljon luvun x parhaat rationaaliapproksimaatiot vähintään poikkeavat luvusta x. Jos luku x on asteen $n > 1$ algebrallinen luku, niin tätä voidaan tutkia Liouvillen lauseen 2.10 epäyhtälöllä

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| > \frac{c}{q^n},$$

tai yleisesti tutkimalla ketjumurtolukukehitelmän konvergenttien määrittämää lauseen 2.45 epäyhtälöä (2.46), eli saadaan alaraja

$$\frac{1}{q_k(q_k + q_{k+1})} < \left| x - \frac{p_k}{q_k} \right|.$$

Tällöin irrationaalisin luku on se, jonka parhailla rationaaliapproksimaatioilla on suurin alaraja, eli etsitään lukujonot $(p'_k), (q'_k)$, joilla

$$\frac{1}{q'_k(q'_k + q'_{k+1})} = \max \left\{ \frac{1}{q_k(q_k + q_{k+1})} \right\}$$

on suurin mahdollinen alaraja kaikista lukujonoista (q_k).

Huomataan että lukujono (q_k) määritellään rekursiolla (2.37)

$$\begin{cases} p_{-2} = 0, \quad p_{-1} = 1, \quad p_k = a_k p_{k-1} + p_{k-2} \\ q_{-2} = 1, \quad q_{-1} = 0, \quad q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2} \end{cases}, \quad k \geq 0,$$

eli $q_k \geq 1$ kaikilla $k \geq 0$ ja $x = \{a_0; a_1, a_2, \dots\}$. Tällöin q_k voidaan minimoida ottamalla x siten että osanimittäjät $a_k = 1$ kaikilla $k \geq 0$, sillä lukujono (q_k) on määritelty rekursiivisesti ja pienentämällä osanimittäjiä a_k saadaan hitaammin kasvava rekursio jonolle (q_k). Seuraavassa lauseessa osoitetaan että tällainen luku $x = \{1; 1, 1, \dots\}$ on olemassa ja että se on kultainen leikkaus

$$\phi =: \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Lause 3.2. *Irrationaalisin luku on kultainen leikkaus ϕ, sillä sen ketjumurtolukukehitelmä on $\phi = \{1; 1, 1, \dots\}$.*

Todistus. Kultainen leikkaus $\phi = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$ toteuttaa yhtälön

$$x^2 - x - 1 = 0 \quad \text{joss} \quad x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Yhtälö voidaan saattaa muotoon

$$x = 1 + \frac{1}{x},$$

mistä saadaan seuraava rekursio sijoittamalla arvo $1 + \frac{1}{x}$ yhtälön oikealle puolelle muuttujan x paikalle

$$\begin{aligned}
x &= 1 + \frac{1}{x} \\
x &= 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{x}} \\
x &= 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{x}}} \\
&\vdots \\
x &= 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}
\end{aligned}$$

joten kultaisen leikkauksen ketjumurtolukukehitelmä on $\{1; 1, 1, \dots\}$. Kultaisen leikkauksen parhaat rationaaliapproksimaatiot $\dfrac{P_k}{Q_k}$ voidaan määritellä rekursiolla

$$\begin{cases} P_{-2} = 0, \quad P_{-1} = 1, \quad P_0 = 1, \quad P_1 = 2, \quad P_k = P_{k-1} + P_{k-2} \\ Q_{-2} = 1, \quad Q_{-1} = 0, \quad Q_0 = 1, \quad Q_1 = 1, \quad Q_k = Q_{k-1} + Q_{k-2} \end{cases}, \quad k > 1.$$

Koska jokaisen reaaliluvun ketjumurtolukukehitelmä on yksikäsitteinen, ja epäyhtälön

$$\frac{1}{Q_k(Q_k + Q_{k+1})} < \left| \phi - \frac{P_k}{Q_k} \right|$$

vasen puoli on suurin mahdollinen, niin ϕ on yksikäsitteisesti irrationaalisin luku. $\square$

Huomautus. Jos merkitään Fibonaccin lukuja $F_{-2} = 0,\ F_{-1} = 1,\ F_0 = 1,\ F_1 = 2,$ $F_2 = 3,\ F_3 = 5, \dots$ ja yleisesti rekursiolla $F_{k+1} = F_k + F_{k-1},\ -1 \leq k$, niin huomataan että kultaisen leikkauksen konvergentit ovat muotoa

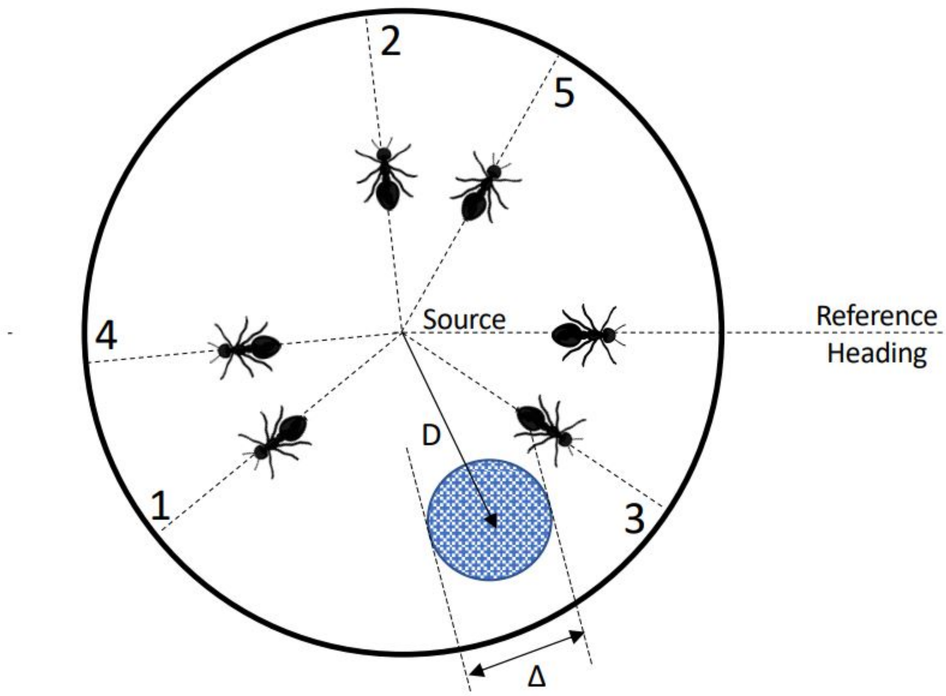
$$\frac{P_k}{Q_k} = \frac{F_{k+1}}{F_k}.$$

Tällä voidaan esimerkiksi perustella tunnettu raja-arvo

$$\lim_{k \to \infty} \frac{F_{k+1}}{F_k} = \lim_{k \to \infty} \frac{P_k}{Q_k} = \phi.$$

Kultaisen leikkauksen irrationaalisuutta voidaan havainnollistaa käytännössä. Esimerkiksi artikkelissa [1] on tutkittu algoritmia, missä oletetaan tason origoon muurahaispesä ja johonkin tason kohtaan resurssialue, ja tutkitaan mikä on tehokkain tapa lähettää tiedustelijamuurahaisia löytämään resurssialue. Artikkelissa tehokkaimmaksi tavaksi on osoittautunut valita jokin lähtösuunta ensimmäiselle tiedustelijalle ja siirtyä aina kulman ϕ verran ja lähettää siihen suuntaan seuraava tiedustelija. Koska kultainen leikkaus on irrationaalisin luku, niin tiedustelijat hajaantuvat mahdollisimman tehokkaasti eri suuntiin, mikä mahdollistaa resurssialueen nopean löytämisen. Tätä havainnollistaa kuva 1.

Kuva 1: Artikkelista [1] algoritmia havainnoillistava kuva, kun valitaan siirtokulmaksi kultainen leikkaus



4 Todistus Neperin luvun ketjumurtoluvulle

Tässä luvussa osoitetaan luvun 2 esimerkeissä havaittu tulos Neperin luvun ketjumurtoluvulle $\mathrm{e} = \{2; \overline{1, 2n, 1}\}$. Tämä todistus perustuu C.D. Oldsin vuonna 1970 julkaistuun todistukseen [3], joka pohjautuu C. Hermiten todistukseen vuodelta 1873. Todistus on melko pitkä, joten se on tässä tekstissä jaettu neljään osaan: johdantoon, integrointiin, Neperin luvusta riippuvan lausekkeen ketjumurtoluvun löytämiseen ja lopuksi ketjumurtoluvun johtamiseen. Johdannossa esitellään todistuksessa tarvittavat integraalit ja polynomit, jonka jälkeen integrointiosuudessa osoitetaan eräiden integraalien muodostaman jonon peräkkäisten jäsenien välinen yhteys. Kahden ensimmäisen osan tiedoilla löydetään ketjumurtolukuesitys lausekkeelle $\dfrac{\mathrm{e}^{2/k}+1}{\mathrm{e}^{2/k}-1}$, missä k on positiivinen kokonaisluku. Lopuksi löydetystä ketjumurtoluvusta johdetaan Neperin luvun ketjumurtoluku valitsemalla $k = 2$.

4.1 Todistuksen johdanto

Aloitetaan tutkimalla integraalia

$$\int \mathrm{e}^{-rx} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

missä $r \neq 0$ on mielivaltainen vakio ja $f(x)$ on asteen $2m$ kokonaislukukertoiminen polynomi. Osittaisintegroimalla ja saadaan

$$\begin{aligned}
&\int \mathrm{e}^{-rx} f(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{r}\mathrm{e}^{-rx} f(x) + \frac{1}{r}\int f^{(1)}(x)\mathrm{e}^{-rx}\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{r}\mathrm{e}^{-rx} f(x) - \frac{1}{r^2}\mathrm{e}^{-rx} f^{(1)}(x) + \frac{1}{r^2}\int f^{(2)}(x)\mathrm{e}^{-rx}\,\mathrm{d}x \\
&= \cdots = -\mathrm{e}^{-rx}\left(\frac{1}{r} f(x) + \frac{1}{r^2} f^{(1)}(x) + \cdots + \frac{1}{r^{2m+1}} f^{(2m)}(x)\right) =: -\mathrm{e}^{-rx} g(x).
\end{aligned}$$

Toisto päättyy sillä seuraava termi olisi

$$\frac{1}{r^{2m+1}}\int f^{(2m+1)}(x)\mathrm{e}^{-rx}\,\mathrm{d}x = 0,$$

koska $f(x)$ oletettiin olevan asteen $2m$ polynomi, joten $f^{(2m+1)}(x) = 0$. Äskeisen tuloksen nojalla pätee että

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{-rx} f(x)\,\mathrm{d}x = \Big/_{0}^{1} -\mathrm{e}^{-rx} g(x) = g(0) - \mathrm{e}^{-r} g(1). \tag{4.1}$$

Valitaan $f(x) = x^m(x-1)^m$, jolloin $f^{(j)}(0) = f^{(j)}(1) = 0$, kaikilla $j = 0, 1, 2 \ldots, m-1$, sillä luvut nolla ja yksi on valitun polynomin juuria, joten jokainen derivaattojen $f^{(j)}(0)$

ja $f^{(j)}(1)$ termi on nolla ainakin derivaattaan $j = m - 1$ saakka. Tämän nojalla suureet $g(0)$ ja $g(1)$ sieventyvät siten että

$$g(0) = \sum_{j=m}^{2m} \frac{f^{(j)}(0)}{r^{j+1}} \quad \text{ja} \quad g(1) = \sum_{j=m}^{2m} \frac{f^{(j)}(1)}{r^{j+1}}.$$

Toisaalta tutkimalla valitun polynomin $f(x)$ Taylorin kehitelmää kohdassa $x = 0$ saadaan

$$f(x) = \sum_{j=m}^{2m} \frac{f^{(j)}(0)}{j!} x^j =: \sum_{j=m}^{2m} \alpha_j x^j,$$

eli voidaan ilmaista $f^{(j)}(0) = j!\,\alpha_j$. Koska polynomin $f(x)$ kertoimet ovat kokonaislukuja, niin täytyy myös termit α_j olla kokonaislukuja kaikilla j. Samalla tavoin voidaan kirjoittaa Taylorin kehitelmä kohtaan $x = 1$:

$$f(x) = \sum_{j=m}^{2m} \frac{f^{(j)}(1)}{j!} (x-1)^j =: \sum_{j=m}^{2m} \beta_j (x-1)^j,$$

missä $f^{(j)}(1) = j!\,\beta_j$, ja kuten termien α_j tapauksessa termit β_j ovat kokonaislukuja kaikilla j. Nyt $g(0)$ ja $g(1)$ voidaan lausua muodossa

$$g(0) = \sum_{j=m}^{2m} \frac{j!\,\alpha_j}{r^{j+1}} =: \frac{m!\,M_m(r)}{r^{2m+1}},$$
$$g(1) = \sum_{j=m}^{2m} \frac{j!\,\beta_j}{r^{j+1}} =: \frac{m!\,N_m(r)}{r^{2m+1}},$$

missä $M_m(r)$ ja $N_m(r)$ ovat asteen m kokonaislukukertoimisia polynomeja vakion r suhteen. Näiden avulla integraali (4.1) voidaan kirjoittaa muodossa

$$\frac{m!\,M_m(r)}{r^{2m+1}} - \mathrm{e}^{-r} \frac{m!\,N_m(r)}{r^{2m+1}} =: J_m, \quad \text{eli} \quad \mathrm{e}^r M_m(r) - N_m(r) = \frac{r^{2m+1}\mathrm{e}^r}{m!} J_m, \tag{4.2}$$

missä

$$J_m = \int_0^1 \mathrm{e}^{-rx} x^m (x-1)^m \,\mathrm{d}x, \quad \text{ja} \quad V_m = \frac{r^{2m+1}}{m!} J_m.$$

Huomataan että kun $m = 0$, niin $f(x) = 1$ ja $g(x) = r^{-1}$, joten $g(0) = g(1) = r^{-1}$ sekä $M_0(r) = 1$ ja $N_0(r) = 1$. Samalla tavoin kun $m = 1$, niin $f(x) = x(x-1) = x^2 - x$ jolloin $g(x) = \dfrac{x^2 - x}{r} + \dfrac{2x-1}{r^2} + \dfrac{2}{r^3}$. Tällöin $g(0) = -r^{-2} + 2r^{-3} = \dfrac{M_1(r)}{r^3}$ ja $g(1) = r^{-2} + 2r^{-3} = \dfrac{N_1(r)}{r^3}$, joten $M_1(r) = 2 - r$ ja $N_1(r) = 2 + r$. Tämä päättää todistuksen johdannon.

4.2 Integrointia

Osoitetaan seuraavaksi yhteys integraalien J_m, J_{m-1}, J_{m-2} välille, kun $m \geq 2$. Näytetään että yhteys on yhtälö $aJ_m + bJ_{m-1} + cJ_{m-2} = 0$, missä a, b ja c ovat suureita joille voidaan määrittää lausekkeet. Osittaisintegroimalla saadaan

$$\begin{aligned}
J_m &= \int_0^1 \mathrm{e}^{-rx} x^m (x-1)^m \,\mathrm{d}x \\
&= \Big/_0^1 \left(-\frac{1}{r}\mathrm{e}^{-rx} x^m (x-1)^m\right) - \int_0^1 -\frac{1}{r}\mathrm{e}^{-rx}\left(mx^{m-1}(x-1)^m + mx^m(x-1)^{m-1}\right)\mathrm{d}x \\
&= 0 + \frac{m}{r}\int_0^1 \mathrm{e}^{-rx} x^{m-1}(x-1)^m \,\mathrm{d}x + \frac{m}{r}\int_0^1 \mathrm{e}^{-rx} x^m (x-1)^{m-1}\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Huomataan että $(x-1)^m = (x-1)^{m-1}(x-1)$ jolloin yllä oleva kahden integraalin summa saadaan muotoon

$$\begin{aligned}
&\frac{m}{r}\int_0^1 \mathrm{e}^{-rx} x^{m-1}(x-1)^{m-1}(x-1)\,\mathrm{d}x + \frac{m}{r}\int_0^1 \mathrm{e}^{-rx} x^m (x-1)^{m-1}\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{m}{r}\int_0^1 \mathrm{e}^{-rx} x^{m-1}(x-1)^{m-1}\,\mathrm{d}x + 2\cdot\frac{m}{r}\int_0^1 \mathrm{e}^{-rx} x^m (x-1)^{m-1}\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{m}{r}J_{m-1} + 2\cdot\frac{m}{r}\int_0^1 \mathrm{e}^{-rx} x^m (x-1)^{m-1}\,\mathrm{d}x = J_m.
\end{aligned}$$

Saadaan

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{-rx} x^m (x-1)^{m-1}\,\mathrm{d}x = \frac{r}{2m}J_m + \frac{1}{2}J_{m-1}. \tag{4.3}$$

Jos sijoitetaan edelliseen yhtälöön kokonaisluvun m paikalle $m-1$, niin saadaan

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{-rx} x^{m-1}(x-1)^{m-2}\,\mathrm{d}x = \frac{r}{2(m-1)}J_{m-1} + \frac{1}{2}J_{m-2}. \tag{4.4}$$

Jälleen osittaisintegroimalla saadaan

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \mathrm{e}^{-rx} x^m (x-1)^{m-1}\,\mathrm{d}x \\
&= \Big/_0^1 \left(-\frac{1}{r}\mathrm{e}^{-rx} x^m (x-1)^{m-1}\right) + \int_0^1 \frac{1}{r}\mathrm{e}^{-rx}\left(mx^{m-1}(x-1)^{m-1} + (m-1)x^m(x-1)^{m-2}\right)\mathrm{d}x \\
&= 0 + \frac{m}{r}J_{m-1} + \frac{m-1}{r}\int_0^1 \mathrm{e}^{-rx} x^m (x-1)^{m-2}\,\mathrm{d}x, \text{ eli saadaan}
\end{aligned}$$

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{-rx} x^m (x-1)^{m-1}\,\mathrm{d}x = \frac{m}{r}J_{m-1} + \frac{m-1}{r}\int_0^1 \mathrm{e}^{-rx} x^m (x-1)^{m-2}\,\mathrm{d}x. \tag{4.5}$$

Toisaalta $(x-1)^{m-1} = (x-1)^{m-2}(x-1) = x(x-1)^{m-2} - (x-1)^{m-2}$, joten

$$J_{m-1} = \int_0^1 \mathrm{e}^{-rx} x^m (x-1)^{m-2}\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \mathrm{e}^{-rx} x^{m-1}(x-1)^{m-2}\,\mathrm{d}x.$$

Käyttämällä yhtälöä (4.4) voidaan äskeisestä yhtälöstä ratkaista ensimmäinen integraali oikealta

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{-rx} x^m (x-1)^{m-2}\,\mathrm{d}x = J_{m-1} + \frac{r}{2(m-1)} J_{m-1} + \frac{1}{2} J_{m-2}.$$

Sijoittamalla äskeinen tulos yhtälöön (4.5) saadaan

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{-rx} x^m (x-1)^{m-1}\,\mathrm{d}x = \frac{m}{r} J_{m-1} + \frac{m-1}{r} \left(J_{m-1} + \frac{r}{2(m-1)} J_{m-1} + \frac{1}{2} J_{m-2} \right),$$

joka yhdistämällä tuloksen (4.3) kanssa saadaan muotoon

$$\frac{r}{2m} J_m + \frac{1}{2} J_{m-1} = \frac{m}{r} J_{m-1} + \frac{m-1}{r} J_{m-1} + \frac{1}{2} J_{m-1} + \frac{m-1}{2r} J_{m-2},$$
$$\text{eli} \quad r^2 J_m - 2m(2m-1) J_{m-1} - m(m-1) J_{m-2} = 0.$$

Päädyttiin siis halutunmuotoiseen yhtälöön.

4.3 Ketjumurtoluvun löytäminen

Käytetään todistuksen kahden ensimmäisen osan tietoja ketjumurtoluvun löytämiseen. Aloitetaan käyttämällä suureiden J_m ja V_m välistä yhtälöä, jonka nojalla

$$\begin{aligned} 0 &= r^2 J_m - 2m(2m-1) J_{m-1} - m(m-1) J_{m-2} \\ &= \frac{m!\, r^2}{r^{2m+1}} V_m - 2m(2m-1) \frac{(m-1)!}{r^{2(m-1)+1}} V_{m-1} - m(m-1) \frac{(m-2)!}{r^{2(m-2)+1}} V_{m-2} \\ &= m!\, r^{-2m+1} V_m - 2m(2m-1) \frac{(m-1)!}{r^{2m-1}} V_{m-1} - m(m-1) \frac{(m-2)!}{r^{2m-3}} V_{m-2}. \end{aligned}$$

Jakamalla yhtälö termin V_m kertoimella saadaan

$$V_m - (4m-2) V_{m-1} - r^2 V_{m-2} = 0. \tag{4.6}$$

Seuraavaksi lasketaan V_m, V_{m-1} ja V_{m-2} yhtälöstä (4.2)

$$V_m = M_m(r) - \mathrm{e}^{-r} N_m(r), \quad V_{m-1} = M_{m-1}(r) - \mathrm{e}^{-r} N_{m-1}(r),$$
$$V_{m-2} = M_{m-2}(r) - \mathrm{e}^{-r} N_{m-2}(r).$$

Sijoittamalla nämä yhtälöön (4.6) saadaan

$$M_m(r) - \mathrm{e}^{-r} N_m(r) - (4m-2) \left[M_{m-1}(r) - \mathrm{e}^{-r} N_{m-1}(r) \right] - r^2 \left[M_{m-2}(r) - \mathrm{e}^{-r} N_{m-2}(r) \right] = 0,$$

joka saadaan muotoon

$$\mathrm{e}^r \Big[M_m(r) - (4m-2) M_{m-1}(r) - r^2 M_{m-2}(r) \Big] - \Big[N_m(r) - (4m-2) N_{m-1}(r) - r^2 N_{m-2}(r) \Big] = 0$$

Merkitään $M_m(r) - (4m-2) M_{m-1}(r) - r^2 M_{m-2}(r) =: p_m(r)$ ja
$N_m(r) - (4m-2) N_{m-1}(r) - r^2 N_{m-2}(r) =: q_m(r)$, ja etsitään ratkaisu yhtälölle

$$e^r p_m(r) - q_m(r) = 0 \tag{4.7}$$

Yhtälölle on selvästi ratkaisu $p_m(r) = 0$ ja $q_m(r) = 0$. Osoitetaan että tämä on ainut ratkaisu. Oletetaan että $p_m(r) \neq 0$. Koska suureet $p_m(r)$ ja $q_m(r)$ ovat asteen m polynomeja vakion $r \neq 0$ suhteen, niin yhtälö voidaan derivoida $m+1$ kertaa vakion r suhteen, jos vakiota r käsitellään kuten muuttujaa. Tällöin käyttämällä Leibnizin sääntöä tulon derivaatalle yhtälö saadaan muotoon

$$\sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+1}{k} \mathrm{e}^r p_m^{(k)}(r) - q_m^{(m+1)}(r) = \mathrm{e}^r \sum_{k=0}^{m} \binom{m+1}{k} p_m^{(k)}(r) = 0,$$

sillä $p_m^{(m+1)}(r) = q_m^{(m+1)}(r) = 0$. Leibnizin sääntö voidaan osoittaa induktiolla ja huomaamalla että

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \frac{k(n!) + (n-1+1)n!}{k!\,(n-k+1)!} = \frac{(n+1)!}{k!\,(n+1-k)!} = \binom{n+1}{k}.$$

Derivoidulle yhtälölle on kaksi ratkaisua:

$$\mathrm{e}^r = 0 \quad \text{tai} \quad \sum_{k=0}^{m} \binom{m+1}{k} p_m^{(k)}(r) = p_m(r) + \sum_{k=1}^{m} \binom{m+1}{k} p_m^{(k)}(r) = 0,$$

joista ensimmäinen ei päde millään vakiolla r. Näin ollen

$$p_m(r) = -\sum_{k=1}^{m} \binom{m+1}{k} p_m^{(k)}(r),$$

ja derivoimalla tämä yhtälö m kertaa r suhteen saadaan

$$p_m^{(m)}(r) = -\sum_{k=1}^{m} \binom{m+1}{k} p_m^{(k+m)}(r) = 0,$$

sillä $p_m^{(k+m)}(r) = 0$ kaikilla $k \geq 1$. Päädytään siihen että $p_m^{(m)}(r) = 0$, joten $p_m(r)$ ei ole asteen m polynomi. Tämä on ristiriita, joten $p_m(r) = 0$. Sijoittamalla äskeinen tulos yhtälöön (4.7) saadaan $\mathrm{e}^r \cdot 0 - q_m(r) = q_m(r) = 0$. Näin ollen päädytään ratkaisuun

$$\begin{cases} M_m(r) - (4m-2)M_{m-1}(r) - r^2 M_{m-2}(r) = 0, \\ N_m(r) - (4m-2)N_{m-1}(r) - r^2 N_{m-2}(r) = 0. \end{cases} \tag{4.8}$$

Tiedetään että $N_m(r)$ ja $M_m(r)$ ovat asteen m polynomeja vakion r suhteen. Tällöin jos vaihdetaan vakion r tilalle luku $\frac{2}{k}$, missä k on positiivinen kokonaisluku, niin polynomit saadaan muotoon

$$M_m\left(\frac{2}{k}\right) = \frac{S_m}{k^m}, \quad N_m\left(\frac{2}{k}\right) = \frac{R_m}{k^m},$$

missä S_m ja R_m ovat kokonaislukuja. Sijoittamalla nämä polynomien ja integraalin J_m väliseen yhtälöön (4.2) saadaan

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{2/k}\,\frac{S_m}{k^m} - \frac{R_m}{k^m} &= \frac{(2/k)^{2m+1}\mathrm{e}^{2/k}}{m!}\int_0^1 \mathrm{e}^{-(2/k)x}x^m(x-1)^m\,\mathrm{d}x, \\ \text{eli}\quad \mathrm{e}^{2/k}S_m - R_m &= \frac{2^{2m+1}\mathrm{e}^{2/k}}{k^{m+1}\,m!}\int_0^1 \mathrm{e}^{-2x/k}x^m(x-1)^m\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Huomataan että $|x(x-1)| \le \frac{1}{4}$, kun $0 \le x \le 1$, sillä $x(x-1)$ saa minimiarvon, kun $x = \frac{1}{2}$, joka on $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right) = -\frac{1}{4}$. Huomataan myös että

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{-2x/k}\,\mathrm{d}x = \Big/_{0}^{1} -\frac{k}{2}\mathrm{e}^{-2x/k} = \frac{k}{2}\left(1-\mathrm{e}^{-2/k}\right) < \frac{k}{2}.$$

Näin ollen integraalien majoranttiperiaatetta hyödyntäen saadaan

$$\begin{aligned} &\left|\mathrm{e}^{2/k}S_m - R_m\right| = \left|\frac{2^{2m+1}\mathrm{e}^{2/k}}{k^{m+1}\,m!}\int_0^1 \mathrm{e}^{-2x/k}x^m(x-1)^m\,\mathrm{d}x\right| \\ &= \frac{2^{2m+1}\mathrm{e}^{2/k}}{k^{m+1}\,m!}\left|\int_0^1 \mathrm{e}^{-2x/k}x^m(x-1)^m\,\mathrm{d}x\right| \le \frac{2^{2m+1}\mathrm{e}^{2/k}}{k^{m+1}\,m!}\int_0^1 \mathrm{e}^{-2x/k}|x^m(x-1)^m|\,\mathrm{d}x \\ &\le \frac{2^{2m+1}\mathrm{e}^{2/k}}{k^{m+1}\,m!}\left(\frac{1}{4}\right)^m\int_0^1 \mathrm{e}^{-2x/k}\,\mathrm{d}x < \frac{2\mathrm{e}^{2/k}}{k^{m+1}\,m!}\cdot\frac{k}{2} = \frac{\mathrm{e}^{2/k}}{k^m m!}. \end{aligned}$$

Lyhyesti ilmaistuna äskeinen tulos on muotoa

$$\left|\mathrm{e}^{2/k}S_m - R_m\right| < \frac{\mathrm{e}^{2/k}}{k^m m!}. \tag{4.9}$$

Sijoitetaan $M_m\left(\frac{2}{k}\right)$ ja $N_m\left(\frac{2}{k}\right)$ yhtälöihin (4.8), jolloin saadaan

$$\frac{S_m}{k^m} - (4m-2)\frac{S_{m-1}}{k^{m-1}} - \left(\frac{2}{k}\right)^2\frac{S_{m-2}}{k^{m-2}} = 0, \quad \text{eli} \quad S_m = (4m-2)kS_{m-1} + 4S_{m-2}$$

ja vastaavasti $R_m = (4m-2)kR_{m-1} + 4R_{m-2}$.

Jos määritellään termien S_m ja R_m summa ja erotus seuraavasti

$$S_m + R_m = 2^{m+1}T_m, \quad S_m - R_m = -2^{m+1}Z_m, \tag{4.10}$$

niin äskeisten yhtälöiden nojalla

$$\begin{aligned} &2^{m+1}T_m = S_m + R_m = (4m-2)k(S_{m-1}+R_{m-1}) + 4(S_{m-2}+R_{m-2}) \\ &= (4m-2)2^m kT_{m-1} + 2^{m+1}T_{m-2} \quad \text{joss} \quad T_m = (2m-1)kT_{m-1} + T_{m-2}, \end{aligned}$$

ja vastaavasti $Z_m = (2m-1)kZ_{m-1} + Z_{m-2}$.

Äskeisen nojalla saadaan tutun näköinen rekursio

$$\begin{cases} T_m = (2m-1)kT_{m-1} + T_{m-2}, \\ Z_m = (2m-1)kZ_{m-1} + Z_{m-2} \end{cases} \tag{4.11}$$

Todistuksen ensimmäisen osan lopun laskujen nojalla $M_0(2/k) = 1,\ N_0(2/k) = 1,\ M_1(2/k) = 2 - \frac{2}{k}$ ja $N_1(2/k) = 2 + \frac{2}{k}$, joten $S_0 = 1,\ R_0 = 1,\ S_1 = 2k - 2$ ja $R_1 = 2k + 2$. Näiden nojalla

$$\begin{aligned} &T_0 = 1,\ T_1 = k,\ T_2 = 3k^2 + 1,\ T_3 = 15k^2 + 6k, \dots, \\ \text{ja}\quad &Z_0 = 0,\ Z_1 = 1,\ Z_2 = 3k,\ Z_3 = 15k^2 + 1, \dots. \end{aligned}$$

Huomataan että jos vaihdetaan indeksiksi $i = m + 1$, niin nämä ovat ketjumurtoluvun konvergentteja $\frac{T_0}{Z_0}, \frac{T_1}{Z_1}, \frac{T_2}{Z_2}, \dots$, missä ketjumurtoluku on muotoa $\{k; 3k, 5k, 7k, \dots\}$ rekursion (4.11) nojalla. Lisäksi summaamalla ja erottamalla yhtälöt (4.10) keskenään saadaan

$$\begin{aligned} &2S_m = 2^{m+1}(T_m - Z_m) \quad \text{joss} \quad S_m = 2^m(T_m - Z_m) \\ &\text{ja vastaavasti} \quad R_m = 2^m(T_m + Z_m). \end{aligned}$$

Tämän avulla voidaan muuttaa epäyhtälö (4.9) muotoon

$$\begin{aligned} &|e^{2/k}2^m(T_m - Z_m) - 2^m(T_m + Z_m)| = 2^m|(e^{2/k} - 1)T_m - (e^{2/k} + 1)Z_m| < \frac{e^{2/k}}{k^m\, m!}, \\ \text{eli}\quad &|(e^{2/k} - 1)T_m - (e^{2/k} + 1)Z_m| < \frac{e^{2/k}}{(2k)^m\, m!}, \end{aligned}$$

missä epäyhtälön molemmat puolet voidaan jakaa lausekkeella $Z_m(e^{2/k} - 1)$, kun $m \geq 1$. Koska Z_m vastaa ketjumurtoluvun konvergenttien nimittäjää, niin (Z_m) on kasvava jono ja näin ollen

$$\left| \frac{(e^{2/k} - 1)T_m}{(e^{2/k} - 1)Z_m} - \frac{(e^{2/k} + 1)Z_m}{(e^{2/k} - 1)Z_m} \right| = \left| \frac{e^{2/k} + 1}{e^{2/k} - 1} - \frac{T_m}{Z_m} \right| < \frac{e^{2/k}}{(2k)^m\, m!\,(e^{2/k} - 1)Z_m} \to 0,$$

kun $m \to \infty$. Huomataan että tämä yläraja suppenee hyvin nopeasti kun m kasvaa. Tämän tiedon nojalla voitaisiin osoittaa että luku e on *transsendentaalinen*, eli reaaliluku joka ei ole algebrallinen. Ketjumurtoluvun yksikäsitteisyyden nojalla

$$\frac{e^{2/k} + 1}{e^{2/k} - 1} = \{k; 3k, 5k, 7k, \dots\} = k + \cfrac{1}{3k + \cfrac{1}{5k + \cfrac{1}{7k + \ddots}}}. \tag{4.12}$$

4.4 Luvun e ketjumurtoluvun johtaminen

Ollaan saatu jokin Neperin lukuun e liittyvä ketjumurtoluku, joten enään tulee ratkaista luvun e ketjumurtoluku yhtälöstä (4.12). Aloitetaan vähentämällä luku yksi yhtälön (4.12) molemmilta puolilta, jolloin saadaan

$$\frac{e^{2/k}+1}{e^{2/k}-1}-1=\frac{2}{e^{2/k}-1}=(k-1)+\cfrac{1}{3k+\cfrac{1}{5k+\cfrac{1}{7k+\ddots}}}$$

Jos valitaan $k=2$, niin äskeinen yhtälö saadaan muotoon

$$\frac{2}{e-1}=1+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{10+\ddots}},\quad \text{eli}\quad \frac{e-1}{2}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{10+\ddots}}},$$

$$\text{joten}\quad e=1+\cfrac{2}{1+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{10+\cfrac{1}{14+\ddots}}}} \tag{4.13}$$

Seuraavaksi Halutaan muuttaa ketjumurtoluku (4.13) säännölliseksi, eli halutaan luku 2 pois osoittajasta. Merkitään, kuten lauseessa 2.44,

$$\cfrac{2}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\ddots}}}=\cfrac{2}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{y}}},$$

josta saadaan supistamalla seuraava, siinä tapauksessa kun a_1 on parillinen

$$\cfrac{2}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{y}}}=\cfrac{1}{\cfrac{a_1}{2}+\cfrac{1}{2a_2+\cfrac{2}{y}}},$$

ja tapauksessa kun a_1 on pariton niin

$$\frac{2}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{y}}} = \frac{1}{\cfrac{(a_1-1)}{2} + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{2}{(a_2-1) + \cfrac{1}{y}}}}} \tag{4.14}$$

Äskeinen tulos saadaan suoraan laskemalla. Aloitetaan huomaamalla että

$$\begin{aligned}
\frac{2}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{y}}} &= \frac{2}{a_1 + 1 - 1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{y}}} = \frac{2}{(a_1-1) + \cfrac{1 + a_2 + \cfrac{1}{y}}{a_2 + \cfrac{1}{y}}} \\
&= \frac{1}{\cfrac{(a_1-1)}{2} + \cfrac{1 + a_2 + \cfrac{1}{y}}{2\left(a_2 + \cfrac{1}{y}\right)}},
\end{aligned}$$

josta saadaan

$$\begin{aligned}
\frac{1 + a_2 + \cfrac{1}{y}}{2\left(a_2 + \cfrac{1}{y}\right)} &= \frac{1}{\cfrac{2a_2 + \cfrac{2}{y} + 1 - 1}{1 + a_2 + \cfrac{1}{y}}} = \frac{1}{1 + \cfrac{a_2 - 1 + \cfrac{1}{y}}{a_2 + 1 + \cfrac{1}{y}}} \\
&= \frac{1}{1 + \cfrac{1}{\cfrac{a_2 + 1 + \cfrac{1}{y} + 1 - 1}{a_2 - 1 + \cfrac{1}{y}}}} = \frac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{2}{a_2 - 1 + \cfrac{1}{y}}}},
\end{aligned}$$

eli

$$\frac{1+a_2+\dfrac{1}{y}}{2\left(a_2+\dfrac{1}{y}\right)}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{a_2-1+\cfrac{1}{y}}}},$$

mikä osoittaa tuloksen (4.14). Voidaan nyt ratkaista yhtälö (4.13)

$$\mathrm{e}=1+\cfrac{2}{1+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{10+\ddots}}}=1+\cfrac{1}{\cfrac{1-1}{2}+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{6-1+\cfrac{1}{10+\ddots}}}}}$$

$$=1+1+\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{5+\cfrac{1}{10+\ddots}}}=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{5-1}{2}+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{10-1+\cfrac{1}{14+\ddots}}}}}}$$

$$=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{9+\cfrac{1}{14+\ddots}}}}}}.$$

Jokaisessa kohdassa yhtäsuuruus pätee, sillä vaikka tehdään äärellinen muutos, niin lauseen 2.44 perusteella äärellisen osan jälkeen jatkuva ääretön osa voidaan aina korvata asettamalla viimeiseksi osanimittäjäksi reaaliluku. Huomataan että tätä toistamalla päädytään aina tilanteeseen, missä ketjumurtoluvussa on osa

$$\cfrac{2}{2h-1+\cfrac{1}{2(h+2)+\ddots}},$$

missä $h = 3, 5, 7, \ldots$, joten kaikki ykkösestä poikkeavat ketjumurtoluvun osanimittäjät ovat muotoa

$$\frac{2h - 1 - 1}{2} = \frac{2h - 2}{2} = h - 1.$$

Näin ollen luvun e ketjumurtoluku on muotoa $\{2; \overline{1, h - 1, 1}\} = \{2; \overline{1, 2n, 1}\}$, missä n on luonnollinen luku, joten ollaan osoitettu $\mathrm{e} = \{2; \overline{1, 2n, 1}\}$. $\square$

5 Tiivistelmä

Tutkielman tavoitteena on esitellä ketjumurtolukujen määritelmä ja olennaiset perustulokset. Näiden avulla tavoitteena on etsiä ”irrationaalisin luku” ja sen ominaisuudet, sekä todistaa Neperin luvun e ketjumurtolukukehitelmä. Ketjumurtolukujen keskeisin ominaisuus on se että ketjumurtoluvun avulla löydetään hyviä approksimaatioita jollekin ketjumurtolukua vastaavalle reaaliluvulle. Nämä approksimaatiot ovat rationaalilukuja ja ovat erityisesti parhaita rationaaliapproksimaatioita. Tutkielmassa nähdään että jos luku on irrationaalinen, niin parhaita rationaaliapproksimaatioita on äärettömän monta. Näiden approksimaatioiden tarkkuuden nojalla voidaan määrittää luvun irrationaalisuus, eli irrationaalisin luku on täsmälleen se, jolle jokainen paras rationaaliapproksimaatio on mahdollisimman huono. Tämän nojalla tullaan huomaamaan että kultainen leikkaus ϕ on irrationaalisin luku.

Ensimmäiset olennaiset tulokset rationaaliapproksimaatioiden tarkkuudesta tulivat 1840-luvulla, joista tärkein tutkielman kannalta on Liouvillen todistama lause. Liouvillen lauseen nojalla mille tahansa irrationaaliselle algebralliselle luvulle on olemassa algebrallisen luvun asteesta riippuva virheen alaraja, kun lukua approksimoidaan rationaaliluvuilla.

Ketjumurtoluvun määrittely reaaliluvulle toimii rekursiivisella kaavalla, missä otetaan edeltävän luvun desimaaliosan käänteisluvun kokonaislukuosa, ja rekursio alkaa annetulla reaaliluvulla. Rekursion avulla saadaan positiivisista kokonaisluvuista koostuva lukujono osanimittäjiä, joka määrittää annetun reaaliluvun ketjumurtolukukehitelmän.

Ketjumurtoluvusta parhaat rationaaliapproksimaatiot saadaan ottamalla ketjumurtoluvun konvergentti, eli katkaisemalla osanimittäjien ketju jollain indeksillä ja sieventämällä saatu rationaaliluku. Konvergenttien osamäärät määrittyvät fibonaccin lukujonoa muistuttavalla rekursiolla, missä konvergentin osoittaja ja nimittäjä riippuvat ketjumurtoluvun osanimittäjistä. Lisäksi konvergenttien approksimaatiotarkkuudelle löydetään alaraja, samalla tavoin kuin Liouvillen lauseessa.

Osoittautuu että jos valitaan mahdollisimman pienet osanimittäjät, eli jokainen osanimittäjä on yksi, niin löydetään ketjumurtoluku, jonka antamat parhaat approksimaatiot ovat huonoimpia mahdollisia. Tätä ketjumurtolukua vastaa kultainen leikkaus ϕ, joka osoittaa että ϕ on irrationaalisin luku.

Neperin luvun e ketjumurtoluvun todistus perustuu C.D. Oldsin vuonna 1970 julkaistuun todistukseen, joka pohjautuu C. Hermiten todistukseen vuodelta 1873. Todistus käyttää Neperin luvun eksponenttifunktion analyyttisiä ominaisuuksia ja polynomien algebraa. Todistuksessa eksponenttifunktion ja polynomifunktion tulofunktiota integroimalla saadaan polynomit, joiden avulla johdetaan ketjumurtoluvun konvergentteja muistuttava rekursio. Näiden avulla saadaan eräs luvusta e riippuva lauseke ja siihen liittyvä ketjumurtoluku, josta lopulta voidaan ratkaista luvun e ketjumurtoluku.

Viitteet

[1] Abhinav Aggarwal et al. ”A Most Irrational Foraging Algorithm”. en (/11/27/11/27 2019). URL: https://arxiv.org/abs/1911.11973v1.

[2] William J. LeVeque. *Fundamentals of Number Theory*. English. ID: 1900955. New York: Dover Publications, 1996. ISBN: 9780486141503. URL: http://ebookcentral.proquest.com/lib/helsinki-ebooks/detail.action?docID=1900955.

[3] C. D. Olds. ”The Simple Continued Fraction Expansion of e”. *The American Mathematical Monthly* 77.9 (1970), s. 968–974. DOI: 10.2307/2318113. URL: http://www.jstor.org.libproxy.helsinki.fi/stable/2318113.