جمهورية السودان

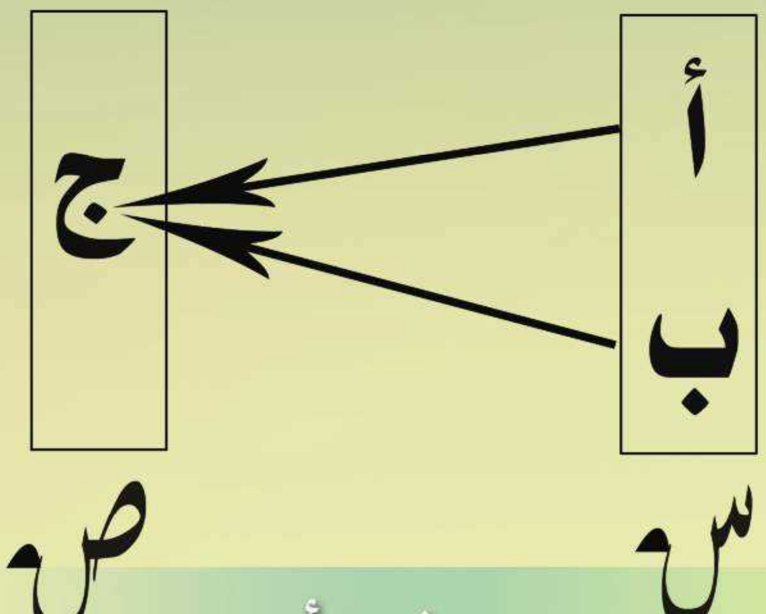
وزارة التعليم العام

المركز القومي للمناهج والبحث التربوي

بخت الرضا

التعليم الثانوي

الرياضيات



الصف الأول

بسم الله الرحمن الرحيم

جمهورية السودان
وزارة التربية والتعليم العام
المركز القومي للمناهج والبحث التربوي
- بحت الرضا -

الرياضيات

للصف الأول الثانوي

تأليف :
الأستاذ : علـــى محمـــد الجـــاك : مختص الرياضيات بالمركز القومي للمناهج
الأستاذ : محمـــد الحســـن طه محمد : كلية التربية جامعة أمد رمان الإسلامية
الأستاذ : عبد الرحمن عبد الكريم ساتى : كلية العلوم التربوية جامعة بخت الرضا
مراجعة :
الدكتور : عبد الغنى إبراهيم محمد : المركز القومي للمناهج والبحث التربوي
الأستاذ : محـــمد الشيـــخ مـــدني : وزير التربية والتعليم بولاية الخرطوم
تنقيح :
د. عبد الله محمود عبد المجيد حسن – المركز القومي للمناهج و البحث التربوي
د. **ابراهيم عثمان حسن – كلية التربية جامعة الخرطوم**
د. شوقي حسين عبد الله – كلية العلوم والتكنولوجيا – حامعة السودان
أ. **عبد الكريم احميدي طه – توجيه الرياضيات – ولاية الخرطوم**
الاخراج الفني : ابراهيم الفاضل الطاهر
تصميم الغلاف : مجدي محجوب – المركز القومي للمناهج والبحث التربوي
الجمع بالكمبيوتر : اشراقة فرح شريف
الجمع بالحاسوب : عبد القادر موسى **محمد** مصطفى – المركز القومي للمناهج ولبحث التربوي

المحتويات

بسم الله الرحمن الرحيم

المقدمة

الحمد لله رب العالمين ، والصلاة والسلام على سيدنا محمد واله وصحبه، **أما بعد**

فيسعدنا ان نقدم لابنائنا الطلبة . كتاب الرياضيات للصف الأول الثانوي الذى تم إعداده وفقا لمنهج الرياضيات للمرحلة الثانوية فى ضوء خطة التطوير التربوي للتعليم الثانوي من جانب ، ومن جانب آخر تمشيا مع التطور الكبير الذى حدث فى محتوى مادة الرياضيات فى النصف الأخير من هذا القرن وفى طريقة عرضها وأسلوبها ولغتها، هذا التطور الذى لم تتح الفرصة لمناهج المرحلة الثانوية فى السودان لمواكبته طوال الفترة الماضية . لذلك حاولنا ان يكون منهج الرياضيات مواكباً للعصرمن حيث الاسلوب والمحتوى وطريقة العرض .

وقد عرضت مادة الكتاب من خلال دروس تضمنت كل منها فكرة واحدة فىالغالب، ويتوافر فى كل درس عدد مناسب من الأمثلة والمسائل لتعميق التدريب فى الصف او تعطى على شكل واجب منزلي . وقد توخينا فى هذا الكتاب ربط موضوعاته بموضوعات كتب الرياضيات فى مرحلة التعليم الأساسي مع الاهتمام بالبرهان الرياضي للحقائق العلمية ومراعاة التوازن بين المفاهيم والمهارات ، أملين ان نكون قد وفقنا فى ذلك كله ، ومرحبين بكل نقد بناء من الطلبة و أولياء أمورهم و معلميهم لإثراء الكتاب وتطويره .

والله الموفق

المؤلفون

الوحدة الأولى

المنطق الرياضي

أهداف الوحدة الأولى

المنطق الرياضي

يتوقع من الطالب بعد دراسة هذه الوحدة أن يكون قادراً على أن :-

١- يتعرف القضية (العبارة) المنطقية .

٢- يتعرف نفى القضية .

٣- يميز القضية .

٤- يتعرف القضية المركبة .

٥- يتعرف الروابط المنطقية .

٦- يجد جدول صواب القضية .

٧- يتعرف القضية الشرطية .

٨- يتعرف القضية الشرطية الثنائية .

٩- يميز القضايا المتكافئة منطقياً .

١٠- يتعرف خواص الروابط المنطقية .

١١- يميز القضايا الصائبة والخاطئة منطقياً .

الوحدة الأولى

المنطق الرياضي

(١ – ١) القضية المنطقية (العبارة)

إن كل فرع من فروع المعرفة له ألفاظه واصطلاحاته الخاصة . إلاّ إنّ الكثير من هذه الألفاظ تستخدم في حديثنا اليومي بمعناها الأصلي أو بمعنى قريب منه ، وأحيانا قد يكون المعنى مختلفاً تماماً . وكثيرا ما نستخدم عند نقل المعرفة تقارير وتعبيرات تصف هذه الألفاظ وتوضح خواصها والعلاقات بينها ، وفي الرياضيات تحتاج إلى سلسلة من الخطوات المرتب بعضها على بعض لكي نصل إلى نتائج صحيحة ، ومن هذه الزاوية يمكن النظر إلى الرياضيات على أساس أنها نظام منطقي .

وكتابة العبارات الرياضية في صور رمزية مع وضع قواعد ثابته سهلة الاستخدام يكون ما يسمى بالمنطق الرياضي . وعلى هذا فالمنطق الرياضي ليس نظرية ولكنه لغة علمية متفق عليها بين الرياضيين . فاللغة العادية (الدارجة) من الجائز أن يختلف القراء في فهمها كلٌ حسب علمه . أمّا في الرياضيات فلا نستطيع أن نترك مفهوم الجمل (العبارات) الرياضية لهذا الخلاف ، لذا وضع العلماء اتفاقات لكي نفسر بها أعداد من الجمل الرياضية التي نستعملها .

ففي اللغة نجد أن الجمل تقسم إلى جمل خبرية وجمل إنشائية . فالجمل الخبرية هي كل جملة تحتمل الصواب أوالخطأ (الصدق أوالكذب) مثل :

مجموع قياس زوايا المثلث ١٨٠° .

يدور القمر حول الأرض .

٦× ٥ = ٣١ .

٧ < ٣

أما الجمل الإنشائية فهي التي لا يمكن أن يوصف قائلها بالصواب أو الخطأ (بالصدق أو الكذب) كجمل الاستفهام والأمر والتعجب والنهى والتمني والنداء مثل :

يا على ، اكتب الدرس

هل أكرمت ضيفك ؟

ما أجمل العطف على اليتامى

لا تؤجل عمل اليوم إلى الغد .

ولما كان من أغراض المنطق تقرير صواب الكلام المعبر عن الأفكار أو خطئة فهو يهتم بدراسة الجمل الخبرية ، التي نسميها قضايا منطقية . أو تقارير أو عبارات

(١ – ١) تعريف :

القضية (أو العبارة) هي جملة خبرية ذات معنى محدد يمكن وصفها بأنها صائبة أو خاطئة ، ولا يمكن أن توصف بأنها صائبة وخاطئة في وقت واحد .

نرمز للقضايا بحروف فنقول مثلا : القضية ب أو القضية جـــــ أو العبـــارة ب أو العبارة جـــ

مثال : (١)

(أ) فالقضية ١ < ٣ جمله خبرية صادقة فهي قضية صائبة .

(ب) أما قولنا : ((للمعادلة ٢س – ٥ = ٠ حل في مجموعة الأعداد الصحيحة)) قضية خاطئة

فإذا كانت القضية ب صائبة فنرمز لذلك بالحرف (ص) أما إذا كانــت خاطئــة فنرمز لذلك بالحرف ((خ)) ونلخص ما تقدم بالجدول (١ – ١)

ب
ص
خ

جدول (١–١)

القضية	قيم الصواب
١ > ٣	ص
٢س –٥ = ٠ ، س ∋ صه	خ

جدول (١ – ٢)

لاحظ أنّ جملة مثل س + ٥ = ٣ حيث س عدد صحيح لا يمكن الحكم بأنها صائبة أو خاطئة ما لم تعطى قيمة معينة للرمز المعين س الوارد فيهـا . لـذا لا يمكن أن نسميها قضية أو تقريرا إلاّ بعد التعويض عن س بقيمة معينة . فلو جعلنا س = −٢ لكانت قضية صائبة ، أما إذا كان س عددا صـحيحا لا يسـاوى −٢ لكانت قضية خاطئة ، تسمى مثل هذه الجملة ، جملة مفتوحة)) .

تمرين (١ – ١)

عين القضايا المنطقية في كل مما يأتي مبينا أيها صائب وأيها خاطىء عندما يكون ذلك ممكنا .

١. اكتب خمسة أعداد من مضاعفات العدد ٣
٢. العدد ٢١ يقبل القسمة على ٧
٣. $^{١}/_{٢} < ^{٢}/_{٣}$
٤. ٣ + ٩ ≠ ٥ + ٦
٥. قطرا متوازي الأضلاع يتناصفان

(١ – ٢) نفى القضية :

إذا أردنا أن ننفى القضية : الجو حار ، نقول الجو ليس حارا (أو ليس الجو حارا) ، أى إذا أدخلنا على الجملة الخبرية إحدى أدوات النفي فأننا نقول أن القضية الناتجة نفيا للقضية الأولى . وقد اتفق على أن يرمز لنفى القضية ب بالرمز ~ ب أو ب⁻ ويقرا نفى ب أو ليس ب فإذا كانت القضية صائبة فان نفيها يكون خاطئا ، وإذا كانت خاطئة فان نفيها يكون صائبا. وفيما يلي جدول صواب ب و ~ ب معا . (جدول ١ – ٣) (أ)

ب	~ ب
ص	خ
خ	ص

جدول (١ – ٣) (أ)

يستخدم أحيانا الرمز(١) بدلا عن ص والرمز (٠) بدلا عن خ كما موضح بالجدول (١ – ٣) (ب)

ب	~ ب
١	٠
٠	١

جدول (١– ٣) (ب)

مثال : (١)

فيما يلي بعض القضايا ونفيها وقيمة صواب كل منها .

القضية	قيمة الصواب
أ: ٨ + ١٢ = ١٧	(خ)
~ أ: ٨ + ١٢ $\neq$ ١٧	(ص)
ب: ٣ > ١	(ص)
~ ب: ٣ $\leq$ ١ أو ٣ $\not>$ ١	(خ)
ج: لندن عاصمة الصين	(خ)
~ ج: لندن ليست عاصمة الصين	(ص)

تمرين (١ –٢)

أكتب نفى كل من القضايا التالية وبين قيمة صواب كل من القضية ونفيها .

أ. ٥ > ٧ .

ب. القاهرة عاصمة الأردن

ج. قطرا المعين يتعامدان

د. مروى مدينة أثرية

ه. ٢ + ٣ $\neq$ ٣ + ٢

و. الزاوية المحيطية المنشاة على قطر الدائرة قائمة

ز. مدينة سواكن تطل على البحر الأبيض المتوسط .

(١ – ٣) جدول الصواب لقضيتين وثلاث قضايا :

علمنا أن الحكم على لصواب قضية أو خطئها من اختصاص العلم الذي تتعلق به هذه القضية . وان اى قضية به يمكن أن تكون صائبة وإلا فهي خاطئة ، ولا يمكن أن تكون صائبة و خاطئة في الوقت نفسه ، وفى النظام نفسه . أما إذا كانت لدينا قضيتان أ ، ب فإننا نجد حالات أربع تتعلق بأوضاع هاتين القضيتين مع بعضها وهى :

١. القضية الأولى صائبة والقضية الثانية صائبة
٢. القضية الأولى صائبة والقضية الثانية خاطئة
٣. القضية الأولى خاطئة والقضية الثانية صائبة
٤. القضية الأولى خاطئة والقضية الثانية خاطئة

ويمكن أن نلخص ما تقدم بالجدول (١ – ٤) التالي :

أ	ب
ص	ص
ص	خ
خ	ص
خ	خ

جدول (١ – ٤)

لاحظ انه توجد أربع حالات لقيم صواب القضيتين .

إذن ما عدد الحالات لقيم صواب ثلاث قضايا ؟

لاحظ هناك ٤حالات في جدول قضيتين أي $٢^{٢}$، وكذلك يوجد في حالة القضايا الثلاث : $٢^{٣}$ = ٨ حالات نلخصها في الجدول (١ – ٥) التالي :

أ	ب	ج
ص	ص	ص
ص	ص	خ
ص	خ	ص
ص	خ	خ
خ	ص	ص
خ	ص	خ
خ	خ	ص
خ	خ	خ

جدول (١ – ٥)

وبصورة عامة يتضمن الجدول الذي يحتوى ن من القضايا على $٢^{ن}$ حالة

القضية المركبة :

تعتبر الأعداد هي اللبنات التي يبنى بها علم الحساب ، وتوجد بينها علاقات وتجرى عليها عمليات كالجمع والطرح والضرب . وتعتبر في الجبر الحدود هي العناصر الأولية التي نبنى منها هذا العلم . أما في المنطق فان الأشياء الأولية التي نبنى منها هذا العلم هي القضايا . وهناك من القضايا ما توصف بأنها بسيطة ، ومنها ما توصف بأنها قضايا مركبة .

فالقضية البسيطة هي عبارة أو تقرير يعبر عن قضية واحدة . أما القضية المركبة فهي التي تنشا من ربط القضايا البسيطة بإحدى أدوات الربط وهى

((و)) ، ((أو)) ، ((إذا كان ٠٠٠ فان)) ، ((إذا وفقط إذا)) ، فالقضايا :

١٢ عدد زوجي .

الأيدروجين اخف وزنا من الأكسجين

العدد ٣ يقسم العدد ١١

١٥ يقبل القسمة على ٤

١٣ < ٧

كلها قضايا بسيطة

أما إذا ربطنا قضيتين أو أكثر بأداة ربط واحدة أو أكثر نحصل على قضية مركبة مثل :

١. يتجمد الماء عند درجة الصفر ويغلى عند درجة ١٠٠ .

٢. تطل أم درمان على النيل الأبيض أو النيل الأزرق .
٣. إذا كان الطالب مجتهداً فإن النجاح حليفيه.
٤. يكون المثلث متساوي الأضلاع إذا وفقط إذا كانت زواياه متساوية .

نلاحظ أن كل قضية مركبة من القضايا السابقة تتركب من قضـيتين بسـيطين ربطتا بحروف معينة مثل ((و)) ، ((أو)) ، ((إذا كان ٠٠٠٠ فان ٠٠٠٠)) ، ((إذا وفقط إذا)) وتسمى هذه الحروف أدوات ربط القضايا المنطقية . اى إذا ارتبطت قضيتان أو أكثر بإحدى أدوات الربط ((و))،((أو)) ،((إذا كان ٠٠٠ فان ٠٠)) ، ((إذا وفقط إذا)) تكون الجملة الناتجة قضية أيضا أما صائبة أو خاطئة .

((لاحظ أن الرابط الأخير يهتم به الرياضيون رغم أن استخدامه غير شائع فـي اللغة))

أن قيمة الصواب لاي قضية مركبة تعتمد على قيم صواب القضايا المكونة لهـا ونوع أداة الربط التي استعملت .

ومن هذا المبدأ يتبين بوضوح انه عند تركيب القضايا لا نضـع فـي اعتبارنـا ضرورة وجود اى نوع من العلاقة سواء في المعنى أو المحتوى بـين بعضـها وبعضها الآخر ولكن ينصب اهتمامنا فقط على قيم صواب القضايا وأداة الربط المستخدمة .

مثلا :

(١) العدد ٣ يقسم العدد ١٢ وهو عدد أولى .

(٢) ٥ + ٤ = ٩ أو الطب علم مفيد للبشرية .

(٣) إذا كانت الأرض اصغر من القمر فان ١ + ١ = ١ .

تمرين (١ – ٣)

(أ) جد القضايا البسيطة المكونة للقضايا المركبة التالية :

(١) إذا نجح محمد في الامتحان فأنني سأقدم له هدية

(٢) احمد تلميذ ذكى ومجتهد .

(٣) الجو ليس حارا والرطوبة عالية .

(٤) إذا كان س = ١ فان س^{٢} – ١ = ٠

(٥) الشمس ساطعة والمطر ينهمر .

(٦) يشتغل جهاز الراديو إذا وفقط إذا سرت في دائرته الكهرباء .

(٧) العدد ١٥ يقبل القسمة على ٤ أو قطرا المعين يتعامدان .

(ب) اربط كل زوج من أزواج القضايا التالية بإحدى أدوات الربط التاليـــة ((و)) ، ((أو))، ((إذا كان ٠٠٠ فان ٠٠٠)) ، ((إذا وفقط إذ)).

(١) ٧ > ٥ ، ٣ > ٦ .

(٢) يحب محمد مجالسة العلماء ، يحب محمد مجالسة الأتقياء .

(٣) أضلاع المثلث متناسبة ، زوايا المثلث متساوية .

(٤) س عدد زوجي ، س يقبل القسمة على ٢ .

الروابط المنطقية :

(١-٤) الرابط "و" :

انظر إلى المثال التالي :

١- القاهرة عاصمة مصر .   ٢- الأرض اكبر حجما من القمر .

كل من هاتين القضيتين صائبة ، فإذا ربطنا بينهما مستخدمين الـرابط «و» نحصل على :

القاهرة عاصمة مصر والأرض اكبر حجما من القمر

ربما تعتقد أن هذه ليست جملة على الإطلاق لأنه لا توجد علاقة واضحة بين مركبتيها ، ولكن بالرجوع إلى مبدأ القضايا المركبة نجد أننا قد وافقنا على أن كل جملة نحصل عليها بربط قضيتين معا با حدى أدوات الربط تعتبر قضية بذاتها لها قيمة صواب فإذا كانت كلٌ من أ ، ب قضية بسيطة ، فان ((أ و ب)) هي قضية مركبة وسنرمز للقضية ((أ و ب)) بالرمز ((أ $\wedge$ ب)) ((ويمثل الرمز $\wedge$ الرابط « و »)) وقد اتفق على أن تكون هذه القضية صائبة إذا كان كل من القضيتين أ، ب صائبة وتكون خاطئة إذا كانت واحدة على الأقل من القضيتين أ ، ب خاطئة .

الجدول (١ – ٦) يبين قيم صدق القضية ((أ ∧ ب)) في الحالات الأربع السابقة. ويسمى هذا الجدول جدول صواب القضية أ ∧ ب

أ	ب	أ ٨ ب
ص	ص	ص
ص	خ	خ
خ	ص	خ
خ	خ	خ

جدول (١ – ٦)

مثال : (١)

(أ) إذا كانت القضيتان :

ب : ١٥ يقبل القسمة على ٣

جـ : ٤ ≠ ٢ + ٢

فإن (ب ٨ جـ) قضية خاطئة لان إحدى القضيتين وهى الثانية خاطئة .

(ب) إن القضية المركبة :١١عدد أولى ٨ قطرا المستطيل متساويان قضية صـــائبة لان كلا من القضيتين البسيطتين صائبة

مثال : افرض أن أ ، ب ، جـ ، د تدل على القضايا التالية :

أ/ ١ + ١ = ٢

ب/ طول محيط الدائرة يساوى $\frac{٥}{٣}$ طول نصف قطرها

ج/ القمر يدور حول المريخ

د/ بعض الأعداد الحقيقية صحيحة

باستخدام معلوماتنا في الرياضيات والفلك نستطيع أنّ نقرّر أنّ

أ. قضية صائبة ، ب. خاطئة ، ج. خاطئة ، د. صائبة

وبالنظر إلى جدول الصواب للرابط ∧ نستنتج أن

أ ∧ ب قضية خاطئة

أ ∧ د قضية صائبة

جـ ∧ ب قضية خاطئة

ب ∧ جـ قضية خاطئة

(أ ∧ ب) ∧ د قضية خاطئة

جـ ∧ (ب ∧ د) قضية خاطئة

ملحوظة :

يجب أن نؤكد أن جدول الصواب للروابط هو مجرد اتفاق على تعيين قيم الصواب للقضايا المركبة بمعلومية قيم صواب القضيتين البسيطتين . ومع ذلك فان هذا الاتفاق قريب للاستعمال العادي لحرف العطف ((و)) .

مثال (٣)

أوجد جدول صواب القضية ~ (~ أ ∧ ب)

الحل :

أن الجدول لمثل هذه القضايا يكون عدد الأسطر أو الصفوف فيه مساويا لعدد حالات عدد القضايا البسيطة الداخلة في تكوين القضية المركبة . ففي هذا المثال يكون عدد الصفوف ٤ لان فيه قضيتين حقيقتين بسيطتين أ ، ب . أما عدد الأعمدة فيكون بعدد الخطوات اللازمة لتكوين الشكل النهائي للقضية مثلا في هذا المثال نحتاج لعمود لكل من القضايا أ ، ب ، أ ، ~ أ ∧ ب ثم ~ (~ أ ∧ ب) إي خمسة أعمدة انظر الجدول (١ – ٧) التالي :

أ	ب	~أ	~ أ ∧ ب	~ (~ أ ∧ ب)
ص	ص	خ	خ	ص
ص	خ	خ	خ	ص
خ	ص	ص	ص	خ
خ	خ	ص	خ	ص

(١-٧)

تمرين (١ – ٤)

(أ) لنفترض أن :

(أ) يعنى : تدور الأرض حول نفسها

(ب) يعنى : زوايا المستطيل حادة

(ج) يعنى : قطرا المعين متعامدان

(د) يعنى : النيل من أنهار قارة آسيا

١. جد قيم الصواب للقضايا التالية :

أ. أ ∧ ب   ب. أ ∧ جـ   جـ. د ∧ ب   د. ~ أ ∧ د

هـ. ~ (أ ∧ ~ جـ)   و. (أ ∧ د) ∧ ب

٢. استخدم الأداة "∧" لربط كل قضيتين متقابلتين مما يلي ثم بين قيمة الصواب للقضية المركبة الناتجة :

أ/ ٢ × ٣ = ٦ ، ٥ × ٤ = ٢٠

ب/ ١ + ٤ = ٥ ، ٧ × ٩ = ٥٤

ج/ ٤ > ٥ ، ٢ < ٣

د/ ١٤ يقبل القسمة على ٥ ، ١٥ عدد زوجي

٣. جد جدول صواب كل من القضايا التالية

أ . ~ (ط ∧ ~ هـ)

ب. (~ س ∧ ص) ∧ ~ ع

(١ – ٥) الرابط ((أو))

هو رابط أداته حرف العطف ((أو)) الذي نرمز له منطقيا بالشكل ((∨)) فإذا ربطنا القضيتين ((ب ، جـ))بأداة الربط ∨ فإننا نحصل على القضية المركبة ب ∨ جـ و تقرأ (ب أو جـ) تعطى اللغة لحرف العطف ((أو)) معان متعددة . أهمها:

أ. التخيير أو الاستبعاد ((مثل قولك سألتحق بكلية الطب أو سألتحق بكلية الهندسة)) وتلاحظ في هذه الحالة انه لا يمكن أن تتحقق هاتان القضيتان معا. أو مثل قولك ((الشكل أ ب جـ مثلث قائم الزاوية أو الشكل أ ب جـ مثلث منفرج الزاوية)) تلاحظ انه لا يمكن في الهندسة التي درستها أن تجد شكلا يحقق هاتين القضيتين معا.

ب. الإباحة أو الشمول : مثل قولك ((أن المثلث أ ب جـ له ضلعان متساويان في الطول أو أن المثلث أ ب جـ قائم الزاوية))

تلاحظ أن المثلث أ ب جـ قد يحقق القضية الأولى فقط وقد يحقق القضية الثانية فقط ، وقد يحقق هاتين القضيتين معا .

بما أن المنطق الرياضي يعطى لكل رمز نستعمله معنى واحدا محددا تمام التحديد ، فقد اتفق على أن يكون المعنى المنطقي للرمز ∨ هو معنى الإباحة الذي يأخذه حرف العطف ((أو)) فإذا ربطنا القضيتين ب ، جـ باداة الربط ∨، فاننا نحصل

على القضية ب ∨ جـ التي هي قضية خاطئة في الحالة الوحيدة التي تكون فيها القضيتان ب ، جـ خاطئتين معا ، وصائبة في الحالات الثلاث الباقية .

وفيما يلي جدول (١ – ٨) يبين قيم صواب القضية ب ∨ جـ

ب	جـ	ب ∨ جـ
ص	ص	ص
ص	خ	ص
خ	ص	ص
خ	خ	خ

جدول (١ – ٨)

مثال : (١)

أن القضية : ((نجح خالد في امتحان اللغة العربية أو في امتحان اللغة الإنجليزية))

هذه القضية تكون صائبة في الحالات الآتية :

١. نحج خالد في امتحان اللغة العربية وفى امتحان اللغة الإنجليزية .
٢. نجح خالد في امتحان اللغة العربية فقط .
٣. نجح خالد في امتحان اللغة الإنجليزية فقط .
٤. وتكون خاطئة في الحالة التالية :

لم ينجح في امتحان اللغة العربية ولم ينجح في امتحان اللغة الإنجليزية .

مثال (٢)

أ. أن القضية المركبة ((العدد ١٥ يقبل القسمة على ٧ أو قطرا المعين متعامدان)) قضية صائبة لان القضية الثانية صائبة .

ب. القضية المركبة ((محيط الدائرة = $\frac{٢٢}{٧}$ نصف قطرها أو العـــدد ٢١ عدد أولى)) قضية خاطئة لان كل واحدة من القضيتين الداخلتين في تركيبها خاطئة .

مثال : (٣)

جد جدول صواب القضية (~ س ∧ ع) ∨ ~ ع

الحل :

س	ع	~ س	~ ع	~ س∧ ع	(~ س ∧ ع) ∨ ~ ع
ص	ص	خ	خ	خ	خ
ص	خ	خ	ص	خ	ص
خ	ص	ص	خ	ص	ص
خ	خ	ص	ص	خ	ص

جدول (١ – ٩)

مثال : (٤)

إذا كانت س هي القضية : المثلث أ ب جـ قائم الزاوية

ص هي القضية : المثلث أ ب جـ متساوي الساقين

ع هي القضية : المثلث أ ب جـ متساوي الأضلاع .

اعد كتابة القضايا التالية مستخدما الرموز س ، ص ، ع .

١. المثلث أ ب جـ قائم الزاوية ومتساوي الساقين .

٢. المثلث أ ب جـ قائم الزاوية وليس متساوي الأضلاع .

٣. المثلث أ ب جـ ليس بقائم الزاوية أو متساوي الساقين .

٤. ليس صحيحا أن المثلث أ ب جـ متساوي الساقين أو متساوي الأضلاع .

الحل :

١. س $\wedge$ ص

٢. س $\wedge$ ~ ع

٣. ~ س $\vee$ ص

٤. ~ (ص $\vee$ ع)

تمرين (١ – ٥)

(١) إذا كانت س هي القضية : احمد طالب ذكى

ط هي القضية : احمد لاعب كرة ماهر

ل هي القضية : احمد طالب مقعد

اعد كتابة القضايا التالية مستعملا الرموز المناسبة :–

أ. احمد طالب ذكى ومقعد .

ب. احمد لاعب كرة ماهر ولكنه ليس ذكيا .

ج. ليس صحيحا أن احمد لاعب كرة ماهر أو مقعد .

د. ليس صحيحا أن احمد لاعب كرة ماهر أو انه ذكى .

(٢) إذا كان : ف : يرمز للقضية ((الفصل شتاء))

ن : يرمز للقضية ((البرد شديد))

اكتب القضايا التالية بالكلمات بدلا عن الرموز ؟

(أ) ف ∨ ن	(ب) ف ∧ ن
(ج) ف ∧ ~ ن	(د) ~ ف ∨ ن
(هـ) ~ ف ∧ ~ن	(و) ~ (ف ∨ ن)
(ز) ~ (ف ∧ ن)	(ح) ~ ف ∨ ~ ن

(٣) أوجد جدول صواب كل من القضايا التالية

أ. ~ س ∨ ~ ط ب. ~ (س ∨ ط) ∧ ~ ط

(١ – ٦) الرابط ((إذا كان ٠٠٠ فان ٠٠٠))

القضية الشرطية :

خذ القضية : إذا كان الشكل أ ب جـ مثلث فان مجموع قياسات زواياه ١٨٠° إن القضية التي تلي ((إذا كان)) وهى الشكل أ ب جـ مثلث تسمى المقدمة أما القضية التي تلي ((فان)) وهى مجموع قياسات زواياه ١٨٠° تسمى التالية . أن

لأداة الربط ((إذا كان ٠٠٠ فان ٠٠٠)) طرقا في الكلام نوضح بعضها بالأمثلـــة التالية .

١. إذا كانت مساحة متوازي الأضلاع تساوى حاصل ضـــرب القاعـــدة فـــي الارتفاع ، فان مساحة المثلث تساوى نصف حاصل ضرب القاعـــدة فـــي الارتفاع .
٢. إذا كان ٢ + ٤ = ٦ فان ٥ + ٦ = ١١ .

لندرس صدق القضية المركبة بأداة الربط ((إذا كان ٠٠٠ فان ٠٠٠)) خذ القضية ع : إذا نجح محمد في الامتحان فأنى سأقدم له هدية)) دعنا ندرس قيم صدق هـــذه القضية

١. نحج محمد في الامتحان وقدمت له الهدية في هذه الحالة تكون ع صائبة
٢. نجح محمد في الامتحان ولم أقدم له هدية . في هذه الحالة تكون ع خاطئة لانى وعدت بالهدية وعندما نجح محمد لم أف بوعدي .
٣. لم ينجح محمد في الامتحان ورغم ذلك قدمت له الهدية وفى هذه الحالة تكون ع صحيحة لانى لم اقل : لن أقدم الهدية لمحمد إذا رسب في الامتحان . أن فشل محمد يترك لي حرية التصرف في إعطائه أو حرمانه الهدية . أما نجاحه فيلزمني بإعطائه الهدية
٤. لم ينجح محمد ولم أقدم له الهدية ، في هذه الحالة تكون ع صحيحة كما أوضحنا في الحالة (٣)

إذا كانت س ، ط قضيتين فإننا نكتب القضية الشرطية : ((إذا كان س فان ط))
هكذا س ← ط وتلاحظ أن القضية المركبة الناتجة تكون خاطئة فقط في الحالة التي تكون فيها المقدمة صائبة والتالية خاطئة .

الجدول التالي يوضح قيم صدق القضية س ← ط

س	ط	س ← ط
ص	ص	ص
ص	خ	خ
خ	ص	ص
خ	خ	ص

جدول (١ – ١٠)

ويمكن أن نستنتج من الجدول (١ – ١٠) ما يلي :

أ. أن الجملة الشرطية : ١٣ > ٧ ← ١٨ > ١٢ قضية صائبة لان المقدمة والتالية قضيتان صائبتان .

ب. أن الجملة الشرطية : مجموع قياس زوايا المثلث ١٨٠° ← المربع يحوى زاوية حادة . قضية خاطئة لان المقدمة صحيحة والتالية خاطئة

ج. أن الجملة الشرطية : ((٣ × ٥ = ١٦ ← المربع يحوى زاوية حادة)) فضية صائبة لان المقدمة خاطئة والتالية خاطئة .

ملاحظات :

١. يجب أن تتذكر أن الجملة الشرطية ليست استنتاجا ومن الممكن أن لا يكون بين المقدمة والتالية اى صلة كما هو الحال في الحالة (جـ) السابقة.

٢. ليس من الضروري أن تكون المقدمة صائبة لتكون الجملة الشرطية صائبة فالجملة الشرطية تكون صائبة عندما تكون المقدمة خاطئة وذلك سواء أكانت التالية صائبة ام خاطئة كما في الجدول .

٣. إذا كان لدينا من المعلومات ما يسمح لنا بان نقول أن القضية : ب ← جـ صائبة وكانت المقدمة ب صائبة فانه يمكننا أن نؤكد أن القضية التالية جـ صائبة اى ، إذا كانت ب← جـ صائبة و ب صائبة فان جـ صائبة

وهذه قاعدة عامة من قواعد المنطق . وحينما تكون المقدمة صائبة والجملة الشرطية صائبة فان القضية المركبة ب ← جـ تكتب على الصورة ب ⇐ جـ وتقرا : ب تقتضى جـ .

مثال : (١)

جد جدول الصواب للقضية (~ ب∧ جـ) ← ب

الحل

ب	جـ	~ ب	~ ب ∧ جـ	(~ ب ∧ جـ) ← ب
ص	ص	خ	خ	ص
ص	خ	خ	خ	ص
خ	ص	ص	ص	خ
خ	خ	ص	خ	ص

جدول (١ – ١١)

تمرين (١ – ٦)

(١) إذا كانت أ ترمز للقضية : الظلام حالك

ب ترمز للقضية : الجو عاصف

عبر عن القضايا التالية مستخدماً رموز الروابط المنطقية .

أ. إذا كان الظلام حالكا فان الجو يكون عاصفا

ب. إذا كان الجو عاصفا فان الظلام يكون حالكا

ج. إذا لم يكن الجو عاصفا فان الظلام يكون حالكا

د. إذا كان الجو عاصفا فان الظلام لا يكون حالكا

ه. ليس صحيحا انه إذا كان الظلام حالكا فان الجو يكون عاصفا

و. إذا كان الجو ليس عاصفا فان الظلام لا يكون حالكا

(٢) اكتب قيمة الصواب لكل من القضايا التالية :

(أ) إذا كان ٣ + ٤ = ٧ فان ٨ > ٥

(ب) ٢ ≠ ٣ ← ٦ + ٥ = ٩

(ج) ٥ ∈ ط ← مساحة الدائرة = π نق^{٢}

(د) إذا كان ٧ + ٥ = ١١ فان ٢ + ٤ = ٣

(٣) أكتب جدول الصواب لكل من القضايا التالية

(أ) أ ← (أ ∨ ب)

(ب) ~ (أ ← ~ ب)

(ج) (أ ∧ ب) ← ب

(١ – ٧) الرابط ((إذا وفقط إذا)) القضية الشرطية الثنائية :

في كثير من الأحيان تقابلنا قضايا مركبة على الصورة :

(أ ← ب) ∧ (ب ← أ) مثلا :

ا ذا كان المثلث ل م ن متساوي الأضلاع فانه يكون متساوي الزوايا . وإذا كان المثلث ل م ن متساوي الزوايا فانه يكون متساوي الأضلاع . وهذه القضية المركبة يمكن كتابتها باختصار كما يلي :

المثلث ل م ن يكون متساوي الأضلاع إذا وفقط إذا كان متساوي الزوايا .

وبصفة عامة :

((أ إذا وفقط إذا ب)) تعنى إذا كان أ فان ب وإذا كان ب فان أ ويرمز للقضية المركبة ((أ إذا وفقط إذا ب)) بالرمز أ ↔ ب

اى أ ↔ ب تعنى (أ ← ب) ٨ (ب ← أ)

ويمكن التوصل إلى قيم صواب القضية أ ↔ ب من الجدول (١ – ١٢) التالي :

أ	ب	أ ← ب	ب ← أ	(أ ← ب) ∧ (ب ← أ)
ص	ص	ص	ص	ص
ص	خ	خ	ص	خ
خ	ص	ص	خ	خ
خ	خ	ص	ص	ص

جدول (١ – ١٢)

ويمكن أن نختصر جدول (١ – ١٢) في الجدول (١ – ١٣) التالي :

أ	ب	أ ↔ ب
ص	ص	ص
ص	خ	خ
خ	ص	خ
خ	خ	ص

جدول (١ – ١٣)

نلاحظ أن أ ↔ ب تكون صحيحة عندما تكون القضيتان أ ، ب صحيحتين معا أو خاطئتين معا .

مثال : (١)

إذا كانت ل هي القضية : الشمس مشرقة

م هي القضية : السحب كثيفة

ن هي القضية : السماء ممطرة

أ. مستعملا الرموز اعد كتابة القضايا التالية

١- السماء ممطرة إذا وفقط إذا كانت السحب كثيفة

٢- ليس صحيحا أن الشمس مشرقة إذا وفقط إذا كانت السماء ممطرة

٣- إذا كانت الشمس مشرقة فان (السحب تكون كثيفة إذا وفقط إذا كانت السماء ممطرة)

ب. عبر عن القضايا التالية لفظيا

١- ~ ل ↔ ن

٢- ~ (م ↔ ل)

٣- (~ ن ↔ ~ ل)

الحل :

١- ن ↔ م

٢- ~ (ل ↔ ن)

٣- ل ← (م ↔ ن)

(ب) (١) الشمس ليست مشرقة إذا وفقط إذا كانت السماء ممطرة

(٢) ليس صحيحا أن السحب كثيفة إذا وفقط إذا كانت الشمس مشرقة

(٣) السماء ليست ممطرة إذا وفقط إذا كانت الشمس ليست مشرقة

مثال : (٢)

أوجد جدول صواب القضية أ ↔ ~ (أ ∧ ب)

الحل :

أ	ب	أ ∧ ب	~ (أ ∧ ب)	أ ↔ ~ (أ ∧ ب)
ص	ص	ص	خ	خ
ص	خ	خ	ص	ص
خ	ص	خ	ص	خ
خ	خ	خ	ص	خ

جدول (١ – ١٤)

تمرين (١ – ٧)

(١) إذا كانت القضية س هي : سعاد بنت نشيطة .

" القضية ص هي : سعاد بنت مجتهدة .

" القضية ع هي : سعاد بنت ذكية .

(أ) عبر عن كلٍ من القضايا التالية مستعملاً الرموز :

١- سعاد بنت نشطة إذا وفقط إذا كانت سعاد بنت مجتهدة .

٢- ليس صحيحا أن سعاد بنت ذكية ونشطة .

(ب) عبر عن كلٍ من القضايا الرمزية التالية لفظياً :

١- (س ∧ ص) ← ع

٢- ~ س ↔ (ص ∨ ع)

(٢) جد جدول صواب القضايا التالية :

أ. (أ ∧ ب) ↔ ~ أ

ب. ~ (أ ← ب) ↔ (أ ∨ ب)

ج. (أ ∧ ب) ↔ (~ ب ∨ جـ)

د. ~ أ ↔ ~ (ب ← جـ)

(١ – ٨) الاقتضاء والتكافؤ :

سنوضح ما نعنيه بالاقتضاء من خلال مناقشة الحالتين الآتيتين :

الحالة الأولى : الاقتضاء في اتجاه واحد

ليكن أ هي القضية س = ٢

ليكن ب هي القضية $س^{٢}$ = ٤

من معلوماتنا في الرياضيات نستطيع أن نكتب :

إذا كانت القضية س = ٢ صائبة فان هذا يقتضى أن يكون (أو يؤدى إلـى أن) القضية $س^{٢}$ = ٤ صائبة أيضا .

ونعبر عن ذلك رمزيا بالصورة :

س = ٢ ⇐ $س^{٢}$ = ٤ اى أ ⇐ ب

ولكن من الواضح انه إذا كانت القضية $س^{٢}$ = ٤ صائبة فانه لا يقتضى بالضرورة أن تكون (اى لا يؤدى إلى أن) القضية س = ٢ تكون صائبة تماماً لان س قد تكون مساوية للعدد $^{-}$ ٢ اى أن س = $^{-}$٢ تحقق المعادلة $س^{٢}$ = ٤ .

ونعبر عن ذلك بالصورة : $س^٢ = ٤ \nLeftarrow س = ٢$

اى ب $\nLeftarrow$ أ

الحالة الثانية :

إذا كانت م هي القضية س = ٣ ، وكانت ن هي القضية ٢س = ٦ . فمن معلوماتنا في الرياضيات نستطيع أن نكتب : س = ٣ يقتضى أن يكون ٢ س = ٦ (بضرب طرفي المعادلة في ٢) . اى م $\Rightarrow$ ن

وكذلك نستطيع أن نكتب : ٢ س = ٦ يقتضى أن يكون س = ٣ (بقسمة طرفي المعادلة على ٢) . اى

ن $\Rightarrow$ م

لما تقدم فأن (م $\Rightarrow$ ن) $\wedge$ (ن $\Rightarrow$ م)

ونعبر عن ذلك رمزيا بالصورة المختصرة م $\Leftrightarrow$ ن

ملاحظة :

١. يعبر الرياضيون أحيانا عن الحالة الأولى بقولهم أن القضية أ شرط كاف لتحقيق القضية ب في حين أن تحقق القضية ب غير كاف لتحقق أ .
٢. ويعبر الرياضيون عن الحالة الثانية بقولهم أن القضية م تكافئ القضية ن . أو بقولهم أن م شرط لازم وكاف لتحقق ن . ويستخدم أحيانا الرمز م $\equiv$ ن (ويقرا م تكافئ ن) .

٣. إذا كانت أ ، ب قضيتين فان الرمز أ $\not\Rightarrow$ ب يعنى نفى الاقتضاء أ $\Rightarrow$ ب والرمز أ $\not\Leftrightarrow$ ب يعنى نفى التكافؤ أ $\Leftrightarrow$ ب

القضايا المتكافئة منطقيا :

نلاحظ أحيانا انه يمكن أن نعبر عن القضية الواحدة بأكثر من صيغة ، وفـــى نفس الوقت تكون القضايا الناتجة لها قيم الصواب نفسها فنقول في هذه الحالـــة أنها متكافئة

خذ مثلا القضيتين :

$ع_١$: إذا كان الجو حارا فان الليل هادى

$ع_٢$: إذا كان الليل ليس هادئا فان الجو ليس حارا

وإذا فرضنا أن س هي القضية : الجو حار

ط هي القضية : الليل هادى

فان $ع_١$ هي القضية س $\leftarrow$ ط

و $ع_٢$ هي القضية : ~ ط $\leftarrow$ ~ س

لندرس احتمالات قيم الصواب للقضيتين $ع_{١}$ ، $ع_{٢}$ من الجدول (١ - ١٥) الأتي:

س	ط	~ س	~ ط	س ← ط	~ ط ← ~ س
ص	ص	خ	خ	ص	ص
ص	خ	خ	ص	خ	خ
خ	ص	ص	خ	ص	ص
خ	خ	ص	ص	ص	ص

جدول (١ - ١٥)

نلاحظ من الجدول (٢ - ١٤) أن قيم صواب $ع_{١}$ (العمود الخامس) هي نفس قيم صواب $ع_{٢}$ (العمود السادس) في كل الحالات ففي هذه الحالة نقول أن $ع_{١}$ تكافئ $ع_{٢}$ منطقيا

تعريف : (١ - ٢)

إذا كان كل من س ، ط قضيتين و كانت قيم الصواب للقضية س هي نفس قيم الصواب للقضية ط في كل حالة . فإننا نقول أن س تكافئ ط منطقيا ونكتب

س ≡ ط أو س ⇔ ط

نلاحظ أننا لا نستطيع معرفة ما إذا كانت القضيتان متكافئتين أم لا إلا إذا حصلنا على جدول صدق كل منهما . ومن الواضح أن :

١. كل قضية تكافىء نفسها ، اى أن علاقة التكافؤ المنطقي تربط كل قضية بنفسها ، س ≡ س وهى ما تعرف بخاصية الانعكاس .
٢. إذا كانت س ≡ ط فان ط ≡ س لاى قضيتين س ، ط وهذه الخاصية تعرف بخاصية التناظر أو التماثل
٣. وإذا كانت س ≡ ط و ط ≡ ل فان س ≡ ل لاى ثلاث قضايا س ، ط ، ل . وهى ما تعرف بخاصية التعدي .

مثال :

جد القضايا المتكافئة من كل زوج من أزواج القضايا التالية :

١. ~ (س ∧ ط) ، ~ س ∨ ~ ط
٢. ~ (س ← ط) ، ~ س ← ~ ط
٣. (س ↔ ط) ∧ م ، (س ← م) ∧ (ط ← م)
٤. س ∧ (ط ∨ م) ، (س ∧ ط) ∨ (س ∧ م)

الحل :

يجب أن نرسم جدول صواب كل من هذه القضايا أولاً :

(١)

س	ط	~ س	~ ط	س ∧ ط	~ (س ∧ ط)	~ س ∨ ~ ط
ص	ص	خ	خ	ص	خ	خ
ص	خ	خ	ص	خ	ص	ص
خ	ص	ص	خ	خ	ص	ص
خ	خ	ص	ص	خ	ص	ص

جدول (١ – ١٦)

لاحظ قيم صدق القضيتين في العمودين الآخرين من الجدول (١ – ١٦) تجد أن :

~ (س ∧ ط) ≡ ~ س ∨ ~ ط

(٢)

س	ط	~ س	~ ط	س ← ط	~ (س ← ط)	~ س ← ~ ط
ص	ص	خ	خ	ص	خ	ص
ص	خ	خ	ص	خ	ص	ص
خ	ص	ص	خ	ص	خ	خ
خ	خ	ص	ص	ص	خ	ص

جدول (١ – ١٧)

من العمودين الآخرين في الجدول (٢ – ١٧) نجد أن

~ (س ← ط)   ≢   ~ س ← ~ ط

تمرين (١ – ٨)

(١) برهن صحة العلاقات التالية مستعينا بجداول الصواب

(١)   ب ← جـ ⇔ ~ جـ ← ~ ب .

(٢)   ~ (س ∨ط) ⇔ ~ س ∧ ~ط .

(٣)   ~ (س ← ط) ≡ س ∧ ~ ط .

(٤)   أ ← ب ≡ ~ أ ∨ ب .

(٥)   ~ (أ ↔ ب) ≡ (أ ∧ ~ ب) ∨ (~ أ ∧ ب) .

(٦)   ~ (أ ∨ ~ ب) ≡ ~ أ ∧ ب .

(٢) اكتب قضايا مكافئة للقضايا التالية

(أ) ليس صحيحا أن احمد لديه كتاب أو مجلة .

(ب) ليس صحيحا أن احمد لديه كتاب ومجلة .

(ج) ليس صحيحا أن الشمس مشرقة أو المطر ينهمر .

(١ – ٩) خواص الروابط المنطقية : إن للروابط المنطقية خواص تشبه خواص العمليات وسنذكر فيما يلي ببعض هذه الخواص .

١– أن كلاً من الرابط ((و)) والرابط ((أو)) إبدالى ، أى

(ب ∧ جـ)   ⇔   (جـ ∧ ب)

(ب ∨ جـ) ⟺ (جـ ∨ ب)

٢- أن كلا من الرابط ((و)) والرابط ((أو)) تجميعي ، اى

(ب ∧ جـ) ∧ ن ⟺ ب ∧ (جـ ∧ ن)

(ب ∨ جـ) ∨ ن ⟺ ب ∨ (جـ ٧ ن)

٣- أداة الربط ((اذا كان ... فان ...)) علاقة متعدية ، اى

(ب ← جـ) ∧ (جـ ← ن) ← (ب ← ن)

٤- الرابط ((و)) يتوزع على الرابط ((أو)) والرابط ((أو)) يتوزع على الرابط ((و)) ، اى

أ ∧ (ب ∨ جـ) ⟺ (أ ∧ ب) ٧ (أ ∧ جـ)

أ ٧ (ب ∧ جـ) ⟺ (أ ∨ ب) ∧ (أ ∨ جـ)

٥- قانونا دي مورغان :

~ (أ ∨ب) ⟺ ~ أ ∧ ~ ب

~(أ ∧ ب) ⟺ ~ أ ∨ ~ ب

يمكن إثبات هذه الخواص باستخدام جداول الصواب كما مر بنا في إثبات التكافؤ في الأمثلة السابقة

(١ – ١٠) القضايا الصائبة والخاطئة منطقيا

بعض القضايا المركبة يكون قيم صوابها صحيحة في كل الحالات : مثل هذه القضايا تسمى قضايا صائبة منطقيا . أو أحيانا تسمى القضايا التكرارية . كذلك نجد

أن بعض القضايا المركبة يكون قيم صوابها خاطئة في كل الحالات ، وهذا النـــوع من القضايا يسمى قضايا خاطئة منطقيا أو قضايا التنـــاقض مـــثلا خـــذ القضـــية س ∨ ~ س هذه القضية صائبة منطقيا كما يوضح جدول الصواب التالي

س	~ س	س ∨ ~ س
ص	خ	ص
خ	ص	ص

جدول(١-١٨)

أما القضية س ∧ ~ س فهي قضية تناقض كما يوضح الجدول (١-١٩) .

س	~ س	س ∧ ~ س
ص	خ	خ
خ	ص	خ

جدول (١-١٩)

تمرين (١-٩)

كون جدول صدق كل من القضايا التالية ثم بين أياً منها تكرارية وأياً منها تناقض

١ / س ⟵ (س ٧ ط)

٢ / (س ⟷ ط) ٨ (~ س ⟷ط)

الوحدة الثانية

المجموعات (الفيئات)

أهداف الوحدة الثانية

المجموعات(الفئات)

يتوقع من الطالب بعد دراسة هذه الوحدة أن يكون قادراً على أن :-

١- يتعرف على مجموعة المجموعات .

٢- يجد تقاطع مجموعتين .

٣- يتعرف خواص التقاطع .

٤- يتعرف اتحاد مجموعتين .

٥- يتعرف خواص الإتحاد .

٦- يتعرّف الفرق بين مجموعتين .

٧- يتعرف خواص عملية الفرق .

٨- يتعرف المجموعة المتممة .

٩- يتعرف خواص المتممة .

١٠- يتعرف بعض الخواص الهامة لعمليتي التقاطع والإتحاد .

١١- يكون جداول الإنتماء لعمليات الإتحاد والتقاطع والفرق والمتممة .

١٢- يتعرف الفترات .

١٣- يتعرف القيمة المطلقة .

١٤- يتعرف الفترات غير المحددة .

الوحدة الثانية

المجموعات أو الفئات

(٢ – ١) مراجعة :

عرفنا أن المجموعة مفهوم هام وأساسي من مفاهيم فروع الرياضيات ويعتبر لغة الرياضيات حيث ان مفاهيم كثيرة مثل العلاقات والدوال تظهر فى كل فروع الرياضيات الأخرى وقد سبق ان درسنا فى المرحلة السابقة معلومات هامة عن المجموعات نلخصها فيما ياتى :

١. المجموعة تجمع من الأشياء محددة تحديدا واضحا لا لبس فيه تسمى عناصر.
٢. نرمز للمجموعة بحروف مكبرة مثل س ، ص ، ع ، هـ .
٣. أما العناصر فيرمز لها بحروف عادية س ، ص ، ع ، .... أو باسماء أو باعداد حسب نوعها .
٤. نكتب المجموعة بطريقة رصد العناصر داخل قوسين من النوع { } ويفصل بين كل عنصر واخر بفاصلة من النوع ، . او تكتب بطريقة الصفة المميزة اذا عرفنا المجموعة بالخواص التى يجب توافرها فى كل عنصر من عناصرها .
٥. يستخدم الرمز . $\ni$ للتعبير عن انتماء عنصر ما الى مجموعة ويستخدم الرمز $\not\ni$ لنفى الانتماء .
٦. لا تتغير المجموعة باعادة ترتيب عناصرها ولا يكرر العنصر الواحد عند كتابة عناصر المجموعة .

٧. المجموعة الخالية هى التى لا تحتوى على اى عنصر ويرمز لها امـــا بالرمز $\varnothing$ أو { } حيث أن المجموعـــة الخاليـــة مجموعـــة جزئية من أي مجموعة .

٨. من المجموعات ما تعرف بانها احادية وهى التى تحتوى على عنصر واحد . أو منتهية اذا امكن حصر عدد عناصرها . او مجموعة غيـــر منتهية وهى التى لا يمكن حصر عدد عناصرها .

٩. بالاضافة الى ما سبق تعلمنا ايضا فى المرحلة السابقة اذا كان لا يوجد عنصر او عناصر مشتركة بين مجمـــوعتين او اكثـــر نســـمى هـــذه المجموعات مجموعات منفصلة .

١٠. المجموعات المتكافئة هي التي تتساوي في عدد عناصرها .

١١. تتساوى مجموعتان سـ ، صـ اذا كان كل عنصر فى سـ ينتمـــى إلى صـ وكل عنصر فى صـ ينتمى الى سـ ونكتب سـ = صـ .

١٢. اذا كانت كل المجموعات الواردة فى دراسة مسألة ما هى اجزاء من مجموعة معينة ، تسمى هذه المجموعة بالمجموعة الشاملة ويرمز لها بالرمز شـ .

١٣. تكون س مجموعة فرعية (جزئية) من صـ (أو سـ محتواه في صـ)، (أو صـ تحوى سـ) إذا كان س $\in$ سـ $\Leftarrow$ س $\in$ صـ .

١٤. نمثل المجموعات غير الخالية باشكال تسمى اشكال ڤن وهى اشـــكال دائرية او بيضاوية او مضلعات مغلقة توضع بداخلها احيانا نقط تـــدل

على عناصر المجموعة ان كانت محدودة العدد وقليلة اما ش فغالبا ما تمثل بمستطيل او مربع .

مجموعة المجموعات :

علمنا أن كل مجموعة غير خالية تتكون من عدة عناصر وعلمنا أن رمز الانتماء ∋ أو عدم الانتماء ∌ يستعمل لبيان ان عنصرا ما ينتمى الى مجموعة أم لا .

هنالك مجموعات اخرى عناصرها مجموعات ، هذه تسمى مجموعة المجموعات ، ونكتب مجموعة المجموعات داخل قوس من النوع { } ولكن اكبر حجما من قوس مجموعات العناصر ، كما نستعمل الاحرف كرمز لمجموعة المجموعات ولكن بصورة مكبرة مثل : س ، ص ، ع .

أمثلة لمجموعة مجموعات

س = { { ٢ } ، [٥ ، ٧ } ، { ل } }

ص = { { ٤ } ، { ٢ } ، {٥ ، ٧} }

ك = { { ٤ ، ٧ } ، { ٢ } ، ∅ }

هـ = {∅ }

م = { { ٥ ، ٦ } }

نستعمل الرمز ∋ ، ∌ للدلالة على الانتماء او عدمه

مثلا : { ٢ ، ٥ } ∋ { ∅ ، { ٢ ، ٥ } ، { ٣ } }

{ ٤ ، ٦ ، ٧ } ∌ { { ٤ ، ٥ } ، { ٢ } ، { ٣ ، ٧ } }

كما نستخدم الرمز ⊂ للدلالة على الاحتواء

$\{\{٢\}\} \subset \{\emptyset ، \{٢\} ، \{٥ ، ٧\}\}$

قوة المجموعة : ((او مجموعة القوة)) :

إذا كانت سـ = { ٤ ، ٧ } . فان جميع المجموعات الجزئية من سـ هى : $\emptyset$ ، { ٤ } ، { ٧ } ، { ٤، ٧ } .

تسمى المجموعة التى عناصرها هذه المجموعات قوة المجموعة سـ = { { ٤ }، { ٧ } ، { ٤ ، ٧ } ، $\emptyset$ } .

إذن قوّة المجموعة سـ هى المجموعة التى عناصرها جميع المجموعات الجزئية منها . ويرمز لهذه المجموعة بالرمز $٢^{سـ}$

$\therefore$ $٢^{سـ}$ = { { ٤ } ، { ٧ } ، { ٤ ، ٧ } ، $\emptyset$ }

مثال : (١)

جد مجموعة القوة للمجموعات الاتية :

١) سـ = { ٢ }

٢) صـ = { ٢ ، ٩ }

٣) ك = { ٤ ، ٧ ، ٥ }

٤) ع = { }

الحـــل :

١) $٢^{سـ}$ = { { ٢ } ، $\emptyset$ }

٢) $٢^{صـ}$ = { { ٢ } ، { ٩ } ، { ٢ ، ٩ } ، $\emptyset$ }

٣) $٢^{ك}$ = { { ٤ } ، { ٧ } ، { ٥ } ، { ٤ ، ٧ } ، { ٤ ، ٥ } ، { ٧ ، ٥ } ، { ٤ ، ٧ ، ٥ } ، ∅ }

٤) $٢^{ع}$ = { { } } او { ∅ }

نلاحظ ان عدد عناصر $٢^{س}$ يساوى $٢^{١}$ = ٢

وأن عدد عناصر $٢^{ص}$ = $٢^{٢}$ = ٤

وأن عدد عناصر $٢^{ك}$ = $٢^{٣}$ = ٨

وبصورة عامة عدد عناصر مجموعة القوة يساوى ٢ مرفوعا الـــى أس يساوي عدد عناصر المجموعة .

تمرين (٢ – ١)

(١) إذا كانت س = { ٤ ، ٥ } جد $٢^{س}$

(٢) إذا كانت ص = { ١ ، ٢ ، ٣ } جد $٢^{ص}$

(٣) إذا كانت س = { ٢ ، ٥ ، ٦ ، ٧ } أى العبـــارات التاليـــة صـــحيحة وايهما خطأ :

(أ) { } $\supset$ $٢^{س}$

(ب) س $\ni$ $٢^{س}$

(ج) ∅ $\ni$ $٢^{س}$

(د) { ∅ } $\ni$ $٢^{س}$

(هـ) { ∅ } $\subset$ $٢^{س}$

(و) س $\supset$ $٢^{س}$

(ز) { ٢ ، ٥ } ∈ س٢

(ح) { ٢ ، ٥ } ⊂ س٢

(ط) { { ٢ ، ٥ } } ⊂ س٢

(٢ – ٢) العمليات على المجموعات :

مر بنا فى مرحلة سابقة بعض العمليات على المجموعات كالاتحاد (∪) ، والتقاطع (∩) . والمتممة ، والفرق وتعريف مبسط لكل من هذه العمليات ، فالمثال التالى قد يذكرك ببعض المعلومات السابقة التى درستها .

مثال : (١)

إذا كانت ش = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ... ، ٩ }

س = { ١ ، ٣ ، ٥ ، ٦ }

ص = { ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٨ }

جد:

(أ) س ∪ ص (ب) س ∩ س

(ج) س – ص (د) ص – س

(هـ) سَ

(و) أرسم المجموعات فى شكل فن ثم ظلل (س ∪ ص)'

الحل :

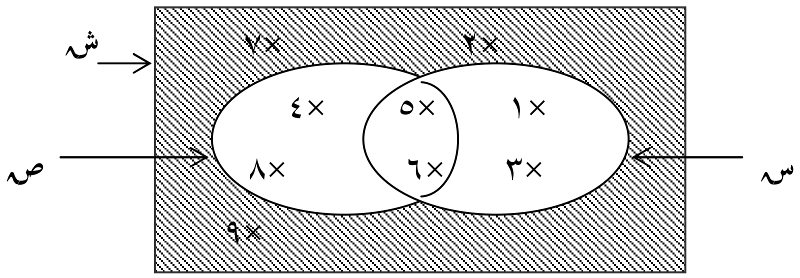
أ. س ∪ ص = { ١ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٨ }

ب. س ∩ ص = { ٥ ، ٦ }

ج. س – ص = { ١ ، ٣ }

د.   صہ – سہ   = { ٤ ، ٨ }

ه.   سہَ = { ٢ ، ٤ ، ٧ ، ٨ ، ٩ }



(سہ ∪ صہ)َ

تمرين (٢ – ٢)

(١)   اذا كانت سہ = { ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٦ } ، صہ = { ١ ، ٣ ، ٦ ، ٨ }

جد : أ)   سہ ∩ صہ   ب) سہ ∪ صہ

(٢)   اذا كانت سہ = { ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، .... ، ١٠ }

سہ = { ٦ ، ٧ ، ٨ }

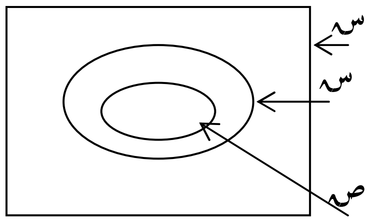
صہ = { ٩ ، ٥ ، ٧ ، ٨ }

جد ثم ظلل :

أ)   سہَ   ب)   صہَ   ج)   (سہ ∪ صہ)َ

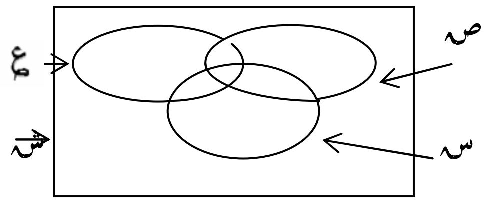
د)   سہ ∩ صہ   هـ)   (سہ ∩ صہ)َ

(٣)   أنقل الأشكال التالية ثم ظلل المطلوب



ص

(أ)



(س ∩ ص ∩ عَ)

(ب)

(٢ – ٣) تقاطع مجموعتين :

علمنا أن تقاطع مجموعتين س، ص هى المجموعة المؤلفة من جميع العناصر التى تنتمى إلى س ، وتنتمى إلى ص فى نفس الوقت ، ويرمز الى تقاطعهما بالرمز :

س ∩ ص نكتب هذا التعريف رمزيا :

س ∩ ص = { س : س ∈ س ∧ س ∈ ص }

لاحظ أننا نستخدم حرف العطف (و) ، فى تعريف التقاطع وقـــارن مع اداة الربط (و) فى المنطق .

ويمكن تعميم تعريف التقاطع إلى ثلاث مجموعات ، أو اكثر فنقول : أن تقاطع عدد من المجموعات هو مجموعة تتألف من العناصر المشتركة بينها جميعا .

إذا كان تقاطع مجموعتين يساوي مجموعة خالية فإن المجمـــوعتين منفصلتان .

مثال : (١)

إذا كانت سـ = { سـ : سـ عدد زوجى أكبر من ١ واقل من ٩ }

صـ = { ٤ ، ٦ }

ع = { ١ ، ٣ ، ٥ }

جد (١) سـ $\cap$ صـ (٢) صـ $\cap$ ع

الحل :

١) سـ $\cap$ صـ = { ٤ ، ٦ }

٢) صـ $\cap$ ع = $\varnothing$

يمكننا تكوين جداول فى المجموعات شبيهه بجداول الصواب فى قضـــايا المنطق تسمى جداول الانتماء ، لان العنصر فى المجموعة سـ اما ان ينتمى الى سـ (س $\in$ سـ) او انه لا ينتمى (س $\notin$ سـ) وليس هناك حالة ثالثة ، فلو اتخذنا عبارة س تنتمى الى سـ ، ورمزنا لها بالرمز $\in$ فى مقابلة قيمة الصواب ص فى المنطق ، وعبارة س لا تنتمى الـــى سـ ورمزنـــا لهـــا بالرمز $\notin$ فى مقابل قيمة الصواب خ . والمجموعات فـــى مقابـــل القضـــايا لأمكننا تكوين جداول الانتماء وباستخدام مصطلحات المنطق نستطيع ان نكتب

س $\in$ سـ $\wedge$ س $\in$ صـ $\Leftarrow$ س $\in$ سـ $\cap$ صـ

س $\in$ سـ $\wedge$ س $\notin$ صـ $\Leftarrow$ س $\notin$ سـ $\cap$ صـ

س $\notin$ سـ $\wedge$ س $\in$ صـ $\Leftarrow$ س $\notin$ سـ $\cap$ صـ

س ∉ سـ ∧ س ∉ صـ ⇐ سـ ∉ س ∩ صـ

يمكن تلخيص ما تقدم فى الجدول (٢ - ١) التالى الذى يسمى جـــدول الانتماء لعملية التقاطع :

سـ	صـ	سـ ∩ صـ
∈	∈	∈
∈	∉	∉
∉	∈	∉
∉	∉	∉

جدول (٢ – ١)

خواص التقاطع :

من تعريف عملية التقاطع تتضح الخواص التالية :

لأى ثلاثه مجموعات سـ ، صـ ، ع مجموعات جزئية من المجموعة الشاملة شـ ، ∅ المجموعة الخالية نجد ان :

(١) سـ ∩ سـ = سـ

(٢) سـ ∩ ∅ = ∅

(٣) سـ ∩ شـ = سـ

(٤) إذا كان سـ ⊂ صـ فان سـ ∩ صـ = سـ

(٥) (سـ ∩ صـ) ⊆ سـ ، (سـ ∩ صـ) ⊂ صـ

(٦) (سـ ∩ صـ) = (صـ ∩ سـ) (الخاصية الابدالية)

(٧) (سہ ∩ صہ) ∩ ع = سہ ∩ (صہ ∩ ع) (الخاصية التجميعية)

يمكن التحقق من هذه الخواص باستخدام أشكال ڤن .

تمرين (٢ – ٣)

(١) جد سہ ∩ ع فى كل من الحالات الاتية :

أ) سہ = { ١،٢،٣،٥ } ، ع = { ١،٣،٥،٧،٨، }

ب) سہ = { ٣،٧،٨ } ، ع = { ٨،٣،٧ }

ج) سہ = { + ، − } ، ع = { × ، ÷ }

د) شہ هى مجموعة ارقام العدد ٤٢٠ ، ع هى مجموعة أرقـــام العدد ٦٠٧ .

(٢) لتكن شہ مجموعة الاشكال الرباعية فى مستو

سہ = { س : س متوازى اضلاع }

ع = { س : س مستطيل }

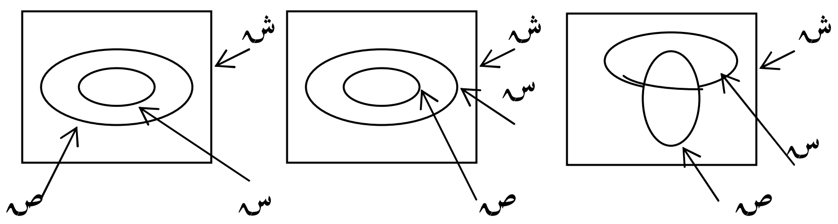
صہ = { س : س معين }

هـ = { س : س مربع }

مم تتكون المجموعات ؟

سہ ∩ ع ، سہ ∩ صہ ، هـ ∩ ع ، هـ ∩ صہ ، ع ∩ ص

(٣) ظلل سہ ∩ صہ فى كل من الاشكال التالية :



(ج) (ب) (أ)

(٢ – ٤) إتحاد مجموعتين :

تعريف :

إتحاد مجموعتين س ، ص هو مجموعة تتألف من جميع العناصر التى تنتمى إلى س أو تنتمى إلى ص أو كليهما ونرمز له بالرمز س ∪ ص ويمكن التعبير عن الاتحاد رمزيا كما يلى :

س ∪ ص ={ س : س ∋ س ∨ س ∋ ص }

لاحظ استخدام حرف العطف (او) فى تعريف عملية الاتحاد وقارن مع أداة الربط (او) فى المنطق . لاحظ ايضا أن العناصر التى لا تنتمى إلى الاتحاد هى تلك التى لا تنتمى إلى أي من المجموعتين

تعريف

إتحاد عدة مجموعات هو مجموعة تتالف من كافة العناصر التى تنتمـــى إلى واحدة منها على الأقل .

ويمكن تكوين جداول الانتماء لعملية الاتحاد كما يلي :

سہ	سہ	سہ $\cup$ صہ
$\ni$	$\ni$	$\ni$
$\ni$	$\not\ni$	$\ni$
$\not\ni$	$\ni$	$\ni$
$\not\ni$	$\not\ni$	$\not\ni$

جدول (٢ – ٢)

خواص الاتحاد :

من تعريف عملية الاتحاد نستنتج مباشرة الخواص التالية :

حيث سہ المجموعة الشاملة ، $\varnothing$ المجموعـــة الخاليـــة سہ ، ـصہ ، ع ، أى ثلاث مجموعات جزئية من شہ :

١. سہ $\cup$ سہ $=$ سہ .

٢. سہ $\cup$ شہ $=$ شہ .

٣. سـ ∪ ∅ = سـ .

٤. سـ ⊆ سـ ∪ صـ ، صـ ⊆ سـ ∪ صـ .

٥. اذا كانت سـ ⊂ صـ فان سـ ∪ صـ = صـ .

٦. سـ ∪ صـ = صـ ∪ سـ (الخاصية الابدالية) .

٧. (سـ ∪ صـ) ∪ ع = سـ ∪ (صـ ∪ ع)(الخاصيةالتجميعية) .

مثال : (١)

إذا كانت سـ = { أ ، ب ، جـ ، د }

سـ = { ب ، جـ ، هـ }

ع = { أ ، هـ }

جد : (١) سـ ∪ ع (٢) صـ ∪ ع

(٣) ع ∪ صـ (٤) سـ ∪ (ص ∪ ع)

(٥) (سـ ∪ صـ) ∪ ع

الحـــل :

١. سـ ∪ ع = { أ ،ب ، جـ ، د ، هـ }

٢. صـ ∪ ع = { أ ،ب ، جـ ، هـ }

٣. ع ∪ صـ = { أ ، ب ، جـ ، هـ}

٤. سـ ∪ (صـ ∪ ع) = { أ ، ب ، جـ ، د } ∪ { أ، ب ، جـ ، هـ}

= { أ ، ب ، جـ ، د ، هـ}

٥. (سـ ∪ صـ) ∪ ع = { أ ، ب ، جـ، د ،هـ } ∪ { أ ، هـ }

= { أ ، ب ، جـ ، د ، هـ }

تمرين (٢ – ٤)

(١) إذا كانت سـ = { ٠ ، ١ ، ٢ ، ... ، ٧ }

صـ = { ٥ ، ٧ ، ٨ }

ع = { ١ ، ٥، ٦ ، ٧ }

جد : (١) صـ ∪ ع (٢) سـ ∪ ∅ (٣) سـ ∪ (صـ ∪ ع)

(٢) إذا كانت : سـ = { ٤ ، ٦ ، ٧ ، ٨ }

صـ = { ٦ ، ٧ }

ع = { ٥ ، ٩ ، ١١ }

أرسم ثم ظلل ما يأتى :

(١) سـ ∩ صـ (٢) سـ ∪ ع (٣) صـ ∩ ع

(٤) سـ ∪ صـ (٥) صـ ∪ ع

(٣) اذا كانت سـ = { س : س رقم من ارقام العدد ٣١٠ }

صـ = { س : س رقم من ارقام العدد ٧٠٨ }

جد: (١) سـ ∪ صـ (٢) سـ ∩ صـ

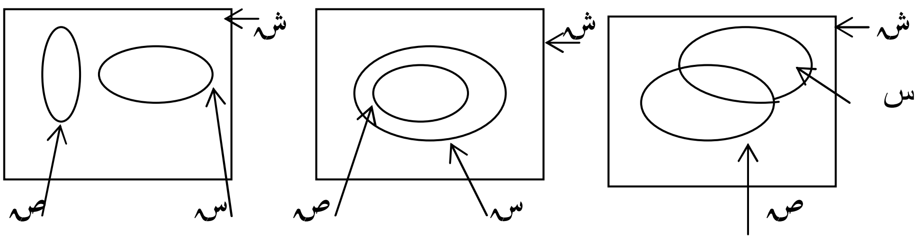
(٤) إذا كانت هـ مجموعة طلاب الصف الاول بمدرستك وكانت

سـ = { س : س ∋ هـ ، س ناجح فى الرياضيات }

صـ = { ص : ص ∋ هـ ، ص ناجح فى الكيمياء }

جد : سـ ∪ صـ .

(٥) ظلل سـ ∪ صـ فى الاشكال التالية :



(ج) (ب) (أ)

(٢ – ٥) الفرق بين مجموعتين :

تعريف :

الفرق بين مجموعتين سـ ، صـ هو مجموعة العناصر التى تنتمى الـــى سـ ولا تنتمى الى صـ . ونرمز لهذا الفرق ب (سـ – صـ) او سـ / صـ
اى : سـ – صـ = { س : س ∈ سـ ∧ س ∉ صـ } .

مثال : (١)

لتكن سـ = { ٠ ، ٣ ، ٥ ، -٧ ، ٩ }

ع = { ٢ ، -٣ ، ٥ ، ٩ }

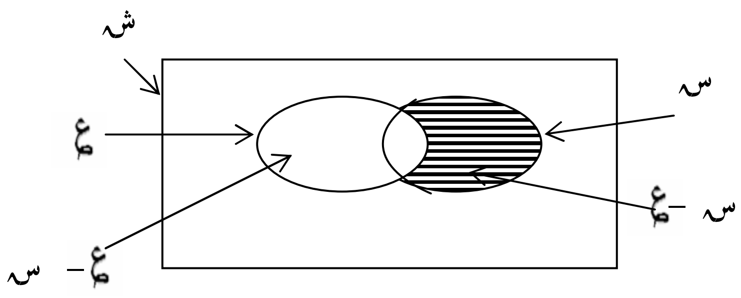
شـ = صـ مجموعة الاعداد الصحيحة .

جد : سـ – ع و ع – سـ ، ثم ظلل سـ – ع فى شكل فن

الحـــل :

س – ع = { ٠ ، ٣ ، –٧ }

ع – س = { ٢ ، –٣ }



الشكل (٢ – ١)

إذا تأملت شكل فن اعلاه الشكل (٢–١) ستجد أن :

(س – ع) ∪ (س ∩ ع) ∪ (ع – س) = س ∪ ع

يمكن بطريقة مشابهة تكوين جدول الانتماء للفرق بين مجموعتين

الجدول (٢ – ٣)

س	ص	س – ص
∈	∈	∉
∈	∉	∈
∉	∈	∉
∉	∉	∉

جدول (٢ – ٣)

خواص عملية الفرق :

يتضح من تعريف عملية الفرق ما يلى ، حيث ش المجموعة الشاملة، س ، ص مجموعتان جزئيتان منها

(١) س − س = ∅

(٢) س − ش = ∅

(٣) س − ص ⊆ س

(٤) س − ∅ = س

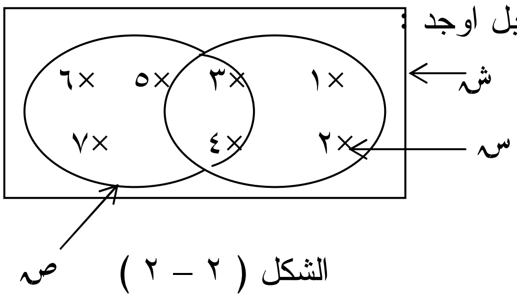
(٥) ∅ − س = ∅

(٦) س − ص ≠ ص − س

يمكن التحقق من صحة هذه النتائج بالاستعانة بأشكال ڤن

تمرين (٢ – ٥)

(١) من الشكل (٥ – ٢) المقابل اوجد :



الشكل (٢ – ٢)

(أ) س (ب) ص

(ج) س ∩ ص

(د) س− ص

(هـ) ص − س

(و) س − (س ∩ ص) (ز) ص − (س ∩ ص)

(ح) (س ∪ ص) − س

(٢) فى الشكل (٢ – ٣) المقابل ظلل المنطقة التى تمثل المجموعات التالية :

(كل مجموعة في شكل)

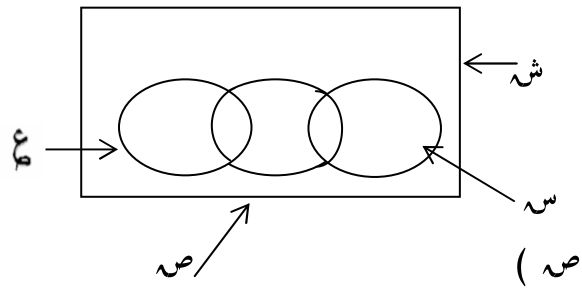
(أ) سـ – صـ

(ب) سـ – ع

(ج) (سـ ∪ صـ)

(د) ع – (سـ ∪ صـ)

(هـ) (سـ ∪ ع) – صـ



الشكل (٢– ٣)

(٣) اذا كانت سـ ، صـ مجموعتين منفصلتين فاثبت ان :

سـ – صـ = سـ

صـ – سـ = صـ

(٢ – ٦) المجموعة المتممة :

ذكرنا فى الدرس السابق أن سـ – شـ =∅ ولكن ما هو شـ – سـ؟ إذا رجعنا إلى تعريف الفرق وتذكرنا أن سـ مجموعة جزئية من شـ نجد ان شـ – سـ هو ما يبقى من عناصر شـ بعد أخذ عناصر سـ منهـا ويسمى الباقى فى هذه الحالة متممة المجموعة سـ ونرمز لها بالرمز سـَ .

تعريف :

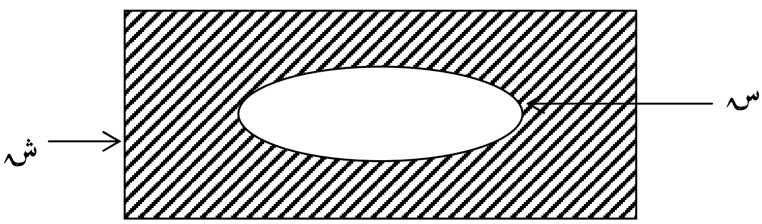
متممة المجموعة س ونرمز لها بالرمز سَ هى مجموعة عناصر المجموعة الشاملة ش التى لا تنتمى إلى س . ونكتب رمزيا

سَ = ش − س أو سَ = { س : س ∈ ش ∧ س ∉ س }

جدول الإنتماء للمجموعة المتممة

س	سَ
∈	∉
∉	∈

فى الشكل (٢ – ٤) أدناه المنطقة المظللة تمثل سَ



الشكل (٢ – ٤)

مثال : (١)

لتكن شـ مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة .

سـ مجموعة الأعداد الزوجية . ماذا تمثل متممة سـ

الحـــل :

سـ تمثل مجموعة الأعداد الفردية .

مثال : (٢)

لتكن سـ = { ١ ، ٣ ، ٥ ، ٧ }

صـ = { ٢ ، ٤ ، ٥ ، ٨ }

شـ = { ١ ، ٢ ، ٠٠٠٠ ، ٩ }

جد : (أ) سـ′ (ب) صـ′ (ج) (سـ ∪ صـ)′ (د) صـ − سـ′

الحـــل :

(أ) سـ′ = { ٢ ، ٤، ٦ ، ٨ ، ٩ }

(ب) صـ′ = { ١ ،٣، ٦، ٧، ٩ }

(ج) (سـ ∪ صـ)′ = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٧ ، ٨ }′ = { ٦ ، ٩ }

(د) صـ − سـ′ = { ٢ ، ٤ ، ٥ ، ٨ } − { ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، ٩ } = { ٥ }

خواص المتمّمة :

من تعريف المتممة يتضح ما يلى :

إذا كانت سـ ، صـ مجموعتين جزئيتين من المجموعة الشاملة شـ نجد أن :

(١) شـ′ = ∅ ، ∅′ = شـ

(٢) (سـ′)′ = سـ

(٣) س ∩ س' = ∅

(٤) س ∪ س' = ش

(٥) س ⊇ ص ⇐ ص' ⊇ س'

مثال : (٣)

مستخدما جداول الانتماء اثبت ان : س − ص = س ∩ ص'

الحل :

نكون جدول الانتماء بطريقة مشابهة لتلك التى اتبعناها فى جداول المنطق علما بان انتماء العنصر لمجموعة ما ينفى انتماءه لمتممتها والعكس صحيح :

س	ص	ص'	س − ص	س ∩ ص'
∋	∋	∌	∌	∌
∋	∌	∋	∋	∋
∌	∋	∌	∌	∌
∌	∌	∋	∌	∌

جدول (٢– ٥)

لاحظ من تطابق العمودين الاخيرين فى الجدول (٢ – ٤) ان :

س − ص = س ∩ ص'

تمرين (٢ – ٦)

١. جد ما ياتى :

أ) سه $\cap$ ∅′   ب) سه – سه′

ج) شه′ $\cup$ سه   د) سه $\cap$ شه′

٢. استخدم شكل فن لاثبات ان سه – صه = سه $\cap$ صه′

٣. لتكن شه مجموعة الاعداد الزوجية من ٢ الى ٢٠

ولتكن سه المجموعة الجزئية من شه المكونة من مضاعفات العدد ٤، صه المجموعة الجزئية من شه المكونة من مضاعفات العدد ٣ ، اكتب :

(أ) سه   (ب) صه   (ج) سه′   (د) صه′

(هـ) (سه $\cup$ صه)′   (و) (سه $\cap$ صه)′

٤. مستخدما جداول الانتماء اثبت مايلى :

(أ) (سه′)′ = سه   (ب) صه – سه′ = سه $\cap$ صه

٥. فصل به مجموعة من الطلاب وعددهم ٥٠ يحتوي على ثلاث مجموعات سه ، صه ، ع . حيث .

سه = مجموعة الطلاب الذين يمارسون كرة القدم وعددهم ٣٥ طالب

صه = " " " " كرة الطائرة وعددهم ٢٠ طالب .

ع = " " " " اللعبتين معاً وعددهم ١٢ طالب .

أحسب كلاً مما يأتي :

١- عدد الطلاب الذين يمارسون كرة القدم فقط .

٢- عدد الطلاب الذين يمارسون كرة الطائرة فقط .

٣- عدد الطلاب الذين لايمارسون كرة القدم .

٤- عدد الطلاب الذين لا يمارسون كرة الطائرة .

٥- عدد الطلاب الذين لا يمارسون أياً من اللعبتين .

(٢ – ٧) بعض الخواص الهامة لعمليتي التقاطع والاتحاد :

إلى جانب الخاصيتين الابدالية والتجميعية اللتين ذكرتا سابقا لكل من عمليتى التقاطع والأتحاد ، هناك خواص هامة نذكرها فيما يلى :

لتكن س ، ص ، ع أى ثلاث مجموعات فان :

(١) عملية التقاطع تتوزع على عملية الاتحاد ، اى

$$\text{س} \cap (\text{ص} \cup \text{ع}) = (\text{س} \cap \text{ص}) \cup (\text{س} \cap \text{ع})$$

(٢) عملية الاتحاد تتوزع على عملية التقاطع :

$$\text{س} \cup (\text{ص} \cap \text{ع}) = (\text{س} \cup \text{ص}) \cap (\text{س} \cup \text{ع})$$

(٣) قانون دومورغان الاول :

$$(\text{س} \cup \text{ص})' = \text{س}' \cap \text{ص}'$$

(٤) قانون دومورغان الثاني :

$$(\text{س} \cap \text{ص})' = \text{س}' \cup \text{ص}'$$

ويمكن إستخدام جداول الانتماء لاثبات هذه الخواص أو أى من الخواص التى سبق ذكرها .

مثال لاثبات قانون دومورغان الاول

(سـ ∪ صـ)َ = سـَ ∩ صـَ

نكون الجدول وفى هذه الحالة نحتاج لجدول لاربعة احتمالات لان عـــدد المجموعات الداخلة فى تكوين هذه العلاقة مجموعتان فقط سـ ، صـ .

اما فى الحالة السابقة لان عدد المجموعات ثلاث سـ ، صـ ، ع فقـــد لزمنـــا تكوين جدول لثمانية احتمالات

سـ	صـ	سـَ	صـَ	سـ ∪ صـ	(سـ ∪ صـ)َ	سـَ ∩ صـَ
∋	∋	∌	∌	∋	∌	∌
∋	∌	∌	∋	∋	∌	∌
∌	∋	∋	∌	∋	∌	∌
∌	∌	∋	∋	∌	∋	∋

جدول (٢ – ٦)

نلاحظ ايضا من تطابق العمودين الاخرين فى الجدول (٢ – ٦) ان :

(سـ ∪ صـ)َ = سـَ ∩ صـَ

وبالمثل يمكن اثبات كثير من الخواص وباستخدام جداول الانتماء :

مثال : (١)

مستعملا جداول الانتماء أثبت أن :

(سـ – صـ) ∩ صـ = $\varnothing$

الحل :

(١)   (سـ − صـ) ∩ صـ = ∅

سـ	صـ	سـ − صـ	(سـ − صـ) ∩ صـ	∅
∈	∈	∉	∉	∉
∈	∉	∈	∉	∉
∉	∈	∉	∉	∉
∉	∉	∉	∉	∉

جدول (٢ – ٧)

من العمودين الاخيرين فى الجدول (٢ – ٧) يتضح ان :

(سـ – صـ) ∩ صـ = ∅

تمرين (٢ – ٧)

مستعملا جداول الانتماء اثبت كلا مما يأتى :

(١) سـ − ∅ = سـ .

(٢) سـ− صـ َ = صـ − سـ َ .

(٣) (سـ ∩ صـ)َ = سـ َ ∪ صـ َ .

(٤) (أ – ب) ∩ (أ ∩ ب) = ∅ .

(٢-٨) الفترات

علمنا سابقا عندما درسنا المتباينات في رحلة سابقة انه اذا كان العــدد الحقيقى س أصغر من العدد الحقيقى ص فاننا نكتب س < ص . وعلى خــط الأعداد تظهر النقطة التى تمثل العدد س على يسار النقطة التى تمثــل العــدد ص. ونعلم كذلك انه اذا كان س ، ص ، ع اعدادا حقيقية فإنه :

١-إما س > ص أو س = ص أو س < ص .

٢-اذا كان س < ص فان س + ع < ص + ع .

٣-اذا كان س < ص ، ع عدد موجب فان س ع < ص ع .

٤-اذا كان س < ص ، ع عدد سالب فان س ع > ص ع .

٥- اذا كان س < ص ، ص < ع فان س < ع .

٦- اذا كان س > ص ، او س = ص نكتــب س ≤ ص واذا كــان س < ص او س = ص نكتب س ≥ ص . ويمكن كتابة ذلــك فــى صورة متباينة واحدة مركبة كالاتى :

س ≤ ص ≤ ع او س ≥ ص ≥ ع .

القيمة المطلقة :

مر بنا سابقا ان القيمة المطلقة لعدد حقيقى س والتى يرمز لها بالرمز | س |هو عدد حقيقى يساوى س اذا كان س عددا موجبــا ويســاوى – س اذا كان س عددا سالبا . ويساوى صفرا اذا كان س = ٠

ونكتب ذلك رمزيا كالاتى :

| س | = { س اذا كان س > ٠
٠ اذا كان س = ٠
− س اذا كان س < ٠

وهذا يعنى أن القيمة المطلقة لعدد حقيقى هى دائما عدد موجب أو صفر

امثلة :

| ٢ | = ٢

| ٧⁻ | = ٧

| ٠ | = ٠

الفترات :

إذا اعتبرنا كل مجموعة من مجموعات الأعداد الآتية مجموعة جزئية من ح (مجموعة الاعداد الحقيقية) :

(١) أ$_{١}$ = { س : ٣ < س < ٧ }

(٢) أ$_{٢}$ = { س : ٣ ≤ س ≤ ٧ }

(٣) أ$_{٣}$ = { س : ٣ < س ≤ ٧ }

(٤) أ$_{٤}$ = { س : ٣ ≤ س < ٧ }

مثل هذه المجموعات تطلق عليها اسم فترات فاذا رمزنا لها بالرمز ف$_{١}$ ، ف$_{٢}$ ، ف$_{٣}$،ف$_{٤}$ ، بالترتيب يمكن اعادة كتابتها بالطريقة التالية :

ف$_{١}$ = (٣ ، ٧) وتسمى فترة مفتوحة .

ف$_{٢}$ = [٣ ، ٧] وتسمى فترة مغلقة .

ف$_٣$ = (٣ ، ٧] وتسمى فترة مفتوحة مغلقة .

ف$_٤$ = [٣ ، ٧) وتسمى فترة مغلقة مفتوحة .

هذه الفترات تحتوى على النقاط التى تقع بين ٣ ، ٧ مع إمكانية وجود أحدهما او كليهما ضمن المجموعة (الفترة) كما يتضح من الفترات السابقة ففى الفترة ف$_١$ الممثلة للمجموعة ((أ)) نجد ان ٣ ، ٧ لا تنتميان لها ، لذلك سميت فترة مفتوحة ومثلت اقواسها بالشكل ( ) واما الفترة ف$_٢$ فتعتبر فترة مغلقة ، لانها تحتوى على النهايتين ٣، ٧ ونكتب اقواسها بالشكل [ ] . اما الفترة ف$_٣$ فتعتبر مفتوحة مغلقة ، لان النهاية ٣ لا تنتمى للفترة بينما تنتمي لها النهاية ٧ ولذلك نكتب اقواسها على الصورة ( ] اما الفترة ف$_٤$ فهى فترة مغلقة مفتوحة لانتماء النهاية ٣ لها وعدم انتماء النهاية ٧ لها فاقواسها تكتب بالشكل [ ) احيانا نستخدم طريقة كتابة الاقواس التالية :

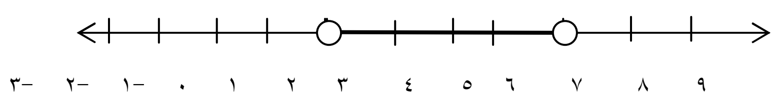
للفترة المغلقة نكتب : [أ ، ب] ، وللمفتوحة يكتب :] أ ، ب [

وللمغلقة المفتوحة : [أ ، ب [، وللمفتوحة المغلقة :] أ ، ب]

ويمكن ان نمثل الفترات على خط الاعداد بالصورة التى تمثل بها المتباينات :

أنظر الشكل (٢ – ٧) لتمثيل الفترات السابقة على خط الاعداد ولاحظ انتماء النهايتين للفترة او عدم انتمائها كيف يمثل .

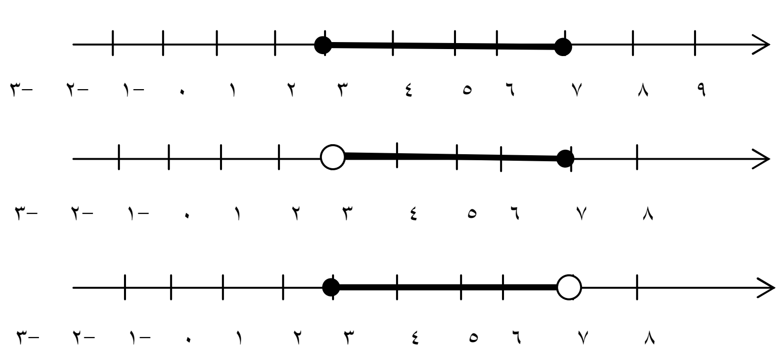
ف$_١$



ف$_٢$

ف$_٣$

ف$_٤$



الشكل (٢ – ٧)

الفترات غير المحددة :

إن بعض المجموعات تمثل فترات غير محددة كما تبدو من المجموعات التالية :

س$_١$ = { س : س > ١ }

س$_٢$ = { س : س ≥ ٣ }

س$_٣$ = { س : س < ٢ }

س$_٤$ = { س : س ≤ ٥ }

س$_٥$ = { س : س ∈ ح }

إذا عبرنا عن المجموعات السابقة كفترات تكتب على الصورة التالية :

ف$_١$ = (١ ، ∞)

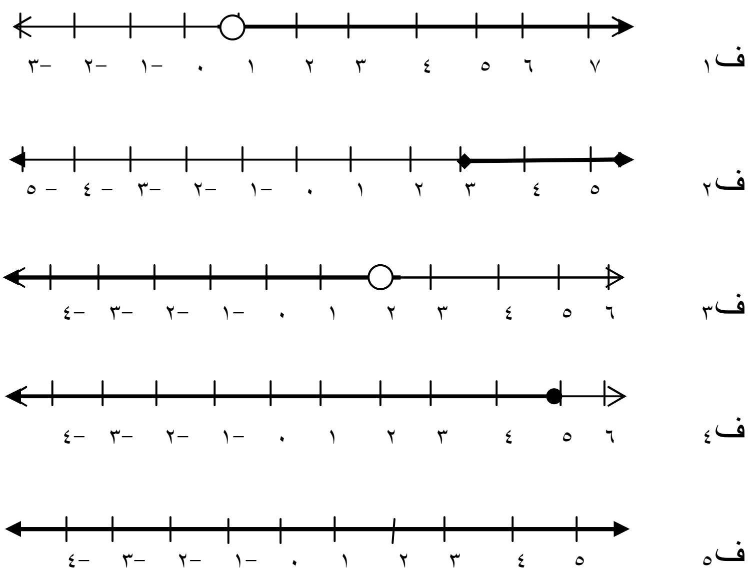
ف$_٢$ = [٣ ، ∞)

ف$_٣$ = (− ∞ ، ٢)

$ف_4 = (-\infty ، 5]$

$ف_5 = (-\infty ، +\infty)$

نرسم الفترات غير المحددة على خط الاعداد هكذا (الشكل ٢ – ٨)



الشكل (٢ – ٨)

تمرين (٢ –٨)

(١) عبر عن المجموعات التالية فى صورة فترات

(أ) س = { س : س عدد حقيقى بين ٥ ، ١١ }

(ب) ص = { س : ٢ < س ≤ ٧ ، س ∈ ح}

(ج) ع = { س : س ≤ ٦ }

(د) هـ = { س : س عدد حقيقى موجب }

(هـ) و = { س : س > ٢ و س < ٥ }

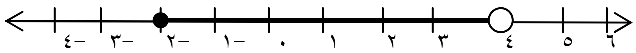
(٢) مثل الفترات التالية على خط الاعداد :

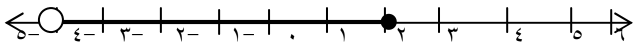
(أ) [−٢ ، ٤) (ب) (٠ ، + ∞)

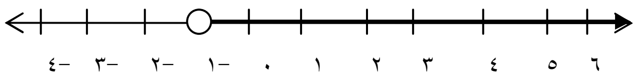
(ج) [٣ ، ٥] (د) (−∞ ، ٧)

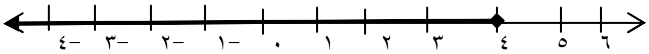
(هـ) [٣ ، +∞) (−∞ ، −٢]

(٣) أكتب الفترات الممثلة على خطوط الاعداد التالية :

ف١


ف٢


ف٣


ف٤


تمرين عام (٢ – ٩)

(١) إذا كانت ش = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ..... ، ٩ }

س = { ١ ، ٢ ، ٣، ٤ }

ص = { ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ }

ع = { ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ }

جد:

(١) س' (٢) ص' (٣) س ∩ ص

(٤) س ∪ ص (٥) (س ∩ ص)' (٦) س' ∩ (ص ∪ ع')

(٧) ص' ∪ (س ∩ ع)'

(٢) إذا كانت ش = { أ ، ب ، جـ ، د ، هـ ، و ، ز }

س = { أ ، ب ، جـ ، د ، هـ }

ص = { أ ، جـ ، هـ ، ز }

ع = { ب ، هـ ، و ، ز }

جد : (أ) س' – ص (ب) (س – ع)'

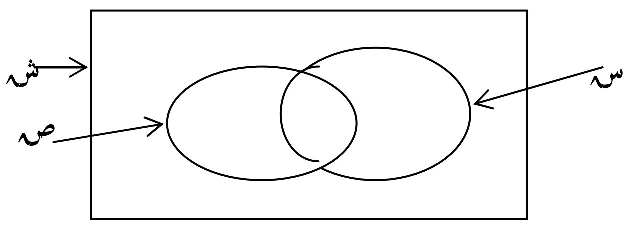
(جـ) ع' ∩ س (د) (س ∩ ص')'

(هـ) (س – ص')'

(٣) أعد رسم شكل فن بالشكل (٢ – ٩) التالى ثم ظلل فى كل حالة

(أ) ص' (ب) (س ∪ ص)' (ج) س' ∪ ص'

(د) (س ∩ ص)'



الشكل (٢–٩)

(٤) مستعملا جداول الانتماء اثبت ما ياتى :

(أ) (سـ ∪ صـ) ∩ (سـ ∪ صـَ) = سـ

(ب) (سـ ∩ صـ) ∪ (سـ ∩ صـَ) = سـ

(ج) (شـ ∪ صـ) ∩ (سـ ∪ ∅) = سـ

(د) سـ ∪ (سـ ∩ صـ) = سـ ∪ صـ

(هـ) سـ ∩ (سـ ∪ صـ) = سـ ∩ صـ

(و) (سـ ∩ شـ) ∩ (∅ ∪ سـَ) = ∅

(ز) سـ ∪ (سـ ∩ صـ) = سـ

(ح) سـ ∩ (سـ ∪ صـ) = سـ

(٥) عبر عن المجموعات التالية فىصورة فترات ومثلهاعلى خط الاعداد

(أ) سـ = { س : ٥ ≤ س < ١٠ }

(ب) صـ = { س : ‾٣ < س ≤ ٢ }

(ج) ع = { س : س > ـ١ }

الوحدة الثالثة

العلاقات

أهداف الوحدة الثالثة

العلاقات

يتوقع من الطالب بعد دارسة هذه الوحدة أن يكون قادراً على أن :-

١- يتعرف الزوج المرتب .

٢- يتعرف حاصل ضرب الديكارتي .

٣- يتعرف مفهوم العلاقة .

٤- يتعرف العلاقة العكسية .

٥- يتعرف علاقة يقسم .

٦- يتعرف العلاقة الإنعكاسية .

٧- يتعرف العلاقة المتماثلة .

٨- يتعرف العلاقة المتعدية (الناقلة) .

٩- يتعرف علاقة التكافؤ .

الوحدة الثالثة

العلاقات

مراجعة :

(٣ – ١) الزوج المرتب :

تعلمنا فى المرحلة السابقة ان الزوج المرتب يتكون من عنصرين س ، ص . يسمى العنصر الاول المكون (المسقط) الاول ، والعنصر الثانى المكون (المسقط) الثانى ويكتب هكذا (س ، ص) . كما علمنا اهمية الترتيب عند كتابة الزوج المرتب. فالزوج المرتب (٥، ٧) ≠ (٧ ، ٥) وعموما فان (س، ص) ≠ (ص، س) إلا إذا كان س = ص كما أن (س ، ص) ≠{ س، ص} لانهما شيئان مختلفان ، كما يجب الا نستعمل عبارات مثل س ∍ (س ، ص) . أما س ، ص فليس بزوج مرتب بينما (٣ ، ٣) ، (س ، س) ازواج مرتبة.

مثال : (١)

إذا كان (٥ ، ص – ١) = (س + ٢ ، ٣) . اوجد قيم س ، ص

الحل :

(٥ ، ص –١) = (س + ٢ ، ٣)

س + ٢ = ٥

⇐ س = ٥ – ٢ = ٣

ص – ١ = ٣ ⇐ ص = ٣ + ١ ∴ ص = ٤

مثال : (٢)

إذا كان (٢ ، س − ص) = (س + ص ، ٦) جد قيمة كل من س ، ص

الحل :

من خاصية تساوى الازواج المرتبة

س + ص = ٢ (١)

س − ص = ٦ (٢)

بالجمع ٢ س = ٨ ⇐ س = ٤

وبالتعويض فى (١)

٤ + ص = ٢ ⇐ ص = ٢ − ٤

ص = −٢

تمرين (٣ − ١)

جد قيمة كل من س ، ص فيما ياتى :

١. (س −١ ، ٥) = (٢ ، ص + ١) .
٢. (٢ س + ٣ ، ١) = (٥ ، ٣ ص − ٤) .
٣. (٣ ، س − ص) = (س + ص ، ١) .
٤. (٢س + ص ، ٣) = (٧ ، ٣س − ص) .

٥. (ص – ٢ ، ٢ س + ١) = (س – ١ ، ص + ٢) .

٦. (س + ٣ص ، ١١) = (١ ، س – ٢ص) .

٧. (س + ٥ص ، ٨) = (٤ ، ٢س – ٥ص) .

(٣ – ٢) حاصل الضرب الديكارتى :

إذا كانت سـ ، صـ مجموعتين ، نعلم ان سـ × صـ تعرف بحاصل الضرب الديكارتى لـ سـ ضرب .صـ وهى مجموعة كافة الازواج المرتبة التى ينتمى المكون الاول من كل زوج منها للمجموعة س ، وينتمى المكون الثانى للمجموعة ص ، اى سـ × صـ = { (س ، ص) : س ∋ سـ ∧ ص ∋ صـ }

أمثلة :

١. إذا كان سـ = { ٥ ، ٧ } ، صـ = { ٢ ، ٣ }

فإن سـ × صـ = { (٥ ، ٢) ، (٥ ، ٣) ، (٧ ، ٢) ، (٧ ، ٣) }

بينما صـ × سـ = { (٢ ، ٥) ، (٣ ، ٥) ، (٢ ، ٧) ، (٣ ، ٧) }

٢. وإذا كان سـ = { ٢ ، هـ } فإن سـ × سـ = { (٢ ، ٢) ، (٢ ، هـ) ، (هـ ، ٢) ، (هـ ، هـ) }

٣. وإذا كان سـ = { أ }

فإن سـ × سـ = { (أ ، أ) }

تمرين (٣ – ٢)

(١) إذا كان سـ = { ٦ ، ٨ } ، صـ = { ٢ ، ٣ ، ٤ } ، جد :

(أ) سـ × صـ

(ب) صـ × سـ

(ج) سـ × سـ

(د) صـ × صـ

(٢) إذا كان ع = { ٩ ، ٢ } اوجد

(أ) ع × { ٥ } (ب) { ٢ ، ٥ } × ع

(ج) ع × { ٠ } (د) ع × ع

(٣) إذا كان سـ = { ٣ ، ٤ ، ٥} ، صـ = {٤ ، ٥ ، ٦} . أوجد :

١- (سـ ∪ صـ) × سـ .

٢- (س ∩ ص) × صـ .

٣- (سـ – صـ) × (صـ – سـ) .

(٣ – ٣) العلاقة :

عرفنا سابقا انه اذا كانت لدينا مجموعتان سـ ، صـ فانه يمكن تعريف وتكوين علاقة من سـ الى صـ اما بقاعدة اقتران محددة او بمخطط سهمى . فإذا كان ع : سـ ← صـ فإن المجموعة الأولى سـ تسمى مجال العلاقة بينما تسمى المجموعة الثانية صـ المجال المقابل للعلاقة . اما مجموعة صور المجال

الموجودة فى المجال المقابل فتسمى مدى العلاقة . بما ان العلاقة هى مجموعة عناصرها أزواج مرتبة ، فإن هذه الأزواج المرتبة تسمى بيان العلاقة . وقد مر بنا تعريف العلاقة و هو : العلاقة من مجموعة غير خالية سـ الى مجموعة غير خالية صـ هى مجموعة جزئية من سـ × صـ . وهذا يعنى أنه إذا كان (س ، ص) ∍ ع ، فإن ذلك يكتب عادة س ع ص ويقرأ س ترتبط مع ص بالعلاقة ع . نفى العبارة س ع ص هو س ع̸ ص او (س ، ص) ∌ ع .

إذا كانت المجموعة صـ = سـ يبقى التعريف نفسه ، وتكون العلاقة من مجموعة سـ الى سـ نفسها . وفى هذه الحالة نقول ان العلاقة معرفة على المجموعة سـ .

تعريف : (٣-١)

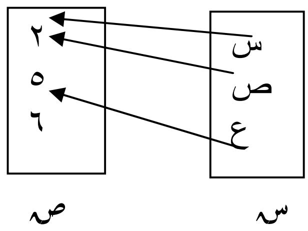
العلاقة على مجموعة سـ هى مجموعة جزئية من حاصل الضرب الديكارتى سـ × سـ . والرمز (س ، ص) ∍ ع او س ع ص يعنى ان العنصر سـ من سـ يرتبط مع العنصر ص من سـ بالعلاقة ع. وتكون المجموعة سـ مجال العلاقة ومجالها المقابل .

مثال : (١)

إذا كانت سـ = { س ، ص ، ع } ، صـ = { ٢ ، ٥ ، ٦ }

وكانت ع علاقة من سـ الى صـ معرفة بالمخطط السهمى : فى الشكل

في الشكل (٣ – ١)



الشكل (٣ – ١)

نجد ان :

١. ع = { (س ، ٢) ، (ص ، ٢) ، (ع ، ٥) } .

٢. س مجال العلاقة ، ص مجالها المقابل .

٣. { ٢ ، ٥ } هى مدى العلاقة .

٤. (س ، ٢) ∋ ع أو س ع ٢ بينما (ص ، ٦) ∌ ع أو ص ع̸ ٦ .

ع ⊃ س × ص

ع$^{-١}$ = { (٢ ، س) ، (٢ ، ص) ، (٥ ، ع) } وتسمى العلاقة العكسية .

مثال : (٢)

إذا كانت س = { ٧ ، ٩ ، ١٥ }

ص = { ٩ ، ١١ ، ١٦ }

ع$_1$ = { (س ، ص) : س < ص }

ع$_2$ = { (س ، ص) : س + ٢ = ص }

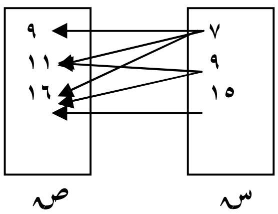
أكتب $ع_١$ ، $ع_٢$ فى صورة مجموعة من الأزواج المرتبة ثم أرسم المخطط السهمى لكل علاقة .

الحل :

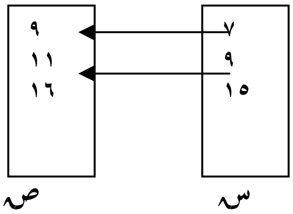
$ع_١$ = { (٧ ، ٩) ، (٧ ، ١١) ، (٧ ، ١٦)، (٩ ، ١١) ، (٩ ، ١٦) ، (١٥ ، ١٦) }

$ع_٢$ = { ((٧ ، ٩) ، (٩ ، ١١) }

المخططان السهميان (٣ – ٢) ، (٣ – ٣) يمثلان العلاقتين $ع_١$ ، $ع_٢$



الشكل (٣ – ٢)



الشكل (٣ – ٣)

مثال (٣)

إذا كانت س = { ٢ ، ٤ ، ٥ }

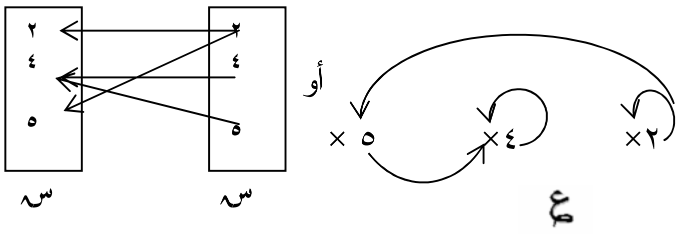
وكانت ع علاقة على المجموعة س حيث :

ع= { (٢ ، ٢) ، (٢ ، ٥) ، (٤ ، ٤) ، (٥ ، ٤) }

أرسم ع بمخطط سهمى

الحل :

المخطط السهمى بالشكل (٦ - ٤) يمثل العلاقة ع



الشكل (٣ - ٤)

الشكل يسمى عروة وهو سهم من العنصر الى نفسه

تمرين (٣ - ٣)

(١) إذا كانت س = { ٣ ، ٨ ، ٩ } ، ص = { ٤ ، ٦ ، ١٠ }

كون مخططا سهميا يمثل العلاقة (اكبر من) من المجموعة س الى المجموعة ص .

(٢) إذا كانت س = { ٢ ، ٥ ، ٧ ، ١١ } . كون مخططا سهميا يمثل علاقة (اصغر من) على المجموعة س .

(٣) إذا كانت ص = { ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٨ ، ١٠ } . أرسم مخطط العلاقة (س ضعف ص) على المجموعة ص .

(٤) اذا كان س = { ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، ١٠ } ، ع : س ← س اكتب ع = { (س ، ص) : س + ص > ٩ ، س ، ص ∋ س } في شكل أزواج مرتبة .

(٥) اذا كانت سـ = { ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٩ } ، ع علاقة على سـ بحيث
ع = { (س ، ص) : س٢ = ص } اكتب ع في شكل أزواج مرتبة .
(٦) إذا كانت ~ = { -٢ ، -١ ، ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ }
ك = { ١ ، ٢ ، ٥ ، ١٠ }
ع : ~ ← ك حيث ع (س) = س^{٢} +١ لكل س ∋ ~
أ- أكتب ع في صورة مجموعة من الأزواج المرتبة .
ب- أرسم المخطط السهمي الذي يبين العلاقة ع .
(٧) اذا كانت سـ = { -٢ ، ٠ ، ٣ } ، صـ = { -٧ ، -١ ، ٨ }
ع علاقة من سـ الى صـ بحيث
ع = { (س ، ص) : ص = ٣ س - ١ ، س ∋ سـ ، ص ∋ صـ }
أكتب ع بذكر عناصرها .

(٣ - ٤) بعض العلاقات الهامة :

(١) علاقة يقسم (القســمة) :نقول ان العدد الصحيح س يقسم العدد الصحيح ص اذا كان العدد ص يقبل القسمة على العدد س

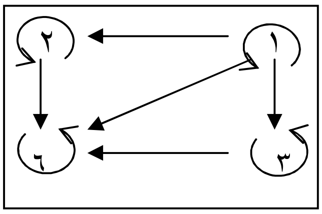
فمثلا ٤ تقسم ١٢ لان ١٢ ÷ ٤ = ٣
٥ تقسم ٥ لان ٥ ÷ ٥ = ١

مثال : (١)
إذا كانت سـ = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٦ }

أرسم مخططا سهميا يمثل علاقة يقسم على المجموعة س

الحل :

الشكل (٣ – ٥) يمثل المخطط السهمى .



الشكل (٣– ٥)

تلاحظ انه توجد عروة عند كل نقطة ، لان كل عدد يقسم نفسه ، ويوجد سهم من كل عدد قاسم الى العدد المقسوم احيانا يرمز لعلاقة يقسم بالرمز مثلا س تقسم ص تكتب : س | ص

مثال : (٢)

إذا كانت ص = { ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٨ ، ٩ }

وكانت ع = { (س ، ص) : س | ص ، س ، ص ∋ ص }

اكتب ع فى صورة ازواج مرتبة

الحل :

ع = { (٢ ، ٢) ، (٣ ، ٣) ، (٤ ، ٤) ، (٥ ، ٥) ، (٨ ، ٨) ،
(٩ ، ٩) ، (٢ ، ٤) ، (٣ ، ٩) ، (٢ ، ٨) ، (٤ ، ٨) }

مثال : (٣)

إذا كانت س = { ٣ ، ٥ ، ٦ } ، ص = { ٤ ، ٦ ، ١٢ }

وكانت ع = { (س ، ص) : س | ص ، س ∈ س ، ص ∈ ص }

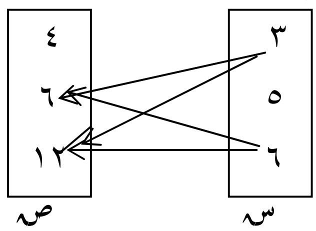
(١) أرسم مخططا سهميا يمثل العلاقة ع .

(٢) أكتب ع بذكر عناصرها

الحل :

الشكل (٣ – ٦) يمثل المخطط السهمى للعلاقة ع

(١)



الشكل (٣ – ٦)

(٢) ع = { (٣ ، ٦) ، (٣ ، ١٢) ، (٦ ، ٦) ، (٦ ، ١٢) }

- **علاقة الاحتواء :**

نعلم أن سـ ⊃ صـ اذا كانت جميع عناصر سـ هى عناصر فى صـ ،

فمثلا : { ٣ ، ٤ } ⊃ { ١ ، ٣ ، ٤ ، ٥ }

خواص الاحتواء :

(١) ∀ س ، تكون سـ ⊃ سـ

(٢) إذا كانت سـ ⊃ صـ ، صـ ⊃ سـ فإن سـ = صـ

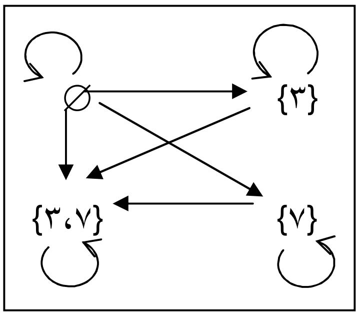
(٣) إذا كانت سـ ⊃ صـ ، صـ ⊃ ع فإن سـ ⊃ ع

مثال : (٤) إذا كانت سـ = { ٣ ، ٧ } كون جميع المجموعات الجزئية من س، ثم أرسم مخططا يمثل الاحتواء

الحل :

$٢^{ص}$ = { ∅ ، { ٣ } ، { ٧ } ، { ٣ ، ٧ } }

الشكل (٣ – ٧) يمثل المخطط لعلاقة الاحتواء المطلوبة .



الشكل (٣–٧)

علاقة التساوى :

إذا كان كل من س ، ص يرمزان الى الشي نفسه نقول ان س = ص

واذا كانت سہ مجموعة فعلاقة التساوي على هذه المجموعة تـــربط كـــل عنصـــر بنفسه. فمثلا اذا كانت

سہ= { ٧ ، ٥ ، ٣ } فان ع = { (٧ ، ٧) ، (٥ ، ٥) ، (٣ ، ٣) }

تمرين (٣ - ٤)

(١) إذا كانت سہ = { ٢ ، ٣ ، ٦ ، ٧ ، ٩ }

ع = { (س ، ص) : سہ |صہ ، س ، ص ∍ سہ }

أرسم مخطط العلاقة ع ثم ضعها فى صورة ازواج مرتبة

(٢) إذا كانت صہ = { ٢ ، ٤ ، ٥ } ٢^سہ مجموعة جميع المجموعات الجزئية منها، عين ٢^سہ ثم ارسم مخططا سهميا يمثل علاقة الاحتواء .

(٣) إذا كانت سہ = { أ ، ب ، جـ ، د } كون علاقة التساوي على المجموعة سہ ، ثم ارسم مخططا سهميا لها .

(٣ – ٥) خواص العلاقة على المجموعة :

العلاقة الانعكاسية :

إذا كانت سـ = { ٢ ، ٣ ، ٤ } فان :

سـ×سـ = { (٢ ، ٢) ،(٢ ، ٣) ،(٢ ، ٤) ، (٣ ، ٢) ،(٣ ، ٣) ، (٣ ، ٤) ، (٤ ، ٢) ، (٤ ، ٣) ، (٤ ، ٤) }

وإذا اخذنا ع١ ⊂ سـ × سـ بحيث كانت :

ع١ = { (٢ ، ٢) ، (٣ ، ٣) ، (٤، ٤) ، (٢ ، ٤) ، (٤ ، ٢) ، (٣ ، ٤) }

نلاحظ أن ٢ ، ٣ ، ٤ ∋ سـ

وأن (٢ ، ٢) ∋ ع١ ، (٣ ، ٣) ∋ ع١ ، (٤ ، ٤) ∋ ع١

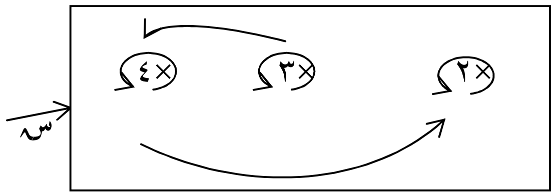
اى لكل عنصر أ ∋ سـ نجد أن (أ ، أ) ∋ ع١

تسمى مثل هذه العلاقة علاقة إنعكاسية .

أما إذا أخذنا ع٢ = { (٢ ، ٢) ، (٤ ، ٤) ، (٢،٤) }

فان ع٢ ليست انعكاسية لان ٣ ∋ سـ بينما (٣ ، ٣) ∌ ع٢

تمثل ع١ بمخطط سهمى كما فى الشكل (٦ – ٨) التالى :



ع

لاحظ وجود عروة عند كل نقطة تمثل عنصرا فىسہ مما سبق يمكننا تعريف العلاقة الانعكاسية :

(٣– ٢) تعريف :

تكون العلاقة ع المعرفة على المجموعة سہ إنعكاسية إذا تحقق س ع س لكل عنصر س ∍ سہ

لكل عنصر س ∍ سہ وبصورة رمزية : س ع س ∀ س ∍ سہ

فإذا ارتبط كل عنصر فى سہ مع نفسه بالعلاقة ع تكون العلاقة انعكاسية ، وإذا كانت العلاقة انعكاسية فان كل عنصر فىسہ يرتبط مع نفسه.وتكون العلاقة غير انعكاسية إذا وجد عنصر واحد على الأقل في سہ ولم يرتبط بنفسه .

أمثلة لعلاقة انعكاسية :

(١) علاقة التساوي على اى مجموعة

(٢) علاقة الاحتواء على اى مجموعة مجموعات

(٣) علاقة يقسم على اى مجموعة أعداد

(٤) علاقة التوازي على اى مجموعة مستقيمات فى مستو واحد

مثال : (١) بين اى العلاقات التالية المعرفة على المجموعة س تكون انعكاسية،

حيث : س = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ }

$ع_1$ = { (١ ، ١) ، (١ ، ٢) ، (٢ ، ١) ، (٣ ، ٣) ، (٤ ، ٤) }

$ع_2$ = { (١ ، ١) ، (٢ ، ٢) ، (٣ ، ٣) }

$ع_3$ = { (١ ، ١) ، (٢ ، ٢) ، (٣ ، ٤) ، (٣ ، ٣) ، (٤ ، ٤) }

$ع_4$ = { (١ ، ١) ، (٢ ، ٢) ، (٣ ، ٣) ، (٤ ، ٤) }

الحل :

$ع_1$ ليست انعكاسية لانها لا تتضمن الزوج (٢ ، ٢)

$ع_2$ ليست انعكاسية لان (٤ ، ٤) ∈ $ع_2$

$ع_3$ إنعكاسية لأن كل عنصر فى س يربط مع نفسه بالعلاقة $ع_3$

$ع_4$ إنعكاسية . لماذا ؟

تمرين (٣ – ٥)

(١) إذا كانت سہ= { ٤ ، ٥ ، ٦ } وكانت العلاقات التالية على المجموعة سہ ، وضح ما اذا كانت العلاقة انعكاسية ام لا مع ذكر السبب .

ع١ = { (٤ ، ٥) ، (٥ ، ٦) ، (٦ ، ٥) ، (٥ ، ٥) ، (٥ ، ٦) }

ع٢ = { (٤ ، ٥) ، (٥ ، ٦) ، (٥ ، ٦) ، (٤ ، ٦)}

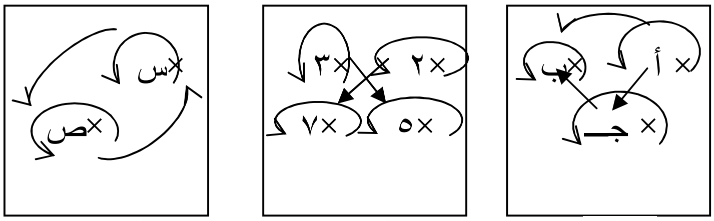
ع٣ = { (٤ ، ٤) ، (٥ ، ٥) ، (٥ ، ٦) ، (٦ ، ٥) ، (٥ ، ٦) ، (٦ ، ٦)}

ع٤ = { (٤ ، ٤) }

ع٥ = { (٤ ، ٤) ، (٥ ، ٥) ، (٤ ، ٥) ، (٥ ، ٤) ، (٥ ، ٤) }

ع٦ = سہ × سہ

(٢) فى المخططات السهمية التالية بالشكل (٣ – ٩) بين ما اذا كان كــل مخطط يمثل علاقة انعكاسية ام لا مع ذكر السبب .



ع٣ ع٢ ع١

الشكل (٣- ٩)

(٣) إذا كانت سـ = { أ ، ب ، جـ } ، ع١ ، ع٢ علاقتين على سـ حيث :

ع١ = { (أ ، أ) ، (أ ، ب) ، (ب ، ب) ، (جـ ، أ) ، (جـ ، جـ) }

ع٢ = { (أ ، ب) ، (ب ، ب) ، (جـ ، جـ) ، (ب ، جـ) }

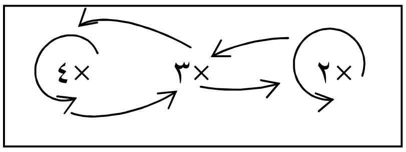
بين ما اذا كانت كل من ع١ ، ع٢ إنعكاسية ام لا مع ذكر السبب .

(٣ – ٦) العلاقة المتماثلة (المتناظرة)

إذا اخذنا المجموعة سـ = { ٢ ، ٣ ، ٤ } وعرفنا عليها علاقة ع كما يلى:

ع = { (٢ ، ٢) ، (٢ ، ٣) ، (٣ ، ٢) ، (٣ ، ٤) ، (٤ ، ٣) ، (٤ ، ٤) }

فإن مخططها السهمي يبدو كما فى الشكل (٣ – ١٠) التالي :



الشكل (٣ – ١٠)

لننظر الى المخطط السهمى للعلاقة ع فنجد انه كلما انطلق سهم من عنصر س مثلا الى عنصر ص قابله سهم ينطلق من ص ليعود الى س . فمن ٢ ينطلق سهم الى ٣ وكذلك سهماً ينطلق من ٣ الى ٢ . وكذلك من ٣ الى ٤ نجد هناك سهما من ٤ الى ٣ . وبعبارة أخرى

(٢ ، ٣) ∋ ع و (٣ ، ٢) ∋ ع وكذلك (٣ ، ٤) ∋ ع ، (٤ ، ٣) ∋ ع . تصف مثل هذه العلاقة بانها علاقة تناظر (تماثل)

(٣ – ٣) تعريف

تكون العلاقة ع المعرفة على المجموعة س متناظرة إذا تحقق ما يلى :

إذا كان أ ع ب فان ب ع أ لكل أ ، ب ∋ س أو بشكل رمزى

أ ع ب ⇐ ب ع أ ∀ أ ، ب ∋ س

لاحظ وجود العلاقة الشرطية فى التعريف .

إذا انه اذا ارتبط عنصر أ مع عنصر ب كان ب بـــدوره مرتبطـــا مـــع أ بالعلاقة ع نفسها .

∴ لدينا قضية شرطية : أ ع ب ← ب ع أ

صوابها يعنى أن العلاقة ع متماثلة وخطؤها يعنى عدم تماثل العلاقة ع.
ونعلم فى حالة القضية الشرطية ان صواب المقدمة وخطا التالية يعنى خطا القضية الشرطية وفيما عدا ذلك تكون صائبة . ومن ذلك نستنتج ان العلاقة ع تكون غير متماثلة اذا توفر أ ع ب ولم يتوفر ب ع أ . وفيما عدا ذلك تكون متماثلة .

أمثلة لعلاقات متماثلة :

(١) علاقة (أ خ) أو (شقيق) فى مجموعة الذكور .

(٢) علاقة (عمودي على) فى مجموعة مستقيمات فى مستو .

(٣) علاقة التساوى فى مجموعة الاعداد .

(٤) علاقة (التطابق والتشابه) فى مجموعة المثلثات .

أمثلة لعلاقات غير متماثلة :

(١) علاقة (اكبر من) فى مجموعة الأعداد .

(٢) علاقة (اصغر من) فى مجموعة الأعداد .

(٣) علاقة (يقسم) فى مجموعة الأعداد .

مثال : (١)

إذا كان ع = { (س ، ص) : س + ص = ٩ ، س ، ص ∈ ط }

هل ع متماثلة

الحل :

ع متماثلة لان س + ص = ص + س

∴ ∀ (س ، ص) ∈ ع ، (ص ، س) ∈ ع

مثال : (٣) إذا كان سـ = { ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٧ }

ع = { (٧ ، ٤) ، (٣ ، ٥) ، (٥ ، ٣) ، (٣ ، ٤) ، (٤ ، ٧) }

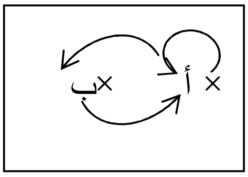
هل ع متماثلة

الحـــل :

ع ليست متماثلة لان (٤ ، ٣) ∈ ع ، (٣ ، ٤) ∉ ع

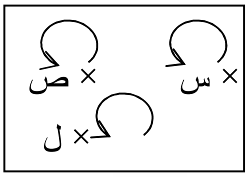
تمرين (٣ – ٦)

(١) فى الاشكال التالية (٣ – ١١) ، (٣ – ١٢) بين نوع العلاقة من حيث العلاقة إنعكاسية أم متماثلة أم غير ذلك .



ع١

الشكل (٣ – ١١)



ع٢

الشكل (٣ – ١٢)

(٢) اذا كانت سـ = { أ ، ب ، جـ } ، ع علاقة على سـ بحيث :

ع = { (أ ، ب) ، (ب ، جـ) }

هل ع انعكاسية ؟ مماثلة ؟ ولماذا ؟

(٣) اذا كانت سـ = { ٥ ، ٧ ، ٨ }

ع علاقة على سـ بحيث :

ع = { (س ، ص) : س ≤ ص ، س ، ص ∋ سـ }

اكتب ع بذكر عناصرها ، هل ع انعكاسية ؟ متماثلة ؟

(٤) بين اى العلاقة التالية على المجموعة سـ متماثلة

حيث سـ = { أ ، ب ، جـ ، د }

ع$_{1}$ = { (أ ، جـ) ، (جـ ، د) ، (د ، جـ) }

ع$_{2}$ = { (أ ، ب) ، (ب ، أ) ، (ب ، جـ) }

ع$_{3}$ = { (أ ، أ) ، (د ، د) ، (ب ، ب) }

ع$_{4}$ = { (أ ، جـ) ، (جـ ، أ) }

ع$_{5}$ = { (جـ ، جـ) }

(٣ – ٧) العلاقة المتعدية (الناقلة)

تكون العلاقة ع المعرفة على المجموعة س متعدية اذا تحقق الشرط التالى: لاى ثلاثة عناصر أ ، ب ، جـ من س اذا كان أ يرتبط مع ب بالعلاقة ع وكان ب بدوره يرتبط مع جـ بالعلاقة ع نفسها ، فان أ يرتبط مع جـ بالعلاقة ع فارتباط أ مع ب ثم إرتباط ب مع جـ وفق العلاقة ع نقل خاصية الارتباط وفق ع إلى الزوج (أ ، جـ) لذلك تسمى العلاقة المتعدية وأحيانا العلاقة (الناقلة) .

(٣ – ٤) تعريف :

تكون العلاقة ع المعرفة على المجموعة سہ علاقة متعدية اذا حققت الشـرط التالى لكل أ ، ب ، جـ ∋ سہ ، اذا كان أ ع ب و ب ع جـ فان أ ع جـ
او بشكل رمزى العلاقة ع متعدية ⇔
[∀ أ ، ب ، جـ ∋ سہ ، أ ع ب ∧ ب ع جـ ← أ ع جـ]

وعلى ذلك فالحالة الوحيدة التى تكون فيها العلاقة ع غير متعدية هـى إذا توفر أ ع ب وتوفر ب ع جـ ولم يتوفر أ ع جـ . وفيما عدا ذلك تكون متعدية.
وتكون العلاقة متعدية إذا لم يكن هناك ما يمنع التعدي .

إمثلة لعلاقة متعدية

(١) علاقة (اصغر من) فى مجموعة اعداد .
(٢) علاقة (اكبر من) فى مجموعة اعداد .
(٣) علاقة (الاحتواء) فى اى مجموعة مجموعات .
(٤) علاقة (التساوى) فى اى مجموعة .
(٥) علاقة (يقسم) فى اى اعداد .

<u>علاقات غير متعدية</u> :

علاقة (أ ب) فى مجموعة من الاشخاص

علاقة عمودى فى مجموعة مستقيمات على مستو واحد

مثال : (١)

إذا كانت سـ = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ }

ع={ (١ ، ٢) ، (٢ ، ٣) ، (١ ، ٣)، (٣ ، ٤) ، (٢ ، ٤) ،(١ ، ٤)}

هل ع متعدية ؟

الحل :

نعم متعدية لان : (١ ، ٢) ، (٢ ، ٣) ، (١ ، ٣) ∈ ع

(١ ، ٣) ، (٣ ، ٤) ، (١ ، ٤) ∈ ع

(٢ ، ٣) ، (٣ ، ٤) ، (٢ ، ٤) ∈ ع

(١ ، ٢) ، (٢ ، ٤) ، (١ ، ٤) ∈ ع

تمرين (٣ – ٧)

(١) إذا كانت سـ = { ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ } ، علاقة على سـ بحيث :

ع = { (٦ ، ٦) ، (٦ ، ٧) ، (٥ ، ٨) ، (٧ ، ٦) }

هل ع متعدية ؟

(٢) أى العلاقات الاتية متعدية على سـ = { ٢ ، ٣ ، ٤ }

$ع_1$ = { (٢ ، ٣) ، (٢ ، ٤) ، (٣ ، ٣) ، (٣ ، ٢) }

$ع_2$ = { (٢ ، ٣) ، (٣ ، ٤) ، (٢ ، ٤) }

$ع_3$ = { (٢ ، ٢) ، (٣ ، ٣) ، (٤ ، ٣) ، (٤ ، ٤) }

$ع_4$ = { (٢ ، ٢) ، (٣ ، ٣) ، (٣ ، ٢) ، (٢ ، ٣) }

$ع_5$ = سـ × سـ

(٣) أذا كانت سـ = { ١١ ، ١٢ ، ١٣ }

ع علاقة على سـ حيث :

ع = { (س ، ص) : س – ص > ٠ ، س ، ص ∋ سـ } هل ع متعدية ؟

(٤) أكتب اربع علاقات متعدية على المجموعة

سـ = { ١ ، ٢ ، ٣ }

(٥) لتكن سـ = { أ ، ب ، جـ }

(أ) أكتب علاقة على سـ انعكاسية ومتماثلة وليست متعدية

(ب) أكتب علاقة على سـ انعكاسية ومتعدية وليست متماثلة

(ج) أكتب علاقة على سـ متماثلة ومتعدية وليست انعكاسية

(٣ – ٨) علاقة التكافؤ :

إذا كان سـ = { س : س طالب فى مدرسة المؤتمر الثانوية }

وإذا كانت ع معرفة على سـ كالاتى :

ع = { (س ، ص) : س ، ص يدرسان فى نفس الفصل }

نجد أن :

١. ع انعكاسية لانه ∀ س فان س ع س اى ان كل طالب فى المدرسة موجود مع نفسه فى فصل واحد .

٢. ع متماثلة لانه اذا كان الطالبان س ، ص فى فصل واحد فمن الواضح ان ص و س فى فصل واحد اى انه ∀ س ، ص ∋ سـ،

س ع ص ← ص ع س .

متعدية لانه اذا كان الطالب أ موجودا مع الطالب ب فى الفصل نفسه ، وكان ب موجودا فى فصل واحد مع الطالب جـ فمن الواضح والمؤكد ان الطالب أ والطالب جـ ينتميان الى فصل واحد .

تسمى مثل هذه العلاقة التى تتصف بانها انعكاسية ومتماثلة ومتعدية على مجموعة سـ بانها علاقة تكافؤ . ونقول عن طالبين ينتميان الى فصل واحد انهما متكافئان . ويقال عن كل فصل انه صنف تكافؤ .

(٣ – ٥) تعريف :

اذا كانت العلاقة ع انعكاسية ومتماثلة ومتعدية تسمى علاقة تكافؤ . وتعنى انـــه اذا ارتبط عنصران س و ص بعلاقة تتمتع بالخواص الثلاث : خاصـــة الانعكـــاس ، وخاصة التماثل وخاصة التعدى فاننا نقول ان س ، ص متكافئان .

فعلاقة التساوى علاقة تكافؤ لانها انعكاسية ومتماثلة ومتعدية .

مثال : (١)

بين فيما اذا كانت العلاقات الاتية على سہ = { ١ ، ٢ ، ٣ } علاقات تكافؤ :

$ع_١$ = { (١ ، ١) ، (٢ ، ٣) ، (١ ، ٣) ، (١ ، ٢) ، (٢ ، ٢) ، (٣ ، ٣) ، (٢ ، ١) ، (٣ ، ١) }

$ع_٢$ = { (١ ، ١) ، (٢ ، ٣) ، (٣ ، ٢) ، (٢ ، ١) ، (١ ، ٣) }

$ع_٣$ = { (١ ، ٢) ، (٢ ، ٣) ، (٣ ، ٢) ، (٢ ، ١) ، (١ ، ٣) }

$ع_٤$ = سہ × سہ

الحل :

$ع_١$ ليست علاقة تكافؤ لان $ع_١$ غير متماثلة لان (٢ ، ٣) ∋ ع بينما (٣ ، ٢) ∌ ع

$ع_٢$ ليست علاقة تكافؤ لان $ع_٢$ ليست علاقة انعكاسية لعدم وجود (٢ ، ٢)

$ع_٣$ ليست علاقة تكافؤ لان $ع_٣$ ليست انعكاسية

ع، علاقة تكافؤ لانها انعكاسية ومتماثلة ومتعدية

مثال : (٢)

لتكن سہ = { ٠ ، ١ ، ٢ ، ٠٠٠٠ ، ٩ } ولتكن ع ={ (أ ، ب) : أ ، ب لهما الباقى نفسه عند القسمة على ٣ ، أ ، ب ∋ سہ } أثبت أن ععلاقة تكافؤ :

الحل :

١. من الواضح ان أ ، ب لهما الباقى نفسه عند القسمة على ٣ وذلك ∀ أ ∋ سہ.أى ان العلاقة انعكاسية

٢. إذا كان أ ، ب لهما الباقى نفسه عند القسمة على ٣ فان ب ، أ لهما ايضا الباقى نفسه عند القسمة على ٣ وذلك ∀ أ ، ب ∋ سہ. فالعلاقة ع متماثلة

٣. من اجل اى أ ، ب ، جـ ∋ سہ ، اذا كان باقى قسمة أ على ٣ يساوى باقى قسمة ب على ٣ ، وكان باقى قسمة ب على ٣ يساوى باقى قسمة جـ على ٣ فان باقى قسمة أ على ٣ يساوى باقى قسمة جـ على ٣ . اى انه اذا كان أ ع ب و ب عجـ فان أ ع جـ فالعلاقة ع متعدية . وبما ان العلاقة ع انعكاسية ومتماثلة ومتعدية فهى علاقة تكافؤ.

تمرين (٣ – ٩)

١. إذا كان $A = \{(٣ ، ٤ ، ٥)\}$ وكان .

$ع_١ = \{(٣ ، ٣) ، (٢ ، ٤) ، (٤ ، ٥) ، (٤، ٤) ، (٥ ، ٥) ، (٤،٣)\}$

$ع_٢ = \{(٣،٣) ، (٣ ، ٤) ، (٢ ، ٣) ، (٥، ٣) ، (٤ ، ٤)\}$

بين إذا كانت $ع_١$ ، $ع_٢$ علاقات تكافؤ .

٢. بين فيما فيما إذا كانت العلاقىة التالية على مجموعة الاعداد الطبيعية (ط)

علاقة إنعكاس ، متماثلة ، متعدية ، علاقة تكافؤ .

أ/ $ع_١ = \{(س،ص) : س + ص = ٩\}$

ب/ $ع_٢ = \{(س ، ص) س > ص\}$

ج/ $ع_٣ = \{(س،ص) س يقسم ص\}$

٣. أي العلاقات التالية : إنعكاسية ، متماثلة ، متعدية ، علاقة تكافؤ

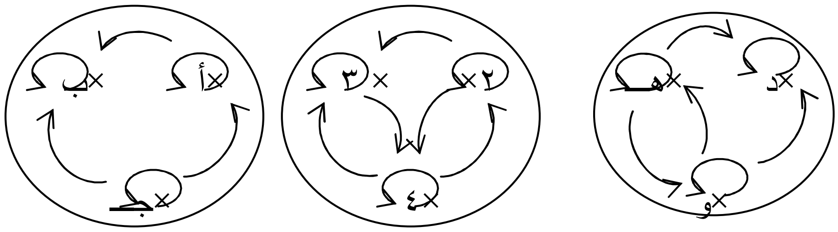
أ/ س أس ص على مجموعة من الناس .

ب/ س له نفس وزن ص على مجموعة قطع المعادن .

ج/ س من نفس جنس ص على مجموعة الأشجار .

د/ علامة (أكبر من) على مجموعة من الأعداد الأولية .

٤. فى الاشكال التالية بين ما اذا كان المخطط يمثل علاقة تكافؤ ام لا .



ع١ ع٢ ع٣

الشكل (٣ – ١٣) الشكل (٣ – ١٤) الشكل (٣ – ١٥)

٥. إذا كانت س = { احمد ، على ، موسى }

أى العلاقات التالية علاقة تكافؤ ؟

ع١ = { (احمد ، احمد) ، (على ، على) ، (موسى ، موسى) }

ع٢ = { (احمد ، احمد) ، (احمد ، موسى) ، (موسى ، على) ،

(على ، على) ، (موسى ، موسى) }

ع٣ = س × س

٦. إذا كانت س = { ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، ٩ } ع علاقة على س بحيث

ع ={ (٢ ، ٢) ،(٤ ، ٤) ،(٦ ، ٦) ،(٨ ، ٨) ، (٩ ، ٩) ،(٤ ، ٦) }

بين ما اذا كانت ع علاقة تكافؤ ؟

الوحدة الرابعة

كثيرات الحدود (الحدوديات)

أهداف الوحدة الرابعة

يتوقع من الطالب بعد دراسة هذه الوحدة أن يكون قادراً على أن :

١- يتعرف على الجملة المفتوحة ومجموعة الحل .

٢- يتعرف على كثيرات الحدود ويميزها .

٣- يجمع كثيرات الحدود .

٤- يطرح كثيرات الحدود .

٥- يضرب كثيرات الحدود .

٦- يقسم كثيرات الحدود .

٧- يتعرف على طريقة القسمة التركيبية لكثيرات الحدود .

٨- يتعرف على الصورة العامة لكثيرة الحدود من الدرجة الثانية .

٩- يحلل كثيرة الحدود من الدرجة الثانية .

١٠- يوجد مجموعة الحل للمعادلة من الدرجة الثانية .

١١- يوجد مجموعة حل المعادلة بطريقة اكمال المربع .

١٢- يحل معادلة الدرجة الثانية بإستعمال القانون العام لحل المعادلة التربيعية .

١٣- يتعرف على المميز وخواص الجذور .

١٤- يحل معادلة الدرجة الثانية بيانياً .

١٥- يتعرف على المقادير الكسرية ويجرى عمليات الجمع والطرح والضرب والقسمة عليها .

الوحدة الرابعة

كثيرات الحدود ومعادلـــة الدرجـــة الثانيـــة

(٤ – ١) الجملة المفتوحة ومجموعة الحل :

سبق أن درسنا العبارة أو القضية المنطقية وعرفنا أنها جملة خبرية إما صائبة أو خاطئة وليس الاثنان معاً . وعرفنا أنه إذا اشتملت هذه الجملة على متغير أو أكثر تسمى عندئذٍ جملة مفتوحة ، إذ لانستطيع أن نقرر إن كانت صائبة أو خاطئة ، إلاّ إذا أعطينا كل متغير قيمة معينة من مجموعة تسمى مجموعة التعويض . إذن فالجملة المفتوحة هي جملة تحتوى على متغير أو أكثر وتتحول إلى قضية (عبارة منطقية) عند إعطاء كل متغير قيمة معينة من مجموعة التعويض . فالجمل التالية :

(١) س عدد صحيح أكبر من الصفر .

(٢) ص + ٣ = ٧ حيث ص عدد حقيقى .

(٣) أ + ب = ٦ حيث أ ، ب أعداد طبيعية .

كل منها جملة مفتوحة ، يمكن أن نرمز لكل منها برمز ، فإذا رمزنا بالرمز ق (س) للجملة الأولى ، تصبح

ق (س) : س عدد صحيح أكبر من الصفر

وكذلك ل (ص) : ص + ٣ = ٧ ، ص ∈ ح

وأيضاً م (أ ، ب) : أ + ب = ٦ ، أ ، ب ∈ ط وهكذا ....

ونلاحظ أنه لكل جملة مفتوحة توجد مجموعة تعويض . فمجموعة التعويض للجملة المفتوحة هى مجموعة تلك العناصر التى نختار من بينها

العناصر التى تحل محل المتغير في الجملة المفتوحة والتى تحولها إلى قضية إما صائبة أو خاطئة .

فإذا عوضنا في الجملة الأولى العدد ٥ بدلاً عن الرمز س لتصبح ٥ عدداً صحيحاً أكبر من الصفر وهذه عبارة صائبة .

اما إذا عوضنا بالعدد –٣ في هذه الجملة لأصبحت عبارة خاطئة . ومجموعة الحل للجملة المفتوحة هى المجموعة الجزئية من مجموعة التعويض التى تجعل الجملة المفتوحة صائبة عندما يحل أى منها محل المتغير .

فمثلاً مجموعة الحل للجملة س + ٧ = ١١ هي {٤} لأن س + ٧ = ١١ تصبح صائبة عندما يحل العدد ٤ محل المتغير س ولكنها تصبح خاطئة إذا ما حل أى عدد آخر غير ٤ محل س .

ولقد عرفنا سابقاً كيفية حل معادلة مثل :

س + ٧ = ١١ والتى تعتمد أساساً على إيجاد جمل مفتوحة أبسط ، لها نفس مجموعة الحل الخاصة بالجملة الأصلية . والجملتان المفتوحتان اللتان لهما نفس مجموعة الحل يطلق عليهما جملتان متكافئتان . فمثلاً الجمل الثلاث التالية جمل متكافئة :

(١) س + ٧ = ١١

(٢) س + ٧ + (–٧) = ١١ + (–٧)

(٣) س = ٤

ومن الواضح أن مجموعة الحل للجملة الثالثة هي { ٤ } وبالتالي فإن { ٤ } هي أيضاً مجموعة الحل للجملة الأولى . لأننا نعلم أنه إذا اضفنا العدد نفسه لطرفى معادلة فإننا نحصل على معادلة متكافئة .

والجمل المفتوحة التى تتضمن رموز متباينات مثل < ، > يمكن حلها باستخدام خواص مشابهة تعرف بخواص الحذف في المتباينات . يمكن تلخيصها فيما يلى :

لأى ثلاثة أعداد حقيقية أ ، ب ، جـ

(١) أ < ب ⇐ أ + جـ < ب + جـ

(٢) أ < ب ⇐ أ جـ < ب جـ ، إذا كان جـ > ٠

(٣) أ < ب ⇐ أ جـ > ب جـ ، إذا كان جـ < ٠

مثال (١) :

جد مجموعة حل المتباينة

٢س + ٧ < ١١ في مجموعة التعويض ح

الحل:

٢س + ٧ < ١١

٢س + ٧ + (-٧) < ١١ + (-٧) (خاصية (١))

٢ س < ٤

$\frac{١}{٢}$ × ٢ س < $\frac{١}{٢}$ × ٤ (خاصية (٢))

س < ٢

∴ مجموعة الحل { س : س < ٢ ، س ∈ ح }

مثال (٢) :

جد مجموعة الحل لكل من الجمل التالية :

(١) ق (س) : س أكبر من الصفر ، مجموعة التعويض ص .

(٢) م (أ ، ب) : أ + ب = ٦ ، مجموعة التعويض ط .

الحل :

(١) ق (س) : س > ٠ ، س ∈ ص

∴ مجموعة الحل = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ... }

(٢) م (أ ، ب) : أ + ب = ٦ ، أ ، ب ∈ ط

∴ مجموعة الحل = {(١ ، ٥) ، (٢ ، ٤) ، (٣ ، ٣) ، (٤ ، ٢) ، (٥ ، ١) }

تمرين (٤ – ١)

(١) اكتب مجموعة الحل لكل جملة مفتوحة من الجمل التالية :

الجملة المفتوحة	مجموعة التعويض
(أ) س < ٥	ط
(ب) $س^{٢}$ – ٩ س + ١٤ = ٠	{ ٢ ، ٣ ، ٥ ، ٧ }
(جـ) س لاتقبل القسمة على ٣	{ ٢ ، ٣ ، ٥ ، ٩ ، ١١ }
(د) س + ٥ ≤ ٠	ص

(٢) في كل مما يأتى زوج من الجمل المفتوحة ، أى من هذه الأزواج يمثل جملتين مفتوحتين متكافئتين ، إذا كانت مجموعة التعويض لكل الجمل هى ص

(أ) ٣ س – ٥ = س + ٧ ، س – ٣ = ٣

(ب) $س^{٢}$ = ٤ ، س = ٢

(جـ) س^{٢} = ٩ ، س = ٣ أو س = −٣

(د) (س + ١) (٢ س + ١) = ٠ ، س + ١ = ٠

(هـ) (س − ١) (س − ٥) = ٠ ، س٢ − ٦ س + ٥ = ٠

(و) س = ٠ ، س > −١ و س < ١

(٣) إذا علمت أن أ ، ب عنصران في المجموعة { ٠ ، ١ ، ٢ ، ٠٠٠ ، ٩ }
أكتب مجموعة الحل لكل من الجمل المفتوحة التالية على شكل أزواج مرتبة:

(أ) أ − ب = ٣ (ب) أ − ٢ ب ≤ ٤ (جـ) ٣ أ + ٥ ب = ١٥

(٤ − ٢) كثيرات الحدود (الحدوديات) :

إن كثيرات الحدود هي نوع من أنواع الدوال الحقيقية ، وقبل أن نتعرض إلى كثيرات الحدود لابد أن نتعرض إلى ما يعرف بالدالة الحديّة :

تعريف : (٤ – ١)

إذا كانـــت د دالـــة عدديـــة قاعـــدتهـــا من الشكـــل د (س) = أ $س^{ن}$ حيث أ عدد حقيقى ثابت ، ن عدد صحيح غير ســالــب ، س رمز لمتغير حقيقـــى ، أ ≠ ٠ فإننـــا نسمى هذه الدالـــة دالـــة حديـــة . ونسمى التركيب أ $س^{ن}$ حداً جبريـــاً أو بشكـــل مختصر " حداً " ، أ معامل هذا الحد ، س متغيره، ن درجته حيث أ ≠ ٠ ونقول أيضاً أن ن درجة الدالة الحدية .

أمثلة لدوال حدية :

(أ) د (س) = ٥ $س^{٣}$

(ب) هـ (س) = ٢ س

(جـ) ق (س) = ٧

لاحظ أن درجة الدالة الحدية هـ (س) في (ب) هي الأولى ، أما ق (س) في (جـ) فمن الدرجة صفر حيث ن = ٠ لأن $س^{٠}$ = ١ أي أن الدالة الثابتة دالة حدية من الدرجة صفر .

نقول أن الدوال الحدية متشابهة أو (الحدود متشابهة) إذا تساوت درجتها. إن جمع الدوال الحدية مختلفة الدرجات يعطى دالة كثيرة حدود أو (حدودية) . وعليه يمكن أن نعرف الدالة كثيرة الحدود في صورتها العامة كما يلي:

تعريف : (٤ – ٢)

> الدالة ق المعرفة على ح بالقاعدة
> ق (س) = $أ_ن$ $س^ن$ + $أ_{ن-١}$ $س^{ن-١}$ + $أ_{ن-٢}$ $س^{ن-٢}$ +٠٠٠ + $أ_١$ س + $أ_٠$
> حيث ن عدد صحيح غير سالب ، $أ_ن \neq$ ٠
> تسمى كثيرة حدود من الدرجة ن . والأعداد الحقيقية
> $أ_ن$ ، $أ_{ن-١}$ ، $أ_{ن-٢}$ ، ٠٠٠، $أ_٠$
> تسمى معاملات كثيرة الحدود ق (س) .

فالدالة هـ (س) = ٣ $س^٤$ – ٥ $س^٣$ + ٧ س – ٢ كثيرة حدود في المتغير س من الدرجة الرابعة ، ومعاملاتها هى الأعداد ٣ ، –٥ ، ٠ ، ٧ ، –٢.

وتكتب على الصورة $أ_٤$ = ٣ ، $أ_٣$ = –٥ ، $أ_٢$ = ٠ ، $أ_١$ = ٧ ، $أ_٠$ = –٢

والدالة د (س) = –٢ $س^٥$ + ٤ كثيرة حدود من الدرجة الخامسة . لاحظ أن أكبر أس للمتغير في الدالة كثيرة الحدود يسمى درجة كثيرة الحدود . وأن معاملات الدالة د (س) هى الأعداد –٢ ، ٠ ، ٠ ، ٠ ، ٠ ، ٤ ، $أ_٥$ = –٢ ، $أ_٤$ = $أ_٣$ = $أ_٢$ = $أ_١$ = صفر ، $أ_٠$= ٤ حيث اعتبرنا كلاً من معاملات الحدود التى تشتمل على $س^٤$ ، $س^٣$ ، $س^٢$ ، س يساوى الصفر.

مثال :

إذا كان ق (س) = ٣ $س^٤$ – ٢ س + ١

هـ (س) = | س – ٣ |

$$\text{ل}\ (\text{س}) = ٣\ \text{س}^{\frac{١}{٢}} - ٥$$

$$\text{ر}\ (\text{س}) = \frac{١}{\text{س}^{٢}} = \text{س}^{-٢}$$

فإى من الدوال ق ، هـ ، ل ، ر كثيرة حدود

الحل :

إن الدالة ق كثيرة حدود من الدرجة الرابعة .

أما الدالة هـ فليست كثيرة حدود لأنها دالة قيمة مطلقة والدالة ل ليست كثيرة حدود لأن أس المتغير س فيها كسر وهو $\frac{١}{٢}$

والدالة ر ليست كثيرة حدود لأن أس المتغير س فيها سالب وهو -٢ .

تمرين (٤ – ٢)

(١) فيما يلى عدد من الحدود ، عين معامل ودرجة كل منها :

$$\frac{٣}{٢}\ \text{س}^{٥} \ ،\ (\sqrt{٢} - \sqrt{٥})\ \text{س}^{٩} \ ،\ ٧,٣\ \text{هـ}^{٢} \ ،\ -١٣\ \text{ص}^{٧} \ ،\ \frac{-٥}{٧}\ \text{س}^{٤}$$

(٢) من الدوال الآتية عيّن كثيرات الحدود ودرجتها إن كانت كثيرة حدود :

(أ) $\text{ق}\ (\text{س}) = ٥\ \text{س}^{٣} + ٣\ \text{س}^{٢} - ١$

(ب) $\text{هـ}\ (\text{س}) = ٨\ \text{س}^{٥} + \frac{٤}{\text{س}} + -٣$

(جـ) ر (س) $= ٤ س^{٢} + ٩س^{\frac{٣}{٢}} - ٣$

(د) د (س) $= ٠ \times س^{٣} - ٧ س^{٢} - ١$

(هـ) و (س) $= (س^{٢} - ١)^{٣} (٢ س + ٣)$

(٣) عين درجة كثيرات الحدود التالية وقيم كل من $أ_{٣}$ ، $أ_{١}$ ، أ.

(أ) ق (س) $= ٨ س^{٦} - ٤س^{٣} + ٣ س + ٥$

(ب) هـ (س) $= س^{٤} + ٣س^{٢} - س$

(جـ) ر (س) $= -٧ س^{٣} + ٤ س^{٢} - ٢$

(د) د (س) = ٤

العمليات على الدوال كثيرات الحدود :

١) جمع دوال كثيرات الحدود :

عند جمع كثيرات الحدود يتم جمع معاملات الحدود التي لها نفس الدرجة (القوة) فيكون $(ق_{١} + ق_{٢})$ (س) = $ق_{١}$(س) + $ق_{٢}$ (س) حيث $ق_{١}$ ، $ق_{٢}$ كثيرات حدود .

مثال : إذا كان ق (س) $= ١٢س^{٤} - ٥س^{٢} + ٦س + ٧$ ،

م(س) $= ٧س^{٣} + ٨ س^{٢} - ٤س + ١$

أوجد ق (س) + م (س) .

الحل :

(ق +م) (س) = ق (س) + م (س)

= ١٢س^{٤} – ٥س^{٢} + ٦س + ٧ + ٧س^{٣} + ٨س^{٢} – ٤س + ١

= ١٢س^{٤} + ٧س^{٣} + ٣س^{٢} + ٢س + ٨

عبارة عن كثيرة حدود من الدرجة الرابعة .

٢) طرح الدوال كثيرات الحدود :

عند طرح كثيرات الحدود يتم طرح معاملات الحدود التي لها نفس الدرجة (القوة) فيكون (ق$_{١}$ – ق$_{٢}$) (س) = ق$_{١}$ (س) – ق$_{٢}$ (س) حيث ق$_{١}$ ، ق$_{٢}$ كثيرات الحدود .

مثال :

إذا كان ق(س) = ٣س٣ + ٢س + ٤ ، هـ(س) = −٢س٣ + ٤س٢ – ١

أوجد (ق –هـ) (س) .

الحل :

(ق–هـ) (س) = ق(س) – هـ (س)

= (٣س^{٣} + ٢س + ٤) – (–٢س^{٣} +٤س^{٢} – ١)

= ٣س^{٣} + ٢س + ٤ + ٢س^{٣} – ٤س^{٢} + ١

= ٥س^{٣} – ٤س^{٢} + ٢س + ٥

عبارة عن كثيرة حدود من الدرجة الثالثة .

مثال :

إذا كان ق(س) = ٤س^{٣} + ٢س^{٢} + ٧س – ٣ ،

هـ(س) = ٤س^{٣} + س^{٢} – ٣س + ٤ ، م (س) = ٤س^{٣} + ٣س^{٢} – س + ١

أ/ (ق – هـ) (س)   ب/ (ق – م) (س) .

الحل :

أ/(ق − هـ) (س)=(٤س^{٣} + ٢س^{٢} + ٧س − ٣) − (٤س^{٣} + س^{٢} − ٣س +٤)

ق (س) − هـ (س) = س^{٢} + ١٠س − ٧

كثيرة حدود من الدرجة الثانية أقل من درجة ق ، هـ

ب/ (ق − م) (س) = ق (س) − م (س)

= (٤س^{٣} + ٢س^{٢} + ٧س − ٣) − (٤س^{٣} + ٣س^{٢} − س + ١)

= ٤س^{٣} + ٢س^{٢} + ٧س − ٣ − ٤س^{٣} − ٣س^{٢} + س − ١

= − س^{٢} + ٨س − ٤

كثيرة حدود من الدرجة الثانية أقل من درجة ق ، م .

∴ نلاحظ من الأمثلة السابقة بأن عملية جمع أوطرح كثيرتي حدود نحصل على كثيرة حدود درجتها أقل من أو تساوى أو أكبر من درجتيهما .

٣) ضرب كثيرات الحدود :

(ق . هـ) (س) = ق (س) . هـ (س)

عبارة عن ضرب كل حد من حدود هـ(س) بكل حد من حدود هـ(س) ثم جمع معاملات الحدود المتشابهة (ذات القوى المتشابهة) . فالمثال التالي يوضح الفكرة.

مثال : −

إذا كان ق(س) = ٣س^{٣} + ٢س^{٢} + ٦

هـ(س) = ٢س^{٢} + ٣

أوجد (ق . هـ) (س)

الحل :

(ق . هــ) (س) = ق(س) . هــ(س)

= (٣س^{٣} + ٢س^{٢} + ٦) . (٢س^{٢} + ٣)

= ٣س٣ . (٢س^{٢} + ٣) + ٢س^{٢} . (٢س^{٢} + ٣) + ٦(٢س^{٢} + ٣)

= ٦س^{٥} + ٩س^{٣} + ٤س^{٤} + ٦س^{٢} + ١٢س^{٢} + ١٨

= ٦س^{٥} + ٤س^{٤} + ٩س^{٣} + ١٨س^{٢} + ١٨ .

كثيرة حدود درجتها = مجموع درجة ق و هــ .

٤/ تساوى كثيرات الحدود :

يقال أن كثيرات الحدود ق ، هــ متساويتين إذ كان لهما نفس الدرجة ومعاملات القوى المتساوية متساوية .

مثال : إذا كان ق(س) = أس^{٣} + (ب + ٢) س^{٢}+ ٧ .

هــ(س) = −٣س^{٣} + ٥س^{٢} + ٧ .

أوجد قيم كلُ من أ ، ب إذا كانت ق(س) = هــ(س) .

الحل :

∴ ق (س) = هــ(س) فإن

أ = −٣

ب + ٢ = ٥

∴ ب = ٣

∴ أ = −٣ ، ب = ٣

٥/ قسمة كثيرات الحدود :

عند قسمة كثيرة حدود على أخرى يجب أن تكون درجة البسط (المقسوم) أكبر من أو تساوي درجة المقام (المقسوم عليه) لتفادي ظهور قوى سالبة في الناتج (خارج القسمة) كما يجب أن يكون درجة المقام لكثيرة الحدود غير صفرية والمثال التالي يوضح فكرة القسمة .

مثال :-

إذا كان ق(س) = أ $س^{ن}$ ، هـ(س) = ب $س^{م}$

حيث ن > م ، فأوجد $\frac{ق(س)}{هـ(س)}$

الحل :

$$\frac{ق(س)}{هـ(س)} = \frac{أس^{ن}}{ب س^{م}} = \frac{أ}{ب} س^{ن-م}$$

∴ معامل خارج القسمة $\frac{أ}{ب}$ يساوي معامل البسط مقسوماً على معامل المقام ودرجة خارج القسمة ن – م تساوي درجة البسط مطروحاً منها درجة المقام .

مثال :

أقسم د (س) = (٢$س^{٣}$ + ٥$س^{٢}$ + ٧س + ٦) على ى (س) = س + ١ وعين ناتج القسمة والباقي .

الحل :

أولاً : طريقة القسمة المطولة : لاجراء القسمة المطولة لا بد من مراعاة الآتي :

١/ ترتيب حدود كلا من د (س) وق (س) ترتيباً تنازلياً حسب قوى (أس) س .

٢- اجراء عملية القسمة وذلك بقسمة الحد ذي أكبر أس من د (س) على الحد ذي أكبر أس من ق(س) فمثلاً ٢س^{٣} ÷ س = ٢س^{٢} ، ثم نضرب هذا الناتج في المقسوم عليه ونطرح الناتج من حاصل الضرب ونكرر العملية حتى نحصل على الباقي . أما إذا كان الباقي = صفر نقول أن د (س) تقبل القسمة على ق(س) .

٢س^{٢} + ٣س + ٤

٢س^{٣} + ٥س^{٢} + ٧س + ٦ / س + ١

٢س^{٣} + ٢س^{٢}

٣س^{٢} + ٧س + ٦

٣س^{٢} + ٣س

٤س + ٦

٤س + ٤

٢

∴ ٢(س^{٣} + ٥س^{٢} + ٧س +٦) ÷ (س+)١ = ٢س^{٢} + ٣س +٤ والباقى ٢

مثال : أوجد خارج قسمة :

د(س) = ٥س^{٣} + ٩ س^{٢} – ٧س – ٦ ÷ ق (س) = س+ ٢

الحل :

٥س^{٢} − س − ٦

س + ١ ⟌ ٥س^{٣} + ٩س^{٢} − ٧س − ٦

٥س^{٣} + ١٠س^{٢}

− س^{٢} − ٧س − ٦

− س^{٢} − س

−٦س − ٦

− ٦س − ٦

صفر

∴ ٥س^{٢} + ٩س − ٧س − ٦ ÷ س + ٢ = ٥س^{٢} − س − ٥ و الباقي صفر

ثانياً : القسمة التركيبية Synthetic Dividing

مثال : −

اقسم د(س) = ٤س^{٣} + ٢س^{٢} − ٣س + ٧ على ه (س) = س − ٣

بطريقة القسمة التركيبية .

أولاً : نكتب المعاملات

٤	٢	٣−	٧	٣
	١٢	٤٢	١١٧	
٤	١٤	٣٩	١٢٤	

∴ خارج القسمة هو م(س) = ٤س^{٢} + ١٤س + ٣٩ والباقي ١٢٤.

تفسير العملية :

أولاً : نكتب معاملات (س) مرتبة ترتيباً تنازلياً .

ثانياً : نكتب أصفار المقسوم عليه (س −٣) وبالتالي (+٣) على اليسار بعد وضع هذه العلامة لـــ .

ثالثاً : نضع معامل أكبر أس في د(س) أسفل الخط وهو ٤ ثم نضربه فيء (+٣) ونضعه أسفل المقدار الثاني ثم نجمع ونضع الناتج أسفل الخط (٤×٣) = ١٢ ثم نضيف ٢ = ١٤ .

رابعاً : نضرب ١٤×٣ = ٤٢ تكتب أسفل المعامل التالي .

ثم نجمع −٣ + ٤٢ = ٣٩ .

خامساً : نضرب ٣٩×٣ = ١١٧ نكتب أسفل المعامل التالي .

ثم نجمع ٧ + ١١٧ = ١٢٤ وهذا الباقي .

مثال :

اقسم د(س) = س^{٤} + ٥س^{٣} + ٣س^{٢} − ١٥س + ٧ على س + ٢ بطريقة القسمة التركيبية .

١	٥	٣	١٥−	٧	لـــ ٢−
	٢−	٦−	٦+	١٨	
١	٣	٣−	٩−	٢٥	

∴ خارج القسمة = س^{٣} + ٣س^{٢} − ٣س− ٩ والباقي ٢٥ .

وهذه الطريقة تسمى القسمة التركيبية ولا حظ أن درجة المقسوم عليه الدرجة الأولى ومعامل س = ١ .

مثال :

أوجد ناتج قسمة د(س) = ٢س^{٥} − ٣س^{٤} + ٧س − ١١ على س− ١ .

الحل :

٢	٣-	٠	٠	٧	١١-	١ـــا
	٢	١-	١-	١-	٦	
٢	١-	١-	١-	٦	٥-	

∴ خارج القسمة = ٢س^{٤} – س^{٣} – س^{٢} – س + ٦ والباقي –٥

مثال :

باستخدام الطريقة التركيبية أوجد خارج القسمة والباقي د(س) = س٤ – ١٥س^{٢} + ٢س– ٨ على ق(س) = س + ٤

الحل :

١	٠	١٥-	٢	٨-	٤-ـــا
	٤-	١٦	٤-	٨	
١	٤-	١	٢-	٠	

∴ خارج القسمة = س٣ – ٤س^{٢} + س – ٢ والباقي = صفر

∴ أن د(س) تقبل القسمة على ق(س) .

ومن الأمثلة السابقة من القسمة المطلوبة أو القسمة التركيبية نلاحظ أن درجة خارج القسمة أقل من درجة كثيرة الحدود (المقسوم) بمقدار واحد .

لان درجة المقسوم عليه في جميع الأمثلة الواحد صحيح .

تمرين عام

١/ اكتب كثيرات الحدود د(س) التي معاملاتها .

أ. $أ_٣ = ٢$ ، $أ_٢ = -١$ ، $أ_١ = ٥$ ، $أ_٠ = ٦$

ب. $أ_٥ = ٢$ ، $أ_٣ = -٤$ ، $أ_١ = ١$.

ج. $أ_٤ = -٧$ ، $أ_٣ = ٢$ ، $أ_٢ = ٦$ ، $أ_١ = ٢$.

د. جميع المعاملات أصفار ماعدا $أ_٩ = ٧$.

٢/ إذا كان ق(س) = $-٥س^٢ + ٢س + ٣$ ، د(س) = $س^٣ + ٤س^٢ + ٢$

فأوجد :

(ق+د) (س) .

(ق+د) (د) ، ق(٢) + د(٢) ماذا تستنتج .

(ق−د) (س) .

(ق . د) (س) .

درجة خارج قسمة $\frac{د(س)}{ق(س)}$ دون إجراء عملية القسمة .

٣/ استخدم القسمة المطولة لإيجاد خارج القسمة والباقي في الحالات الآتية بقسمة د(س) على ق (س) .

أ/ د(س) = $٣س^٣ - ٢س$ ، ق(س) = س + ٣

ب/ د(س) $٢س^٤ - ٣س^٣ + ٢$ ، ق(س) = س − ٢

ج/ د(س) = $س^٥ - ٢$ ، ق(س) = س +١

٤. باستخدام القسمة التركيبية أوجد خارج وباقي قسمة د(س) على ق(س) في الآتي:

أ/ د(س) = ٢س^{٣} – س^{٢} + ٥س –٢ ، ق(س) = س + ٢

ب/ د(س) = ٣س^{٤} – ٢س^{٢} + س +٧ ، ق(س) = س – ١

ج/ د(س) = س^{٧} + ١ ، ق(س) = س– ١

د/ د(س) = ١٢س^{٣} + ٥س^{٢} + ١١س – ١ ، ق(س) = س– ٢

(٤–٢) حل معادلات الدرجة الثانية بيانياً :

لحل معادلة الدرجة الثانية في المتغير س حيث الصورة العامة للمعادلة هي أس^{٢} + ب س + جـ = صفر

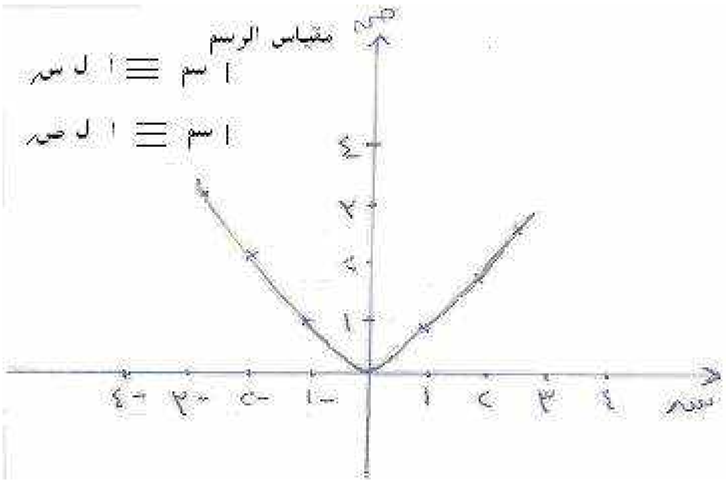
أ ≠ صفر ، أ ، ب ، جـ اعداد حقيقية .

بيانياً عبارة عن إيجاد القيم التي يقطع فيها منحتى معادلة الدرجة الثانية محور السينات، أن وجدت تمثل حلول المعادلة وأن لم يقطع منحنى المعادلة المحور السيني أصلاً فلا يوجد لها حل حقيقي .

مثال :– أرسم منحنى الدالة ص = س^{٢} ومن ثم حل المعادلة س^{٢} = ٠ حيث –٣ ≤ س ≤ ٣

الحل :

س	٣+	٢+	١	٠	١–	٢–	٣–
ص	٩	٤	١	٠	١	٤	٩



لا حظ أن المنحنى يقطع المحور السني عند س = صفر

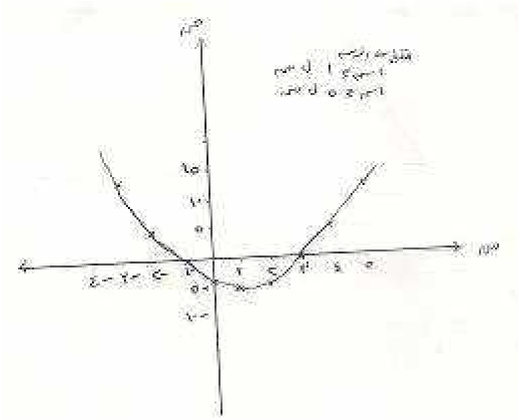
∴ حل المعادلة س^{٢} = ٠ هو س = ٠

مثال : أرسم منحني الدالة ص = س^{٢} – ٢س – ٣ ومن ثم جد جذور المعادلة

س^{٢}– ٢س – ٣ = ٠   –٣ ≤ س ≤ ٥

الحل :

س	٥	٤	٣	٢	١	صفر	–١	–٢	–٣
ص	١٢	٥	صفر	–٣	–٤	–٣	٠	٥	١٢



المنحني يقطع المحور السيني في ٣ ، −١

∴ جذور المعادلة ٣ ، −١

<u>تمارين</u>

١/ أرسم منحني الدالة ص = س^{٢} − ٥س + ٧ في الفترة (−٣ ، ٥) ومن ثم حل المعادلة س٢ − ٥س + ٧ − ٠ .

٢/ حل كلاً من المعادلات الآتية بيانياً .

١) س^{٢} − ٧س + ١٠ = صفر ، ٠ ≤ س ≤ ٦

٢) س^{٢} − ٨س + ١٦ = صفر ، −٢ ≤ س ≤ ٦

٣) س^{٢} − ٩ = صفر ، −٤ ≤ س ≤ ٣

٤) س^{٢} + ٢ = صفر ، −٣ ≤ س ≤ ٤

٥) س^{٢} − ٥س + ٦ = صفر ، −١ ≤ س ≤ ٦

٦) ٢س^{٢} + ٣س + ١ = صفر ، −٣ < س ≤ ٤

(٤ – ٣) تحليل الحدودية من الدرجة الثانية :

إن الصورة العامة للحدودية من الدرجة الثانية (وتسمى إيضاً الحدودية التربيعية) هى : أ $س^{٢}$ + ب س + ﺟ (حيث أ ≠ صفر) . وقد مر بنا سابقاً كيفية تحليل هذا المقدار بالصف الثامن في حالته الخاصة عندما أ = ١ . أى تحليل المقدار الثلاثى $س^{٢}$ + ب س + ﺟ . وقد وجدنا أنه إذا كان قابلاً للتحليل فيمكن وضعه في الصورة (س + م) (س + ن) مثلاً :

$س^{٢}$ +٤ س + ٣ = $س^{٢}$ +٤ + ٣ = (س + ٣) (س + ١) .

وبالمثل عندما يكون معامل $س^{٢}$ في المقدار الثلاثي لا يساوى الواحد ، فإن تحليلها لا يختلف عن سابقة إذ يتم البحث عن وضعها في الصورة

(ﻫ س + م) (و س + ن) .

ونعلم أن حاصل ضرب هذين القوسين هو :

ﻫ و $س^{٢}$ + ن ﻫ س + م و س + م ن

ﻫ و $س^{٢}$ + (ن ﻫ + م و) س + م ن

لاحظ أن الحد الأول في الحدودية وهو أ $س^{٢}$ عوامله ﻫ س ، و س وهما الحدان الأولان في القوسين (ﻫ س + م) (و س + ن) .

والحد الثالث في المقدار الثلاثي وهو ﺟ عوامله م ، ن وهما الحدان الآخران في القوسين السابقين . وأن الحد الأوسط في المقدار الثلاثي وهو ب س يساوى (ن ﻫ + م و) س . أى ينتج من المجموع الجبرى لحاصل ضرب الحدين الوسطين م ، و س والطرفين ﻫ س ، ن الموجودين في القوسين .

من هذه الملاحظات نستنتج أنه يمكن تحليل المقدار أ س^{٢} + ب س +جـ ، إذا أمكن تحليل الحد الأول إلى حدين متشابهين ، وتحليل حدها الأخير إلى عاملين بحيث يكون المجموع الجبرى لحاصل ضرب أحد الحدين المتشابهين في أحد عاملى الحد الأخير ، وحاصل ضرب الحد الآخر من الحدين المتشابهين في العامل الآخر للحد الأخير مساوياً للحد الأوسط في المقدار .

مثال : (١)

حلل المقدار الثلاثي: ٣ س^{٢} + ١٣ س + ١٢

الحل :

نحلل الحد الأول إلى عاملين وهما ٣ س ، س وكذلك نحلل الحد الثالث ١٢ إلى عاملين إما موجبان معاً أو سالبان معاً (لماذا؟) .

ولما كان الحد الأوسط ١٣ س واشارته موجبة ، لذا فنحلل الحد ١٢ إلى عاملين موجبين معاً وهما :

١ ، ١٢ أو ٢ ، ٦ أو ٣ ، ٤ فتكون محاولات تحليل الحدودية كما يلى :

(١) (٣ س + ١) (س + ١٢) وللتحقق من أن المجموع الجبرى لحاصل ضرب الوسطين وحاصل ضرب الطرفين يساوى الحد الأوسط بالحدودية. فنجد أن :

س + ٣٦ س = ٣٧ س ≠ الحد الأوسط ١٣ س

لذا فهذه المحاولة لا تؤدى إلى الناتج الصحيح ، أى أنها محاولة فاشلة .

(٢) (٣ س + ١٢) (س + ١) :

٣ س + ١٢ س = ١٥ س ≠ الحد الأوسط ١٣ س

فهذه محاولة فاشلة أيضاً .

(٣) (٣ س + ٦) (س + ٢) : ٦ س + ٦ س = ١٢ س ≠ ١٣ س

وهذه محاولة فاشلة أيضاً .

(٤) (٣ س + ٢) (س + ٦) : ٢ س + ١٨ س = ٢٠ س ≠ ١٣ س

وهذه محاولة فاشلة أيضاً .

(٥) (٣ س + ٣) (س + ٤) : ٣ س + ١٢ س = ١٥ س ≠ ١٣ س

∴ محاولة فاشلة .

(٦) (٣ س + ٤) (س + ٣) : ٤ س + ٩ س = ١٣ س = الحد الأوسط بالحدودية . لذا يكون تحليلها كالآتى :

٣ س^{٢} + ١٣ س + ١٢ = (٣ س + ٤) (س + ٣)

ان الطريق إلى الخيار الصحيح يأخذ بعض الوقت في المحاولات الفاشلة ولكن بمزيد من التدريب تستطيع أن تتوصل إلى الحالة المطلوبة بسهولة ويسر.

مثال (٢) :

حلل : ٢ س^{٢} + ٣ − ٥ س

الحل :

بترتيب حدود المقدار

٢ س^{٢} − ٥ س + ٣

نحلل الحد الأول إلى عاملين هما ٢ س ، س

الحد الأوسط اشارته سالبة ، لذا نحلل الحد الثالث ٣ إلى عاملين هما-١ ، -٣ ونتبع الطريقة نفسها للوصول للمحاولة الصحيحة لتحليل المقدار

٢ س^{٢} – ٥ س + ٣ وهى (٢س – ٣) (س – ١)

للتأكد من صحة التحليل تأكد أن :

(١) حاصل ضرب الحدين الأولين في القوسين = الحد الأول في المقدار الثلاثي.

(٢) حاصل ضرب الحدين الأخيرين في القوسين = الحد الثالث في المقدار الثلاثي.

(٣) المجموع الجبرى لحاصل ضرب الوسطين والطرفين يساوى الحد الثانى في المقدار الثلاثي.

مثال (٣) :

حلل الحدودية : ١٥ س^{٢} + ٧ س – ٢

الحل :

نتبع الطريقة السابقة مع ملاحظة أن الحد الثالث بالمقدار وهو -٢ اشارته سالبة فنحلله إلى عاملين هما -١ ، ٢ أو -٢ ، ١ وتكون المحاولة الصحيحة للتحليل هى :

١٥ س^{٢} + ٧ س – ٢ = (٥ س – ١) (٣ س + ٢)

يمكنك استخدام طريقة المقص للمساعدة في التوصل إلى المحاولة الصحيحة للتحليل . ولأنه كثيراً ما توجد عدة إحتمالات لذلك لا تبدأ بوضع كل الاحتمالات لأن هذا سيكون تطويلاً في العمل ، بل نضع أى إحتمال نظن أنه الصحيح ونختبره فقد نجد الاحتمال الصحيح من أول محاولة .

مثال (٤) :

حلل المقدار : ٨ س^{٢} + ١٨ س ص − ٣٥ ص^{٢}

الحل :

٨ س   +٧ ص

س   −٥ ص

من الشكل :

٨ س × (−٥ص) + س × ٧ ص = −٣٣س ص

هذه المحاولة لا تعطى النتيجة المطلوبة

في المحاولة الثانية

٤ س   −٥ ص

٢ س   +٧ ص

الحد الآوسط =

٤ س × ٧ ص + ٢ س × (−٥ ص)

= ١٨ س ص وهو الحد الأوسط المعطى .

∴ ٨ س^{٢} + ١٨ س ص − ٣٥ ص^{٢} = (٤ س − ٥ ص) (٢ س + ٧ ص)

مثال (٥) :

حلل : ٦ س^{٢} − ٥ س − ٤

الحل :

٦ س^{٢} − ٥ س − ٤ = (٢ س + ١) (٣ س − ٤)

تمرين (١ – ٣)

حلل كلاً من المقادير التالية :

(١) ٣ س^{٢} – ١٢ س – ١٥

(٢) ٢ س^{٢} – ٧ س – ١٥

(٣) ٥ ص^{٢} – ١٦ ص +٣

(٤) ٤ ص^{٢} + ٥ ص – ٦

(٥) ١٠ س^{٢} – ١٣ س + ٤

(٦) ١٢ ص^{٢} – ١١ ص – ٥

(٧) ١٠ جـ^{٢} – ٢١ جـ + ٩

(٨) ٣ م^{٢} + ٥ م – ٢

(٩) ١٢ س^{٢} + ١٩ س + ٥

(١٠) س^{٢} + ٣ س ص – ١٠ ص^{٢}

(١١) ٢٤ ص^{٢} + ٢ س ص – س^{٢}

(١٢) ١٢ س^{٢} – ٢٣ س ص + ١٠ص^{٢}

(١٣) ٣ – ٥ ب – ١٢ ب^{٢}

(١٤) ٦ + ١٧ ب + ٥ ب^{٢}

(١٥) ١٥ + ١٦ ب – ١٥ ب^{٢}

(٣ – ٤) حل معادلة الدرجة الثانية :

لقد سبق أن درسنا في السنوات الماضية معنى المعادلة ومجموعة حل المعادلة من الدرجة الأولى في متغير واحد وفي متغيرين وكذلك مجموعة حل

المعادلة من الدرجة الثانية في متغير واحد عندما يكون معامل $س^٢$ الواحد الصحيح .

وعرفنا أن المعادلتين المتكافئتين هما المعادلتان اللتان لهما مجموعة الحل نفسها . وأن الصورة العامة لمعادلة الدرجة الثانية في مجهول واحد هى :

$أ س^٢ + ب س + جـ = ٠$ ($أ \neq ٠$)

وعندما يكون معامل $س^٢$ يساوى الواحد الصحيح تصبح المعادلة على الصورة $س^٢ + ب س + جـ = ٠$

وعرفنا أن حل هذه المعادلة يعتمد على إيجاد معادلة مكافئة لها على الصورة (س – م) (س – ن) = ٠ إن امكن ذلك . واعتماداً على معلوماتنا بخواص مجموعة الأعداد الحقيقية يمكننا أن نكتب :

(س – م) (س – ن) = ٠ $\Leftrightarrow$ س – م = ٠ أو س – ن = ٠

$\Leftrightarrow$ س = م أو س = ن

ونقول أن مجموعة حل المعادلة هى { م ، ن }

كما في المثال التالى :

مثال (١) : جد مجموعة حل المعادلة : $س^٢ – ٧ س + ٦ = ٠$

الحل :

$س^٢ – ٧ س + ٦ = ٠$

$\Leftrightarrow$ (س – ١) (س – ٦) = ٠

$\Leftrightarrow$ س – ١ = ٠ أو س – ٦ = ٠

$\Leftrightarrow$ س = ١ أو س = ٦

∴ مجموعة الحل = { ١ ، ٦ }

أما عندما تكون معادلة الدرجة الثانية في صورتها العامة :

أ $س^{٢}$ + ب س + جـ = ٠ ، أ ≠ ٠

فيمكن حلها إذا أمكن كتابة المقدار في الطرف الأيمن على الصورة

(هـ س − م) (و س − ن)

أى إيجاد معادلة مكافئة لها من الشكل

(هـ س − م) (و س − ن) = ٠

⇔ هـ س − م = ٠ أو و س − ن = ٠

⇔ س = $\frac{م}{هـ}$ أو س = $\frac{ن}{و}$

مثال (٢) :

جد مجموعة حل المعادلة التالية في ح .

٦ $س^{٢}$ + ٥ س − ٤ = ٠

الحل :

٦$س^{٢}$ + ٥ س − ٤ = ٠ ⇔ (٣ س + ٤) (٢ س − ١) = ٠

⇔ ٣ س + ٤ = ٠ أو ٢ س − ١ = ٠

⇔ ٣ س = −٤ أو ٢ س = ١

⇔ س = $\frac{-٤}{٣}$ أو س = $\frac{١}{٢}$

∴ مجموعة الحل = { $\frac{-٤}{٣}$ ، $\frac{١}{٢}$ }

مثال (٣) :

جد مجموعة حل المعادلة التالية في ح

$$٤س^٢ + ١١ س + ٦ = ٠$$

الحل :

$$٤س^٢ + ١١ س + ٦ = ٠ \Leftrightarrow (٤ س + ٣)(س + ٢) = ٠$$

$$\Leftrightarrow ٤ س + ٣ = ٠ \text{ أو } س + ٢ = ٠$$

$$\Leftrightarrow س = \frac{-٣}{٤} \text{ أو } س = -٢$$

$$\therefore \text{ مجموعة الحل } = \left\{ \frac{-٣}{٤} ، -٢ \right\}$$

تمرين (٤ – ٤)

جد مجموعة حل كل من المعادلات التالية في ح

(١) $س^٢ - ٦س + ٥ = ٠$

(٢) $٤س^٢ + ٥س = ٠$

(٣) $٩س^٢ - ٤ = ٠$

(٤) $س^٢ - ٧س + ١٢ = ٠$

(٥) $٣س^٢ + ١٠س + ٣ = ٠$

(٦) $س(س - ٣) = -٢$

(٧) $(س + ١)(٣س - ٤) = -٢$

(٨) $(٢س - ١)(س - ٢) = س + ١٠$

(٩) $(س - ٤)^٢ + (س - ٤) = ٠$

(١٠) $\frac{٣}{٤}س^٢ - \frac{١}{٤}س - ١ = ٠$

(٤ – ٥) حل المعادلة بطريقة اكمال المربع .

في كثير من الأحيان يتعذر طريقة التحليل إلى العوامل في حل المعادلات التربيعية فنلجأ إلى كتابتها بالصورة $(س + أ)^{٢} = ب$ باستخدام طريقة يطلق عليها طريقة أكمال المربع ، خطوات حل المثال التالى يوضح هذه الطريقة .

مثال (١) :

حل المعادلة : $س^{٢} + ٤س + ١ = ٠$

بطريقة اكمال المربع :

الحل :

(١) بما أن معامل $س^{٢} = ١$ ، نضيف -١ للطرفين لنحصل على

$س^{٢} + ٤س = -١$

(٣) نضيف $\left(\frac{\text{معامل س}}{٢}\right)^{٢} = \left(\frac{٤}{٢}\right)^{٢} = ٤$ إلى طرفى المعادلة لنحصل

على $س^{٢} + ٤س + ٤ = -١ + ٤$

(٤) تلاحظ أن الطرف الأيمن أصبح مربعاً كاملاً وبتحليله ينتج أن :

$(س + ٢)^{٢} = ٣$

(٥) وبحل هذه المعادلة ينتج أن :

$س + ٢ = \pm \sqrt{٣} \Leftarrow س = \pm \sqrt{٣} - ٢$

أما $س = \sqrt{٣} - ٢$ أو $س = -\sqrt{٣} - ٢$

يلاحظ أن أى معادلة تربيعية يمكن تحويلها إلى مثل هذه الصورة بطريقة إكمال المربع .

مثال (٢) :

حل المعادلة :

$٢س^{٢} - ٨ س - ٨ = ٠$ بطريقة أكمال المربع

الحل :

(١) تجعل معامل $س^{٢} = ١$ بقسمة المعادلة على العدد ٢ لنحصل على :

$س^{٢} - ٤ س - ٤ = ٠$

(٢) نضيف العدد ٤ لطرفى المعادلة لنحصل على

$س^{٢} - ٤ س = ٤$

(٣) نضيف $\left(\frac{\text{معامل س}}{٢}\right)^{٢}$ للطرفين لينتج

$س^{٢} - ٤ س + ٤ = ٨$

(٤) وبتحليل الطرف الأيمن ينتج :

$(س - ٢)^{٢} = ٨$

بحل هذه المعادلة يكون جذراها هما العددين

$\sqrt{٨} + ٢$ ، $- \sqrt{٨} + ٢$

مثال (٣) :

حل المعادلة : $س^{٢} + ١٠ س + ١٥ = ٠$ واكتب مجموعة حلها .

الحل :

$س^{٢} + ١٠ س = -١٥$

$س^{٢} + ١٠ س + ٢٥ = -١٥ + ٢٥$

$(س + ٥)^{٢} = ١٠$

$س + ٥ = \pm \sqrt{١٠} \Leftarrow س = -٥ \pm \sqrt{١٠}$

أما $س = -٥ + \sqrt{١٠}$ أو $س = -٥ - \sqrt{١٠}$

$\therefore$ مجموعة الحل = $\{-٥ + \sqrt{١٠} ، -٥ - \sqrt{١٠}\}$

تمرين (٤ – ٥)

حل كل من المعادلات التالية بطريقة إكمال المربع

(١) $(س - ٣)^{٢} = ٥$

(٢) $س^{٢} + ٢ س = ٢$

(٣) $س^{٢} - ٢ س - ٧ = ٠$

(٤) $(س - ١)^{٢} = ٣$

(٥) $س^{٢} - ٢ س + ١ = ٣$

(٦) $س^{٢} + ٦ س - ١٠ = ٠$

(٧) $س^{٢} + ٣ س - ١ = ٠$

(٨) $٤س^{٢} + ٨ س - ٣ = ٠$

(٩) $٢س^{٢} + ٢ س + ٥ = ٠$

(٤ – ٦) القانون العام لحل المعادلة التربيعية :

بالإعتماد على طريقة إكمال المربع يمكننا أن نشتق قانوناً عاماً لحساب جذرى المعادلة التربيعية $أ س^{٢} + ب س + جـ = ٠$ كما يلى :

(١) نجعل معامل $س^{٢}$ يساوى الواحد بقسمة طرفى المعادلة على أ فنحصل على المعادلة .

$$س^{٢} + \frac{ب}{أ} س + \frac{جـ}{أ} = ٠ \qquad (١)$$

(٢) نضيف $\frac{-جـ}{أ}$ لطرفى المعادلة (١) لتنتج المعادلة

$$س^{٢} + \frac{ب}{أ} س = \frac{-جـ}{أ} \qquad (٢)$$

نضيف $\left(\frac{\text{معامل س}}{٢}\right)^{٢} = \left(\frac{ب}{٢ أ}\right)^{٢}$ لطرفى المعادلة (٢) لتنتج المعادلة :

$$س^{٢} + \frac{ب}{أ} س + \frac{ب^{٢}}{٤ أ^{٢}} = \frac{ب^{٢}}{٤ أ^{٢}} - \frac{جـ}{أ}$$

وبتحليل الطرف الأيمن ينتج أن

$$\left(س + \frac{ب}{٢ أ}\right)^{٢} = \frac{ب^{٢} - ٤ أ جـ}{٤ أ^{٢}} \qquad (٣)$$

(٣) وبحل المعادلة (٣) ينتج أن :

$$س + \frac{ب}{٢أ} = \pm \sqrt{\frac{ب^{٢} - ٤أجـ}{٤أ^{٢}}}$$

$$\Leftarrow س + \frac{ب}{٢أ} = \pm \frac{\sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ}}{٢أ}$$

$$\Leftarrow س = \frac{-ب}{٢أ} \pm \frac{\sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ}}{٢أ} = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ}}{٢أ}$$

هذا يعني أن $س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ}}{٢أ}$

$$\Leftarrow س = \frac{-ب + \sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ}}{٢أ} \quad أوس = \frac{-ب - \sqrt{ب^{٢} - ٤أ}}{٢أ}$$

مثال (١) :

استخدم القانون لحل المعادلة :

$س^{٢} + ٤س - ٣ = ٠$

الحل :

أ = ١ ، ب = ٤ ، جـ = $^{-}٣$

∴ بالتعويض في القانون

$$\text{س} = \frac{-٤ \pm \sqrt{١٦ - ٤ \times ١ \times -٣}}{٢ \times ١} = \frac{-٤ \pm \sqrt{٢٨}}{٢}$$

$$= \frac{-٤ \pm \sqrt{٤ \times ٧}}{٢} = \frac{-٤ \pm ٢\sqrt{٧}}{٢} = -٢ \pm \sqrt{٧}$$

فيكون جذرا المعادلة هما $-٢ + \sqrt{٧}$ ، $-٢ - \sqrt{٧}$

(ويمكن تقريب قيمة $\sqrt{٧}$ باستخدام الآلة الحاسبة)

مثال (٢) :

استخدم القانون لحل المعادلة :

$$٤\text{ص}^{٢} - ٣\text{ص} - ٢ = ٠$$

الحل :

أ = ٤ ، ب = −٣ ، جـ = −٢

$$\therefore \text{ص} = \frac{-(-٣) \pm \sqrt{٩ - ٤ \times ٤ \times (-٢)}}{٨}$$

$$= \frac{٣ \pm \sqrt{٤١}}{٨}$$

$$\therefore \text{ص} = \frac{٣ + \sqrt{٤١}}{٨} \quad \text{أو} \quad \text{ص} = \frac{٣ - \sqrt{٤١}}{٨}$$

مثال (٣) حل المعادلة :

$$٣\text{س}^{٢} - ٥\text{س} - ٧ = ٠$$

الحل : أ = ٣ ، ب = −٥ ، جـ = −٧

$$\therefore س = \frac{-(-٥) \pm \sqrt{(-٥)^{٢} - ٤ \times ٣ \times (-٧)}}{٢ \times ٣}$$

$$\therefore س = \frac{٥ \pm \sqrt{٢٥ + ٨٤}}{٦}$$

$$\therefore س = \frac{٥ + \sqrt{١٠٩}}{٦} \quad \text{أو} \quad س = \frac{٥ - \sqrt{١٠٩}}{٦}$$

تمرين (٤ − ٦)

حل المعادلات التالية مستخدماً القانون العام :

(١) $س^{٢} - ٣س - ٣ = ٠$

(٢) $س^{٢} - ٤س + ١ = ٠$

(٣) $٢س^{٢} - ٦س + ٢ = ٠$

(٤) $٢س^{٢} - ٣س - ٥ = ٠$

(٥) $٥س^{٢} - ٤س - ٣ = ٠$

(٦) $٣س^{٢} - ٥س - ٧ = ٠$

(٧) $٢س^{٢} - ٥س + ١ = ٠$

(٨) $س (س + ٢) = ١$

(٩) $- س^{٢} + س + ٥ = ٠$

(١٠) $\frac{٣\,س^{٢}}{٢} + \frac{٢\,س}{٣} = \frac{١}{٤}$.

(١١) $\frac{س^{٢}}{٥} + \frac{س}{٢} - \frac{٧}{٣٠} = ٠$

(١٢) ما هو العدد الذى إذا أضيف مربعه إلى مثليه أصبح الناتج مساوياً للعدد ١٥ .

(٤ – ٧) المميز وخواص الجذور :

يمكن حساب جذرى المعادلة التربيعية بالقانون :

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤أ\,جـ}}{٢\,أ}$$

يسمى المقدار ($ب^{٢}$ – ٤ أ جـ) مميز المعادلة ، حيث أنه يحدد نوع جذرى المعادلة ، فإما أن يكونا حقيقيين مختلفين أو حقيقيين متساويين أو غير حقيقيين .

فإذا كان مميز المعادلة موجباً فيكون للمعادلة جذران حقيقيان مختلفان .

وإذا كان مميز المعادلة يساوى الصفر ، فيكون للمعادلة جذران حقيقيان متساويان .

أما إذا كان مميز المعادلة سالباً ، فلا توجد جذور حقيقية للمعادلة .

مثال (١) :

بيّن نوع جذرى المعادلة التالية ثم أوجدهما إذا كانا حقيقيين

$٢س^{٢} - ٦\,س + ٧ = ٠$

الحل :

مميز المعادلة $ب^{٢} - ٤\,أ\,جـ = (-٦)^{٢} - ٤ \times ٢ \times ٧ = -٢٠ < ٠$

وحيث أن $\sqrt{-٢٠}$ عدد غير حقيقى فلا يوجد جذران حقيقيان للمعادلة .

مثال (٢) :

جد مميز المعادلة : $٤س^{٢} - ٤\,س + ١ = ٠$ ، ثم حلها

الحل :

مميز المعادلة $= (-٤)^{٢} - ٤ \times ٤ \times ١ = ٠$

∴ جذرا المعادلة هما $\frac{٤ \pm ٠}{٨}$ أى $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٢}$ حقيقيان متساويان

مثال (٣) :

حل المعادلة : $س^{٢} - ٢\,س - ٢ = ٠$

الحل :

مميز المعادلة $(-٢)^{٢} - ٤ \times ١ \times -٢ = ١٢ > ٠$

∴ يوجد جذران حقيقيان مختلفان للمعادلة هما :

$١ + \sqrt{٣}$ ، $١ - \sqrt{٣}$ (تحقق من ذلك) .

تمرين (٤ – ٧)

(١) جد مميز كل معادلة فيما يلى ثم بين نوع جذريها

(حقيقية متساوية ، حقيقية غير متساوية ، غير حقيقية)

(أ) ٣س^{٢} – ٥ س + ٤ = ٠

(ب) س^{٢} – ٦ س = $^{-}$٩

(جـ) ٣ س^{٢} – ٥ س = ٠

(د) ٤س^{٢} – ١٦ = ٠

(٢) جد مميز كل معادلة فيما يلى ثم حلها وتحقق من صحة الحل .

(أ) ٢س^{٢} – ٥ س + ١ = ٠

(ب) س^{٢} = ٦ س –٨

(جـ) ٤ س^{٢} – ٣ س = –٥

(د) س^{٢} + ٣ س + ١٣ = ٠

(هـ) س^{٢} – ١٢ س + ٣٦ = ٠

(و) ٢٠ = ١٢ س – س^{٢}

(٣) ما مقدار ك الذى يجعل جذرى المعادلة :

٣س^{٢} – ٦ س + ك = ٠ متساويين

(٤) إذا كان جذرا المعادلة س^{٢} + ٢ (م + ١) س + م^{٢} = ٠ متساويين فما قيمة الثابت م ؟

(٥) بيّن أن جذرى المعادلة أ (س^{٢} – ١) = (ب – جـ) س حقيقيان دائماً .

تبسيط المقادير الكسرية :

نتعامل مع المقادير الكسرية مثل التعامل مع الكسور الاعتيادية والمركبة .

فالكسر يمكن اختصاره أ، وضعه في أبسط صورة :

مثلاً :

$$\frac{٢٤}{١٦} = \frac{٢\times٢\times٢\times٣}{٢\times٢\times٢\times٢} = \frac{٣}{٢}$$

مثال : ضع كل مما يأتي في أبسط صورة :

أ) $\frac{٤س^{٣}ص^{٢}}{٦س^{٢}ص}$ ب) $\frac{-١٥س^{٧}}{٩س^{٤}}$

الحل :

أ) $$\frac{٤س^{٣}ص^{٢}}{٦س^{٢}ص} = \frac{٢\times٢\times س\times س\times س\times ص\times ص}{٢\times٣ س\times س\times ص}$$

$$= \frac{٢ س\times ص}{٣}$$

$$= \frac{٢ س ص}{٣}$$

ب) $$\frac{-١٥س^{٧}}{٩س^{٤}} = \frac{-٣\times٥\times س\times س\times س\times س\times س\times س\times س}{٣\times٣\times س\times س\times س\times س}$$

$$-\frac{٥}{٣} = س \times س \times س$$

$$-\frac{٥}{٣} = س^{٣}$$

ملاحظة : بعد دراسة الأسس يمكن أن يتم هذا الاختصار بصورة أبسط من هذه الطريقة.

مثال : بسط المقادير الكسرية التالية :

$$١/ \quad \frac{س^{٢} - ٣س + ٢}{س^{٢} - ١} = \frac{(س-١)\,(س-٢)}{(س-١)\,(س+١)} = \frac{(س-٢)}{(س+١)}$$

مثال : بسط المقادير الكسرية التالية :

$$\frac{٢س^{٣} + ٦س^{٢} + ٤س}{٣س^{٣} - ٣س^{٢} - ١٨س} = \frac{٢س\,(س^{٢} + ٣س + ٢)}{٣س\,(س^{٢} - س - ٦)} = \frac{٢س\,(س+١)\,(س+٢)}{٣س\,(س+٢)\,(س-٣)}$$

$$= \frac{٢\,(س+١)}{٣\,(س-٣)}$$

جمع وطرح المقادير الكسرية

تجرى عمليتا الجمع والطرح على المقادير الكسرية بنفس الطريقة التي نتعامل معها في الكسور العادية .

مثال : أوجد ناتج كل مما يأتي في أبسط صورة

أ) $\frac{٣س}{٢ص} + \frac{٥}{٤ص^{٢}}$ ب) $\frac{س+١}{٢س^{٣}} + \frac{س-١}{٤س^{٢}}$

الحل : $\frac{\text{٣س}}{\text{٢ص}} + \frac{\text{٥}}{\text{٤ص}^{٢}} = \frac{\text{٦س ص + ٥}}{\text{٤ص}^{٢}}$

$= \frac{\text{٦س ص + ٥}}{\text{٤ص}^{٢}}$

لاحظ أن ٤ص^{٢} هو المضاعف المشترك الأصغر للمقامين

ب) $\frac{\text{س+ ١}}{\text{٢س}^{٣}} + \frac{\text{س− ١}}{\text{٤س}^{٣}}$

$= \frac{\text{٢ (س+١)}}{\text{٤س}^{٣}} + \frac{\text{س (س −١)}}{\text{٤س}^{٣}}$

$= \frac{\text{٢س +٢ +س}^{٢}\text{ − س}}{\text{٤س}^{٣}} = \frac{\text{س}^{٢}\text{ + س +٢}}{\text{٤س}^{٣}}$

مثال : اختصر الآتي :

$\frac{\text{٢س}}{\text{س}^{٢}\text{−١}} - \frac{\text{س}}{\text{س−١}}$

$\frac{\text{٢س}}{\text{(س−١) (س+١)}} - \frac{\text{س}}{\text{س−١}} = \frac{\text{٢س}}{\text{(س−١) (س+١)}} - \frac{\text{س (س+١)}}{\text{(س−١) (س+١)}}$

$= \frac{\text{٢س − س(س+١)}}{\text{(س−١) (س+١)}} = \frac{\text{٢س − س}^{٢}\text{ − س}}{\text{(س−١) (س+١)}}$

$$= \frac{-\text{س}٢ + \text{س}}{(\text{س}-١)\,(\text{س}+١)} = -\frac{\text{س}\,(\text{س}+١)}{(\text{س}-١)\,(\text{س}+١)}$$

$$= -\frac{\text{س}}{\text{س}+١}$$

أوجد ما يلي في أبسط صورة :

$$\frac{٣\,\text{س}}{\text{س}-١} + \frac{٢\text{س}}{\text{س}+١} + \frac{١}{(\text{س}-١)^{٢}}$$

المضاعف المشترك الأصغر للمقامات $=(\text{س}+١)\,(\text{س}-١)^{٢}$

$$= \frac{٣\text{س}\,(\text{س}-١)(\text{س}+١) + ٢\text{س}(\text{س}^{٢}-٢\text{س}+١) + (\text{س}+١)}{(\text{س}+١)\,(\text{س}-١)^{٢}}$$

$$= \frac{٣\text{س}\,(\text{س}^{٢}-١) + ٢\text{س}\,(\text{س}^{٣}-٢\text{س}+١)+(\text{س}+١)}{(\text{س}+١)\,(\text{س}-١)^{٢}}$$

$$\frac{٣\text{س}\,(\text{س}^{٢}-١) + ٢\text{س}^{٣} - ٤\text{س}^{٢} + ٢\text{س} + \text{س} + ١}{(\text{س}+١)\,(\text{س}-١)^{٢}}$$

$$\frac{٣\text{س}^{٣} - ٣\text{س} + ٢\text{س}^{٣} - ٤\text{س}^{٢} + ٣\text{س} + ١}{(\text{س}+١)\,(\text{س}-١)^{٢}}$$

$$= \frac{٥\text{س}^{٣} - ٤\text{س}^{٢} + ١}{(\text{س}+١)\,(\text{س}-١)^{٢}}$$

تمرين (٤–٨)

١/ أوجد ناتج الجمع والطرح في كلا مما يأتي في أبسط صورة :

أ) $\frac{٥}{٢س} + \frac{ص}{٥}$

ب) $\frac{س}{٥ص} + \frac{ص}{٢س}$

ج) $\frac{١}{س-١} + \frac{٣}{س}$

د) $\frac{٢}{س} + \frac{١}{س-٢}$

ه) $\frac{٣}{س^{٢}-٤} - \frac{٢}{س^{٢}-٤س+٤}$

و) $\frac{٢}{ص+٥} - \frac{٣}{ص-٥}$

٢) اختصر كلا مما يأتي

أ) $\frac{٥}{ص^{٢}-٩ص+٢٠} + \frac{٣}{ص-٥} - \frac{٢}{ص-٤}$

ب) $\frac{س+٢}{س-٣} + \frac{٤}{س+٣} - \frac{٢}{ص-٤}$

ج) $\frac{٣}{س-٤} - \frac{٢}{س+٤}$

د) $\frac{\text{س}-١}{\text{س}+١} + \frac{١}{\text{س}-١}$

ضرب وقسمة المقادير الكسرية نتبع نفس أسلوب الكسور العادية
مثال :

$$\frac{\text{س}^{٢}+\text{س}-٢}{\text{ص}+١} \times \frac{\text{ص}^{٢}+٣\text{ص}+٢}{\text{س}-١}$$

$$\frac{\text{س}^{٢}+\text{س}-٢}{\text{ص}+١} \times \frac{\text{ص}^{٢}+٣\text{ص}+٢}{\text{س}-١} = \frac{(\text{س}-١)\,(\text{س}+٢)}{\text{ص}+١} \times \frac{(\text{ص}+١)\,(\text{ص}+٢)}{(\text{س}-١)}$$

$$= (\text{س}+٢)\,(\text{ص}+٢)$$

اختصر

$$\frac{\text{س}^{٢}-٩}{\text{س}^{٢}-١٦} \times \frac{(\text{س}-٤)^{٢}}{(\text{س}-٣)^{٢}}$$

$$\frac{\cancel{(\text{س}-٣)}\,(\text{س}+٣)}{\cancel{(\text{س}-٤)}\,(\text{س}+٤)} \times \frac{\cancel{(\text{س}-٤)}\,(\text{س}-٤)}{\cancel{(\text{س}-٣)}(\text{س}-٣)} = \frac{(\text{س}+٣)\,(\text{س}-٤)}{(\text{س}-٣)(\text{س}+٤)}$$

في حالة القسمة : نقلب الكسر المقسوم عليه ونضرب
مثال : اختصر

$$\frac{\text{س}^{٢}-٣\text{س}+٢}{\text{ص}-١} \div \frac{\text{س}-٢}{\text{ص}^{٢}+\text{ص}-٢}$$

$$\frac{\text{س}^{٢}-٣\text{س}+٢}{\text{ص}-١} \times \frac{\text{ص}^{٢}+\text{ص}-٢}{\text{س}-٢}$$

$$= \frac{(\text{س}-١)\cancel{(\text{س}-٢)}}{\cancel{(\text{ص}-١)}} \times \frac{\cancel{(\text{ص}-١)}(\text{ص}+٢)}{\cancel{(\text{س}-٢)}}$$

$$= (\text{س}-١)(\text{ص}+٢)$$

تمرين (٤−٩) :

اختصر

١) $\frac{\text{س}^{٢} - \text{س}}{٣} \times \frac{١٨}{\text{س}}$

٢) $\frac{\text{س} - \text{ص}}{٤} \div \frac{\text{س} - \text{ص}}{٨}$

٣) $\frac{\text{س}^{٢} - \text{ص}^{٢}}{\text{س}^{٢} - ٢٥} \times \frac{\text{س} + ٥}{\text{س} + \text{ص}}$

٤) $\frac{\text{ص}^{٣} - ١}{٤\text{س}^{٣} - ١٢\text{س} + ٩} \times \frac{٤\text{س}^{٢} - ٩}{\text{ص}^{٢} + \text{ص} + ١}$

٥) $\frac{\text{س}^{٢} + ٥\text{س} + ٦}{\text{س}^{٢} - ٤} \div \frac{\text{س}^{٢} + ٢\text{س} - ٣}{\text{س}^{٢} - ٣\text{س} + ٢}$

الوحدة الخامسة

التغيّر

أهداف الوحدة الخامسة

التغيّر

يتوقع من الطالب بعد دراسة هذه الوحدة أن يكون قادراً على أن :-

١- يتعرف مفهوم التغير .

٢- يتعرف التغير الطردي .

٣- يتعرف التغير العكسي .

٤- يتعرف التغير المشترك .

٥- يتعرف التغير الجزئي .

الوحدة الثالثة
التغيّـــر

(٥ – ١) التغيّر الطردى :

يقصد بالتغيّر بصفة عامة الزيادة أو النقصان في الكمية . خذ مثلاً الجدول التالى الذى يوضح الزمن بالساعة مع المسافة المقطوعة بواسطة سيارة إذا كانت السيارة تتحرك بسرعة ثابتة .

الزمن بالساعة	المسافة بالكيلومتر
١	٣٠
٢	٦٠
٣	٩٠
٤	١٢٠

تلاحظ أنه كلما زاد الزمن زادت المسافة المقطوعة ونلاحظ ايضاً أن نسبة تزايد الزمن هى نفسها نسبة تزايد المسافة . مثل هذا التغير يسمى بالتغير الطردى .

نشاط :

جد المسافة المقطوعة في ٥ ساعات ، ٧ ساعات ، ١٠ ساعات .

بفرض أن ف المسافة ن الزمن

ف$_{١}$ = ٣٠ × ٥ = ١٥٠ كيلومتراً

ف$_{٢}$ = ٣٠ × ٧ = ٢١٠ كيلومتراً

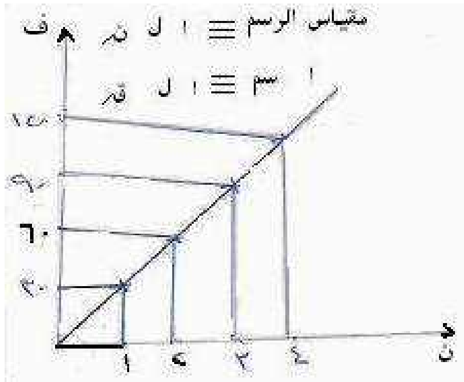
ف$_{٣}$ = ٣٠ × ١٠ = ٣٠٠ كيلومتراً

من النشاط السابق تلاحظ أنه لايجاد المسافة فإننا دائماً نضرب الزمن في الثابت ٣٠ . أي أن ف = ٣٠ن حيث ف المسافة ، ن الزمن .

وهذا الثابت يسمى ثابت التغير أو ثابت التناسب .

وبصفة عامة فإن ف = أ ن حيث أ ثابت التغير .

وإذا رسمنا الخط البياني للزمن (ن) والمسافة (ف) من الجدول أعلاه نجد أنه خطاً مستقيماً ماراً بنقطة الأصل كما موضح بالشكل .



ومن أمثلة التغير الطردي (أو التناسب الطردي) :

١- محيط الدائرة يتغير طردياً بتغير طول قطرها أى كلما كبر طول القطر كبر المحيط .

٢- مساحة الدائرة تتغير طردياً مع مربع نصف قطرها .

٣- شدة التيار الكهربائى (بالأمبير) تتغير طردياً مع فرق الجهد (بالفولت).

(٥ -١) تعريف :

إذا كان س ، ص متغيرين ، أ عدد حقيقى موجب (ثابت) . وكان ص = أ س ، فإننا نقول أن ص تتغير طردياً مع س ، ونكتب ص $\propto$ س أو ص تتناسب طردياً مع س .

ويسمى س المتغير المستقل ، ص المتغير التابع

مثال : (١)

إذا كان ص يتغير طردياً مع س ، وكان ص = ١٥ عندما س = ٧ . جد قيمة س عندما ص = ٣٠

الحل : ص $\propto$ س $\Leftarrow$ ص = أ س

$\therefore$ ١٥ = أ × ٧ $\Leftarrow$ أ = $\frac{١٥}{٧}$

$\because$ ص = أ س

$\because$ ٣٠ = $\frac{١٥}{٧}$ س

$\therefore$ س = $\frac{٣٠ \times ٧}{١٥}$ = ١٤

مثال (٢)

إذا كان ص يتغير طردياً مع الجذر التربيعي للمقدار س . فإذا كان ص = ١٠ عندما س = ٤ جد ما يلي .

١- القانون العام (العلاقة بين ص ، س) .

٢- قيمة ص عندما س = ٩ .

حل مثال (٢) :

ص $\propto$ $\sqrt{\text{س}}$ $\Leftarrow$ ص = أ $\sqrt{\text{س}}$

١٠ = أ $\sqrt{٤}$ = ٢ أ $\Leftarrow$ أ = $\frac{١٠}{٢}$ = ٥

١- ص = ٥ $\sqrt{\text{س}}$.

٢- إذا كان س = ٩ فإن ص = ٥ $\sqrt{٩}$ = ٥ × ٣ = ١٥

ومن التعريف نستنتج ما يأتى :

إذا كان ص $\propto$ س ، وأخذ المتغير س القيمتين $\text{س}_{١}$ ، $\text{س}_{٢}$ وتبعاً لذلك أخذ ص القيمتين $\text{ص}_{١}$ ، $\text{ص}_{٢}$ على الترتيب فإن :

$$\frac{\text{ص}_{١}}{\text{ص}_{٢}} = \frac{\text{س}_{١}}{\text{س}_{٢}}$$

= أى إذا كان ص $\propto$ س فإن $\frac{\text{ص}_{١}}{\text{ص}_{٢}} = \frac{\text{س}_{١}}{\text{س}_{٢}}$

مثال (٣) :

س ، ص متغيران حقيقيان مرتبطان بعلاقة ما ، فإذا اخذت س القيمتين ١,٥، ٥ ، وكانت قيمتا ص المناظرتان لقيمتى س هما ٤,٨ ، ١٥ ، فهل ص تتغير طردياً مع س ؟

الحل :

$$\frac{س_١}{س_٢} = \frac{١,٥}{٥} = \frac{١٥}{٥٠} = \frac{٣}{١٠}$$

$$\frac{ص_١}{ص_٢} = \frac{٤,٨}{١٥} = \frac{٤٨}{١٥٠} = \frac{٨}{٢٥}$$

$$\frac{س_١}{س_٢} \neq \frac{ص_١}{ص_٢}$$

∴ العلاقة بين س ، ص ليست علاقة تغير طردى .

مثال (٤) :

مخروط دائرى قائم ، ارتفاعه ثابت وحجمه ح يتغير بتغير مربع طول نصف قطر قاعدته نق . وكان حجم المخروط ٤٧٢,٥سم^{٣} عندما كان طول نصف قطر قاعدته ١٥سم . جد حجم المخروط عندما يكون نصف قطر قاعدته ١٠سم .

الحل :

$\because$ ح $\propto$ نق^2 $\therefore$ $\frac{ح_1}{ح_2} = \frac{نق_1^2}{نق_2^2}$

ح$_1$ = ٤٧٢,٥ ، نق$_1$ = ١٥

ح$_2$ = ؟ ، نق$_2$ = ١٠

$\therefore$ $\frac{٤٧٢,٥}{ح_2} = \frac{١٥^2}{١٠^2}$

$\therefore$ ح$_2$ = ٤٧٢,٥ × $\frac{١٠٠}{٢٢٥}$ = ٢١٠ سم^3

بطريقة أخرى :

ح $\propto$ نق^2 $\Leftarrow$ ح = أ نق^2

ح = ٤٧٢,٥ عندما نق = ١٥

أ = $\frac{٤٧٢,٥}{٢٢٥}$ = ٢,١

$\therefore$ ح = ٢,١ نق^2 عندما نق = ١٠

ح = ٢,١ × ١٠٠ = ٢١٠

التغير العكسى :

رجلان يكملان عملاً في ٣٠ يوماً ، ثلاثة رجال يكملون نفس العمل في ٢٠يوماً ، ٤ رجال يكملون نفس العمل في ١٥ يوم ، ٦ رجال يكملون العمل في ١٠أيام ... وهكذا .

مع ملاحظة أن انتاج الرجال يتساوى في اليوم الواحد ، نلاحظ أنه كلما زاد عدد الرجال كلما قلت الأيام وكلما قل عدد الرجال كلما زادت الأيام ، أي إذا تضاعف عدد الرجال انخفض عدد الأيام إلى النصف وهنا نقول أن عدد الأيام يتناسب عكسياً مع عدد الرجال أو الأيام تتغير عكسياً تبع الرجال .

نلاحظ أيضاً {عدد الرجال × عدد الأيام = ٦٠ } في كل الحالات أي يساوي قيمة ثابتة .

فإذا فرضنا أن عدد الرجال (ص) رجلاً وعدد الأيام التي يكملون فيها العمل (س) يوماً فالعلاقة بين س ، ص هي :

س ص = ٦٠ أو ص = $\frac{٦٠}{س}$

وتقرأ ص يتغير طردياً مع $\frac{١}{س}$ أو ص يتغير عكسياً مع س

وتكتب ص $\propto$ $\frac{١}{س}$. كما نعبر عن ذلك أيضاً على الصورة ص = $\frac{أ}{س}$ ونسمى

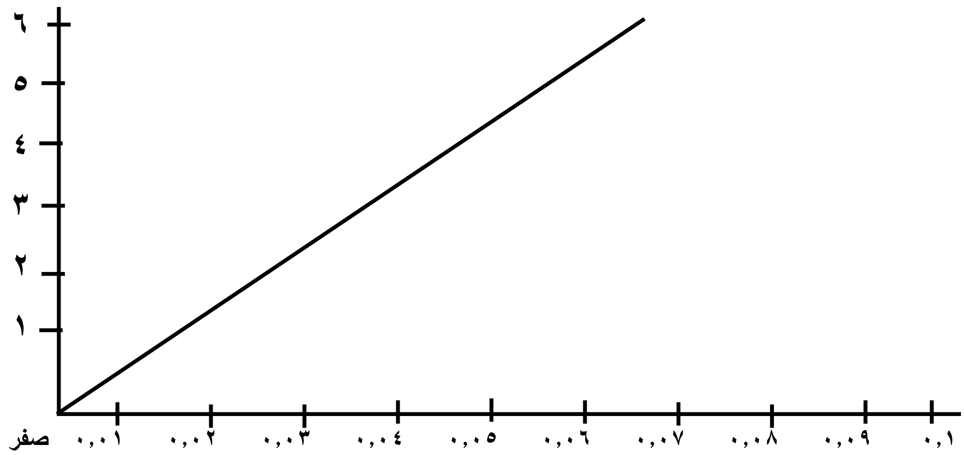
أ ثابت التغير أو ثابت التناسب وإذا مثلنا الكميات السابقة (الرجل مع $\frac{١}{\text{عدد الأيام}}$) بخط

بياني نجده مستقيماً ماراً بنقطة الأصل ... وعلى هذا أي علاقة بين ص ، $\frac{١}{\text{س}}$

يمكن تمثيلها بيانياً بخط مستقيم نقول عنها ص تتغير عكسياً مع س

عدد الأيام التي يتموا فيها العمل (س)	٦٠	٣٠	٢٠	١٥	١٠
$\frac{١}{\text{الأيام}} = \frac{١}{\text{س}}$	$\frac{١}{٦٠}$ = ٠,٠١٦٦٧	$\frac{١}{٣٠}$ = ٠,٠٣٣٣٣	$\frac{١}{٢٠}$ = ٠,٠٥٠٠٠	$\frac{١}{١٥}$ = ٠,٠٦٦٦٧	$\frac{١}{١٠}$ = أو
عدد الرجال (ص)	١	٢	٣	٤	٦

أنظر الجدول أعلاه والرسم البياني أدناه الذي يمثل الخط البياني للعلاقة ص = $\frac{٦٠}{\text{س}}$



(٥ – ٢) تعريف :

> إذا كـــان لدينـــا المتغيـــران س ، ص ، وكـــان س يتغير طردياً مع $\frac{١}{ص}$ ، أو كان ص يتغير طردياً مع $\frac{١}{س}$ فإننا نقول في هذه الحالة إن س ، ص يتغيران عكسياً .

فإذا كان ص $\propto$ $\frac{١}{س}$ وبادخال ثابت التغير

فإن : ص = $\frac{أ}{س}$ حيث أ ثابت التغير

وإذا كانت $س_١$ ، $س_٢$ قيمتان للمتغيرس تناظرهما القيمتان $ص_١$ ، $ص_٢$ للمتغير ص . فإنه في حالة التغير العكسى يكون :

$$\frac{س_١}{س_٢} = \frac{ص_٢}{ص_١}$$

وبالضرب العكسى نجد أن : $س_١ ص_١ = س_٢ ص_٢$

مثال : (١)

س ، ص متغيران حقيقيان مرتبطان بعلاقة ما ، فإذا أخذ المتغيران س ، ص القيمتين ١٥ ، ٢١ على الترتيب وزادت قيمة س حتى اصبحت ٣٥ بينما نقصت تبعاً لذلك قيمة ص إلى ٨ ، فهل ص $\propto$ $\frac{١}{س}$ ؟

الحل :

$$\frac{س_2}{س_1} = \frac{35}{15} = \frac{7}{3}$$

$$\frac{ص_1}{ص_2} = \frac{21}{8}$$

$$\therefore \frac{س_2}{س_1} \neq \frac{ص_1}{ص_2}$$

∴ص لا تتغير عكسيا بالنسبة لـــ س .

مثال (٢) :

إذا كان طول مستطيل ل يتغير عكسياً بتغير عرضه ع عند ثبوت مساحة المستطيل . وكان ل = ١٢ سم عندما ع = ٨ سم فجد قيمة ل عندما ع = ٣ سم.

الحل

$$\because ل \propto \frac{1}{ع} \Leftarrow \frac{ل_1}{ل_2} = \frac{ع_2}{ع_1}$$

$ل_1 = 12$ ، $ع_1 = 8$

$ل_2 = ؟$ ، $ع_2 = 3$

$$\therefore \frac{12}{ل_2} = \frac{3}{8} \Leftarrow ل_2 = \frac{12 \times 8}{3} = 32 \text{ سم}$$

حل آخر :

$$\because ل \propto \frac{1}{ع} \Leftarrow ل = \frac{أ}{ع} \text{ ، } أ \in ح^+$$

∵ ل = ١٢ عندما ع = ٨

$$\therefore ١٢ = \frac{أ}{٨} \Leftarrow أ = ١٢ \times ٨ = ٩٦$$

$$\therefore \text{العلاقة بين ل ، ع هى } ل = \frac{٩٦}{ع}$$

وعندما ع = ٣

$$\therefore ل = \frac{٩٦}{٣} = ٣٢ \text{ سم}$$

تمرين (٥ – ١)

(١) إذا كان ص يتغير طردياً مع س ، وكان ص = ١٠ عندما س = ٥ ، فجد قيمة ص عندما س = ١٥ ثم أرسم الخط البياني للعلاقة بين ص ، س .

(٢) إذا كان ص يتغير عكسياً مع س ، وكان س = ١٦ عندما ص = ٢٥ ، فجد قيمة ص عندما س = ٢٠ ثم أرسم الخط البياني للعلاقة بين ص ، س .

(٣) إذا كان ص = أ $س^٢$ ، ص = ١٥ عندما س = ٦ ، فجد قيمة أ ثم قيمة س عندما ص = ٦٠ .

(٤) ح $\propto$ $نق^٣$ ، ح = ٥٠ عندما نق = ٥ جد العلاقة بين ح ، نق .

(٥) إذا كان تربيع ص يتغير عكسياً مع (٢ س + ١) ، ص = ٢ عندما س = ١ ، فجد قيمة س عندما ص = –٣ .

(٦) القوة ق بين قطبين تتناسب عكسياً مع مربع المسافة بينهما ن . فإذا كانت المسافة بين القطبين ٥ سم تكون القوة ١١٠ داين . فكم تكون القوة عندما تكون المسافة ١١ سم ؟

(٧) حجم الغاز ح يتغير عكسياً مع ضغطه ض عند ثبوت درجة الحرارة . فإذا كان حجم الغاز ٤,٥ قدماً مكعباً عندما كان على ضغط ٣٠ رطلاً /قدم^{٢} فجد بالقدم المكعب حجم الغاز على ضغط ٥٠ رطلاً/قدم^{٢} .

(٨) المقاومة الكهربائية لأسلاك ذات أطوال متساوية تتغير عكسياً مع تربيع قطر قاعدة مقطعها . فإذا كانت المقاومة ٠,٨ أوم عندما يكون القطر ٢,١ سم . فجد المقاومة لسلك من نفس النوع والطول إذا كان قطره ١,٤ سم .

(٥ – ٣) التغير المشترك :

لاحظنا في حالتى التغير الطردى والعكسى أن الكمية الأولى تتغير تبعاً للتغير في كمية واحدة فقط طردياً أو عكسياً . وهذا ما يعرف أحياناً بالتغير البسيط، ولكن قد تتغير الكمية الأولى أو المتغير الأول مع اكثر من متغير ، وهذا ما يسمى بالتغير المشترك . فمثلاً مساحة المثلث تتغير مع تغير قاعدته وارتفاعه . وبصورة عامة عندما نقول س تتغير طردياً مع ص ، ع معاً نكتبها س $\propto$ ص ع أو س = أ ص ع حيث أ ثابت (موجب) .

وعندما نقول س يتغير طردياً مع ص وعكسياً مع ع نكتبها س $\propto \frac{ص}{ع}$

أو س = أ $\frac{ص}{ع}$ حيث أ ثابت (موجب)

ملحوظة : (إذا لم يذكر نوع التغير فيفهم على أنه تغيراً طردياً)

مثال (١) :

إذا كان ص يتغير طردياً بتغير س ، ع معاً . وكان ص = ٢ عندما س = ٠,٦ ،

ع = $\frac{١٠}{٢٧}$. فجد قيمة س عندما ص = $\frac{١}{٢}$ ، ع = $\frac{٨}{٩}$

الحل :

ص يتغير بتغير س ، ع معاً

∴ ص $\propto$ س ع ⇐ ص = أ س ع

∵ ص = ٢ عندما س = ٠,٦ ، ع = $\frac{١٠}{٢٧}$

∴ ٢ = أ × $\frac{٦}{١٠}$ × $\frac{١٠}{٢٧}$ ⇐ أ = ٩

∴ ص = ٩ س ع

∴ $\frac{١}{٢}$ = ٩ × س × $\frac{٨}{٩}$

∴ س = $\frac{١}{١٦}$

مثال (٢) :

المقاومة لسلك كهربائى م تتغير طردياً مع طول السلك بالسم ل وعكسياً مع تربيع قطر قاعدته ق بالسم . فإذا كان سلك طوله ٥ أمتار وقطر قاعدته ٢,٥ ملم كانت مقاومته ٠,٤ اوم . فما هى مقاومة سلك من نفس النوع طوله ٩ أمتار وقطر قاعدته ٣ ملم ؟

الحل :

$$\text{م} \propto \frac{\text{ل}}{\text{ق}^{\text{٢}}} \Rightarrow \text{م} = \frac{\text{أ ل}}{\text{ق}^{\text{٢}}}$$

$$\therefore \text{بالتعويض : } \text{٠,٤} = \frac{\text{أ} \times \text{٥٠٠}}{\text{٠,٢٥} \times \text{٠,٢٥}}$$

$$\text{أ} = \frac{\text{١}}{\text{٢٠٠٠٠}}$$

$$\therefore \text{م} = \frac{\text{ل}}{\text{٢٠٠٠٠ق}^{\text{٢}}}$$

وعندما يكون ل = ٩ أمتار ، ق = ٣ ملم

$$\text{م} = \frac{\text{٩٠٠}}{\text{٢٠٠٠٠} \times \text{٠,٣} \times \text{٠,٣}} = \text{٠,٥ أوم}$$

(٥ – ٤) التغير الجزئى :

في الحالات الثلاث السابقة كانت العبارة المتغيرة تتكون من حد واحد . ولكن أحياناً قد تتركب العبارة من حدين أو أكثر . فمثلاً ص = أ س + ب $ع^{٢}$ حيث أ ، ب عددان ثابتان موجبان ، يمكن أن نقول أن ص يتركب من كميتين، أحداهما تتغير تبعاً لتغير س والأخرى تتغير تبعاً لتغير تربيع ع ، ونعبر عن ذلك كالآتى :

ص يتغير جزئياً مع س وجزئياً مع تربيع ع .

وأيضاً إذا كان ص = أ + $\frac{ب}{ع}$ حيث أ ، ب عددان ثابتان . نقول أن ص جزئياً ثابت وجزئياً يتغير عكسياً مع ع .

مثال (١) : إذا كان ص يتغير جزئياً مع س وجزئياً مع تربيع س .

وكان ص = ١٤ عندما س = ٢

و ص = ٤٤ عندما س = ٤

فجد ص بدلالة س ، وقيمة ص عندما س = ٣

الحل :

ص = أ س + ب $س^{٢}$ ، حيث أن أ ، ب عددان ثابتان

١٤ = ٢ أ + ٤ ب (١)

٤٤ = ٤ أ + ١٦ ب (٢)

بحل المعادلتين (١) ، (٢) آنياً ، نجد أن :

أ = ٣ ، ب = ٢

∴ ص بدلالة س : ص = ٣ س + ٢ $س^{٢}$

وعندما س = ٣

ص = ٣ × ٣ + ٢ × ٩ = ٢٧

مثال (٢) :

إذا كان م جزئياً ثابت ، وجزئياً يتغير عكسياً تبع ن .

وإذا كان م = ١٧ يكون ن = ٤ وإذا كان م = ١٦ يكون ن = ٥

فجد م عندما يكون ن = ٦

الحل :

م = أ + $\frac{ب}{ن}$ (أ ، ب عددان ثابتان)

١٧ = أ + $\frac{ب}{٤}$ ⇐ ٦٨ = ٤ أ + ب (١)

١٦ = أ + $\frac{ب}{٥}$ ⇐ ٨٠ = ٥ أ + ب (٢)

∴ بالطرح : ١٢ = أ

بالتعويض في (١) : ٦٨ = ٤٨ + ب

∴ ب = ٢٠

∴م = ١٢ + $\frac{٢٠}{ن}$ ⇐ ∴ م = ١٢ + $\frac{٢٠}{٦}$ = $\frac{١}{٣}$ ١٥

تمرين (٥ – ٢)

(١) إذا كان ع يتغير تغيراً مشتركاً مع س ، ص ، وكان ص = ٤ عندما س = ١ ، ع = ٢ . فجد ثابت التغير .

(٢) إذا كان ص يتغيرطردياً مع س ، وعكسياً مع ل تغيراً مشتركاً . وكان ص = $\frac{٣}{٢}$ عندما س = ٢ ، ل = ٤ . جد ثابت التغير ثم جد العلاقة بين ص ، س، ل .

(٣) إذا كانت مقاومة موصل منتظم (م) تتغير طردياً مع طول الموصل (ل) وعكسياً مع مساحة مقطعه (س) تغيراً مشتركاً . فجد صيغة رياضية للعلاقة بين م ، ل ، س .

وإذا كانت مقاومة الموصل ٨,٦ أوم وطوله ٥٠٠ متر جد مساحة مقطعه إذا كان ثابت التغير ١,٧٢ × $١٠^{-٨}$ أوم . متر

(٤) ص يتغير تبع س ، $ع^{٢}$ معاً . إذا كان ص = ٦ عندما تكون س = ٩ ، ع = ٣ ، فجد

(أ) قيمة ص عندما س = ٨ ، ع = ٢

(ب) قيمة س عندما ص = ٩ ، ع = $\frac{١}{٤}$

(٥) يقول قانون بويل أن حجم الغاز ح يتغير تبعاً لدرجة حرارته المطلقة م وعكسياً تبعاً لضغطه ض . إذا كان حجم غاز ٤٥٠سم^{٣} على ضغط ٨٢٥ ملم زئبق ودرجة حرارة ١٥° مئوية . فكم يكون حجمه على

ضغط ٧٥٠ ملم زئبقاً ودرجة حرارة ٤٧° مئوية علماً بأن درجة الحرارة المطلقة = درجة الحرارة المئوية + ٢٧٣ .

(٦) ص جزئياً ثابت ، وجزئياً يتغير مع س .

إذا كان س = ٥ ، يكون ص = ٢٦ .

إذا كان س = ٣ ، يكون ص = ١٨ . فجد :

(أ) ص بدلالة س

(ب) ص إذا كان س = ٦

(٧) ص جزئياً ثابت وجزئياً يتغير مع س وجزئياً مع تربيع س . عندما يكون ص = ٦ ، ١١ ، ١٨ يكون س يساوى على الترتيب ١ ، ٢ ، ٣ . ما العلاقة بين س ، ص ؟ وما قيمة ص عندما يكون س = ٤ ؟

(٨) الزمن الذى يستغرقه حفر بئر يتغير جزئياً مع عمق البئر وجزئياً مع تربيع العمق . إذا كان العمق ٢٠ قدماً يستغرق الحفر ٨٠ ساعة . وإذا كان العمق ٣٠ قدماً يستغرق الحفر ١٥٠ ساعة . ففى كم ساعة يتم حفرها إذا كان العمق ٤٠ قدماً ؟

الوحدة السادسة

الدوال الدائرية(المثلثية)

أهداف الوحدة السادسة

الدوال الدائرية (المثلثية)

يتوقع من الطالب بعد دراسة هذه الوحدة أن يكون قادراً على أن :-

١- يتعرف الزاوية الموجهة .

٢- يتعرف الوضع القياسي للزاوية الموجهة .

٣- يتعرف قياس الزاوية ويرسمها .

٤- يتعرف وحدة قياس الزوايا بالتقدير الستيني .

٥- يتعرف الزاوية نصف القطرية (وحدة قياس الزاوية بالتقدير الدائري).

٦- يتعرف النقطة المثلثية والدوال المثلثية الجيب وجيب التمام .

٧- يتعرف دالة الظل .

٨- يجد النسب المثلثية لبعض الزوايا الخاصة .

٩- يتعرف زاوية الإسناد .

١٠- يتعرف دوال القاطع وقاطع التمام وظل التمام .

١١- يتعرف العلاقة الأساسية بين الدوال المثلثية .

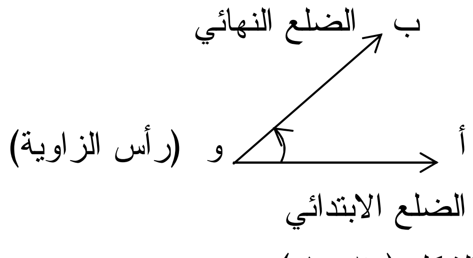
الوحدة السادسة

الدوال الدائرية (المثلثية)

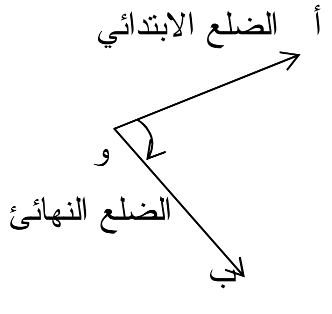
الزاوية الموجهة والوضع القياسي للزاوية

(٦ – ١) الزاوية الموجهة :

الزاوية الموجهة هى الزاوية التى تتكون من ساقين أو نصفى مستقيمين أو شعاعين و أ ، و ب يمتدان من نقطة مشتركة (و) تسمى رأس الزاوية . تكتب فى صورة زوج مرتب (و أ ، و ب) من أنصاف المستقيمات (شعاعين) أو يرمز لها بالرمز∢ أ و ب . ويسمى نصف المستقيم (الشعاع) و أ الضلع الابتدائي للزواية . ويسمى نصف المستقيم (الشعاع) و ب الضلع النهائي .



الشكل (٦– ١)



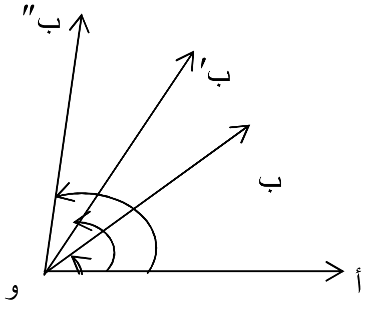
الشكل (٦ – ٢)

وتتكون الزاوية بدوران ضلعها النهائي حول رأسها بينما يظل ضلعها الابتدائي ثابتا .

فإذا دار الضلع النهائي حول (و) فى إتجاه مضـاد لحركـة عقـارب الساعة فان قياس الزاوية الناتجة يكون موجبا . أما إذا دار فى اتجـاه حركـة عقارب الساعة فان قياس الزاوية الناتجة سالبا . ففى الشكل (٦ – ١) الضلع النهائي و ب دار حول و فى اتجاه مضاد لحركة عقارب الساعة لـذا يكـون قياس الزاوية أ و ب موجبا . وفى الشكل (٦ – ٢) دار الضلع النهائى و ب فى اتجاه عقارب الساعة لذا يكون قياس ∢ أ و ب سالباً .

وعلى ذلك فانه لتعيين الزاوية الموجهة يلزم معرفة قياسها واتجاه دوران الضلع النهائى ، ويعتمد قياسها على مقدار دوران الضلع النهائى واتجاه دورانه ففى الشكل (٦ – ٣) التالى:

∢ أ و ب < ∢ أ و ب′ < ∢ أ و ب″



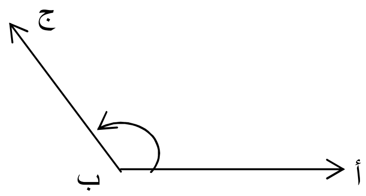
الشكل (٦ – ٣)

مثال :

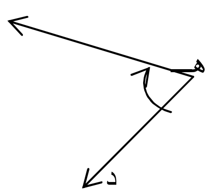
فى كل من الأشكال التالية اكتب :

أ. اسم الزاوية وهل هى سالبة أم موجبة ؟

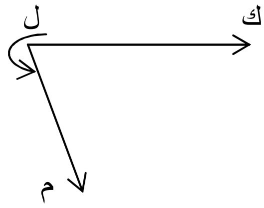
ب. ضلعها الابتدائي وضلعها النهائي ؟



الشكل (٦ – ٥)



الشكل (٦ – ٦)



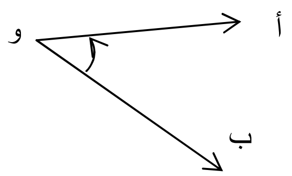
الشكل (٦ – ٧)

الحــل :

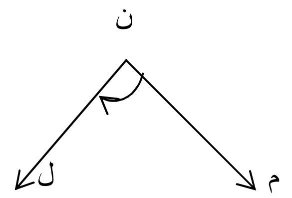
فى الشكل (٦ – ٥) الزاوية هى ∢أ ب جـ او (ب أ ، ب جـ)
وهى موجبة فإن الضلع الأبتدائى ب أ
والضلع النهائى ب جـ
الشكل (٦ – ٦) : الزاوية هى ∢د هـ و او (هـ د ، هـ و) وهى سالبة
فإن الضلع الأبتدائي هـ د
والضلع النهائى هـ و
الشكل (٦ – ٧) الزاوية ∢ك ل م او (ل ك ، ل م) (موجبة)
فإن الضلع الأبتدائي ل ك
والضلع النهائى ل م

تمرين (٦ – ١)

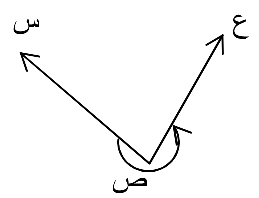
(١) فى كل من الاشكال التالية سم الزاوية واكتب الضلع الابتـدائى والضـلع النهائى لها :



الشكل (٦ – ٨)



الشكل (٦ – ٩)



الشكل (٦ – ١٠)

(٢) أرسم الزوايا التالية :

أ. الزاوية الحادة (أ م ، أ ن)

ب. الزاوية المنفرجة (ك ل ، ك م)

ج. الزاوية المنعكسة (هـ س ، هـ ص)

(٣) أكتب الزوايا الموجهة التالية بطريقة أخرى

أ. (م و ، م هـ) ب. (أ ب ، أ جـ)

ج. (د و ، د س)

(٤) اكتب الزوايا الموجهة التالية فى صورة ازواج مرتبة :

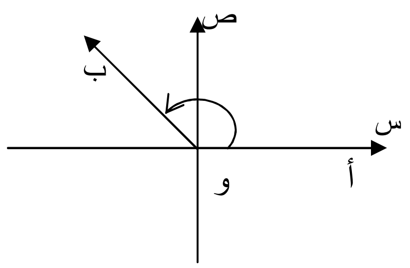
(أ) ∢أ ب جـ (ب) ∢س ع ص (جـ) ∢هـ و د

(٥) ما هو الفرق بين (أ) ∢أ ب جـ ، ∢جـ أ ب

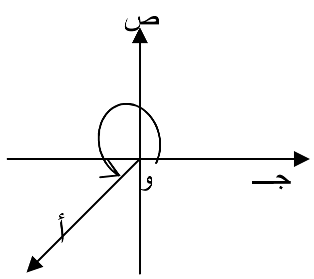
(ب) (س ع ، س ص) ، (س ص ، س ع)

(٦ – ٢) الوضع القياسي للزاوية الموجهة :

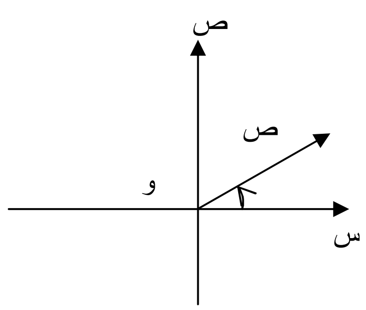
يقال ان الزاوية الموجهة فى وضعها القياسى – اذا وقـــع راس الزاويـــة على نقطة الأصل وانطبق ضلعها الابتدائى على الجزء الموجب للمحور السينى.
والاشكال التالية توضح زوايا فى وضعها القياسى :



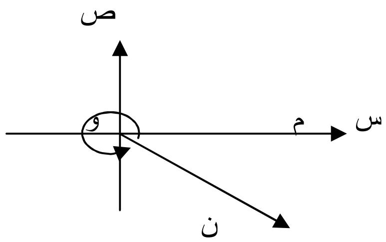
الشكل (٦– ١١)
$\angle$ أ و ب فى وضعها القياسي
وتقع فى الربع الثاني



الشكل (٦–١٢)
$\angle$ ج و د فى وضعها القياسي
وتقع فى الربع الثالث



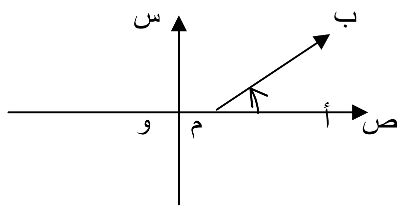
الشكل (٦ – ١٣)
$\angle$ س و ص فى وضعها القياسى
وتقع فى الربع الاول



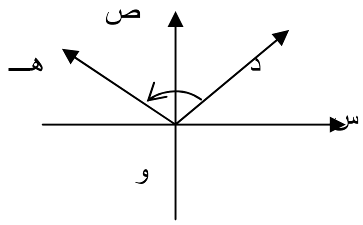
الشكل (٦ – ١٤)

∢ م و ن فى وضعها القياسى وتقع فى الربع الرابع

أما الزوايا فى الأشكال التالية فليست فى وضعها القياسى



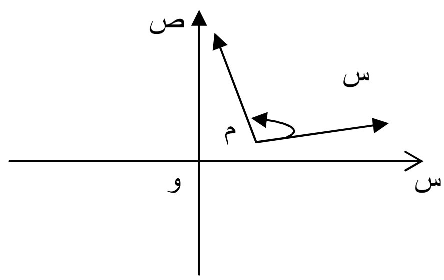
الشكل (٦ – ١٥)



الشكل (٦ – ١٦)

∢ أ م ب ليست فى وضعها القياسي لان رأسها لم ينطبق على نقطة الأصل

∢ د و هـ ليست فى وضعها القياسي لان ضلعها الابتدائي لم ينطبق على الجزء الموجب للمحور السيني

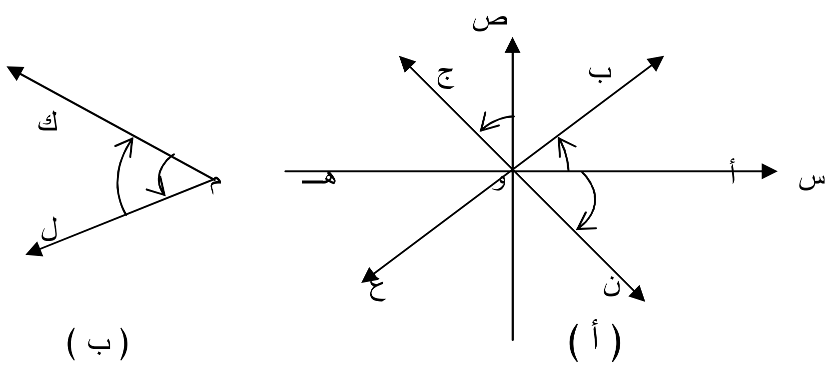


الشكل (٦ – ١٧)

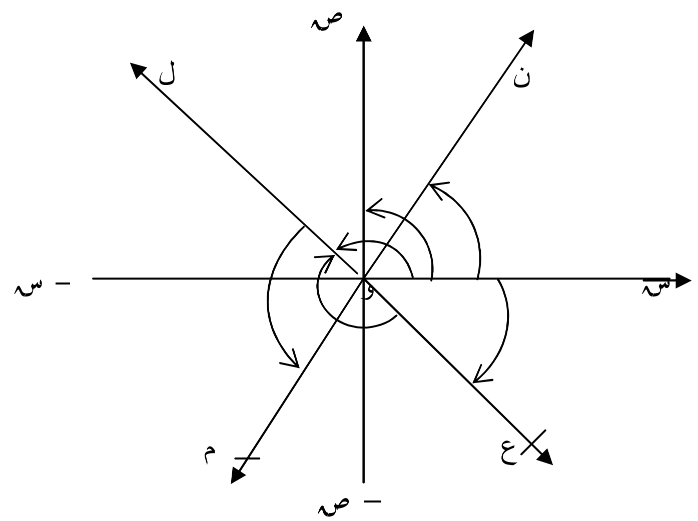
∢س م ص ليست فى وضعها القياسي لان رأسها لم ينطبق على نقطة الأصل وضلعها الأبتدائي لم ينطبق على الجزء الموجب للمحور السيني .

تمرين (٦ – ٢)

١. اكتب كلا من الزوايا الموجهة فى الاشكال التالية بصورة ازواج مرتبة ، ثم اذكر اى الزوايا السالبة فى وضع قياسى ، وبين السبب فى كل حالة :



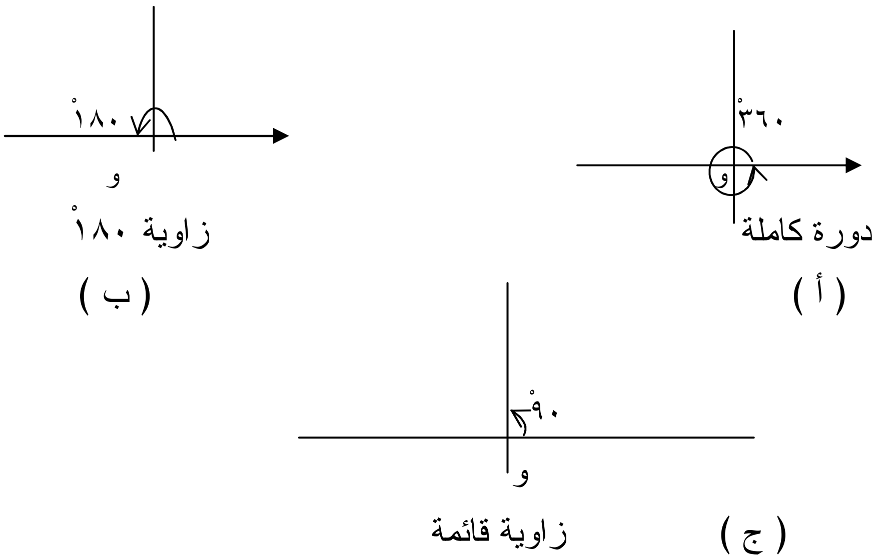
الشكل (٦ – ١٨)



الشكل (٦ – ١٩)

(٦ – ١٣) قياس الزوايا

قد نستخدم أكثر من نوع من وحدات القياس لمعرفة مقادير الأشياء المختلفة . فقد نستخدم الكيلوجرام والطن والرطل لمعرفة اوزان الاشياء أو كتلها. وكذلك نستخدم السنتمتر والمتر أو الياردة والقدم لمعرفة – أطوال الاشياء وكذلك نتعامل مع قياسات معينة فى قياس الزوايا . ومن ذلك القياس الستينى : ووحدته الدرجة وقد مر بنا سابقا عند إستخدام المنقلة لقياس الزوايا ونجد ان قياس الزاوية الموجهة التى تتكون بدوران الضلع النهائى دورة كاملة تساوى ٣٦٠ درجة وتكتب ٣٦٠ْ ، ونصف واحد من هذه الزاوية ١٨٠ْ وربع واحد منها يساوى ٩٠ْ وتسمى بالزاوية القائمة كما فى الأشكال التالية :



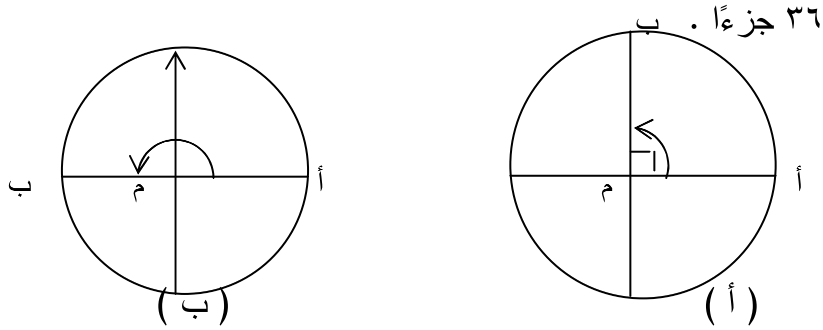
الشكل (٦ – ٢٠)

إذن يمكن أن تعرف الدرجة فى القياس الستينى بأنها هى القياس لزاوية مركزية فى دائرة تقابل قوسا طوله $\frac{١}{٣٦٠}$ من محيط الدائرة

وللدرجة إجزاء منها الدقيقة = $\frac{١}{٦٠}$ من الدرجة والثانية = $\frac{١}{٦٠}$ من الدقيقة

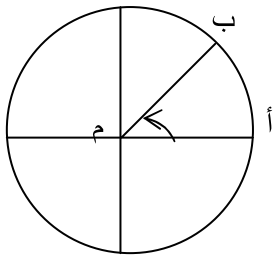
ويلاحظ أن كل جزء يساوى $\frac{١}{٦٠}$ من سابقه لذا سمى بالتقدير الستيني

وتقاس الزوايا بالمنقلة التى درجت على الأساس السابق فى تقسيم الدائرة إلى ٣٦٠ جزءًا .



قياس ∢ أ م ب = ٩٠ْ

¼ دائرة



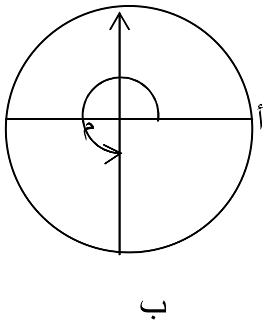
قياس ∢ أ م ب = ٤٥ْ

⅛ دائرة

(جـ)

قياس ∢ أ م ب = ١٨٠ْ

½ دائرة



قياس ∢ أ م ن = ٢٧٠ْ

¾ دائرة

(زاوية منعكسة)

الشكل (٦ – ٢١)

مثال : (١)

أرسم الزوايا الاتية :

(١) ∢ أ ب جـ = ٤٢ْ

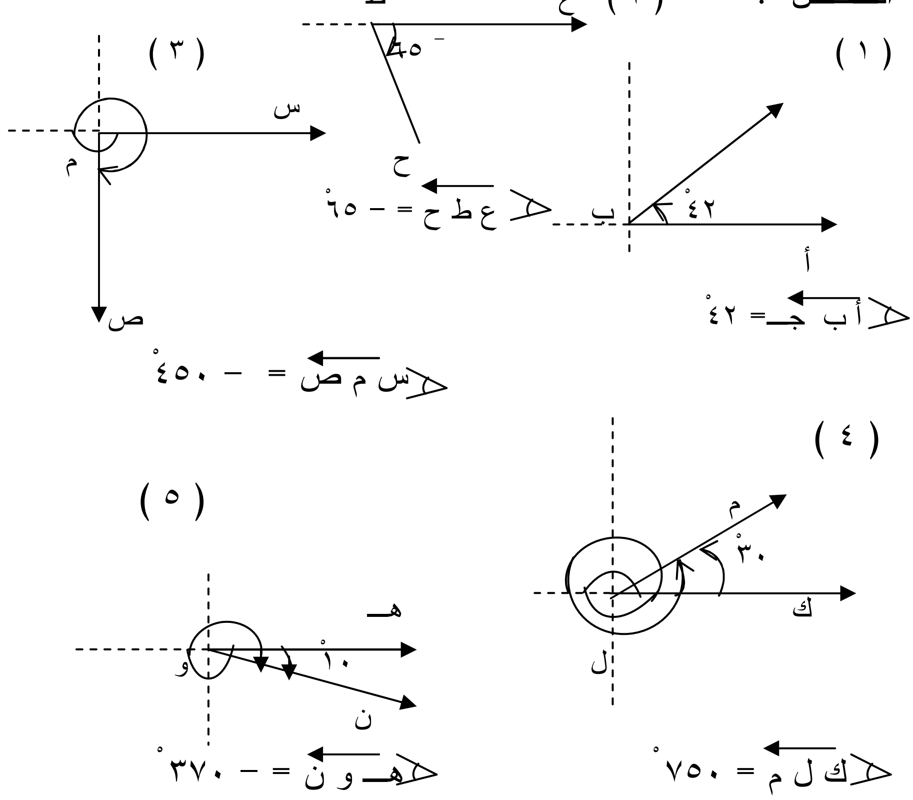
(٢) ∢ ع ط ح = – ٦٥ْ

(٣) ∢ س م ص = –٤٥٠ْ

(٤) ∢ ك ل م = ٧٥٠ْ

(٥) ∢ هـ و ن = –٣٧٠ْ

الـحـل :



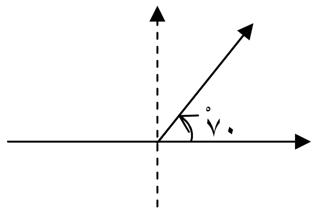
مثال : (٢)

ضع كلا من الزوايا الاتية فى وضعها القياسى وارسمها ثم حدد الربع الذى تقع فيه .

(١) ٧٠°　　(٢) ٩٢٠°　　(٣) – ٧٠°　　(٤) –٥٨٥°

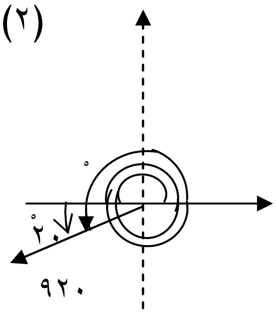
الحــل :

(١)



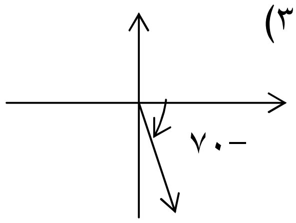
تقع فى الربع الاول

(٢)



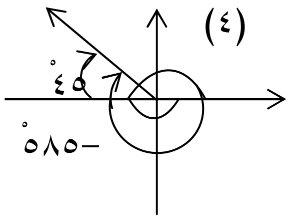
تقع فى الربع الثالث

(٣)



تقع فى الربع الرابع

(٤)



تقع فى الربع الثاني

تمرين (٦ – ٣)

(١) ارسم الزوايا الاتية :

أ– ٩٥ْ ، ٢٢٥ْ ، ١٧٥ْ ، ١٠٠٥ْ

ب– –٩٠ْ ، –١٩٥ْ ، –٣٢٠ْ ، –٩٠٠ْ

(٢) ضع كلا من الزوايا الاتية فى وضعها القياسى وارسمها ثم حدد الربع الذى تقع فيه

أ– ٣٤٠ ْ ، ٤٢٠ْ ، ٥٦٠ْ ، ٦٨٠ْ

ب– –١٧٢ ْ ، –٩٠٠ْ ، –٣٥٠ْ

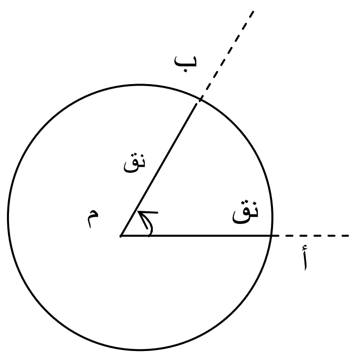
(٦ – ٤) التقدير الدائرى :

وحدة قياس الزوايا بالتقدير الدائرى هى الراديـــان او الزاويـــة نصـــف القطرية .

(٦ – ١) تعريف

الزاوية نصف قطرية (أو راديان واحد) هى قياس لزاوية مركزية فى دائرة تقابل قوسا طوله يساوى نصف قطر تلك الدائرة .

انظر الشكل (٦ – ٢٢)



الشكل (٦ – ٢٢)

ونتخذ هذه الزاوية وحدة لقياس الزوايا ويرمز لها بالرمز (د)

لهذا السبب فالراديان هو مقياس النسبة لطول القوس الى نصف القطـــر وغيـــر معتمد على مقدار نصف القطر . وحيث أن المحيط (مح) لدائرة نصف قطرها نق هو ٢ π نق . يتبع ذلك ان :

مح = ٢ π نق

$\therefore \frac{\text{مح}}{\text{نق}} = ٢\pi$

لكن $\frac{\text{مح}}{\text{نق}}$ يحوى الزاوية التى مقدارها ٣٦٠ْ

عليه فالزاوية التى مقدارها ٣٦٠ْ تحوى ٢ π راديان يمكن كتابـــة ذلـــك بالمعادلة:

٢ π راديان = ٣٦٠ْ

أو π راديان = ١٨٠ْ

ويكون ١ْ = $\frac{٢\pi}{٣٦٠^\circ} = \frac{\pi}{١٨٠^\circ}$ راديان

١ راديان = $\frac{١٨٠}{\pi}$ درجة

وبذلك يكون :

٢ زاوية نصف قطرية او راديان ٢ × $\frac{١٨٠}{\pi} = \frac{٣٦٠}{\pi}$ درجة

$$٥ \text{ زاوية نصف قطرية} = ٥ \times \frac{١٨٠}{\pi} = \frac{٩٠٠}{\pi} \text{ درجة}$$

$$\therefore \text{ س زاوية نصف قطرية} = \text{س} \times \frac{١٨٠}{\pi} = \frac{١٨٠ \text{ س}}{\pi} \text{ درجة}$$

وايضا :

$$٢٥^{\circ} = ٢٥ \times \frac{\pi}{١٨٠} = \frac{٥\pi}{٣٦} \text{ زاوية نصف قطرية (راديان)}$$

$$٣٠^{\circ} = ٣٠ \times \frac{\pi}{١٨٠} = \frac{\pi}{٦} \text{ زاوية نصف قطرية (راديان)}$$

$$\therefore \text{ هـ}^{\circ} = \frac{\text{هـ} \times \pi}{١٨٠} = \left(\frac{\text{هـ}\pi}{١٨٠}\right)^{\text{د}}$$

جدول درجات وراديان لبعض الزوايا كثيرة الاستعمال قياسها بالتقدير الستيني والمقابل لها بالتقدير الدائري

زوايا بالتقدير الستيني	زوايا بالتقدير الدائري
٠	٠
٣٠	$\pi/٦$
٤٥	$\pi/٤$
٦٠	$\pi/٣$
٩٠	$\pi/٢$
١٢٠	$٢\pi/٣$
١٣٥	$٣\pi/٤$
١٥٠	$٥\pi/٦$
١٨٠	π

جدول (٦ – ١)

مثال : (١)

جد قياس كل من الزوايا الاتية بالتقدير الدائرى

أ. ٦٠ْ ب. ٢٢٥ْ

الحـــل :

(أ) ١ درجة = $\frac{\pi}{١٨٠}$ راديان

$\therefore$ ٦٠ْ = ٦٠ × $\frac{\pi}{١٨٠}$ = $\frac{\pi}{٣}$ راديان

(ب) ٢٢٥ْ = ٢٢٥ × $\frac{\pi}{١٨٠}$ = $\frac{٥\pi}{٤}$ راديان

مثال (٢)

جد قياس كل من الزوايا الاتية بالتقدير الستينى

$\frac{\pi}{٦}$ راديان $\frac{٣\pi}{٤}$ راديان ، ٢,٦ راديان الى درجات

الحل :

١ راديان = $\frac{١٨٠ْ}{\pi}$

$\therefore$ $\frac{\pi}{٦}$ رديان = $\frac{١٨٠}{\pi}$ × $\frac{\pi}{٦}$ = ٣٠ْ

$\frac{٣\pi}{٤}$ راديان = $\frac{١٨٠}{\pi}$ × $\frac{٣\pi}{٤}$ = ١٣٥ْ

٢,٦ راديان = $\frac{١٨٠}{\pi}$ × ٢,٦ = $\frac{١٨٠}{\pi}$ × ٢,٦ = $\frac{٤٦٨}{\pi}$

تمرين (٦ – ٤)

(١) جد قيا س كل من الزوايا الآتية بالتقدير الدائري

أ/ ٣٥ْ   ب/ -٣٠ْ   ج/ ٥٠٠ْ   د/ -٢٢٥ْ

هـ/ ٧٢ْ   و/ -٢٥ْ   ز/ ٢٠٠٠ْ

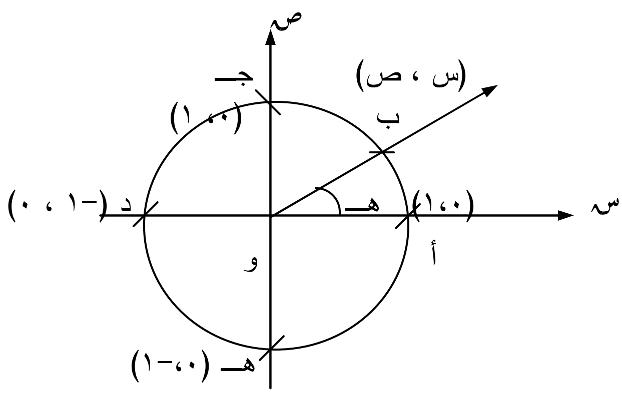
(٢) جد قياس كل من الزوايا الآتية بالتقدير الستيني

أ/ ١   ب/ ٢π   ج/ π   د/ π/٩

هـ/. -٣π   و/ -١٠π   ز/ ٣

(٦ – ٥) النقطة المثلثية والدوال المثلثية :

ستعالج كثيرا من مفاهيم الدوال المثلثية من دائرة الوحدة ودائرة الوحدة هى دائرة مركزها عند نقطة الاصل عند تقاطع محورى الاحداثيات ونصف قطرها الوحدة . فاذا كانت لدينا زاوية موجهة فى وضعها القياسى ، فان نقطة تقاطع ضلعها النهائى مع دائرة الوحدة تسمى النقطة المثلثية لتلك الزاوية:



الشكل (٦ – ٢٣)

ففى الشكل (٦ – ٢٣) تكون ب هى النقطة المثلثية للزاوية أ و ب وتكون جـ هى النقطة المثلثية للزاوية أ و جـ نلاحظ ان أ هى النقطة المثلثية للزاوية التى قياسها صفر ، وأيضا للزاوية التى قياسها ٢π أو ٣٦٠° إذا دار الضلع النهائى دورة كاملة وكذلك يمكن أن تكون نقطة مثلثية للزاوية ٤π او ٧٢٠° وأيضا للزاوية ٦π ، .....

أى النقطة المثلثية للزاوية صفر هى نفسها النقطة المثلثية لكل الزوايا صفر + ٢ن π حيث ن ∋ صـ

وكذلك النقطة المثلثية للزاوية س هى نفسها النقطة المثلثية للزوايا س + ٢نπ حيث ن ∋ صـ أما إذا حصرنا قيم الزوايا فقط فى المدى من الصفر الى اقل من ٢ π او اقل من ٣٦٠° فعندئذ نجد ان كل زاوية موجهة رسمت فى وضعها القياسى تقابلها نقطة مثلثية واحدة على دائرة الوحدة وكذلك

كل نقطة مثلثية على دائرة الوحدة تعين زاوية موجهة واحدة فى الوضع القياسى فى هذا المدى . أى أن هناك تقابل بين نقاط دائرة الوحدة والزوايا الموجهة فى وضعها القياسى داخل هذا المدى . وبالمثل يقابل كل نقطة على دائرة الوحدة زوج من الأعداد (س ، ص) هما إحداثيات هذه النقطة أى أن لدينا السلسلة التالية من التقابلات ، زاوية موجهة ذات وضع قياسى مقاسه بالتقدير الدائرى أو الستينى تقابل نقطة مثلثية احداثياتها (س ، ص) .

ففى الشكل (٦ – ٢٣) السابق :

النقطة أ تقابل الزاوية صفر تقابل النقطة المثلثية التى إحداثياها (١ ، ٠) فاذا رمزنا لهذا التقابل بالرمز ت نجد ان ت (٠) = (١ ، ٠) والنقطة جـ تقابل الزاوية ٩٠ او $\pi/٢$ تقابل نقطة إحداثياها (٠، ١) أى أن ت ($\pi/٢$) = (٠ ، ١)

إن هذا يوضح لنا أن كل زاوية موجهة فى وضعها القياسى يقابلها احداثى سينى يساوي واحد وهذا التقابل يعطينا دالة . وكذلك كل زاوية موجهة فى وضعها القياسى يقابلها إحداثى صادى يساوي واحد وهذا التقابل يعطينا دالة اخرى وهذا يقودنا للتعريف التالى :

(٦ – ٢) تعريف

لكل قياس زاوية موجهة هـ فى وضعها القياسى يوجد دالتان تسميان دالة الجيب ودالة جيب التمام تعرفان كما يلى :

(١)جيب هـ ويرمز له بالرمز جا هـ هو الأحداثى الصادى لنقطة تقاطع الضلع النهائى للزاوية التى قياسها هـ مع دائرة الوحدة .
أى جا هـ = ص

(٢)جيب تمام الزاوية هـ ، ويرمز له جتا هـ هو الأحداثى السينى لنقطة تقاطع الضلع النهائى للزاوية التى قياسها هـ مع دائرة الوحدة اى ان جتا هـ = س

(٣) فى كل من الدالتين جا ، جتا يكون المجال هو مجموعة الاعداد الحقيقية هـ حيث صفر ≤ هـ > ٣٦٠°

(٤)بما أن كل من الأحداثين السينى والصادى فى دائرة الوحدة من – ١ الى +١ فان المدى لكل من دالتى الجيب وجيب التمام ينحصر فى هذه القيم أى :

$^{-}$١ ≤ جا هـ ≤ ١

$^{-}$١ ≤ جتا هـ ≤ ١

مثال : (١)

اذا كان ت (هـ) = (١ ، ٠) للزاوية هـ فى وضعها القياسى

اوجد جا هـ ، جتا هـ

الحل :

ت (هـ) = (١ ، ٠)

∴ جا هـ = ٠

جتا هـ = ١

مثال : (٢)

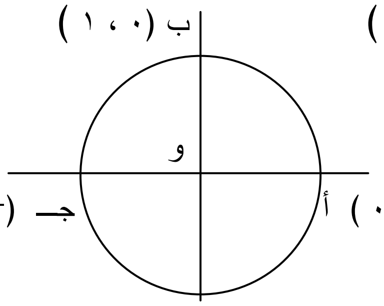
تامل دائرة الوحدة فى الشكل (٦ –٢٤)

وجد :

ت (⁻π/٢) ، ت (π)

ت (٢ π) ، ت (٣π/٢)

ثم جد جا هـ ، جتا هـ لكل منها :



الشكل (٦ – ٢٤)

الــحل:

ت (⁻π/٢) = (٠ ، −١) ،

∴ جا (⁻π/٢) = − ١ ، جتا (⁻π/٢) = ٠

ت (π) = (−١ ، ٠) ، ∴ جا π = ٠ ، جتا π = − ١

ت (٢π) = (١ ، ٠) ، ∴جا ٢ π = ٠ ، جتا ٢ π = ١

ت (٣π/٢) = (٠ ، −١) ،∴ حا ٣π/٢ =−١ ، جتا ٣π/٢ = ٠

تمرين (٦ – ٥)

(١) اذا كان ت (هـ) معطى بالعلاقات التالية فى كل حالة

(أ) ت (هـ) = (٠,٥ ، $\frac{٣}{٢}$) ، (ب) ت (هـ) = (٠ ، – ١) ،

(جـ) ت (هـ) = ($\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، $\frac{١}{\sqrt{٢}}$)

جد فى كل حالة جا هـ ، جتا هـ :

(٢) من دائرة الوحدة اوجد قيم ت (هـ) المعطاه ثم اوجد جا هـ ، جتا هـ فى كل حالة :

(أ) ت (– π) ، (ب) ت (٦ π)

(جـ) ت $\left(\frac{٧\pi}{٢}\right)$ ، (د) ت $\left(\frac{-٥\pi}{٢}\right)$

(٦ – ٦) دالة الظل :

رأينا إذا كانت هـ قياس زاوية موجهة ، فانه يوجد (أ) دالة الجيب (ب) دالة جيب التمام .

وحيث أن كلا من جا هـ ، جتا هـ عبارة عن أعداد حقيقية فانه من الممكن ان نعرف دالة أخرى جديدة سوف نطلق عليها دالة الظل ونرمز لها بالرمز ظا بحيث أن : ظا هـ = $\frac{\text{جا هـ}}{\text{جتا هـ}}$

بشرط أن هـ ≠ ٩٠° ، هـ ≠ ٢٧٠° وحيث أن ظا هـ هى قيمة دالة الظل المرتبطة بقياس الزاوية الموجهة هـ يمكن أن نعتبر التعريف التالى:

(٦ – ٣) تعريف :

نسمى حاصل قسمة جا هـ على جتا هـ ظل الزاوية هـ ونرمز له بالرمز ظاهـ أي

ظا هـ = $\frac{\text{جاهـ}}{\text{جتاهـ}}$ ، حيث جتاهـ ≠ ٠

واستنادا إلى هذا التعريف نجد أن :

ظا ٠ = $\frac{٠}{١}$ = ٠ ، ظا π = $\frac{\text{جا } \pi}{\text{جتا } \pi}$ = $\frac{٠}{-١}$ = ٠

أما ظا٩٠= $\frac{\text{جا ٩٠}}{\text{جتا ٩٠}}$ = $\frac{١}{٠}$ = ∞ حيث الرمز ∞ : تقرأ ما لا نهاية

(أي عدد لا نهائي)

مثال :

إذا كان ت (هـ) = ($\frac{١}{٢}$ ، $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$)

جد (أ) جا هـ (ب) جتا هـ (ج) ظا هـ (د) حا^{٢}هـ + جتا^{٢} هـ .

الحل :

(أ) جا هـ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

(ب) جتا هـ = $\frac{١}{٢}$

(ج) ظا هـ = $\frac{\text{جاهـ}}{\text{جتاهـ}}$ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢} \times \frac{٢}{١}$ = $\sqrt{٣}$

(د) جا^{٢} هـ + جتا^{٢} هـ = $(\frac{\sqrt{٣}}{٢})^{٢} + (\frac{١}{٢})^{٢}$

= $\frac{٣}{٤} + \frac{١}{٤} = \frac{٤}{٤}$ = ١

تمرين (٦ – ٦)

(١) إذا كان ت (هـ) = $(\frac{\sqrt{٣}}{٢} ، \frac{١}{٢})$ جد :

(أ) جا هـ (ب) جتا هـ

(ج) ظا هـ (د) جا هـ + جتا هـ

(٢) إذا كان ت (س) = (−١ ، ٠) جد :

(أ) ظا س (ب) جا س + جتا س

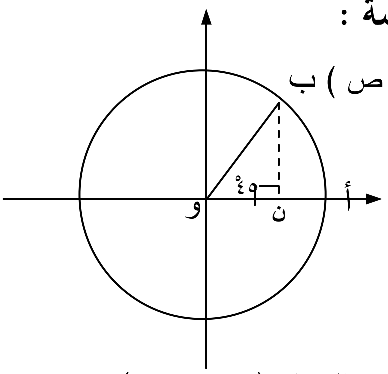
(٣) إذا كان ت (د) = $(\frac{١}{٢}\sqrt{٢} ، \frac{١}{٢}\sqrt{٢})$ جد :

ظا د ، جا^{٢}د + جتا^{٢} د

(٤) إذا كان ت (هـ) = (٠ ، ١) جد :

جاهـ ، ظا هـ

(٦ – ٧) الدوال المثلثية لبعض الزوايا الخاصة :



الشكل (٦ – ٢٥)

الزاوية $\overleftarrow{\text{أ و ب}}$ ٤٥ْ أو ($\pi/_{٤}$) ، ب(س ، ص) ب

إذا كانت هـ = ٤٥ْ = $\pi/_{٤}$ راديان

فان المثلث ن ب و متساوي

الساقين (انظر الشكل (٦ – ٢٥)

فيه $\overline{\text{ب ن}}$ = $\overline{\text{ن و}}$ أى أن

(س = ص)

ومن نظرية فيثاغورث س^{٢} + ص^{٢} = نق^{٢} = ١

أي س^{٢} +س^{٢} = ١ (معادلة دائرة الوحدة)

٢ س^{٢} = ١

س = $^{١}/_{\sqrt{٢}}$

لان س موجبة فى الربع الاول

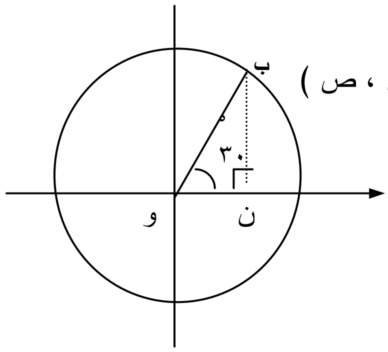
واستنادا إلى التعريف (٦ – ٢) ، (٦ – ٣) ان س = جتا هـ ، ص = جا هـ

نجد ان : جتا ٤٥ = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

جا ٤٥ = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، ظا٤٥ = $\frac{\text{جا ٤٥}}{\text{جتا ٤٥}}$ = ١

أى أن إحداثيات النقطة المثلثية للزاوية ٤٥ هى ($\frac{١}{\sqrt{٢}}$ $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

(ب) الزاوية ٣٠ْ = $\frac{\pi}{٦}$ راديان



الشكل (٦ – ٢٦)

إذا كانت هـ = ٣٠ْ

وتذكرنا ان طول الضلع

المقابل للزاوية ٣٠ْ فى المثلث

القائم يساوى نصف طول الوتر

نجد أن ص = $\frac{١}{٢}$

وبالتعويض فى المعادلة س^{٢} + ص^{٢} = ١

نجد ان س = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

وعليه يكون احداثيا النقطة المثلثية للزاوية ٣٠ْ

هى ($\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، $\frac{١}{٢}$) .

ومنه نستنتج ان :

جتا ٣٠ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، جا ٣٠ = $\frac{١}{٢}$ ظا ٣٠ = $\frac{١}{٢}$ ÷ $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ =

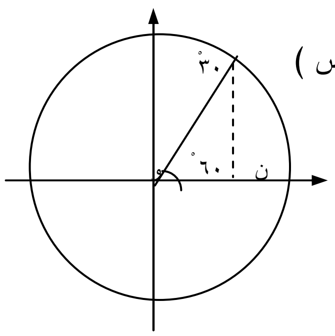
$\frac{١}{٢}$ × $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$ = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$

(ج) الزاوية ٦٠ = $\frac{\pi}{٣}$ راديان :

وبصورة مماثلة وبالنظر الى دائرة الوحدة فى الشكل (٦ – ٢٧)

نجد أن ن و = $\frac{١}{٢}$ الوتر = $\frac{١}{٢}$

أى أن س = $\frac{١}{٢}$



الشكل (٦– ٢٧)

$\therefore \left(\frac{1}{2}\right)^2 + ص^2 = 1$

$\therefore \quad ص^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

$\therefore \quad ص = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(لان ص فى الربع الاول موجبة

$\therefore$ احداثيا النقطة المثلثية للزاوية ٦٠

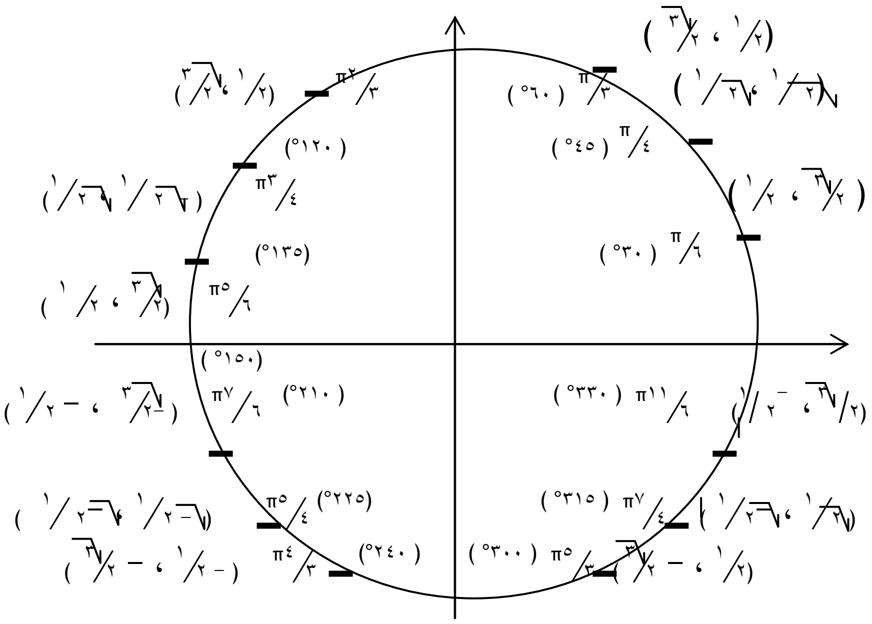
هى $\left(\frac{1}{2} ، \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

ونستنتج ان جا ٦٠ = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، جتا ٦٠ = $\frac{1}{2}$

$\therefore$ ظا ٦٠ = $\frac{\sqrt{3}}{2} \div \frac{1}{2} = \sqrt{3}$

وهكذا يمكننا إيجاد إحداثيات النقط المثلثية لزوايا مثل ١٢٠ْ ، ١٥٠ْ ، ٢٢٥ْ ، ٢٤٠ْ ، ٣٠٠ْ ، ٣١٥ْ ، ٣٣٠ْ ، ٠٠٠٠ فى الأرباع المختلفة مراعين إشارات هذه الإحداثيات فى الربع الذى تقع فيه النقطة المثلثية للزاوية .

والشكل (٦ – ٢٨) التالي يوضح لنا قياس الزوايا وإحداثيات نقاطها المثلثية ويمكننا من ذلك إيجاد الدالة المثلثية لها :



الشكل (٦ – ٢٨)

ويمكننا من الشكل (٦ – ٢٨) تكوين الجدول (٦ – ٢)

الزاوية بالدرجة	٣٠°	٤٥°	٦٠°	١٢٠°	١٣٥°	١٥٠°	٢١٠°	٢٢٥°	٢٤٠°	٣٠٠°
بالراديان	$\frac{\pi}{٦}$	$\frac{\pi}{٤}$	$\frac{\pi}{٣}$	$\frac{٢\pi}{٣}$	$\frac{٣\pi}{٤}$	$\frac{٥\pi}{٦}$	$\frac{٧\pi}{٦}$	$\frac{٥\pi}{٦}$	$\frac{٤\pi}{٣}$	$\frac{٥\pi}{٣}$
الجيب	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{\sqrt{٢}}$	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	$\frac{١}{\sqrt{٢}}$	$\frac{١}{٢}$	$\frac{-١}{٢}$	$\frac{-١}{\sqrt{٢}}$	$\frac{-\sqrt{٣}}{٢}$	$\frac{-\sqrt{٣}}{٢}$
جيب التمام	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	$\frac{١}{\sqrt{٢}}$	$\frac{١}{٢}$	$\frac{-١}{٢}$	$\frac{-١}{\sqrt{٢}}$	$\frac{-\sqrt{٣}}{٢}$	$\frac{-\sqrt{٣}}{٢}$	$\frac{-١}{\sqrt{٢}}$	$\frac{-١}{٢}$	$\frac{١}{\sqrt{٢}}$
الظل	$\frac{١}{\sqrt{٣}}$	١	$\sqrt{٣}$	$-\sqrt{٣}$	-١	$\frac{-١}{\sqrt{٣}}$	$\frac{١}{\sqrt{٣}}$	١	$\sqrt{٣}$	$-\sqrt{٣}$

الجدول (٦ – ٢)

مثال : (١)

جد : أ) جتا π – ٢جا $\frac{٢\pi}{٣}$

ب) ظا $\frac{٣\pi}{٤}$ + ٢جا $\frac{\pi}{٢}$ جتا $\frac{٤\pi}{٣}$

ج) جا $\frac{٥\pi}{٦}$ + ظا $\frac{\pi}{٤}$ – جتا $\frac{٥\pi}{٣}$

الحل :

من الجدول (٦ – ٢) أو من الشكل (٦ – ٢٩) نجد ان :

أ) جتا π – ٢جا $\frac{٢\pi}{٣}$ = $-١ - ٢ \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} = -١ - \sqrt{٣}$

ب) ظا $\frac{٣\pi}{٤}$ + ٢جا $\frac{\pi}{٢}$ جتا $\frac{٤\pi}{٣}$ = $-١ + ٢ \times ١ \times (-\frac{١}{٢}) =$

$-١ - ١ = -٢$

جـ) حاول حلها مستعيناً بالجدول (٦ – ٢)

مثال : (٢)

جد ما ياتى :

أ) جا ٣٠٠° جتا ٤٥° – ٣ ظا ٢٢٥°

ب) جتا ٠° ظا ١٣٥° + ٢ جا ٣١٥°

الحل :

أ) جا ٣٠٠° جتا ٤٥° – ٣ ظا ٢٢٥° =

$$\frac{-\sqrt{٣}}{٢} \times \frac{١}{\sqrt{٢}} - ٣ \times ١ = \frac{-\sqrt{٣}}{٢\sqrt{٢}} - ٣ = \frac{-\sqrt{٣} - ٦\sqrt{٢}}{٢\sqrt{٢}}$$

ب) جتا ٠ ظا ١٣٥° + ٢ جا ٣١٥° =

$$١ \times (-١) + ٢ \times \frac{-١}{\sqrt{٢}} = -(١ + \frac{٢}{\sqrt{٢}})$$

تمرين (٦ – ٧)

(١) اذا كان ت (هـ) = ($\frac{١}{٢}$ ، $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$) جد :
جاهـ ، جتا هـ ، ظا هـ

(٢) اذا كان ت (هـ) = ($\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، $\frac{١}{٢}$) جد :
ظا هـ ، جا هـ + جتا هـ

(٣) اذا كان ت (هـ) = ($\frac{١}{٢}\sqrt{٢}$ ، $\frac{١}{٢}\sqrt{٢}$) جد :
جا^{٢}هـ + جتا^{٢} هـ

(٤) جد ما ياتى :

أ. جا ٣٠° جتا ٦٠° + ٢ ظا ٤٥°

ب. ٢ظا $\frac{٣\pi}{٤}$ جتا $\frac{٧\pi}{٦}$

ج. ظا ٣٠° جتا ١٢٠° + جا ١٥٠° جتا ٢١٠°

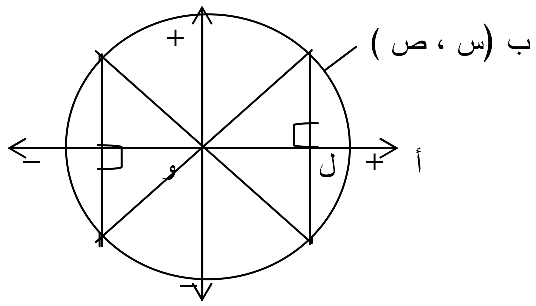
د. جا ٩٠° + جتا ٢٧٠°

هـ. ظا^{٢} ١٨٠° + جتا^{٢} ٣٦٠°

و. جا $\pi^{د}$ + جتا $\frac{\pi}{٢}$ – جا ٢ π

(٦ – ٨) زاوية الاسناد :

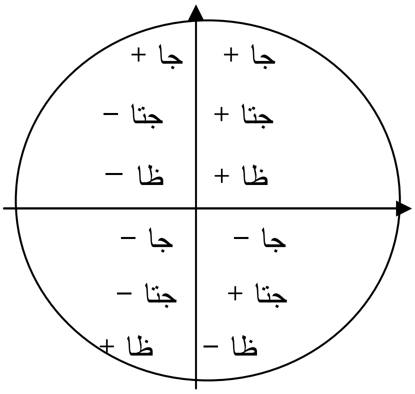
عند تعريفنا للدوال المثلثية عرفنا أن الأحداثى السينى للنقطة المثلثية للزاوية التى قياسها هـ هو جتا هـ وأن الأحداثى الصادى هو جا هـ . ونعلم ان اشارات احداثيات النقاط تتوقف على الربع الذى تقع فيه النقطة . فإذا وقعت النقطة المثلثية للزاوية فى الربع الأول فإن كلا من الاحداثيين س ، ص يكون موجبا ويكون بالتالى كل من الجيب وجيب التمام للزاوية موجبا (الشكل ٦ – ٢٩) أما إذا وقعت فى الربع الثانى فإن الأحداثى السينى يكون سالبا بينما يكون الأحداثى الصادى موجبا ويكون جيب الزاوية فى هذه الحالة موجبا وجيب تمامها سالبا .



الشكل (٦ – ٢٩)

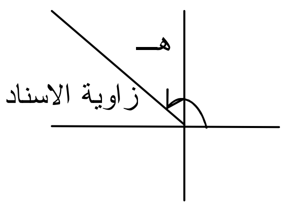
و إذا وقعت النقطة فى الربع الثالث يكون كل من س ، ص سالبا وبالتالى يكون كل من جتا هـ ، جا هـ سالبا . وإذا وقعت النقطة فى الربع الرابع يكون س موجبا وص سالبا وبالتالى تكون جتا هـ موجبا وجا هـ سالبا وبما أن ظل الزاوية هو ناتج قسمة الجيب على جيب التمام فان اشارات الظل فى الأرباع المختلفة تتبع اشارات الجيب

وجيب التمام فيكون فى الربعين الأول والثالث موجبا وفى الربعين الثانى والرابع سالبا

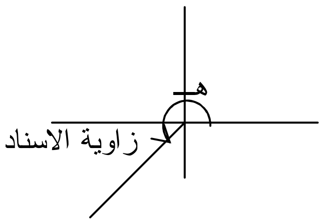


الشكل (٦ − ٣٠)

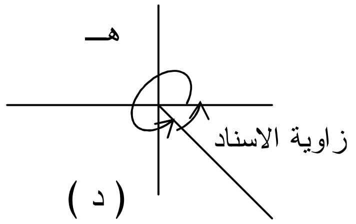
و لايجاد قيمة الدالة المثلثية لأى زاوية مهما كانت قيمتها لا بد من ان نتعرض لما يعرف بزاوية الاسناد . ونعنى بزاوية الاسناد لأى زاوية هـ الزاوية الحادة المحصورة بين محور السينات والضلع النهائى للزاوية هـ . وقياس زاوية الإسناد هو قياس هذه الزاوية فزاوية الإسناد للزاوية ١٥٠ ْ هى الزاوية التى قياسها ٣٠ ْ وزاوية الاسناد للزاوية ١٧٠ ْ هى الزاوية ١٠ ْ وزاوية الإسناد للزاوية ٢٠٠ ْ هى ٢٠ ْ وللزاوية ٢٣٠ ْ هى ٥٠ ْ وللزاوية ٣١٠ ْ هى الزاوية ٥٠ ْ. كما تبدو فى الأشكال التالية التى توضح زاوية الإسناد للزاوية هـ لقيم مختلفة .



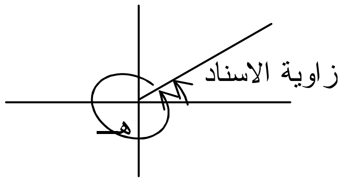
(أ)



(ب)



(د)



(ج)

الشكل (٦ – ٣١)

ولايجاد قيمة الدالة المثلثية لاى زاوية مهما كانت قيمتها نتعرض لهـذه النظرية التى نقبلها دون برهان.

(٦ – ١) نظرية :

> اذا كانت د هى زاوية الاسناد للزاوية هـ فان قيمة اى دالة مثلثية للزاوية هـ تساوى قيمة نفس الدالة المثلثية للزاوية د عدديا ولكنهما قد يختلفان فى الاشارة حسب الربع الذى تقع فيه الزاوية هـ
>
> أي د= ١٨٠° ± هـ أو د = ٣٦٠° ± هـ
>
> وعموماً د = ١٨٠° ن ± هـ
>
> حيث ن ∍ ص وتسمى أحياناً بصيغة الزوايا المنتسبة .

مثال (١)

جد جا ١٢٠° ، جتا ١٢٠° ، ظا ١٢٠°

الحل :

زاوية الاسناد للزاوية ١٢٠° هى ٦٠° فى الربع الثانى

∴ جا ١٢٠° = جا ٦٠° = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

جتا ١٢٠° = − جتا ٦٠° = − $\frac{١}{٢}$

ظا ١٢٠° = − ظا ٦٠° = − $\sqrt{٣}$

مثال (٢) :

جد جا ٣٣٠ ، جتا ٣٣٠ ، ظا ٣٣٠

الحل :

زاوية الاسناد للزاوية ٣٣٠ هى الزاوية ٣٠ وتقع فى الربع الرابع

جا ٣٣٠ = − جا ٣٠ = − $\frac{١}{٢}$

جتا ٣٣٠ = جتا ٣٠ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

ظا ٣٣٠ = − ظا ٣٠ = $\frac{-١}{\sqrt{٢}}$

مثال (٣) :

جد قيم الدوال المثلثية للزاوية ٤٠٥

الحل :

زاوية الاسناد للزاوية ٤٠٥° هى الزاوية ٤٥° فى الربع الاول :

∴ جا ٤٠٥° = جا ٤٥° = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

جتا ٤٠٥° = جتا ٤٥° = $١/\sqrt{٢}$

ظا ٤٠٥° = ظا ٤٥° = ١

تمرين (٦ – ٨)

جد قيم الدوال المثلثية لكل من الزوايا التالية بعد تحديد زاويـــة الاســـناد وتحديد الربع الذى تقع فيه .

(أ) ٢١٠ ْ (ب) ٢٤٠ ْ (ج). ١٣٥ ْ (د) ٣٠٠ ْ

(هـ) ٣٩٠ ْ

(و) ٥١٠ ْ (ز) ٥٨٥ ْ (ح) – ٤٥ ْ

(٦ – ٩) دوال القاطع وقاطع التمام وظل التمام :

كما عرفنا سابقا ان الدوال المثلثية للزاوية هـــ التى نقطتها المثلثية (س ، ص) هى :

جا هـــ = ص

جتا هـــ = س

ظا هـــ = $\frac{ص}{س}$

وهناك ثلاث دوال مثلثية أخرى يمكن تعريفها من مقلوبات هذه الدوال كما يلى :

(٦ – ٤) تعريف :

إذا كانت هـ هى الزاوية التى نقطتها المثلثية النقطة (س ، ص) على دائرة الوحدة . فان دوالاً جديدة أخرى يمكن تعريفها مثل :

(١) دالة القاطع :

ويرمز لها بالرمز قا هـ بحيث :

قا هـ = $\frac{١}{س}$ = $\frac{١}{جتا هـ}$ (س ≠ ٠ ، أو جتا هـ ≠ ٠)

وعندما س = . أو جتاهـ = ٠ فإن قاطع هـ = ∞

(٢) دالة قاطع التمام :

ويرمز لها بالرمز قتا هـ حيث :

قتا هـ = $\frac{١}{ص}$ = $\frac{١}{جا هـ}$ (ص ≠٠ ، جا هـ ≠ ٠)

وعندما ص = ٠ أو جاهـ =٠ فإن قتاهـ = ∞

(٣) دالة ظل التمام :

ويرمز لها بالرمز ظتا هـ بحيث ظتا هـ = $\frac{س}{ص}$=$\frac{جتاهـ}{جاهـ}$

(ص≠ ٠ ، او جا هـ ≠ ٠)

لاحظ ان ظتا هـ = $\frac{١}{ظاهـ}$ (ظاهـ ≠ ٠) وعندما ظاهـ = ٠ فان ظتاهـ = ∞ .

تذكر أن القاطع هو مقلوب جيب التمام . أي قا هـ = $\frac{١}{\text{جتا هـ}}$

وأن قاطع التمام هو مقلوب الجيب . أي قتا هـ = $\frac{١}{\text{جا هـ}}$

وأن ظل التمام هو مقلوب الظل . أي ظتا هـ = $\frac{١}{\text{ظاهـ}}$

مثال : (١)

إذا كانت النقطة المثلثية للزاوية هـ هى ($\frac{١}{٢}\sqrt{٢}$ ، $\frac{١}{٢}\sqrt{٢}$) جـد قا هـ ، قتا هـ ، ظتا هـ .

الحل :

النقطة المثلثية للزاوية هـ = ($\frac{١}{٢}\sqrt{٢}$ ، $\frac{١}{٢}\sqrt{٢}$) = ($\frac{\sqrt{٢}}{٢}$ ، $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$)

= ($\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، $\frac{١}{\sqrt{٢}}$)

قاهـ = $\sqrt{٢}$

قتا هـ = $\sqrt{٢}$

ظتا هـ = $\frac{\sqrt{٢}}{\sqrt{٢}}$ = ١

مثال : (٢)

إذا كانت النقطة المثلثية للزاوية ٣٠ هى ($\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، $\frac{١}{٢}$)

جد قيمة كل من :

أ. ظا ٣٠° قتا ٣٠° – جا ٣٠°

ب. ٢جا ٣٠° + ظتا ٣٠° قا ٣٠°

الحل :

النقطة المثلثية للزاوية ٣٠° هى $\left(\frac{\sqrt{٣}}{٢} ، \frac{١}{٢}\right)$

∴ جا ٣٠° = $\frac{١}{٢}$ ، جتا ٣٠° = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، ظا ٣٠° = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$

أ . ظا ٣٠° قتا ٣٠° - جا ٣٠° = $\frac{١}{\sqrt{٣}} \times ٢ - \frac{١}{\sqrt{٣}} = \frac{٢}{\sqrt{٣}} - \frac{١}{٢}$

ب. ٢جا٣٠° + ظتا ٣٠° قا ٣٠° = ٢ × $\frac{١}{٢} + \sqrt{٣} \times \frac{٢}{\sqrt{٣}}$ =

١ + ٢ = ٣

تمرين (٦ - ٩)

جد قيمة ما يأتى :

(١) ٢جا ٣٠° + قا ٣٠°

(٢) قا ٦٠° جتا ٦٠°

(٣) قا ٣٠° - جا ٣٠°

(٤) ٢ظا ٤٥° + قتا ٤٥°

(٥) ٢ قا ٠ ظتا ٤٥° + قتا ٣٠° جتا ٦٠°

(٦) ظا^{٢} ٣٠° + ظتا ٦٠°

(٧) قتا^{٢} ٣٠° + قا^{٢} ٣٠°

(٨) أثبت أن :

(١) ظا ١٨٠ْ – ٢جتا ١٨٠ْ + ٣ قتا ٧٠ْ + جا٩٠ْ = ٠

(٢) جا ٠ْ + ٣ظتا٩٠ْ + ٥قا١٨٠ْ – ٤جتا ٢٧٠ْ = ٥

(٩) جد :

١/ (ظا٦٠ْ – ظا٣٠ْ) / (١ + ظا٦٠ْ ظا٣٠ْ)

٢/ (قتا٣٠ْ + قتا٦٠ْ + قتا٩٠ْ) / (قا٠ْ + قا٣٠ْ + قا٦٠ْ)

(٦ – ١٠) العلاقة الاساسية : **جا^2 هــ + جتا^2 هــ** =١

إذا كان (س ، ص) هما إحداثيا

النقطة المثلثية للزاوية هــ

وبما ان (س ، ص) هى نقطة

على دائرة الوحدة

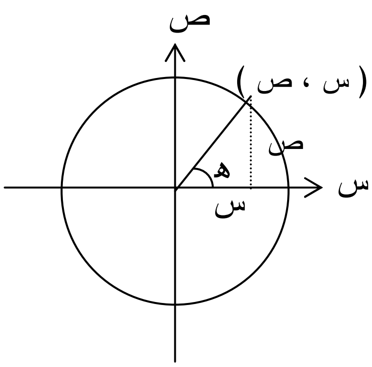
س٢ + ص٢ = ١

لكننا نعلم ان :

س = جتاهــ

ص = جاهــ من التعريف (٦ – ٢)

∴ (جتا هــ)^2 + (جاهــ)^2 = ١



الشكل (٦ – ٣٣)

∴ $\text{جتا}^{٢}\text{هـ} + \text{جا}^{٢}\text{هـ} = ١$

وهذه احدى العلاقات الاساسية للدوال المثلثية واذا قسمنا طرفى هذه العلاقة على $\text{جتا}^{٢}\text{هـ}$ عندما ((جتا هـ $\neq$ ٠) نحصل على العلاقة التالية :

$$\frac{\text{جتا}^{٢}\text{هـ}}{\text{جتا}^{٢}\text{هـ}} + \frac{\text{جا}^{٢}\text{هـ}}{\text{جتا}^{٢}\text{هـ}} = \frac{١}{\text{جتا}^{٢}\text{هـ}} \quad \text{لكن} \quad \frac{\text{جا}^{٢}\text{هـ}}{\text{جتا}^{٢}\text{هـ}} = \text{ظا}^{٢}\text{هـ} \ ، \quad \frac{١}{\text{جتا}^{٢}\text{هـ}} = \text{قا}^{٢}\text{هـ}$$

∴ $١ + \text{ظا}^{٢}\text{هـ} = \text{قا}^{٢}\text{هـ} \quad \Leftrightarrow \quad \text{ظا}^{٢}\text{هـ} + ١ = \text{قا}^{٢}\text{هـ}$

وبالمثل اذا قسمنا على $\text{جا}^{٢}\text{هـ}$ نحصل على العلاقة :

$$\frac{\text{جتا}^{٢}\text{هـ}}{\text{جا}^{٢}\text{هـ}} + \frac{\text{جا}^{٢}\text{هـ}}{\text{جا}^{٢}\text{هـ}} = \frac{١}{\text{جا}^{٢}\text{هـ}} \quad \text{لكن} \quad \frac{\text{جتا}^{٢}\text{هـ}}{\text{جا}^{٢}\text{هـ}} = \text{ظتا}^{٢}\text{هـ} \ ، \quad \frac{١}{\text{جا}^{٢}\text{هـ}} = \text{قتا}^{٢}\text{هـ}$$

(جا هـ $\neq$ ٠)

أي $\text{ظتا}^{٢}\text{هـ} + ١ = \text{قتا}^{٢}\text{هـ}$

مثال : (١)

إذا علم ان جتاى = $\frac{٣}{٥}$ ، ى زاوية حادة جد بقية الدوال المثلثية الأخرى :

الحـــل :

من العلاقة :

$\text{جتا}^{٢}\text{ى} + \text{جا}^{٢}\text{ى} = ١$

∴ $\left(\frac{٣}{٥}\right)^{٢} + \text{جا}^{٢}\text{ى} = ١$

$\frac{٩}{٢٥} + \text{جا}^{٢}\text{ى} = ١$

$\text{جا}^{٢}\text{ى} = ١ - \frac{٩}{٢٥} = \frac{١٦}{٢٥}$

∴ جاى = ± $\frac{٤}{٥}$

لكن ى زاوية حادة ∴ جاى = $\frac{٤}{٥}$

∴ ظاى = $\frac{\text{جاى}}{\text{جتاى}}$ = $\frac{٤}{٥}$ ÷ $\frac{٣}{٥}$ = $\frac{٤}{٥}$ × $\frac{٥}{٣}$ = $\frac{٤}{٣}$

∴ قاى = $\frac{١}{\text{جتاى}}$ = $\frac{٥}{٣}$

∴ قتاى = $\frac{١}{\text{جاى}}$ = $\frac{٥}{٤}$

ظتاى = $\frac{١}{\text{ظاى}}$ = $\frac{٣}{٤}$

مثال (٢)

أثبت أن :

جا س ظا س + جتا س = قا س

الحل :

تبسيط الطرف الأيمن

جا س × $\frac{\text{جاس}}{\text{جتا س}}$ + جتا س = $\frac{\text{جا}^{٢}\text{س}}{\text{جتا س}}$ + جتا س .

بتوحيد المقامين

الطرف الأيمن = $\frac{\text{جا}^{٢}\text{ س + جتا}^{٢}\text{ س}}{\text{جتا س}}$ = $\frac{١}{\text{جتا س}}$

= قا س = الطرف الأيسر

مثال (٣)

أختصر ما يأتى لأبسط صورة :

$$\frac{\text{ظا س قتا}^{٢}\text{ س}}{\text{١ + ظا}^{٢}\text{ س}}$$

الحل

بما أن $\text{١ + ظا}^{٢}\text{ س} = \text{قا}^{٢}\text{ س}$

$$\frac{\text{ظا س قتا}^{٢}\text{ س}}{\text{١ + ظا}^{٢}\text{ س}} = \frac{\text{ظا س قتا}^{٢}\text{ س}}{\text{قا}^{٢}\text{س}}$$

وبكتابة ظا س ، قتا س بدلالة جا س ، جتا س ينتج

$$\therefore \frac{\text{ظا س قتا}^{٢}\text{ س}}{\text{قا}^{٢}\text{س}} = \frac{\frac{\text{جا س}}{\text{جتا س}} \times \frac{\text{١}}{\text{حا}^{٢}\text{ س}}}{\frac{\text{١}}{\text{جتا}^{٢}\text{س}}} = \frac{\frac{\text{١}}{\text{جتا س جا س}}}{\frac{\text{١}}{\text{جتا}^{٢}\text{س}}}$$

$$\frac{\text{١}}{\text{جتا س جا س}} \times \frac{\text{جتا}^{٢}\text{ س}}{\text{١}} = \frac{\text{جتا س}}{\text{جا س}} = \text{ظتا س}$$

تمرين (٦ – ١٠)

(١) إذا كان جاهـ = $\frac{٥}{١٣}$ وكان $\frac{\pi}{٢}$ < س < π .

جد كلا من جتا هـ ، ظا هـ ، قا هـ ، قتا هـ ، ظتاهـ .

(٢) أثبت أن :

$$\frac{\text{١ – جا هـ}}{\text{جتا هـ}} = \frac{\text{جتا هـ}}{\text{١ + جا هـ}}$$

(٣) أثبت أن : قا^{٢} س (١ – جا^{٢} س) = ١

(٤) أثبت أن : ٢ جتا^{٢} هـ – جا^{٢}هـ + ١ = ٣ جتا^{٢}هـ

(٥) أثبت أن : ظتا س + ظا س = قا س قتا س

(٦) أختصر : $\frac{\text{قتا}^{٢}\text{س – ظتا}^{٢}\text{س}}{\text{جا س}}$

(٧) أختصر : ظتا^{٢} س + $\frac{\text{جا}^{٢}\text{س – جتا}^{٢}\text{س}}{\text{ظتا}^{٢}\text{س + ١}}$

(٨) أختصر : (جا س + جتا س)^{٢} + (جا س – جتا س)^{٢}

(٩) أثبت أن ظتا س + $\frac{\text{جاس}}{\text{١+جتاس}}$ = قتا س

(١٠) أثبت أن $\frac{\text{جا س جتا س}}{\text{قتا}^{٢}\text{س} - \text{جا}^{٢}\text{س}} = \frac{\text{ظا س}}{١ - \text{ظا}^{٢}\text{س}}$

(١١) أثبت أن $\frac{\text{جا س} + \text{ظا س}}{\text{ظتا س} + \text{قتا س}} = \text{جا س ظا س}$

(١٢) أوجد قيمة $\frac{\text{جا س} + \text{جتا س} - \text{ظا س}}{\text{قا س} + \text{قتا س} - \text{ظتا س}}$

عندما ظا س = $- \frac{٤}{٣}$

(١٣) أثبت أن قا^{٢} س قتا^{٢} س = قا^{٢} س + قتا^{٢} س

(١٤) أثبت أن $٢\text{قتا س} = \frac{\text{جا س}}{١+\text{جتاس}} + \frac{١ + \text{جتا س}}{\text{جاس}}$

(١٥) أثبت أن $\frac{\text{قاأ} - \text{قتاأ}}{\text{قاأ} + \text{قتاأ}} = \frac{\text{ظاأ} - ١}{\text{ظاأ} + ١}$

(١٦) أثبت $\frac{\text{ظا س} - \text{جا س}}{\text{جا}^{٣}\text{ س}} = \frac{\text{قا س}}{١+\text{جتاس}}$

(١٧) أثبت أن $\frac{\text{جتاس ظتاس} - \text{جاس ظاس}}{\text{قتا س} - \text{قاس}} = ١ + \text{جاس جتاس}$

الوحدة السابعة

الهندسة التحليلية (الإحداثية)

أهداف الوحدة السابعة

الهندسة التحليلية (الإحداثية)

يتوقع من الطالب بعد دراسة هذه الوحدة أن يكون قادراً على أن :-

١- يتعرف نظام الإحداثيات المتعامدة في المستوى .

٢- يتعرف نظام الإحداثيات في المستوى الإحداثي .

٣- يجد المسافة بين نقطتين في المستوى الإحداثي .

٤- يجد نقطة تقسيم قطعة مستقيمة في المستوى الإحداثي من الداخل .

٥- يجد نقطة تقسيم قطعة مستقيمة في المستوى الإحداثي من الخارج .

٦- يجد ميل الخط المستقيم .

٧- يجد ميل الخط المستقيم إذا عرفت نقطتين عليه .

٨- يجد الزاوية بين مستقيمين .

٩- يتعرف المستقيمات المتوازية .

١٠-يتعرف المستقيمات المتعامدة .

الوحدة السابعة
الهندسة التحليلية (الإحداثية)

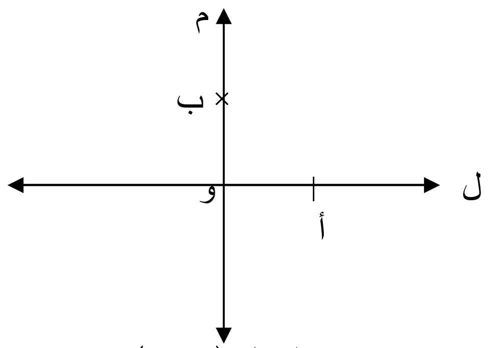
(٧- ١) مقدمة :

الهندسة التحليلية هى التحليل الجبرى للهندسة المستوية (الاقليدية) . ونظراً لأنها طريقة فعّالة ، فقد ساهمت منذ إدخالها في اوائل القرن السابع عشر بقدر كبير في تقدم الهندسة ، وكان لها الدور الكبير في تبسيط وعرض البراهين للحقائق في الهندسة المستوية وخاصة ما ارتبط منها بالتعامد والتوازى .

والهندسة التحليلية – كغالبية الأفكار الرياضية العظيمة – لم تكن من اختراع شخص واحد ، بل تطورت تدريجياً خلال فترة طويلة . وقد قام العالم المسلم ثابت بن قرة (٨٣٥ – ٩٠٠م) بوضع مبادئ الهندسة التحليلية عندما ألف كتاباً بيِّن فيه علاقة الجبر بالهندسة والهندسة بالجبر وكيفية الجمع بينهما . أما الشخصان اللذان قاما فعلاً بتطويرها واوصلاها إلى صورتها الحالية – فهما الرياضى الفرنسى بيير دى فرما (١٦٠١ – ١٦٦٥م) والفيلسوف الرياضى الفرنسى رينية ديكارت (١٥٩٦ – ١٦٥٠م) .

(٧ – ٢) نظام الاحداثيات المتعامدة في المستوى :

ارسم على دفترك خطين متعامدين ل ، م يتقاطعان عند و كما في الشكل (٧ – ١) ادناه :



الشكل (٧ –١)

عيّن على هذين الخطين النقطتين أ ، ب بحيث يكون $\overline{\text{أ و}}$ = ١سم ، $\overline{\text{ب و}}$ =١ سم

(٧-٢) نظام الاحداثيات على الخط ل :

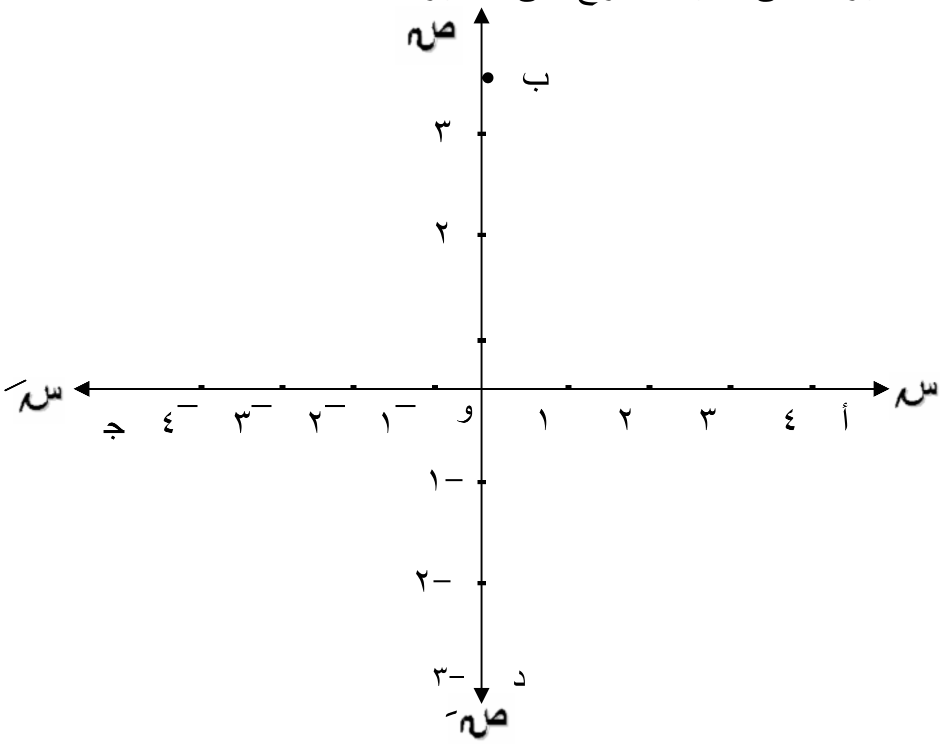
نعتبر النقطة (أ) نقطة الوحدة والنقطة (و) نقطة الأصل .

نظام الاحداثيات على الخط م :

نعتبر النقطة (ب) نقطة الوحدة والنقطة (و) نقطة الأصل .نسمى خطى الإحداثيات اللذين عرفناهما بنظام إحداثيات متعامدة للمستوى المحدد .

اصطلاحاً يسمى المستقيم ل محور السينات ، م محور الصادات.

لاحظ أن أقسام التدرج على محور السينات ليس بالضرورة أن يساوى تدرج محور الصادات إلاّ أن الشائع والمتبع أن يكونا متساويين . والآن لننظر إلى الشكل (٧ - ٢) والذى يمثل نظام إحداثيات متعامدة وفيه التدرج المستخدم على المحور السينى يساوى التدرج على المحور الصادى .



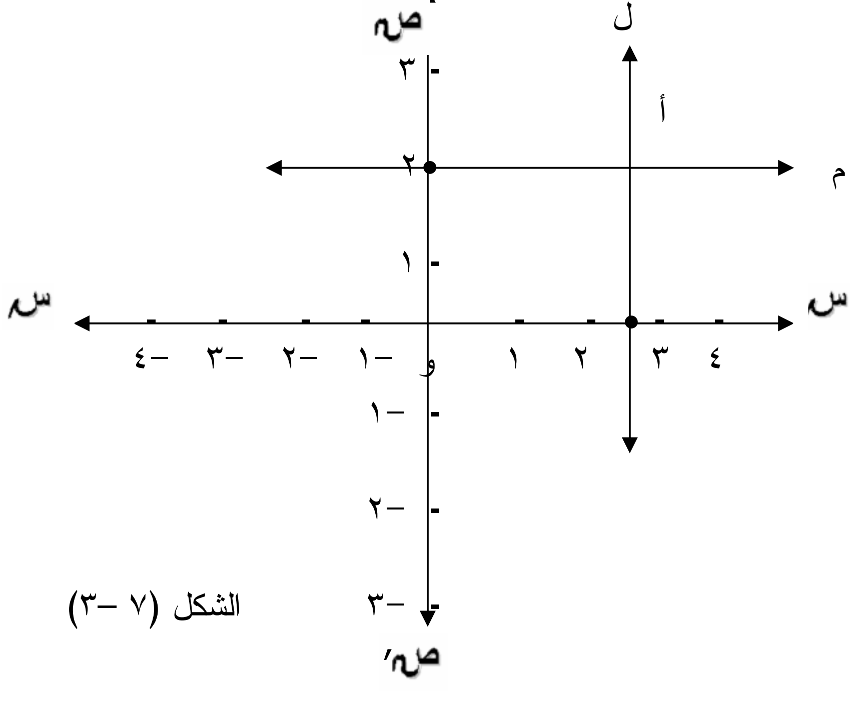
الشكل (٧ -٢)

يسمى الشعاع و أ الاتجاه الموجب لمحور السينات ونرمز له بالرمز سَ

ويسمى الشعاع و جـ الاتجاه السالب لمحور السينات ونرمز له بالرمز سَ′ويسمى الشعاع و ب الاتجاه الموجب لمحور الصادات ونرمز له بالرمز صَ ويسمى الشعاع و د الاتجاه السالب لمحور الصادات ونرمز له بالرمز صَ′

نشاط :

(١) ارسم على دفترك نظام احداثيات ذا تدرج موحد كما في الشكل (٧ – ٣)



الشكل (٧ –٣)

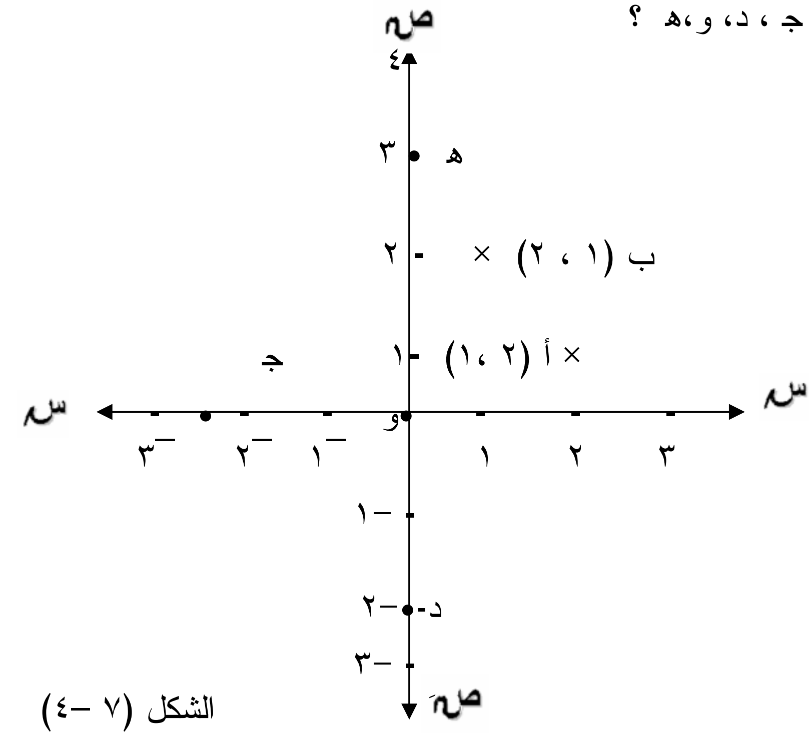
(٢) ارسم الخط ل عمودياً على محور السينات ومارا بالنقطة التى احداثيها السينى ٣ .

(٣) ارسم الخط م عمودياً على محور الصادات ومارا بالنقطة التى احداثيها الصادى ٢ .

(٤) أفرض أن نقطة تقاطع المستقيمين ل ، م هى أ سنعرف النقطة أ بدلالة الاحداثى السينى وهو العدد ٣ والاحداثى الصادى وهو العدد ٢ وسنكتب

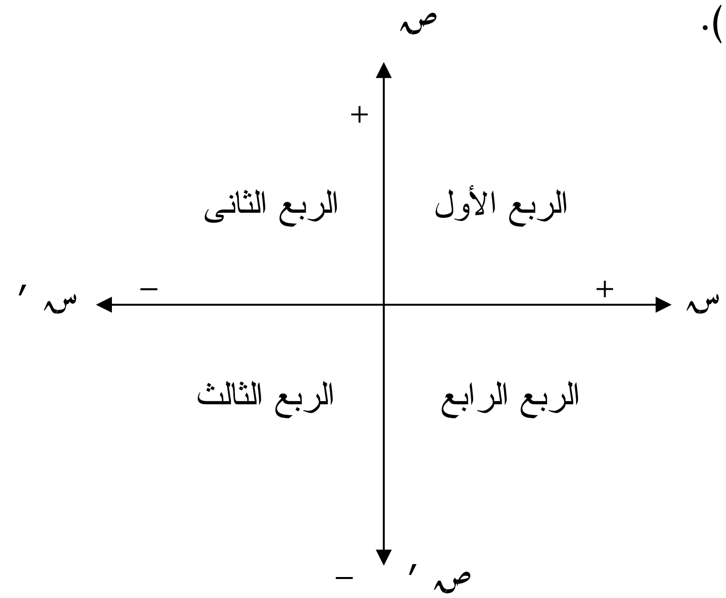
النقطة أ على النحو أ (٣ ، ٢) مستخدمين الزوج المرتب (٣ ، ٢) (لاحظ الترتيب) .مما سبق نستطيع أن نستنتج أن أى نقطة ن في المستوى الاحداثى تحدد زوجاً مرتباً وحيداً من الاعداد الحقيقية (س ، ص) يعين موقع النقطة ن. يسمى المسقط الأول س الاحداثى السينى للنقطة ن كما يسمى المسقط الثانى ص الاحداثى الصادى للنقطة ن . وكذلك كل زوج مرتب من الاعداد الحقيقية (س ، ص) يعين نقطة وحيدة في المستوى الاحداثى . وبذلك يكون لدينا تطبيق

ت : مجموعة نقط المستوى ← مجموعة الازواج المرتبة (س ، ص) حيث س ، ص ∋ ح . ونكتب عادة ن = (س ، ص) أو ن (س ، ص) أو النقطة (س، ص) للتعبير عن النقطة في النظام الاحداثى للمستوى ففي الشكل (١ – ١٠) (٢ ، ١) يمثل النقطة أ(١ ،٢) يمثل النقطة ب ، ما الاحداثيات التى تمثل النقاط جـ ، د، و،هـ ؟



الشكل (٧ –٤)

نلاحظ أن محورى الأحداثيات السينى والصادى يقسمان المستوى الاحداثى إلى أربع مجموعات من النقاط ، كل مجموعة تسمى ربعاً انظر شكل (٧ –٥).



الشكل (٧ –٥)

ويمكن التعبير عن كل مجموعة بالصفة المميزة لها كما يلي :

الربع الأول = { (س ، ص) : س > ٠ ، ص > ٠ }

الربع الثانى = { (س ، ص) : س < ٠ ، ص > ٠ }

الربع الثالث = { (س ، ص) : س < ٠ ، ص < ٠ }

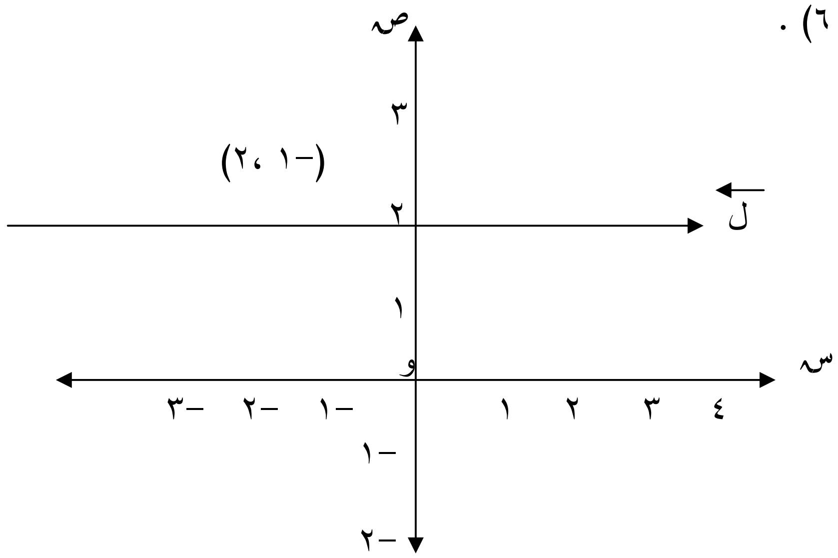
الربع الرابع = { (س ، ص) : س > ٠ ، ص < ٠ }

لاحظ أن جميع نقاط المحور السينى احداثيها الصادى يساوى صفراً ، أى أن المحور السينى = { (س ، ص) : ص = ٠ } .

وكذلك جميع نقاط المحور الصادى احداثيها السينى يساوى صفراً أى أن المحور الصادى = { (س ، ص) : س = ٠ }

وعليه يمكن وصف أى مجموعة من النقاط في المستوى الإحداثى لها صفات معينة وذلك بكتابة هذه المجموعة بالصفة المميزة لها .

فالمستقيم ل المار بالنقطة (−١ ، ٢) ويوازى محور السينات تكون كل نقطة عليه إحداثيها الصادى = ٢ دوماً ، أما إحداثيها السينى فيتغير حسب موقع النقطة ويأخذ كل قيم ح ، وعليه فإن $\overleftarrow{ل}$ = { (س ، ص) : ص =٢ } . شكل (٧ − ٦) .



الشكل (٧ −٦)

مثال :

باستخدام الصفة المميزة عبر عن الجمل الهندسية التالية :

(أ) نقطة الأصل .

(ب) الجزء السالب من المحور الصادى .

(ج) الربع الرابع .

(د) المستقيم المار بالنقطة (٥ ، ٢) ومواز لمحور الصادات .

الحل :

(أ) { (س ، ص) : س = ٠ ، ص = ٠ }

(ب) { (س ، ص) : س = ٠ ، ص > ٠ }

(جـ) { (س ، ص) : س < ٠ ، ص > ٠ }

(د) { (س ، ص) : س = ٥ }

تمرين (٧ – ١)

(١) على المستوى الاحداثى عيّن النقاط الآتية :

أ (١ ، ٣) ، ب (–٥ ، ٠) ، جـ (–٣ ، ١) ، د (٠ ، ٤)

هـ (٥ ، –١)

(٢) على المستوى الإحداثى ارسم شكلاً يوضح مجموعة النقاط التالية :

(أ) { (س ، ص) : س < ٠ ، ص ≤ ٠ }

(ب) { (س ، ص) : س ≤ ٠ ، ص ≥ ٠ }

(٣) باستخدام المجموعات عبّر عن الجمل التالية على المستوى الاحداثى :

(أ) الجزء الموجب من محور السينات .

(ب) الربع الثالث .

(جـ) المستقيم المار بالنقطة (٢، ٣) وموازٍ لمحور السينات .

(د) نصف المستوى الواقع فوق محور السينات .

(٧ – ٣) المسافة بين نقطتين في المستوى الإحداثى :

درسنا في النظام الاحداثى للمستقيم كيف نعيّن المسافة بين نقطتين . فإذا كان إحداثى النقطة أ = س١ ، وإحداثى النقطة ب = س٢ ، فإن المسافة بين النقطتين أ ، ب = | س٢ – س١ | أو | س١ – س٢ | . أما في المستوى الإحداثى حيث تتعين النقطة بزوج مرتب من الأعداد الحقيقية (س ، ص) فلإيجاد المسافة بين النقطتين أ ، ب في المستوى الاحداثى وكان أ (س١ ، ص١) ب (س٢ ، ص٢)

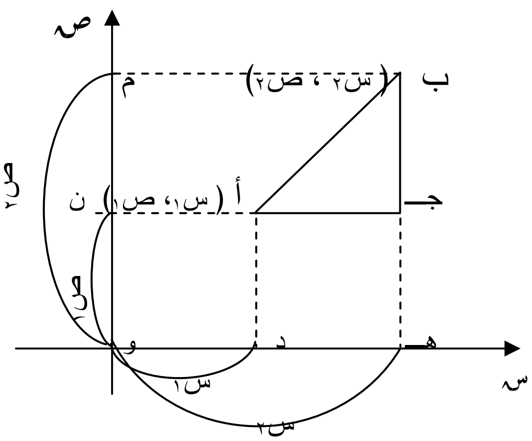
نرسم القطعة أ ب ومن طرفيها نرسم مستقيمين يوازيان المحور الصادى فيقطعان المحور السينى في النقطتين د ، هـ ثم نرسم من طرفى أ ب مستقيمين يوازيان المحور السينى ، فيقطعان المحور الصادى في النقطتين ن، م . شكل (٧ –٧) . فيكون

طول $\overline{\text{أ جـ}}$ = طول $\overline{\text{د هـ}}$ = | س٢ – س١ |

جـ ب = ن م = | ص٢ – ص١ |

Δ أ ب جـ قائم الزاوية في جـ

∴طول أ ب٢= أ جـ ٢ + $\overline{\text{جـ ب}}$٢



الشكل (٧ –٧)

$\overline{\text{أ ب}}$٢ = (| س٢ – س١ |)٢ + (| ص٢ – ص١ |)٢

$\overline{\text{أ ب}}$٢ = (س٢ – س١)٢ + (ص٢ – ص١)٢

∴ $\overline{\text{أ ب}}$ = $\sqrt{(\text{س٢} - \text{س١})^{٢} + (\text{ص٢} - \text{ص١})^{٢}}$

وبما أن | س٢ – س١ | = | س١ – س٢|

فيمكن كتابة طول $\overline{أب}$ = $\sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$

مثال (١) :

جد المسافة بين كل من أزواج النقاط الآتية :

(أ) أ (٣ ، ٦) ، ب (– ٢ ، ٩)

(ب) د (٣ ، –٤) ، هـ (٥ ، –٢)

الحل :

(أ) طول $\overline{أب}$ = $\sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$

= $\sqrt{(-٢ - ٣)^٢ + (٩ - ٦)^٢}$

= $\sqrt{(-٥)^٢ + ٣^٢}$ = $\sqrt{(٣٤)}$ وحدة

(ب) طول $\overline{دهـ}$ = $\sqrt{(٥ - ٣)^٢ + (-٢ - (-٤))^٢}$

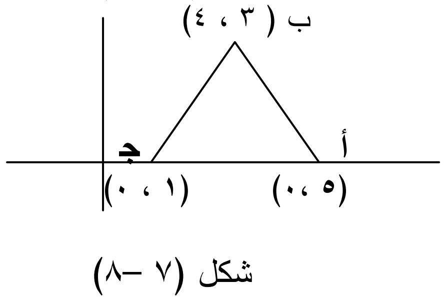
= $\sqrt{٢^٢ + ٢^٢}$ = $\sqrt{٨}$ = ٢ $\sqrt{٢}$ وحدة

مثال (٢) :

بيّن أن المثلث الذى رؤوسه النقاط أ (٥ ، ٠) ، ب (٣ ، ٤) ، ج (١ ، ٠) متساوى الساقين .

الحل :

ارسم الشكل التقريبى للمثلث : شكل (٧ – ٨)



شكل (٧ –٨)

طول $\overline{\text{أ ب}} = \sqrt{(٣ - ٥)^{٢} + (٤ - ٠)^{٢}} = \sqrt{(-٢)^{٢} + ٤^{٢}}$

$= \sqrt{٢٠} = ٢\sqrt{٥}$ وحدة

طول $\overline{\text{ب جـ}} = \sqrt{(١ - ٣)^{٢} + (٠ - ٤)^{٢}} = \sqrt{٢٠} = ٢\sqrt{٥}$ وحدة

طول $\overline{\text{جـ أ}} = \sqrt{(١ - ٥)^{٢} + ٠} = \sqrt{١٦} = ٤$ وحدات

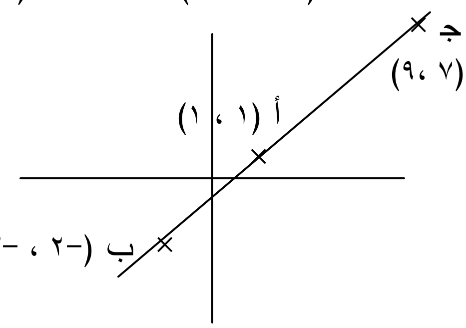
$\therefore$ $\overline{\text{أ ب}} = \overline{\text{ب جـ}}$

$\therefore$ Δ أ ب جـ متساوى الساقين

مثال (٣) :

برهن أن النقاط أ (١ ، ١) ، ب (-٢ ، -٣) ، جـ (٧ ، ٩) تقع على استقامة واحدة .

الحل :



شكل (٧ -٩)

تكون النقاط أ ، ب ، جـ على استقامة واحدة إذا كان مجموع قطعتين مستقيمتين يساوى طول القطعة المستقيمة الثالثة ففي الشكل (٧ -٩) :

طول $\overline{\text{أ ب}} = \sqrt{(-٢ - ١)^{٢} + (-٣ - ١)^{٢}}$

$= \sqrt{(-٣)^{٢} + (-٤)^{٢}} = \sqrt{٩ + ١٦} = \sqrt{٢٥} = ٥$ وحدات

طول $\overline{ب ج}$ = $\sqrt{(٧ + ٢)^{٢} + (٩ + ٣)^{٢}}$ = $\sqrt{٨١ + ١٤٤}$ = $\sqrt{٢٢٥}$ = ١٥وحدة

طول $\overline{ج أ}$ = $\sqrt{(١ - ٧)^{٢} + (١ - ٩)^{٢}}$ = $\sqrt{١٠٠}$ = ١٠ وحدات

∵ طول $\overline{أ ب}$ + طول $\overline{ج أ}$ = طول $\overline{ب ج}$ = ١٥ وحدة

∴ أ ، ب ، ج على استقامة واحدة .

تمرين (٧ –٢)

(١) جد المسافة بين كل نقطتين فيما يأتى :

(أ) أ (١ ،–٧) ، ب (٢ ،–١)
(ب) أ (٠ ، ٠) ، ب (١ ، ٣)
(ج) أ (٦ ، ٩) ، ب (٩ ، ٦)
(د) أ (ب+جـ ، جـ +أ) ، ب (جـ +أ ، أ +ب)

(٢) أثبت أن كلاً من المثلثين الآتيين قائم الزاوية

(أ) Δ أ ب ج : أ (٣ ، ٥) ، ب (١ ، ٤) ، ج (٢ ، ٢)
(ب) Δ ل م ن : ل (٠ ،–٤) ، م (٦ ،٢) ، ن (٣ ، ٥)

(٣) برهن أن النقاط الأربع أ (٢ ، ٤) ، ب (٠ ، ١) ، ج (٣ ،–١) ، د (٥ ، ٢) هى رؤوس مربع .

(٤) بيّن أى من مجموعات النقاط الآتية تقع على استقامة واحدة وأيها لا تقع على إستقامة واحدة

(أ) أ (–٣ ،–٣) ، ب (١ ، ٠) ، ج (٥ ، ٣)
(ب) ك (٣ ،–١) ، ل (٥ ، ١) ، م (١ ، ٧)

(٥) بيّن أن النقاط أ (٠ ،–٤) ، ب (٣ ،–١) ، ج (–٣ ،–١) تقع على دائرة مركزها (٠ ،–١) ، جد طول نصف قطرها .

(٦) بيّن نوع كل من المثلثات الآتية من حيث الاضلاع :

(أ) أ (٠ ، ١) ، ب (٦ ، ٠) ، ج (٣ ، ٧)
(ب) ك (٦ ، ٠) ، ل (٣ ، ٧) ، م (٠ ، ٠)

(٧) أثبت أن الرباعى الذى رؤوسه و (٠ ، ٠) ، أ (أ ، ٠) ، ب (أ ، ب)، جـ (٠ ، ب) مستطيل .

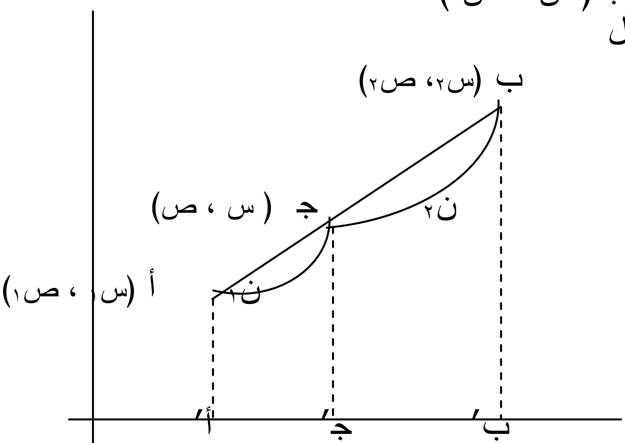
(٨) أثبت أن النقاط الأربع (١ ،–٢) ، (٢ ،–١) ، (–١، ٤) ، (–٢، ٣) هى رؤوس متوازى اضلاع .

(٧ – ٤) إحداثيات نقطة تقسيم قطعة مستقيمة في المستوى الاحداثى :

(أ) التقسيم من الداخل :

لتكن لدينا القطعة المستقيمة $\overline{أ ب}$ حيث أ (س$_١$ ، ص$_١$) ، ب (س$_٢$ ، ص$_٢$) . ولتكن جـ (س ، ص) نقطة تقسيم القطعة $\overline{أ ب}$ من الداخل بنسبة ن$_١$: ن$_٢$. شكل (٧ – ١٠) أي

$$\frac{\text{طول } \overline{أ جـ}}{\text{طول } \overline{جـ ب}} = \frac{ن_١}{ن_٢}$$



الشكل (٧ –١٠)

وللحصول على احداثيى النقطة جـ . دون مساس بالعمومية نفرض أن س$_٢$ > س$_١$ ، ص$_٢$ > ص$_١$

نرسم مساقط النقاط أ ، جـ ، ب على المحور السينى ولتكن أ ′، جـ′ ، ب′ على الترتيب .

من تعريف الاحداثيات نجد أن احداثيات النقاط أ ′، جـ′ ، ب′ على المحور السينى هى س$_١$ ، س ، س$_٢$ على الترتيب .

∴ طول $\overline{أ′ جـ′}$ = س – س$_١$ (س > س$_١$)

طول $\overline{جـ′ ب′}$ = س$_٢$ – س (س$_٢$ > س)

ومن دراستنا لنظريات الهندسة المستوية بالصف الثامن عرفنا أنه إذا كان $\overline{\text{أ أ}'} \;//\; \overline{\text{جـ جـ}'} \;//\; \overline{\text{ب ب}'}$

فإن $\dfrac{\text{طول } \overline{\text{أ}'\text{جـ}'}}{\text{طول } \overline{\text{جـ}'\text{ب}'}} = \dfrac{\text{طول } \overline{\text{أ جـ}}}{\text{طول } \overline{\text{جـ ب}}} = \dfrac{\text{ن}_1}{\text{ن}_2}$

$$\therefore \quad \frac{\text{س} - \text{س}_1}{\text{س}_2 - \text{س}} = \frac{\text{ن}_1}{\text{ن}_2}$$

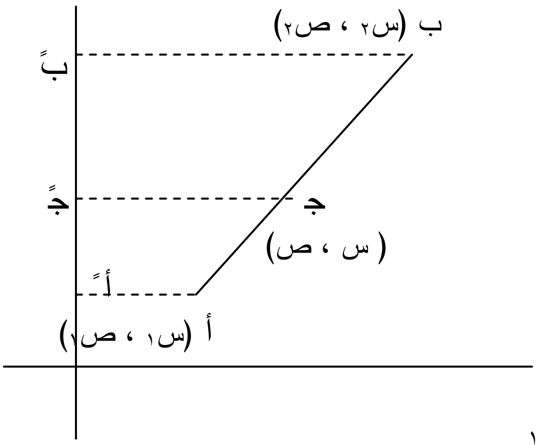
$$\therefore \quad \text{ن}_2 (\text{س} - \text{س}_1) = \text{ن}_1 (\text{س}_2 - \text{س})$$

$$\Leftarrow \text{ن}_2 \text{س} - \text{ن}_2 \text{س}_1 = \text{ن}_1 \text{س}_2 - \text{ن}_1 \text{س} \Leftarrow \text{ن}_2\text{س} + \text{ن}_1 \text{س} = \text{ن}_1\text{س}_2 + \text{ن}_2\text{س}_1$$

$$\Leftarrow \text{س} (\text{ن}_2 + \text{ن}_1) = \text{ن}_2 \text{س}_1 + \text{ن}_1 \text{س}_2$$

$$\Leftarrow \text{س} = \frac{\text{ن}_2 \text{س}_1 + \text{ن}_1 \text{س}_2}{\text{ن}_2 + \text{ن}_1} = \frac{\text{ن}_1 \text{س}_2 + \text{ن}_2 \text{س}_1}{\text{ن}_1 + \text{ن}_2}$$

وبالمثل وبالطريقة نفسها إذا انزلنا مساقط النقاط أ ، ب ، جـ على المحور الصادى لتكون أً، جً ، بً فإن احداثياتها على المحور الصادى هى : ص_1 ، ص ، ص_2 على الترتيب . شكل (٧ –١١) يمكننا التوصل إلى أن :



الشكل (٧ –١١)

$$\text{ص} = \frac{\text{ن}_1 \text{ص}_2 + \text{ن}_2 \text{ص}_1}{\text{ن}_1 + \text{ن}_2}$$

وبذلك نستنتج ما يلي :

إذا كانت أ (س$_1$ ، ص$_1$) ، ب (س$_2$ ، ص$_2$) ، وكانت جـ تقع على القطعة أ ب وتقسم $\overline{\text{أ ب}}$ بنسبة ن$_1$: ن$_2$ من الداخل فإن إحداثيي جـ هما :

$$\left(\frac{ن_1 س_2 + ن_2 س_1}{ن_1 + ن_2} ، \frac{ن_1 ص_2 + ن_2 ص_1}{ن_1 + ن_2} \right)$$

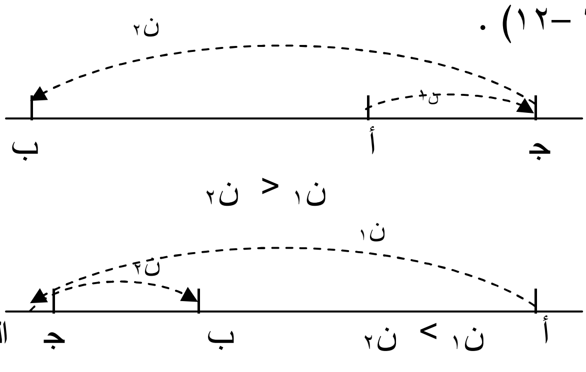
نشاط :

إذا كانت جـ منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ فما هى النسبة التى تقسم بها جـ القطعة أ ب .
وإذا كانت أ (س$_1$ ، ص$_1$) ، ب (س$_2$ ، ص$_2$) استنتج أن احداثيي نقطة منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ هما :

$$\left(\frac{س_1 + س_2}{2} ، \frac{ص_1 + ص_2}{2} \right)$$

(ب) التقسيم من الخارج :

أما إذا كانت جـ تقسم القطعة المستقيمة $\overline{\text{أ ب}}$ من الخارج بنسبة ن$_1$: ن$_2$ ، فإن نقطة التقسيم جـ تقع خارج القطعة المستقيمة $\overline{\text{أ ب}}$ ، فتكون على أحد إمتداديها، حيث تكون على إمتداد $\overline{\text{ب أ}}$ أى أقرب إلى أ إذا كانت ن$_1$ < ن$_2$ ، وتكون على إمتداد $\overline{\text{أ ب}}$ أى أقرب إلى ب في حالة أن تكون ن$_1$ > ن$_2$ كما يبدو في الشكل (٧ –١٢) .

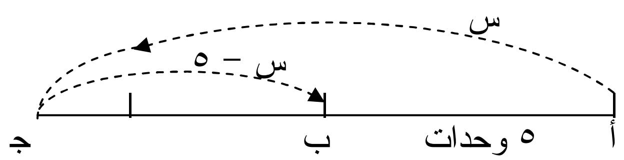


الشكل (٧ –١٢)

تلاحظ في حالة التقسيم من الخارج إختلاف اتجاهى القطعتين $\overline{\text{أ جـ}}$ ، $\overline{\text{جـ ب}}$ الناشئتين من التقسيم ، لذلك تكون النسبة في حالة التقسيم من الخارج سالبة . لان أحد حديها سالب . وتتضح الاشارة السالبة في حالة التقسيم من الخارج إذا تأملت المثال العددى التالى :

أ ب قطعة مستقيمة طولها ٥ وحدات . فإذا كانت النقطة جـ تقسمها من الخارج بنسبة ٣ : ٢ ، فإن جـ تقع على إمتداد $\overline{\text{أ ب}}$ أى أقرب إلى ب بحيث

يكون $\frac{\text{طول } \overline{\text{أ جـ}}}{\text{طول } \overline{\text{جـ ب}}} = \frac{٣}{٢}$ كما في الشكل (٧ –١٣)



الشكل (٧ –١٣)

وبفرض أن $\overline{\text{أ جـ}}$ = س وحدة ، فإن $\overline{\text{ب جـ}}$ = س – ٥ وحدة

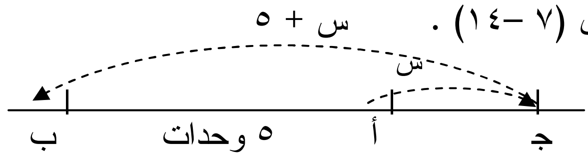
$\therefore \frac{\text{س}}{\text{س} - ٥} = \frac{٣}{٢} \Leftarrow ٢\text{ س} = ٣\text{ س} - ١٥$

$\Leftarrow$ س = ١٥ وحدة

$\therefore$ طول $\overline{\text{أ جـ}}$ = ١٥ وحدة ، طول $\overline{\text{ب جـ}}$ = ١٥ – ٥ = ١٠ وحدات

تلاحظ أننا طرحنا إحدى القطعتين من الآخرى ، أى أخذنا إحدى القطعتين بالسالب .

أما إذا كان جـ تقسم طول $\overline{\text{أ ب}}$ من الخارج بنسبة ٢ : ٣ فإن جـ تقع على إمتداد طول $\overline{\text{ب أ}}$ أى أقرب إلى أ بحيث يكون طول $\overline{\text{أ جـ}}$: طول $\overline{\text{جـ ب}}$ = ٢ : ٣ كما في الشكل (٧ –١٤) .



الشكل (٧–١٤)

فإذا كان $\overline{\text{أ جـ}}$ = س وحدة ، فإن $\overline{\text{جـ ب}}$ = س + ٥ وحدات

$$\therefore \frac{س}{س + 5} = \frac{2}{3} \Leftarrow 3 س = 2 س + 10$$

$\Leftarrow$ س = 10 وحدات

تلاحظ ان $\overline{أ ب} = \overline{جـ ب} - \overline{أ جـ} = 15 - 10$

أى طرحنا إحدى القطعتين كذلك من الآخرى

أى أخذنا إحدى القطعتين بالسالب ايضاً .

مما يوضح أنه في حالة التقسيم من الخارج تكون إحدى القطعتين دائماً سالبة مما يجعل أحد حدى النسبة سالباً .

وبصورة عامة إذا أعطينا نسبة التقسيم في سؤال ما بالإشارة السالبة فنعرف أن التقسيم من الخارج . وبذلك نستنتج ما يلي :

> إذا كانت أ ($س_1$ ، $ص_1$) ، ب ($س_2$ ، $ص_2$) وكانت جـ تقسم $\overline{أ ب}$ من الخارج بنسبة $ن_1$: $ن_2$ فإن احداثيى جـ هما :
>
> $$\left(\frac{ن_1 س_2 - ن_2 س_1}{ن_1 - ن_2} ، \frac{ن_1 ص_2 - ن_2 ص_1}{ن_1 - ن_2} \right)$$

نشاط : حاول استنتاج النتيجة السابقة باستخدام التقسيم من الداخل .

مثال (1) :

إذا كانت جـ هى منتصف $\overline{أ ب}$ حيث أ (-4، 1) ، ب (6 ،-9) جد احداثيى جـ .

الحل :

بفرض أن إحداثيى جـ (س ، ص)

$$\therefore س = \frac{س_1 + س_2}{2} = \frac{-4 + 6}{2} = 1$$

$$ص = \frac{ص_1 + ص_2}{2} = \frac{1 + (-9)}{2} = -4$$

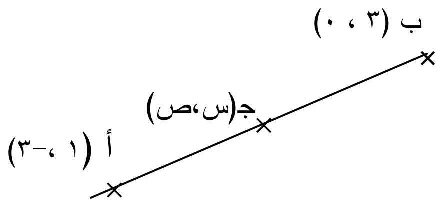
∴ نقطة التنصيف هى ج (١ ،–٤)

مثال (٢) :

إذا كانت أ (١ ، –٣) ، ب (٣ ، ٠) وكانت ج تقسم أ ب من الداخل بنسبة ٣ : ٢ ، احسب احداثيى ج .

الحل :

الرسم التوضيحى :



شكل (٧– ١٥)

في الشكل (٧ – ١٥) ج هى النقطة (س ، ص) ، $\text{ن}_{١} : \text{ن}_{٢} = ٣ : ٢$

$\text{س}_{١} = ١$ ، $\text{س}_{٢} = ٣$ ، $\text{ص}_{١} = {}^{-}٣$ ، $\text{ص}_{٢} = ٠$

$$\therefore \text{س} = \frac{\text{ن}_{١}\,\text{س}_{٢} + \text{ن}_{٢}\,\text{س}_{١}}{\text{ن}_{١} + \text{ن}_{٢}} = \frac{٣ \times ٣ + ٢ \times ١}{٣ + ٢}$$

$$= \frac{٩ + ٢}{٥} = \frac{١١}{٥} = ٢\frac{١}{٥}$$

$$\text{ص} = \frac{\text{ن}_{١}\,\text{ص}_{٢} + \text{ن}_{٢}\,\text{ص}_{١}}{\text{ن}_{١} + \text{ن}_{٢}} = \frac{٣ \times ٠ + ٢ \times -٣}{٣ + ٢}$$

$$= \frac{-٦}{٥} = -\left(١\frac{١}{٥}\right)$$

∴ إحداثيا ج هما $\left(٢\frac{١}{٥} ، {}^{-}\left(١\frac{١}{٥}\right)\right)$

مثال (٣) :

إذا كانت أ (٠ ،–٤) ، ب (٢ ،–١) ، جد احداثيى ج إذا كانت :

(أ) ج تقسم $\overline{\text{أب}}$ من الخارج بنسبة ٣ : ١ .

(ب) ج تقسم ب أ من الخارج بنسبة ٥ : ٧ .

الحل :

ج تقسم $\overline{\text{أ ب}}$ من الخارج بنسبة ٣ : ١

∴ س_1 = ٠ ، س_2 = ٢ ، ص_1 = −٤ ، ص_2 = −١

ن_1 = ٣ ، ن_2 = ١

$$\therefore \text{ج} = \left(\frac{\text{ن}_1\,\text{س}_2 - \text{ن}_2\,\text{س}_1}{\text{ن}_1 - \text{ن}_2} \text{ ، } \frac{\text{ن}_1\,\text{ص}_2 - \text{ن}_2\,\text{ص}_1}{\text{ن}_1 - \text{ن}_2} \right)$$

$$= \left(\frac{\text{٣} \times \text{٢} - \text{١} \times \text{٠}}{\text{٣} - \text{١}} \text{ ، } \frac{\text{٣} \times \text{−١} - \text{١} \times \text{−٤}}{\text{٣} - \text{١}} \right)$$

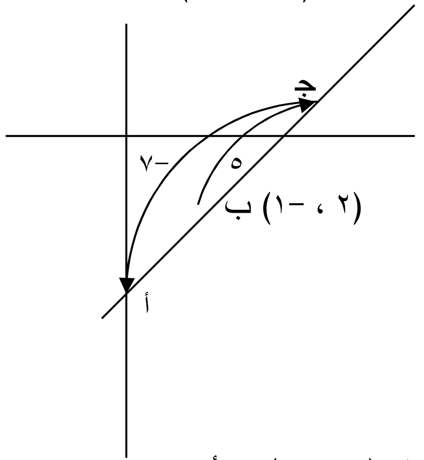
$$= \left(\frac{\text{٦}}{\text{٢}} \text{ ، } \frac{\text{−٣} + \text{٤}}{\text{٢}} \right) = \left(\text{٣} \text{ ، } \frac{\text{١}}{\text{٢}} \right)$$

(ب) ج تقسم $\overline{\text{ب أ}}$ من الخارج بنسبة ٥ : ٧ شكل (٧ − ١٦)

∴ س_1 = ٢ ، س_2 = ٠ ،

ص_1 = −١ ، ص_2 = −٤

ن_1 = ٥ ، ن_2 = ٧



شكل (٧ −١٦) أ (٠ ، −٤)

∴ ج = $\left(\frac{٥ \times ٠ - ٧ \times ٢}{٥ - ٧} \text{ ، } \frac{٥ \times -٤ - ٧ \times -١}{٥ - ٧} \right)$

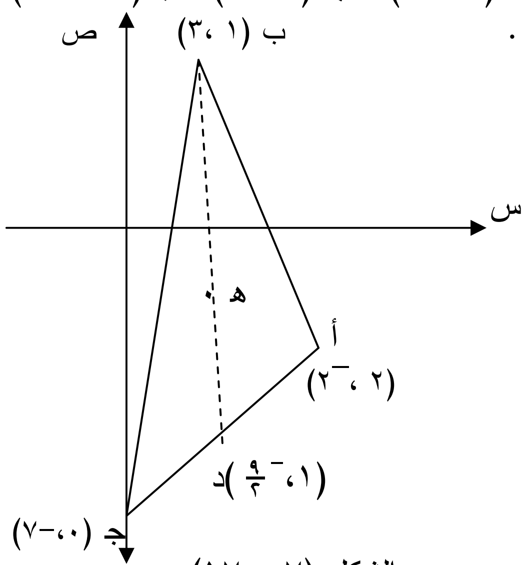
= $\left(\frac{-١٤}{٢} \text{ ، } \frac{١٣}{٢} \right)$ = $\left(٧ \text{ ، } \frac{١٣}{٢} \right)$

مثال (٤) :

إذا كان أ ب جـ مثلث رؤوسه أ (٢ ،−٢) ، ب (١ ، ٣) ، جـ (٠ ، −٧) .
جد احداثيى نقطة تقاطع متوسطاته .

الحل :

نقطة تقاطع متوسطاته تقسم كل متوسط من الداخل بنسبة ٢ : ١ من جهة الرأس .
أنظر الشكل (٧ – ١٧)



الشكل (٧ – ١٧)

نفرض أن د منتصف $\overline{\text{أ جـ}}$.

∴ د = $\left(\frac{٢ + ٠}{٢} \text{ ، } \frac{-٢ + -٧}{٢} \right)$ = $\left(١ \text{ ، } \frac{-٩}{٢} \right)$

∴ $\overline{\text{ب د}}$ أحد متوسطاته

نفرض ه هى نقطة تقاطع المتوسطات .

∴ ه تقسم $\overline{\text{ب د}}$ من الداخل بنسبة ٢ : ١ .

$$\therefore \text{ه} = \left(\frac{٢ \times ١ + ١ \times ١}{٣} ، \frac{٢ \times \left(\frac{-٩}{٢}\right) + ١ \times ٣}{٣} \right)$$

∴ ه = (١ ، −٢)

تمرين (٧ – ٤)

(١) إذا كانت أ (٤ ، ٦) ، ب (−٢ ، ٨) ، جـ منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ جد إحداثيى جـ.

(٢) جد مركز الدائرة التى $\overline{\text{أ ب}}$ قطر فيها حيث أ (−١ ، ٥) ، ب (−٣ ،−١).

(٣) جد إحداثيى النقطة جـ التى تقسم المسافة بين النقطتين أ (٥ ، ٨) ، ب (−١٠ ، ٣) من الداخل بنسبة ٢ : ٣ .

(٤) جد إحداثيى النقطة التى تقسم $\overline{\text{أ ب}}$ بالنسبة المعطاه في كل حالة مما يلى :

(أ) أ (٣ ، ٢) ، ب (−١ ، ١٠) ، النسبة $\frac{١}{٣}$

(ب) أ (−١ ، −٢) ، ب (٢ ، ٨) ، النسبة $-\frac{١}{٢}$ (النسبة $-\frac{١}{٢}$ تعنى أن التقسيم من الخارج) .

(جـ) أ (−١ ، −٣) ، ب (٥ ، ١) ، النسبة ٣ : ٤

(٥) إذا كان البعد بين النقطة جـ (س ، ص) والنقطة أ (٢ ، −٤) يساوى ربع البعد بين النقطتين أ (٢ ، −٤) ، ب (٦ ، ٨) ، فما قيمة س ، ص إذا كانت جـ ∋ $\overline{\text{أ ب}}$.

(٦) أقسم المستقيم الواصل بين النقطتين (٥ ، ٢) ، (−٣ ، −٣) من الخارج بنسبة ٢ : ١ .

(٧) برهن أن النقاط (٤ ،١١) ، (–١ ، ٧) ، (–٦ ، ٣) على استقامة واحدة. ما هى النسبة التى تقسم بها النقطة (–٦ ، ٣) المستقيم الواصل بين النقطتين الاخريتين وما نوع هذا التقسيم ؟

(٨) جد احداثيى النقطتين اللتين تقسمان القطعة المستقيمة التى نهايتيها (٧، ١٠) و (١١ ، ١٢) إلى ثلاثة أقسام متساوية .

(٩) أ ب جـ مثلث رؤوسه أ (–٣ ،١) ، ب (٢ ، ٤) ، جـ (٦ ، –٢) جد احداثيى النقتطين اللتين تتصفان أ ب ، أ جـ . ثم أثبت أن طول القطعة المستقيمة الواصلة بين المنتصفين يساوى نصف طول الضلع ب جـ .

(١٠) أثبت أن احداثيى نقطة تقاطع متوسطات المثلث الذي رؤوسه (س١ ،ص١)، (س٢ ، ص٢) ، (س٣ ، ص٣) هما :

$$\left(\frac{س_{١} + س_{٢} + س_{٣}}{٣} \;،\; \frac{ص_{١} + ص_{٢} + ص_{٣}}{٣} \right)$$

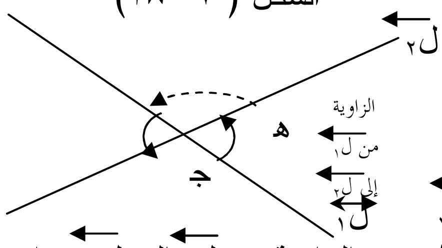
١١/ أقسم داخلياً وخارجياً المستقيم الواصل بين نقطتين (– ٢،١)،(٤ ،–٥) بنسبة ٢: ٣ .

(٧ – ٥) ميل الخط المستقيم :

ليكن ل$_{١}$ ، ل$_{٢}$ خطين مستقيمين متقاطعين عند جـ شكل (٧ – ١٨)

إذا دار ل$_{١}$ حول جـ في اتجاه مضاد لعقرب الساعة إلى أن ينطبق لأول مرة على ل$_{٢}$ فإن الزاوية الموجبة التى دارها تسمى الزاوية من ل$_{١}$ إلى ل$_{٢}$. أى أن الزاويتين المشار إليهما بقوس متصل هى الزاوية من ل$_{١}$ إلى ل$_{٢}$

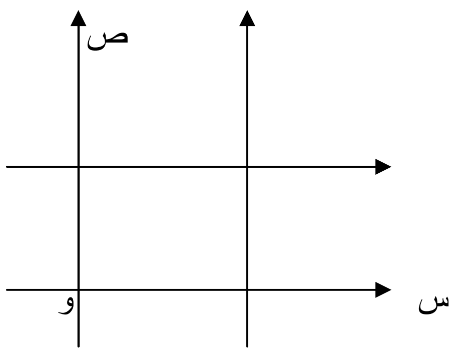
الشكل (٧ –١٨)



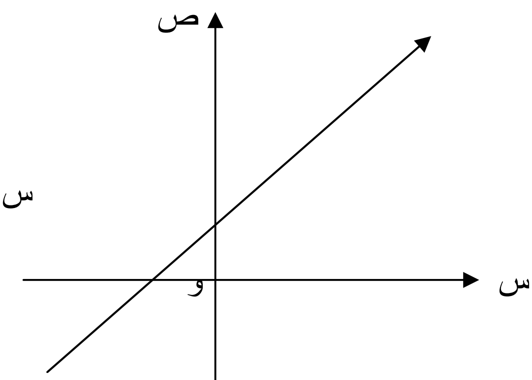
أما الزاوية المشار إليها بقوس متقطع هى الزاوية من ل$_{٢}$ إلى ل$_{١}$. واضح أنه إذا كانت هـ هى الزاوية من ل$_{١}$ إلى ل$_{٢}$ فإن هـ تكون بين ٠ و ١٨٠° . أما

إذا كان المستقيمان متوازيين أو منطبقين فمن المعتاد أن نقول إن الزاوية من مستقيم إلى الآخر مقدارها صفر . وإذن في كل حالة ٠ ≤ هـ ≤ ١٨٠° .
فإذا اخترنا أى مستقيم على المستوى الاحداثى ، نجد أنه إما أن يكون رأسياً أو

أفقياً كما في الشكل (٧ – ١٩)
أو مائلاً كما في الشكل (٧ – ٢٠)



الشكل (٧ – ١٩)



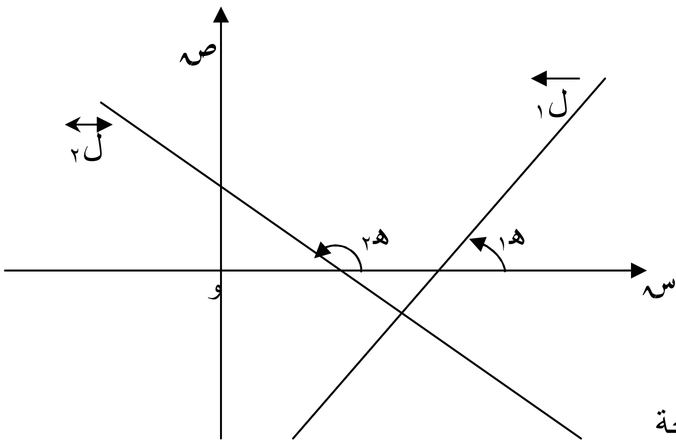
الشكل (٧ – ٢٠)

ولقياس الميل للمستقيم على المحور السينى نعرف زاوية ميل المستقيم كما يلى :

تعريف :

زاوية ميل أى خط مستقيم في مستوى الاحداثيات هى الزاوية من المحور السينى إلى الخط المستقيم .

وقد اتفق على أن يؤخذ ظل هذه الزاوية مقياساً لميل المستقيم ويرمز له بالحرف م . فميل الخط المستقيم هو ظل الزاوية من المحور السينى إلى الخط المستقيم . ويطلق على هذه الزاوية أحياناً زاوية المستقيم مع المحور السيني في الاتجاه الموجب . ففي الشكل (٧ – ٢١) زاوية ميل المستقيم



ل$_1$ هى هـ$_1$
وزاوية ميل المستقيم
ل$_2$ هى هـ$_2$
فيكون ميل المستقيم
ل$_1$ هو ظا هـ$_1$
وميل المستقيم
ل$_2$ هو ظا هـ$_2$
وطالما أن زاوية الميل
قد تكون حادة أو منفرجة

الشكل (٧ – ٢١)

فإن ميل المستقيم (ظل الزاوية) قد يكون موجباً أو سالباً حسب الزاوية، فمثلاً هـ$_1$ زاوية حادة ، هـ$_2$ زاوية منفرجة لذا نجد أن :

ميل المستقيم ل$_1$ = ظا هـ$_1$ ، قيمة موجبة

ميل المستقيم ل$_2$ = ظا هـ$_2$ ، قيمة سالبة

أما إذا كان المستقيم موازياً المحور السينى فإن زاوية ميله تساوى الصفر لذا نجد أن ميل هذا المستقيم يساوى صفراً .

مثال : (١)

إذا كانت الزاوية من المحور السينى إلى المستقيم ل ٦٠ ° جد ميل المستقيم ل .

الحل :

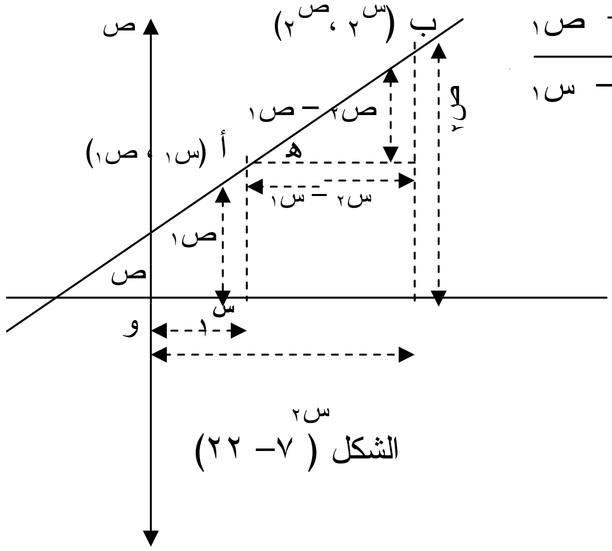
ميل المستقيم ل = ظا ٦٠ ° = $\sqrt{3}$

ميل المستقيم إذا عرفت نقطتين عليه :

إذا كان المستقيم أ ب والذى زاوية ميله هـ يمر بالنقطتين أ ($س_1$ ، $ص_1$) ، ب ($س_2$ ، $ص_2$) كما فى الشكل (٧ – ٢٢) ، Δ أ ب جـ قائم الزاوية في جـ لماذا ؟

$$ظا\ هـ = \frac{\overline{ب\ جـ}}{\overline{جـ\ أ}} = \frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1}$$

ومن ذلك يمكن التوصل للتعريف التالى :



الشكل (٧ – ٢٢)

تعريف :

إذا كان أ ($س_1$ ، $ص_1$) ، ب ($س_2$ ، $ص_2$) حيث $س_1 \neq س_2$
فإن ميل المستقيم المار بالنقطتين أ ، ب هو العدد الحقيقى

$$\frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1} \quad أو \quad \frac{ص_1 - ص_2}{س_1 - س_2}$$

مثال (٢) :

جد ميل المستقيم أ ب في كل من الحالات التالية :

(أ) أ (٤ ، ٣) ، ب (١ ،−٢) (ب) أ (٢ ، ٥) ، ب (−٣ ،٥)

(جـ) أ (٤ ،−٢) ، ب (٤ ،−٣)

الحل :

(أ) ميل المستقيم أ ب = $\frac{\text{ص}_٢ - \text{ص}_١}{\text{س}_٢ - \text{س}_١} = \frac{-٢ - ٣}{١ - ٤} = \frac{-٥}{-٣} = \frac{٥}{٣}$

(ب) ميل المستقيم أ ب = $\frac{\text{ص}_١ - \text{ص}_٢}{\text{س}_١ - \text{س}_٢} = \frac{٥ - ٥}{٢ - -٣} = \frac{٠}{٥} =$ صفر

(لاحظ أن $\text{ص}_١ = \text{ص}_٢$ ، ∴ $\overline{\text{أ ب}}$ موازٍ للمحور السينى) .

(جـ) ميل المستقيم أ ب = $\frac{\text{ص}_٢ - \text{ص}_١}{\text{س}_٢ - \text{س}_١} = \frac{-٣ - -٢}{٤ - ٤} = \frac{-١}{٠} = \infty$

(المستقيم موازٍ للمحور الصادى ، زاوية الميل = ٩٠° ، ∴ م = ظا ٩٠° = ∞)

مثال (٣) :

أ ب جـ مثلث رووسه أ (−١ ، ٢) ، ب (١ ، −١) ، جـ (−٥ ، ١) . جد ميل المستقيم المتوسط للمثلث والمار بالنقطة أ .

الحل :

نفرض أن د منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$ ،

∴ د $\left(\frac{١ + (-٥)}{٢} ، \frac{-١ + ١}{٢}\right)$ = د (−٢ ، ٠)

∵ أ = (−١ ، ٢)

∴ ميل أ د = $\frac{٠ - ٢}{-٢ - (-١)} = \frac{-٢}{-١} = ٢$

تمرين (٧ – ٥)

(١) جد ميل كل من المستقيمات التى تمر بالنقاط التالية :
(أ) جـ (٣ ، –٢) ، د (٠ ، –٢)
(ب) ك (٣ ، –١) ، ل (٧ ، ٥)
(جـ) ع (١ – س ، ١ + ص) ، هـ (٢ + س ، ٥ + ص)
(د) أ (١ ، ٣) ، ب (١ ، ٥)

(٢) إذا كان ميل $\overline{\text{أ و}}$ = –٢ ، (و) نقطة الأصل ، أ (س ، –٢)
جد قيمة س .

(٣) أ ب جـ مثلث روؤسه أ (٢ ، ٧) ، ب (–١ ، –٧) ، جـ (٨ ، –١) .
جد ميل $\overline{\text{ب جـ}}$ ، $\overline{\text{جـ أ}}$ ، وميل المستقيم المتوسط للمثلث أ ب جـ والمار بالرأس جـ .

(٧ – ٦) الزاوية بين مستقيمين :

ليكن $\overleftarrow{ل_1}$ ، $\overleftarrow{ل_2}$ مستقيمين متقاطعين في ب ولهما الميلان :

$م_1$ = ظا $هـ_1$ ، $م_2$ = ظا $هـ_2$ على الترتيب . شكل (٧ – ٢٣)

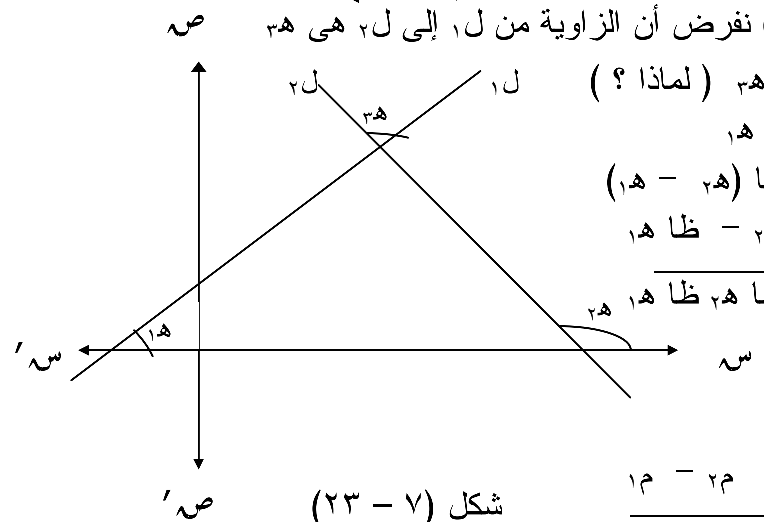
ذكرنا أن الزاوية من $\overleftarrow{ل_1}$ إلى $\overleftarrow{ل_2}$ هى الزاوية الناتجة من دوران $\overleftarrow{ل_1}$ حول نقطة تقاطعه مع $ل_2$ في اتجاه مضاد لاتجاه عقارب الساعة حتى ينطبق على $ل_2$ للمرة الأولى . ولحساب قيمة تلك الزاوية بدلالة ميلى $ل_1$ ، $ل_2$ كما في الشكل (٧ –٢٣) نفرض أن الزاوية من $ل_1$ إلى $ل_2$ هى $هـ_3$

∴ $هـ_2$ = $هـ_1$ + $هـ_3$ (لماذا ؟)

∴ $هـ_3$ = $هـ_2$ − $هـ_1$

∴ ظا $هـ_3$ = ظا ($هـ_2$ − $هـ_1$)

$$= \frac{ظا\, هـ_2 - ظا\, هـ_1}{1 + ظا\, هـ_2\, ظا\, هـ_1}$$



شكل (٧ – ٢٣)

$$∴ ظا\, هـ_3 = \frac{م_2 - م_1}{1 + م_2\, م_1}$$

ما قيمة الزاوية من $\overleftarrow{ل_2}$ إلى $\overleftarrow{ل_1}$ بدلالة $هـ_3$ ؟

جد قيمة ظل هذه الزاوية بدلالة الميلين $م_1$ ، $م_2$. الشكل (٧– ٢٣)

ستجد أن ظل هذه الزاوية = $\left(\frac{م_2 - م_1}{1 + م_2\, م_1}\right)$

نلاحظ أن أى من هاتين الزاويتين هى زاوية بين المستقيمين . إذا كانت هـ هى زاوية بين مستقيمين غير متعامدين ميلاهما $م_1$ ، $م_2$. فإن ظا هـ = ± $\left(\frac{م_2 - م_1}{1 + م_2 م_1}\right)$

فالقيمة الموجبة هي ظل الزاوية الحادة بينهما أما السالبة فهى ظل الزاوية المنفرجة .

مثال (١) :

جد الزاوية من المستقيم $\overleftarrow{ل_١}$ إلى المستقيم $\overleftarrow{ل_٢}$ حيث $\overleftarrow{ل_١}$ يمر بالنقطتين (٢ ، ٠) ، (٥ ، −٣) ، $\overleftarrow{ل_٢}$ يمر بالنقطتين (٣ ، ٧) ، (٠ ، −٢)

الحل :

ميل المستقيم ل١ = م١ = $\frac{٠ - (-٣)}{٢ - ٥}$ = $\frac{٣}{٣}$ = −١

ميل المستقيم ل٢ = م٢ = $\frac{٧ - (-٢)}{٣ - ٠}$ = $\frac{٧ +}{}$ = $\frac{٩}{٣}$ = ٣

فإذا كانت هـ هى الزاوية من $\overleftarrow{ل_١}$ إلى $\overleftarrow{ل_٢}$ فإن ظا هـ = $\frac{م_٢ - م_١}{١ + م_٢ م_١}$

= $\frac{٣ - (-١)}{١ + (-١) \times ٣}$ = $\frac{٤}{-٢}$ = −٢

∴ هـ = ظا$^{-١}$(−٢) (ظا$^{-١}$س تعنى الزاوية التى ظلها س)

∴ هـ = ٣٤′ ١١٦° (من الجداول الرياضية)

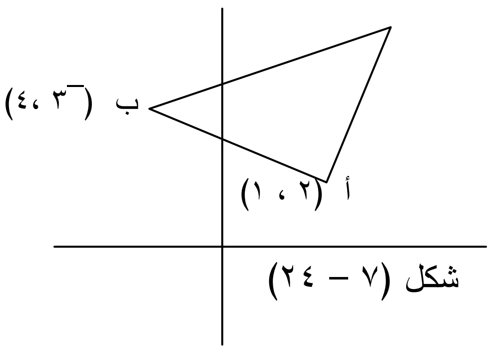
أى ١١٦ درجة و ٣٤ دقيقة ويرمز للدقيقة في النظام الستينى بالرمز (′) . الدرجة الواحدة = ٦٠′ .

مثال (٢) :

جد زاوية ب في المثلث أ ب جـ حيث أ (٢، ١) ، ب (−٣ ،٤) ، جـ (٥ ، ٦) جـ (٥ ، ٦)

الحل :

لمعرفـــــة ما إذا كانت الزاوية ب حادة ام منفرجة ___ نحتاج لايجاد ميلى $\overline{ب جـ}$ ، ب أ شكل (٧ – ٢٤)



شكل (٧ – ٢٤)

$$م_{\overline{ب ج}} = \frac{٤ - ٦}{-٣ - ٥} = \frac{-٢}{-٨} = \frac{١}{٤}$$

$$م_{\overline{أ ب}} = \frac{٤ - ١}{-٣ - ٢} = \frac{٣}{-٥} = - \frac{٣}{٥}$$

زاوية ب هى الزاوية من أ ب إلى ب جـ

$$\therefore \text{ ظا ب } = \frac{\frac{١}{٤} - \frac{(-٣)}{٥}}{١ + \frac{١}{٤} \times \frac{(-٣)}{٥}}$$

$$= \frac{\frac{١}{٤} + \frac{٣}{٥}}{١ - \frac{٣}{٢٠}} = \frac{\frac{٥ + ١٢}{٢٠}}{\frac{٢٠ - ٣}{٢٠}}$$

$$= \frac{١٧}{٢٠} \div \frac{١٧}{٢٠} = \frac{١٧}{٢٠} \times \frac{٢٠}{١٧} = ١$$

$\therefore$ ب زاوية حادة وتساوى ظا$^{-١}$ ١ = ٤٥°

تمرين (٧ – ٦)

جد الزاوية الحادة بين كل زوج من المستقيمات الآتية :

(١) $\overleftarrow{ل_١}$: ل$_١$ المستقيم المار بالنقطتين (٠ ، ٣) ، (–٢ ، ٥)
$\overleftarrow{ل_٢}$: ل$_٢$ المستقيم المار بالنقطتين (٠ ، ٠) ، (٤ ، ٤)

(٢) $\overleftarrow{ل_١}$: ل$_١$ مستقيم ميله –٢
$\overleftarrow{ل_٢}$: ل$_٢$ مستقيم ميله ١

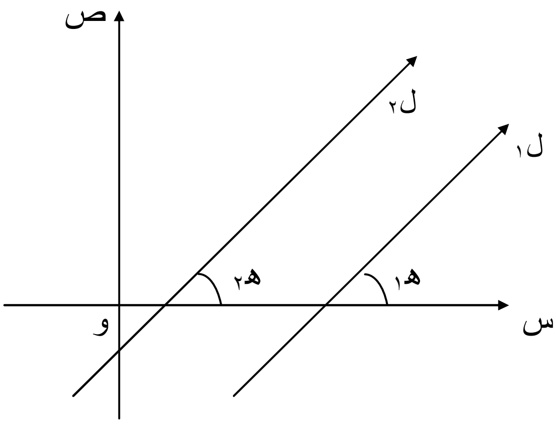
(٣) $\overleftrightarrow{ل_{١}}$: $ل_{١}$ مستقيم يمر بالنقطة (٣ ، ٧) ويقطع جزءاً موجباً من المحور الصادى قدره ٢ .
$\overleftrightarrow{ل_{٢}}$: $ل_{٢}$ مستقيم ينطبق على المحور السينى

(٤) جد ظل الزاوية المحصورة بين المستقيم الذى ميله −١ والمستقيم المار بالنقطتين (٧ ، ١) ، (٢ ، −٣) .

(٧ – ٧) المستقيمات المتوازية والمستقيمات المتعامدة :

(أ) المستقيمان المتوازيان :

كما نعلم أن المستقيمين المتوازيين يكون البعد بينهما ثابتاً على الدوام ، ولكن هناك علاقة بين ميليهما والعلاقة هذه تكون واضحة إذا تذكرنا العلاقة بين ميل المستقيم وظل زاوية ميله ، وإذا تذكرنا كذلك أن للمستقيمين المتوازيين زاويتى ميل متساويتين كما يبدو في الشكل (٧ –٢٥) من خاصية تناظر الزوايا .



الشكل (٧ – ٢٥)

وعليه فإن $هـ_{١} = هـ_{٢}$ ، وبالتالى $ظا\, هـ_{١} = ظا هـ_{٢}$.

وبما أن ميل المستقيم $ل_{١} = م_{١} = ظا هـ_{١}$.

وميل المستقيم $ل_{٢} = م_{٢} = ظا هـ_{٢}$

$\therefore\ م_{١} = م_{٢}$

والعكس إذا كان ميلا المستقيمين متساويين ، فانهما يكونان متوازيين، وعلى ذلك يكون شرط توازى مستقيمين على مستوى هو $م_{١} = م_{٢}$

المستقيمان متوازيان إذا وفقط إذا تساوى ميلاهما

(ب) المستقيمان المتعامدان :

فيما سبق وجدنا المستقيم $\overleftarrow{ل}_{١} \,//\, \overleftarrow{ل}_{٢} \Leftrightarrow$ ميل $\overleftarrow{ل}_{١}$ = ميل $\overleftarrow{ل}_{٢}$

والآن ماذا عن المستقيمين المتعامدين ، هل هناك علاقة بين ميليهما ؟

لنفرض كما في الشكل (٧ – ٢٦) أن $\overleftarrow{ل}_{١}$ ، $\overleftarrow{ل}_{٢}$ مستقيمان متعامدان يتقاطعان عند النقطة ن ، ويقطعان المحور السينى عند النقطتين أ ، ب على الترتيب . ونفرض أن زاوية ميل $\overleftarrow{ل}_{١}$ هى $هـ_{١}$ ، وزاوية ميل $\overleftarrow{ل}_{٢}$ هى $هـ_{٢}$.

$\therefore$ ميل $\overleftarrow{ل}_{١}$ = $م_{١}$ = ظا $هـ_{١}$

ميل $\overleftarrow{ل}_{٢}$ = $م_{٢}$ = ظا $هـ_{٢}$

لكن في Δ أ ب ن

القائم الزاوية في ن

$هـ_{١}$ = ٩٠ + $هـ_{٢}$

(زاوية خارجية)

$\therefore$ ظا$هـ_{١}$ = ظا (٩٠ + $هـ_{٢}$)

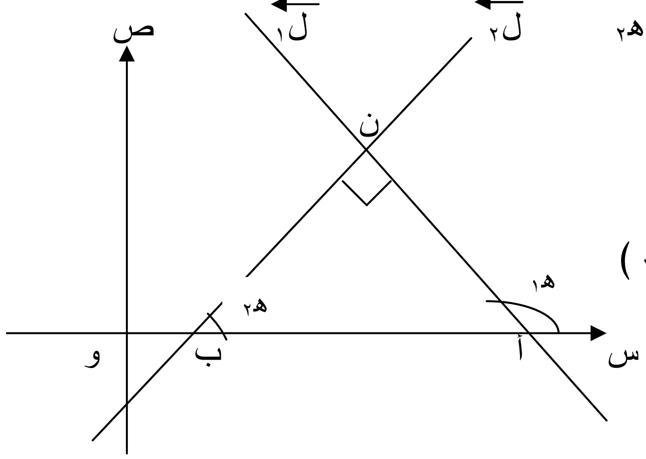
$\therefore$ ظا$هـ_{١}$ = – ظتا$هـ_{١}$

(انظر الزوايا المنتسبة)

$\therefore$ ظا$هـ_{١}$ = $\frac{-١}{ظاهـ_{٢}}$

$\therefore$ ظا$هـ_{١}$. ظا$هـ_{٢}$ = –١

$\therefore$ $م_{١}$. $م_{٢}$ = –١



الشكل (٧ – ٢٦)

$\therefore$ يتعامد المستقيمان إذا كان
حاصل ضرب ميليهما يساوى –١

لقد تعرضنا في الدرس السابق إلى أنه إذا كانت هـ هى الزاوية بين مستقيمين ميلاهما $م_{١}$ ، $م_{٢}$

فإن ظاهـ = $\pm \left(\frac{م_{٢} - م_{١}}{١ + م_{١}\, م_{٢}} \right)$

فإذا كان هذان المستقيمان متوازيين فإن هـ في هذه الحالة تؤخذ بأنها تساوى الصفر وعليه فإن :

$$\text{فإن ظاهـ} = \text{ظا } 0 = \pm \frac{م_2 - م_1}{1 + م_1 م_2} = 0$$

$\therefore$ $م_1 - م_2 = 0$ (لأن ظا $0 = 0$)

$\therefore$ $م_1 = م_2$ وهذا شرط التوازى .

أما إذا كان المستقيمان متعامدين ، فإن هـ في هذه الحالة تساوى $90°$

$$\text{فإن ظاهـ} = \text{ظا } 90 = \pm \frac{م_2 - م_1}{1 + م_1 م_2} = \infty \quad (\text{لأن ظا } 90 = \infty)$$

$\therefore$ $1 + م_1 م_2 = 0$ أو $م_1 م_2 = -1$

وهذا شرط التعامد .

مثال (١) :

بين أن المستقيم المار بالنقطتين أ (٠ ، ٤) ، ب (٢ ، ٧) يوازى المستقيم المار بالنقطتين جـ (١ ، ٠) ، د (-١ ، -٣) .

الحل :

$$\text{ميل } \overline{أب} = \frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1} = \frac{7 - 4}{2 - 0} = \frac{3}{2}$$

$$\text{ميل } \overline{جـ د} = \frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1} = \frac{-3 - 0}{-1 - 1} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$$

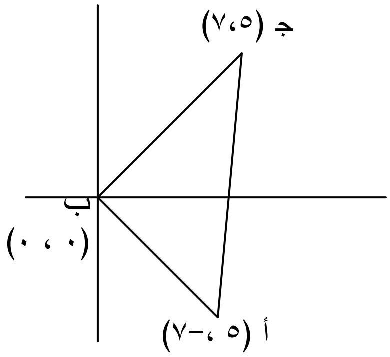
$\because$ $م_1 = م_2$ ، $\therefore$ $\overline{أب} // \overline{جـ د}$

مثال (٢) :

أثبت أن النقاط أ (٥ ، -٧) ، ب (٠ ، ٠) ، جـ (٧ ، ٥) هى رؤوس مثلث قائم الزاوية .

الحل :

باستخدام الميل في هذا المثال (شكل (٧– ٢٧))



شكل (٧– ٢٧)

ميل $\overline{\text{أ ب}}$ = $م_١$ = $\frac{٠ - (-٧)}{٠ - ٥} = \frac{٧}{-٥}$

ميل $\overline{\text{ب جـ}}$ = $م_٢$ = $\frac{٥ - ٠}{٧ - ٠} = \frac{٥}{٧}$

$\therefore$ $\overline{\text{أ ب}} \perp \overline{\text{ب جـ}}$ $م_١ م_٢ = \frac{-٧}{٥} \times \frac{٥}{٧} = -١$

$\therefore$ المثلث قائم الزاوية في ب

مثال (٣) :

أ ب جـ مثلث حيث أ (٠ ، ٢) ، ب (–٢ ، –٨) ، جـ (٧ ، –٢) جد ميل العمود النازل من أ على $\overline{\text{ب جـ}}$.

الحل :

ليكن ميل $\overline{\text{ب جـ}}$ = $م_١$

$\therefore م_١ = \frac{-٢ - (-٨)}{٧ - (-٢)} = \frac{٦}{٩} = \frac{٢}{٣}$

وليكن $\overline{\text{أ د}}$ العمود النازل من أ على $\overline{\text{ب جـ}}$ وميله $م_٢$

$\therefore م_١ \times م_٢ = -١$ من شرط التعامد

$\therefore \frac{٢}{٣} \times م_٢ = -١$

$\therefore م_٢ = -١ \times \frac{٣}{٢} = \frac{-٣}{٢}$

(لاحظ أن الميل $م_٢$ يساوى مقلوب الميل $م_١$ مع تغيير الاشارة حيث $م_١ \neq ٠$)

مثال (٤) :

بين أن النقاط أ (−٣ ، −٤) ، ب (−١ ،−٢) ، ج (٢ ،١) تقع على استقامة واحدة .

الحل :

باستخدام الميل نجد أن :

$$\text{ميل } \overline{\text{أ ب}} = \frac{\text{ص}_٢ - \text{ص}_١}{\text{س}_٢ - \text{س}_١} = \frac{-٢ - -٤}{-١ - -٣} = \frac{٢}{٢} = ١$$

$$\text{ميل } \overline{\text{ب ج}} = \frac{١ - -٢}{٢ - -١} = \frac{٣}{٣} = ١$$

ميل $\overline{\text{أ ب}}$ = ميل $\overline{\text{ب ج}}$ ، وبما أنهما مشتركان في النقطة ب .
∴ $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{ب ج}}$ قطعتان مستقيمتان من مستقيم واحد اى أن أ ، ب ، ج على استقامة واحدة.

تمرين (٧ − ٧)

(١) أثبت أن المستقيم المار بالنقطتين أ (٦ ، ٢) ، ب (−١ ، ٦) يوازى المستقيم المار بالنقطتين ج (٢ ، −١) ، د (−٥ ، ٣) .

(٢) أثبت أن $\overline{\text{أ ج}} \perp \overline{\text{ب د}}$ إذا كان أ (٢ ، ٢) ، ب (١ ، −٣) ، ج (−٤ ، −٢)، د (−٥ ، ٦) .

(٣) باستخدام فكرة الميل ، أثبت أن أ (٥ ، ٢) ، ب (−٢ ، ١) ، ج (٢ ، −٢)، هى رؤوس مثلث قائم الزاوية .

(٤) إذا كان أ (٢ ، ٠) ، ب (−١٢ ، −٥) ، ج (−٢ ، ٦) ، د (١٢ ، ١١) أثبت أن الشكل أ ب ج د معين .

(٥) مستخدماً فكرة الميل أثبت أن النقط أ (٢ ، ٣) ، ب (٣ ، ٧) ، ج (−١ ، −٩) تقع على إستقامة واحدة .

(٦) إذا كانت النقط أ (٢ ، ٣) ، ب (−١ ، ٤) ، ج (س ، ص) على إستقامة واحدة فأثبت أن :

س + ٣ ص − ١١ = ٠

(٧) أ ب جـ مثلث رؤوسه أ (٢ ، ٤) ، ب (٦ ، ٠) ، جـ (–٢ ، –٣) جد

(أ) ميل العمود المرسوم من أ على $\overline{\text{ب جـ}}$

(ب) ميل المستقيم المرسوم من ب وموازياً أ جـ .

(٨) إذا كانت النقط أ (٢ ، ٤) ، ب (٢ ، –٤) ، جـ (س ، ٠) ∋ مستقيم واحد ، جد قيمة س .

(٩) أثبت أن النقط أ (٣ ، ٤) ، ب (٠ ، ٥) ، جـ (–٦ ، ٧) تقع على استقامة واحدة .

(١٠) إذا كان إحداثيا نقطة التنصيف للقطعة الواصلة بين النقطتين أ (٢ ، ٣) وب (٣ ، ٤) هي (س ، ص) أثبت أنها تحقق المعادلة .

س – ص + ١ = صفر .

(١١) $\overleftarrow{\text{ل}_{١}}$ مستقيم يصنع زاوية قدرها ٣٠° في الإتجاه الموجب مع محور السينات ويقاطع مستقيم آخر $\overleftarrow{\text{ل}_{٢}}$ مستقيم آخر يصنع زاوية قدرها ٦٠° مع محور السينات . جد زاوية التقاطع .

(١٢) $\overleftarrow{\text{ل}_{١}}$ مستقيم يوزاي مستقيماً ميله يساوي $\frac{١}{٢}$ ويقاطع مستقيماً آخر $\overleftarrow{\text{ل}_{٢}}$ يمر بالنقطتين.أ (٢ ، ٣) ، ب (٤، ٧) جد الزاوية الحادة بين المستقيمين ل ١، ل٢

(١٣) $\overleftarrow{\text{ل}_{١}}$ مستقيم يعامد مستقيماً آخر يصنع زاوية قدرها ٤٥° مع المحور السيني ويقاطع مستقيماً $\overleftarrow{\text{ل}_{٢}}$ يصنع زاوية قدرها ظا$^{-١}$($\frac{١}{٣}$) مع المحرو السيني . جد زاوية التقاطع بين $\overleftarrow{\text{ل}_{١}}$ ، $\overleftarrow{\text{ل}_{٢}}$.