



جمهورية السودان

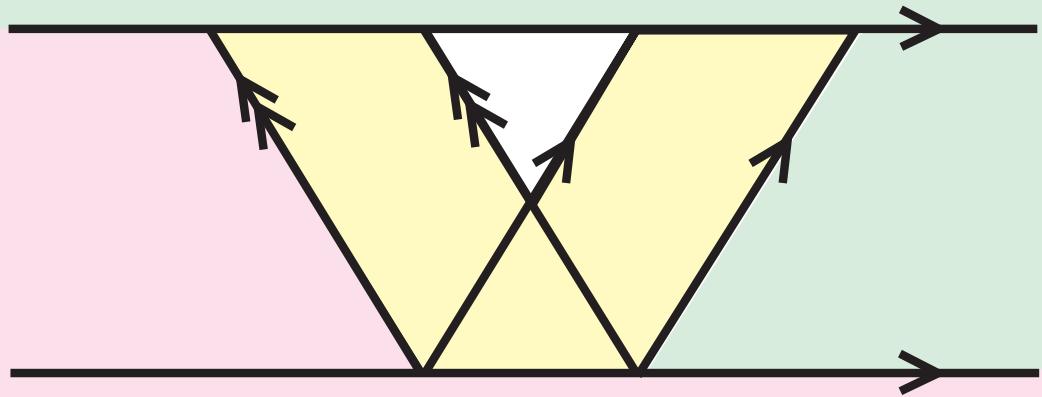
وزارة التربية والتعليم



المركز القومي للمناهج والبحث التربوي - بخت الرضا

المرحلة المتوسطة

الرياضيات



الصف الأول



بسم الله الرحمن الرحيم
جمهورية السودان
وزارة التربية والتعليم
المركز القومي للمناهج والبحث التربوي – بخت الرضا

المرحلة المتوسطة

الرياضيات

الصف الأول

إعداد لجنة بتكليف من المركز القومى للمناهج والبحث التربوى من الأساتذة:

د. الخطيب الطيب سيد أحمد حمد توده	المركز القومى للمناهج والبحث التربوى
د. خالد محمد خالد يوسف	جامعة بخت الرضا
د. عبد المنعم محمود عبده عز الدين	الإشراف التربوى – ولاية الخرطوم
د. صالح يوسف محمد صالح	جامعة بخت الرضا

الإشراف العام :

المدير العام بالإلإبابة

أ . حبيب آدم حبيب

الأمين العام

د . مبارك إسحق محمد يوسف

الجمع بالحاسوب :

المركز القومي للمناهج والبحث التربوي

أ . حافظ محمد ابراهيم

المركز القومي للمناهج والبحث التربوي

أ . إلهام عبد الرحيم علي

المركز القومي للمناهج والبحث التربوي

أ . إقبال يوسف أحمد

الإخراج والتصميم الفني :

خبير تربوي

أ . ابراهيم الفاضل الطاهر محمد

جميع حقوق التأليف ملك للمركز القومي للمناهج والبحث التربوي
ولا يحق لأي جهة نقل جزء من هذا الكتاب أو إعادة طبعه أو التصرف في
محتواه دون إذن كتابي من إدارة المركز القومي للمناهج والبحث التربوي

الطبعة الأولى ٢٠٢١ م

المحتويات

الصفحة	الموضوع	م
١	المقدمة	١
٢	مجموعـة الأعداد النسبـية الوحدة الأولى :	٢
٣٣	الجمل الرياضـية والمعادـلات الوحدة الثانية :	٣
٤٩	المضـلات الوحدة الثالثـة :	٤
٦٠	الزوج المرتب والعـلاقات الوحدة الرابـعة :	٥
٧٩	التـكافـؤ الوحدة الخامـسة :	٦
٩٢	النـظام الثنـائي الوحدة السادـسة :	٧
١٠٥	التشـابـه الوحدة السابـعة :	٨
١١٥	الإـحـصـاء الوحدة الثامـنة :	٩

بسم الله الرحمن الرحيم

المقدمة :

الحمد لله رب العالمين والصلوة والسلام على أشرف المرسلين سيدنا محمد وعلى آله وأصحابه أجمعين .

وبعد :

نقدم لكم أعزاءنا المعلمين والمعلمات وأولياء الأمور، وتلاميذنا وتلميذاتنا النجباء ، كتاب الرياضيات للصف الأول من مرحلة التعليم المتوسط وفقاً لرؤيه المؤتمر القومي للتعليم ٢٠٢٠م لتطوير مناهج التعليم ، وفق مدخل المعاير للمواد المنفصلة ، آخذين في الإعتبار توجهات التطورات المعرفية والتكنولوجية المتتسارعة في جميع مجالات الحياة . وقد جاء المقرر امتداداً لمقرر الصف السادس إبتدائي وذلك وفقاً لما ورد في وثيقة ومصفوفات المدى والتتابع للمناهج الجديدة .

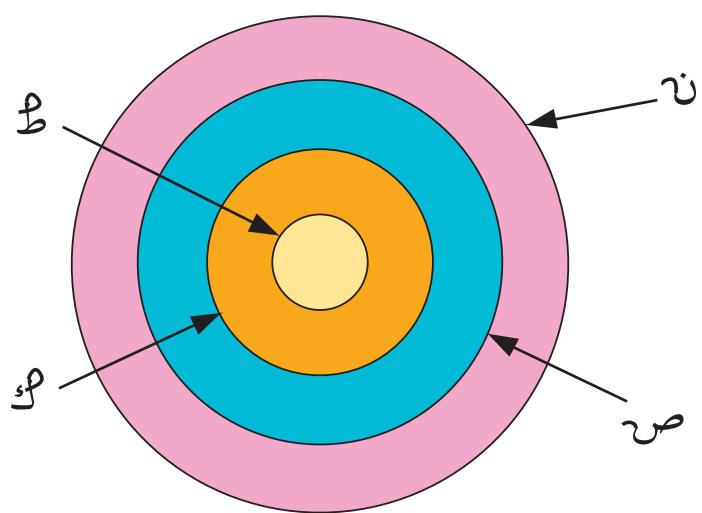
ونرجو من تلاميذنا وتلميذاتنا أن يحافظوا على هذا الكتاب ليستفيد منه من يجيء بعدهم . وأخيراً نسأل الله لكم التوفيق وأن يعينكم على تقديمها بالصورة التي تفي بالكتاب ، ونحيطكم في انتظار نقدكم البناء لمحتواه مشاركة منكم في تطويره وتجويده .

والله الموفق

المؤلفون

الوحدة الأولى

مجموعة الأعداد النسبية



(١-١) العدد النسبي: أدرس مجموعات الكسور التالية:

المجموعة الأولى: $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \dots$

المجموعة الثانية: $\frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{6}{9}, \frac{8}{12}, \dots$

المجموعة الثالثة: $\frac{3}{5}, \frac{6}{10}, \frac{9}{15}, \frac{12}{20}, \dots$

ماذا تلاحظ؟

ما أبسط كسر تؤول إليه الكسور في كل مجموعة؟ تؤول جميع الكسور المتكافئة عند كتابتها في أبسط صورة إلى صورة وحيدة، فمثلاً تؤول جميع عناصر المجموعة الأولى إلى الكسر $\frac{1}{2}$ وكذلك تكتب عناصر المجموعة الثانية في أبسط صورة على النحو $\frac{2}{3}$. أما أبسط صورة لأي كسر في المجموعة الثالثة فهي $-\frac{3}{5}$. إن كل كسر من هذه الكسور $(\frac{1}{2}, -\frac{2}{5}, \frac{3}{5})$ يسمى **عددًا نسبياً**.

العدد النسبي هو الذي يمكن كتابته على صورة $\frac{a}{b}$ حيث $a, b \in \mathbb{Z}$
و القاسم المشترك الأكبر لهما الواحد الصحيح $, b \neq 0$.

مجموعة الأعداد النسبية:

(١) ضع العدد الذي يجعل $\square + 2 = 5$ صحيحه
نجد أن العدد هو $3, 3 \Rightarrow \text{ط}.$

(٢) ضع العدد الذي يجعل $\square + 5 = 3$ صحيحه
نجد أن العدد هو $-2, -2 \Rightarrow \text{ط} , \text{ ولكن } -2 \Rightarrow \text{ص} .$

(٣) ضع العدد الذي يجعل $\square \times 3 = 16$ صحيحه
نجد أن العدد هو $\frac{16}{3}, \frac{16}{3} \Rightarrow \text{ط} , \frac{16}{3} \Rightarrow \text{ص}$
لذلك لا بد من التفكير في توسيع مجموعة الأعداد الصحيحة بإضافة أعداد أخرى تمكنا من حل هذه المسألة ومثيلاتها.

هذه المجموعة الجديدة تسمى **مجموعة الأعداد النسبية**، ويرمز لها بالرمز \mathbb{Q} .

وتكتب بالصفة المميزة:

$$N = \left\{ \frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$$

ويسمى a, b حدي العدد النسبي، كما يسمى a بسط العدد النسبي،

ويسمى b مقام العدد النسبي.

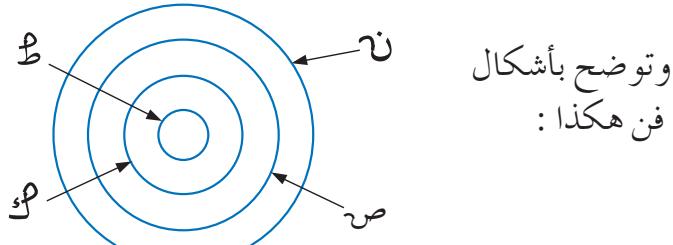
لاحظ أن العدد 5 يمكن كتابته على الصورة $\frac{5}{1}$ ، وكذلك أي عدد صحيح آخر مثلاً 12 يكتب على الصورة $\frac{12}{1}$ ، وهكذا، وهذا يعني أن الأعداد الصحيحة كلها أعداد نسبية.

• مجموعة الأعداد الصحيحة هي مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد النسبية

$$\mathbb{Z} \subset N.$$

من دراستك السابقة تعلم أن:

$$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}, \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C} \subset N$$



وتوضح بأشكال
فن هكذا:

مثال: إذا كان: $\frac{15}{2}$ جد قيمة س

$$\text{الحل:} \quad \frac{15}{2} = \frac{15}{6} \quad \text{إذن} \quad \frac{15}{6} = \frac{3 \times 5}{3 \times 2} = \frac{5}{2}$$

تمرين: (١ - ١)

جد قيم س في كل مما يلي:

$$\frac{1}{5} = \frac{s}{30} \quad \text{ج/} \quad \frac{s}{12} = \frac{7}{4} \quad \text{ب/} \quad \frac{s}{15} = \frac{2}{3} \quad \text{/}$$

$$\frac{9}{6} = \frac{18}{s} \quad \text{ه/} \quad \frac{3}{7} = \frac{6}{s} \quad \text{د/}$$

(٢ - ١) : كتابة العدد النسبي بصورة مختلفة - الكسور المتكافئة

اكتب زوجاً من الكسور المتكافئة ثم جد:

أ/ حاصل ضرب بسط الكسر الأول في مقام الكسر الثاني.

ب/ حاصل ضرب بسط الكسر الثاني في مقام الكسر الأول.

ماذا تلاحظ؟

كرر هذه العملية في أزواج أخرى من الكسور المتكافئة تعبّر عن هذه القاعدة.

$$\text{إذا كان } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ فإن } ad = bc$$

تسمى هذه العملية بالضرب التبادلي، حيث يتضح منها أن حاصل ضرب الطرفين

(أ ، د) يساوي حاصل ضرب الوسطين (ب ، ج) لتحقيق هذه القاعدة:

$$(أ) \text{نحو} \frac{a}{b} \text{إلى كسر مكافئ مقامه } b \text{ إذن } \frac{a}{b} = \frac{ad}{bd}$$

$$(ب) \text{نحو} \frac{c}{d} \text{إلى كسر مكافئ مقامه } d \text{ إذن } \frac{c}{d} = \frac{bc}{bd}$$

$$ad = bc \quad :: \quad ad = bc$$

مثال : أي الأزواج من الأعداد الآتية متكافئة

$$(أ) \frac{20}{25}, \frac{4}{7} \quad (ب) \frac{15}{40}, \frac{3}{8}$$

$$\text{الحل: } a/ \quad 120 = 15 \times 8, \quad 120 = 40 \times 3$$

أي أن $3 \times 40 = 8 \times 15$:: الكسور متكافئة

$$b/ \quad 140 = 20 \times 7, \quad 100 = 25 \times 4$$

إذن $4 \times 25 \neq 7 \times 20$:: الكسور غير متكافئة

مقلوب العدد النسبي:

لكل عدد نسبي $\frac{a}{b}$ ، $a \neq 0$ ، $b \neq 0$ يوجد عدد نسبي هو $\frac{b}{a}$ يسمى **مقلوب العدد**.

مثلاً: مقلوب العدد $\frac{3}{4}$ هو العدد $\frac{4}{3}$

مقلوب $\frac{1}{2}$ هو العدد ٢

$$\frac{1}{5} = \frac{1}{5} = (\frac{1}{5}) - = \text{مقلوب } 5$$

$$(\frac{1}{6}) - = \frac{1}{6} = \text{مقلوب } \frac{1}{6} \text{ هو } \frac{1}{6}$$

قاعدة :

حاصل ضرب أي عدد نسبي في مقلوبه = ١

تمرين : (٢ - ١)

(١) وضع صحة كل من العبارات التالية:

$$\frac{4}{5} = \frac{4}{5} \quad (ب) \quad \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \quad (أ)$$

(٢) أي الأزواج من الأعداد الآتية متكافئة :

$$\frac{24}{39} - , \frac{8}{13} - , \frac{8}{45} - , \frac{2}{9} - , \frac{15}{75} , \frac{1}{5} \quad (أ)$$

(٣) اكتب الأعداد الكسرية التالية في أبسط صورة للعدد النسبي المكافئ :

$$\frac{144}{204} - , \frac{63}{105} \quad (د) \quad (ج) \quad (ب) - \frac{12}{36} \quad (أ) \quad \frac{9}{15}$$

(٤) جد مقلوبات الأعداد الآتية :

$$(\frac{5}{8}) - , \frac{1}{7} - , \frac{1}{8} - , \frac{7}{12} \quad (د) \quad (ج) \quad (ب) \quad (أ)$$

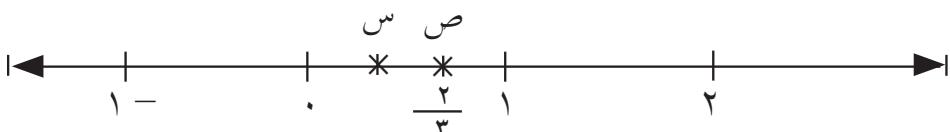
(١ - ٣) : تمثيل الأعداد النسبية على خط الأعداد :

تعلمنا سابقاً كيف نمثل الأعداد الصحيحة على خط الأعداد ، وذلك بوضع جميع الأعداد الصحيحة الموجبة على يمين الصفر ، والأعداد الصحيحة السالبة على يسار الصفر ، على أبعاد متساوية .

الصفر عدد نسبي محيد غير موجب وغير سالب

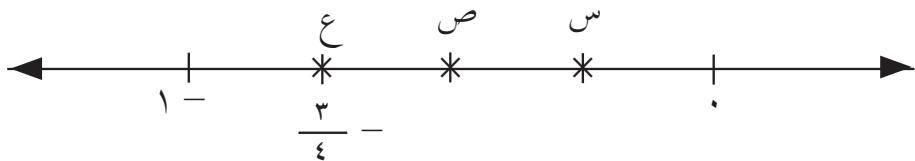
على نفس الخط يمكن تمثيل الأعداد النسبية كالتالي :

(أ) لتمثيل العدد $\frac{3}{3}$ على خط الأعداد نقسم القطعة المحصورة بين النقطة التي تمثل العدد صفر والنقطة التي تمثل العدد ١ إلى ثلاثة أقسام متساوية في النقطتين ص و تكون النقطة ص هي النقطة التي تمثل العدد .



ما العدد الذي تمثله النقطة س ؟

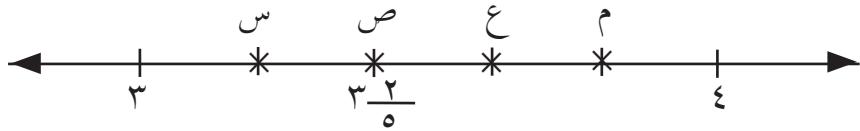
(ب) لتمثيل العدد $-\frac{3}{4}$ على خط الأعداد نقسم القطعة المحصورة بين النقطة التي تمثل العدد صفر والعدد -١ إلى أربعة أقسام متساوية في النقاط س ، ص ، ع و تكون النقطة ع هي النقطة التي تمثل العدد $-\left(\frac{3}{4}\right)$



ما الأعداد التي تمثلها النقاط س ، ص ؟

عين النقطة التي تمثل $-\frac{3}{4}$ والنقطة التي تمثل $-\frac{3}{4}$ **ماذا تلاحظ ؟**

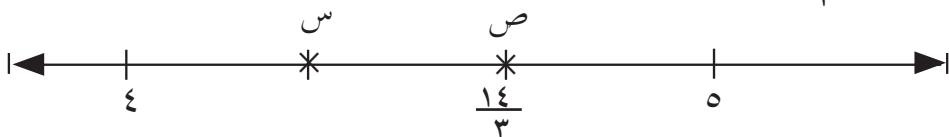
(ج) لتمثيل العدد $\frac{2}{5}$ على خط الأعداد نقسم القطعة المحصورة بين النقطة التي تمثل العدد ٣ والنقطة التي تمثل العدد ٤ إلى خمسة أقسام متساوية في النقاط س ، ص ، ع ، م و تكون النقطة ص هي تمثل العدد $\frac{2}{5}$



ما الأعداد التي تمثلها النقاط س ، ع ، م ؟

(د) لتمثيل العدد $\frac{14}{3}$ على خط الأعداد يجب أن يحول إلى كسر مركب (كما تعلمنا سابقاً) :

$$\frac{14}{3} = \frac{2}{3} \cdot 4 + \frac{2}{3} \quad \text{ثم يتم تمثيله كما سبق في المثال ج .}$$



وتكون النقطة ص هي التي تمثل العدد $\frac{14}{3}$

ما العدد الذي تمثله النقطة س ؟

تدريب صفي :

على خط الأعداد مثل الأعداد الآتية:

$$(أ) \frac{1}{2} \quad (ب) -\frac{4}{5} \quad (ج) -\frac{7}{4}$$

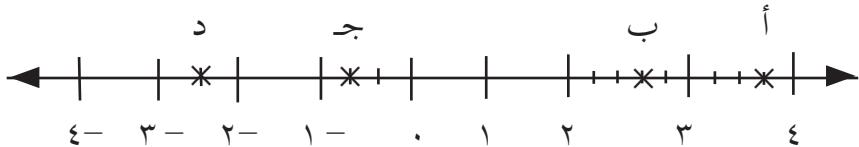
تمرين (١ - ٣)

١/ على خط الأعداد مثل الأعداد الآتية:

$$(أ) \frac{1}{2} \quad (ب) \frac{1}{4} \quad (ج) -\frac{2}{3}$$

$$(د) -\frac{3}{4} \quad (ه) -\left(\frac{15}{4}\right)$$

٢/ اكتب العدد الذي تمثله كل من النقاط أ ، ب ، ج ، د



(٤ -) مقارنة عددين نسبيين:

أولاً : إذا كان المقامان متساويين :

نقارن بين البسطين فأكبرهما هو العدد الأكبر، فمثلاً :

$$\text{أ / أيهما أكبر } \frac{6}{7} \text{ أم } \frac{4}{7}$$

بما أن المقامين متساويين و $6 > 4$ فإن $\frac{6}{7} < \frac{4}{7}$

$$\text{ب / أيهما أكبر } -\frac{5}{9} \text{ أم } -\frac{8}{9}$$

بما أن المقامين متساويين و $-5 < -8$ فإن $-\frac{5}{9} < -\frac{8}{9}$

قاعدة :

إذا كان $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ عددين نسبيين حيث $b > 0$

$$(أ) a < c \text{ فإن } \frac{a}{b} < \frac{c}{d}$$

$$(ب) a > c \text{ فإن } \frac{a}{b} > \frac{c}{d}$$

ثانياً : إذا كان مقامان العددان مختلفين

$$\text{أيهما أكبر } \frac{2}{7} \text{ أم } \frac{3}{8}$$

نجعل المقامين متساويان كما تعلمونا في الكسور المتكافئة
المضاعف المشترك الأصغر للمقامين ٥٦

$$\frac{16}{56} = \frac{8 \times 2}{7 \times 8} = \frac{2}{7}, \quad \frac{21}{56} = \frac{7 \times 3}{7 \times 8} = \frac{3}{8}$$

$$\frac{2}{7} < \frac{3}{8} \quad \text{إذن} \quad 16 < 21 \quad \text{و بما أن}$$

بصورة عامة :

لمقارنة العددين $\frac{a}{b}$ ، $\frac{c}{d}$ حيث $b > 0$ ، $d > 0$

نكتب العددين بمقام ب د

$$\frac{a}{b} = \frac{a \times d}{b \times d} , \quad \frac{c}{d} = \frac{c \times b}{d \times b}$$

إذا كان

$$(أ) a \times d > c \times b \quad \text{فإن} \quad \frac{a}{b} > \frac{c}{d}$$

$$(ب) a \times d < c \times b \quad \text{فإن} \quad \frac{a}{b} < \frac{c}{d}$$

مثال (١) : رتب تصاعدياً الأعداد $\frac{3}{4}$ ، $\frac{2}{5}$ ، $\frac{2}{3}$ ، $\frac{2}{6}$

الحل : المضاعف المشترك الأصغر للمقامات = ٦٠

$$\frac{24}{60} = \frac{12 \times 2}{12 \times 5} = \frac{2}{5} , \quad \frac{40}{60} = \frac{20 \times 2}{20 \times 3} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{45}{60} = \frac{15 \times 3}{15 \times 4} = \frac{3}{4} \quad (\text{بمقارنة البسط والترتيب})$$

∴ الترتيب هو $\frac{3}{4}$ ، $\frac{2}{5}$ ، $\frac{2}{3}$ ، $\frac{2}{6}$

مثال (٢) : رتب تنازلياً الأعداد : $\frac{1}{2}$ ، $\frac{2}{5}$ ، $\frac{5}{7}$ ، $\frac{5}{10}$

الحل : المضاعف المشترك الأصغر للمقامات = ٧٠

$$\frac{28}{70} = \frac{14 \times 2}{14 \times 5} = \frac{2}{5} , \quad \frac{50}{70} = \frac{10 \times 5}{10 \times 7} = \frac{5}{7}$$

$$\frac{2}{5} , \frac{1}{2} , \frac{5}{7} , \frac{35}{70} \quad (\text{بالمقارنة}) \quad \therefore \frac{35}{70} = \frac{35 \times 1}{35 \times 2} = \frac{1}{2}$$

تمرين : (٤ - ١)

١/ أيهما أكبر في كل زوج مما يأتي :

$$\left(\frac{5}{7} \right) - , \left(\frac{2}{3} \right) - \text{(ب)} \quad \frac{5}{8} , \frac{1}{4} \text{ (أ)}$$

$$\left(\frac{2}{5} \right) - , \frac{3}{8} - \text{(د)} \quad \frac{5}{9} , \frac{6}{11} \text{ (ج)}$$

٢/ رتب تصاعدياً الأعداد :

$$\frac{1}{4} , \frac{1}{2} , \frac{2}{5} , \frac{3}{8} \quad \text{٣/ رتب تنازلياً الأعداد:}$$

$$\frac{5}{12} , \frac{3}{4} , \frac{6}{7} , \frac{2}{3}$$

١٥) عملية الضرب في مجموعة الأعداد النسبية

تعرفت في دراستك بالصف الخامس الإبتدائي على ضرب الكسور ، وعلمت أنه عند إجراء العملية

$$\frac{6}{11} \times \frac{2}{7} \text{ يكون الناتج } \frac{6}{11} \times \frac{2}{7} \text{ أي أنه}$$

إذا كان $\frac{أ}{ب} , \frac{ج}{د}$ عددين نسبين فإن $\frac{أ}{ب} \times \frac{ج}{د} = \frac{أ \times ج}{ب \times د}$

و يكون حاصل ضرب عددين نسبيين **موجباً** إذا اتحدت إشارتاهم .
و يكون حاصل ضرب عددين نسبيين **سالباً** إذا كانوا مختلفين في الإشارة .

مثال : جد ناتج الضرب لما يأتي :

$$\frac{4}{7} \times \frac{1}{6} - / ب$$

$$\frac{6}{5} \times \frac{3}{11} - / أ$$

$$5 \times \frac{1}{4} - / د$$

$$2 \frac{1}{6} \times \frac{7}{13} - / ج$$

الحل :

$$\frac{18}{55} = \frac{\frac{6}{5} \times \frac{3}{11}}{} = \frac{6}{5} \times \frac{3}{11} \quad (أ)$$

$$(ب) - \frac{1}{6} \times \frac{4}{7} \times \frac{21}{5} - = \frac{4}{7} \times \frac{1}{6} \times \frac{21}{5} - \quad (\text{نحول العدد } \frac{1}{6} \text{ إلى الصورة } \frac{1}{6})$$

$$3 \frac{19}{35} - = \frac{124}{35} - =$$

$$(ج) \quad 1 \frac{1}{6} - \frac{7}{6} = \frac{13}{6} \times \frac{7}{13} - \quad (\text{بعد الاختصار})$$

$$(د) \quad 5 \times \frac{21}{4} - = 5 \times 4 \frac{1}{4} - = 21 - \quad (\text{بعد الاختصار})$$

نشاط:

حديقة منزليّة طولها $\frac{1}{4}$ متر وعرضها $\frac{4}{5}$ متر ، جد مساحتها .

تمرين : (١ - ٥)

أُجر عمليات الضرب الآتية :

$$\left(\frac{7}{15} \right) - \times \frac{1}{9} \quad (2) \qquad \qquad \frac{4}{7} \times \frac{3}{5} \quad (1)$$

$$\frac{19}{20} \times \left(\frac{27}{28} \right) - (4) \qquad \qquad \frac{2}{9} \times \frac{3}{5} \quad (3)$$

$$\left(\frac{11}{3} - \right) \times \frac{9}{21} \quad (6) \qquad \left(\frac{20}{21} - \right) \times \frac{3}{8} \quad (5)$$

$$\left(\frac{2}{5} - \right) \times \left(3 \frac{1}{8} \right) - (8) \qquad \left(\frac{15}{4} - \right) \times \frac{5}{6} \quad (7)$$

$$\left(\frac{9}{21} - \right) \times 1 \frac{2}{7} - (10) \qquad \frac{7}{11} \times \left(\frac{8}{9} \right) - (9)$$

٦ - ١) : عملية القسمة في مجموعة الأعداد النسبية :

تعلمت بالصف الخامس الإبتدائي أن قسمة كسر على كسر آخر ، هو ضرب الكسر الأول في مقلوب الكسر الثاني أي أن:

إذا كان $\frac{أ}{ب}$ ، $\frac{ج}{د}$ عددين نسبيين ، $ج \neq 0$ فإن :

$$\frac{أ}{ب} \div \frac{ج}{د} = \frac{أ}{ب} \times \frac{د}{ج} = \frac{أ \times د}{ب \times ج}$$

ملاحظات :

- ١/ يكون ناتج قسمة عددين نسبيين **موجباً** إذا اتحدت إشارتا هما .
- ٢/ يكون ناتج قسمة عددين نسبيين **سالباً** إذا كانوا مختلفين في الإشارة .
- ٣/ القسمة على الصفر **غير معروفة** (أي لا يجوز القسمة على الصفر).
لأن: $\frac{أ}{ب} \div \frac{ج}{د}$ غير معروفة
 $(\frac{أ}{ب} \neq 0)$ ، قيمة لا نهائية)

مثال (١) :

جد ناتج القسمة لما يأتي :

$$(أ) \frac{2}{5} \div \frac{3}{4} \quad (ب) \frac{3}{5} \div 2\frac{1}{4}$$

$$(ج) (\frac{2}{7}) \div \frac{5}{9} \quad (د) \frac{1}{4} \div 3\frac{2}{3} \div 2\frac{1}{5}$$

الحل :

$$(\frac{1\frac{7}{8}}{1\frac{7}{8}} = \frac{15}{8} = \frac{5}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{2}{5} \div \frac{3}{4})$$

$$(ب) (\frac{3}{4} \div \frac{15}{4}) = \frac{45}{12} = \frac{5}{3} \times \frac{9}{4} = \frac{3}{5} \div 2\frac{1}{4}$$

$$1\frac{17}{18} - = \frac{35}{18} - = \frac{7}{2} - \times \frac{5}{9} = (\frac{2}{7}) - \div \frac{5}{9} \quad (ج)$$

$$\frac{1}{4} \div (\frac{11}{3} \div \frac{11}{5}) = \frac{1}{4} \div (\frac{2}{3} \div 2\frac{1}{5}) \quad (د)$$

$$\frac{1}{4} \div (\frac{3}{11} \times \frac{11}{5}) =$$

$$2\frac{2}{5} = \frac{12}{5} = \frac{4}{1} \times \frac{3}{5} = \frac{1}{4} \div \frac{3}{5} =$$

مثال (٢) : جد قيمة $\frac{s}{c}$ التي تحقق المعادلة :

$$(\frac{7}{12}) - = (\frac{2}{3} -) \times \frac{s}{c}$$

الحل :

$$(\frac{2}{3}) - \div (\frac{7}{12}) - = \frac{s}{c}$$

$$\frac{7}{8} = \frac{21}{24} = (\frac{3}{2}) - \times (\frac{7}{12}) - =$$

نشاط:

مزرعة مستطيلة الشكل مساحتها $\frac{2}{3} 130$ متر مربع جد طولها إذا كان عرضها $\frac{1}{2}$ متر.

تمرين (٦ - ١)

(١) جد ناتج العمليات الآتية :

$$(أ) - \frac{3}{2} \div 9 = \frac{1}{2} \div 12 - \frac{1}{4}$$

$$(ج) - 11 - \left(\frac{9}{11} \div \frac{2}{5} \right) \div \frac{3}{2}$$

$$(هـ) \left(\frac{2}{3} \div \frac{1}{2} \right) \div \frac{3}{4} = \frac{2}{3} \div \left(\frac{1}{2} \div \frac{5}{4} \right)$$

(٢) جد العدد النسبي $\frac{s}{c}$ الذي يتحقق كلاً من :

$$(أ) \frac{s}{c} = \frac{3}{7} - \frac{9}{11} \div$$

$$(ب) \frac{3}{4} = \frac{s}{c} \times \frac{2}{3}$$

$$(ج) \cdot = \frac{14}{27} \times \frac{s}{c}$$

(٣) هل يمكن إيجاد قيمة $\frac{a}{b}$ حيث $b \neq 0$ ، $a \neq 0$

(٤) زجاجة تحوى $\frac{1}{4}$ لتر من العصير . جد عدد الأكواب التي يمكن تعبئتها

من الزجاجة علماً بأن الكوب يحوى $\frac{3}{8}$ لتر من العصير .

(٧ - ١) : جمع الأعداد النسبية متساوية المقامات :

قاعدة :

$$\frac{أ + ج}{ب} = \frac{ج}{ب} + \frac{أ}{ب} \Rightarrow \text{لكل } \frac{أ}{ب}, \frac{ج}{ب} \in \mathbb{Q}, b \neq 0 \text{ فإن } \frac{أ + ج}{b} = \frac{ج}{b} + \frac{أ}{b}$$

مثال: أجر عمليات الجمع الآتية :

$$\frac{10}{7} + \frac{9}{7} / د \quad \frac{2}{11} + \frac{4}{11} / ج \quad \frac{2}{3} + \frac{5}{3} - ب / \quad \frac{8}{5} + \frac{6}{5} / أ$$

الحل:

$$2\frac{2}{5} = \frac{14}{5} = \frac{8+6}{5} = \frac{8}{5} + \frac{6}{5} / أ$$

$$2\frac{1}{3} - = \frac{7}{3} = \frac{2-5}{3} = \frac{2}{3} + \frac{5}{3} / ب$$

$$\frac{2}{11} = \frac{2+4}{11} = \frac{2}{11} + \frac{4}{11} / ج$$

$$\frac{1}{7} = \frac{10+9}{7} = \frac{10}{7} + \frac{9}{7} / د$$

تمرين (١ - ٧)

أجر العمليات التالية:

$$\frac{16}{23} + \frac{24}{23} - ج / \quad \frac{3}{10} + \frac{6}{10} - ب / \quad \frac{12}{7} + \frac{3}{7} / أ$$

$$3\frac{3}{4} + 5\frac{1}{4} / و \quad \frac{16}{3} + \frac{11}{3} / ه \quad \frac{2}{17} + \frac{15}{17} / د$$

$$3\frac{2}{3} + 6\frac{1}{3} / ح \quad 3\frac{1}{5} + 2\frac{2}{5} / ز$$

(٨-١) : جمع الأعداد النسبية مختلفة المقامات

أولاً نجعل المقامات في الكسرتين متساوين ثم نطبق القاعدة في الدرس السابق .

مثال (١) : جد حاصل جمع $\frac{3}{4}$ ، $\frac{2}{3}$

المضاعف المشترك الأصغر للعددين ٣ ، ٤ هو ١٢

$$\frac{9}{12} = \frac{3 \times 3}{3 \times 4} = \frac{3}{4} , \quad \frac{8}{12} = \frac{4 \times 2}{4 \times 3} = \frac{2}{3}$$

$$1\frac{5}{12} = \frac{17}{12} = \frac{9+8}{12} = \frac{9}{12} + \frac{8}{12} = \frac{3}{4} + \frac{2}{3} \therefore$$

مثال (٢) : اجر العمليات الآتية :

$$\frac{4}{3} + \frac{6}{5} \quad (ب) \quad \frac{6}{9} + \frac{7}{6} / أ$$

الحل :

أ / المضاعف المشترك الأصغر للمقامين ١٨

$$\frac{12-}{18} = \frac{2 \times 6 -}{2 \times 9} = \frac{6-}{9} , \quad \frac{21-}{18} = \frac{3 \times 7 -}{3 \times 6} = \frac{7-}{6}$$

$$1\frac{5}{6} = \frac{11}{6} = \frac{33-}{18} = \frac{12-21-}{18} = \frac{12-}{18} + \frac{21-}{18} = \frac{6-}{9} + \frac{7-}{6}$$

ب / المضاعف المشترك الأصغر للمقامين ١٥

$$\frac{20}{15} = \frac{5 \times 4}{5 \times 3} = \frac{4}{3} , \quad \frac{18}{15} = \frac{3 \times 6}{3 \times 5} = \frac{6}{5}$$

$$2\frac{8}{15} = \frac{38}{15} = \frac{20}{15} + \frac{18}{15} = \frac{4}{3} + \frac{6}{5}$$

مثال : (٣)

$$\text{جد ناتج} \quad \frac{1}{6} + 2 \frac{3}{7}$$

الحل :

$$\begin{aligned} \frac{25}{6} + \frac{17}{7} &= 4 \frac{1}{6} + 2 \frac{3}{7} \\ (\text{لماذا}) \quad \frac{7 \times 25}{7 \times 6} + \frac{6 \times 17}{6 \times 7} &= \\ \frac{175 + 102}{42} &= \frac{175}{42} + \frac{102}{42} = \\ 6 \frac{25}{42} &= \frac{277}{42} = \end{aligned}$$

حل آخر :

من الممكن جمع الأعداد الصحيحة أولاً ثم تجمع الكسور كالتالي:

$$\begin{aligned} \frac{1}{6} + 2 \frac{3}{7} \\ \text{مجموع الأعداد الصحيحة } 6 = 4 + 2 = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{7 \times 1}{7 \times 6} + \frac{6 \times 3}{6 \times 7} &= \frac{1}{6} + \frac{3}{7} \quad \text{مجموع الكسرين} \\ \frac{25}{42} &= \frac{7}{42} + \frac{18}{42} = \\ 6 \frac{25}{42} &= \text{المجموع} \end{aligned}$$

مثال (٤)

$$\text{جد ناتج : } 5 \frac{1}{6} + 5 \frac{2}{3}$$

الحل :

$$\left(\frac{25}{6} - \frac{34}{6} \right) + \left(\frac{17}{3} \right) = \left(5 \frac{1}{6} \right) + \left(5 \frac{2}{3} \right) \quad (\text{المضاعف المشترك للمقامين } 6)$$

$$\begin{aligned} \frac{25 - 34}{6} &= \frac{25}{6} - \frac{34}{6} = \frac{25}{6} - \frac{2 \times 17}{2 \times 3} = \\ &= \frac{3}{6} = \frac{9}{6} = \end{aligned}$$

تمرين (١ - ٨)

أجر العمليات الآتية:

$$(ب) \quad \frac{6}{13} + \frac{14}{39} \quad (أ) \quad \frac{5}{12} + \frac{4}{9}$$

$$(د) \quad \frac{6}{9} + \frac{8}{6} - \quad (ج) \quad \frac{9}{5} + \frac{4}{7} -$$

$$(و) \quad 2 \frac{5}{8} + 3 \frac{1}{4} \quad (هـ) \quad \frac{8}{6} + \frac{22}{3} -$$

$$(ي) \quad \frac{22}{3} + 6 \frac{3}{4} \quad (حـ) \quad 4 \frac{2}{5} + 2 \frac{1}{2} -$$

(١ - ٩) : عملية الطرح في مجموعة الأعداد النسبية

سبق أن علمنا أن عملية طرح عدد صحيح من عدد صحيح آخر عبارة عن إضافة النظير الجمعي للعدد الثاني إلى العدد الأول ، وبالطريقة نفسها يمكننا طرح عدد نسبي من عدد نسبي آخر .

أولاً : طرح عدد نسبي من عدد نسبي آخر إذا كانت المقامات موحدة

إذا كان $\frac{أ}{ب} , \frac{ج}{ب} \Rightarrow n$ فإن :

$$\frac{أ - ج}{ب} = \frac{أ + (-ج)}{ب} = \frac{أ}{b} - \frac{ج}{b}$$

مثال (١) : جد قيمة : $\frac{3}{7} - \frac{5}{7}$

الحل : $1 \frac{1}{7} = \frac{8}{7} = \frac{3+5}{7} = \frac{3}{7} + \frac{5}{7} = \frac{3}{7} - \frac{5}{7}$

ثانياً : طرح عدد نسبي من عدد نسبي آخر إذا كانت المقامات مختلفة : نوحد المقامات بنفس الطريقة التي استخدمت في الدرس السابق.

مثال (٢) : اجر العمليات الآتية :

$$2 \frac{1}{4} - 3 \frac{4}{5} \quad \text{بـ} \quad \frac{2}{3} - \frac{4}{5} \quad \text{أـ}$$

$$\text{المضاعف المشترك الأصغر للمقامين } 15 \quad \frac{2}{3} + \frac{4}{5} = \frac{2}{3} - \frac{4}{5} \quad \text{الحل : أـ}$$

$$\frac{2}{15} = \frac{10-12}{15} = \frac{10}{15} - \frac{12}{15} = \frac{5 \times 2}{5 \times 3} - \frac{3 \times 4}{3 \times 5} =$$

$$\frac{5 \times 9}{5 \times 4} - \frac{4 \times 19}{4 \times 5} = \frac{9}{4} - \frac{19}{5} = 2 \frac{1}{4} - 3 \frac{4}{5} \quad \text{بـ}$$

$$1 \frac{11}{20} = \frac{31}{20} = \frac{45-76}{20} = \frac{45}{20} - \frac{76}{20} =$$

تمرين : (٩ - ١)

أجر عمليات الطرح الآتية :

$$\frac{9}{13} - \frac{11}{13} / 2 \quad \frac{1}{9} - \frac{7}{9} / 1$$

$$\frac{3}{4} - \frac{7}{8} / 4 \quad 3 \frac{5}{7} - 2 \frac{1}{7} / 3$$

$$(3-) - 2 \frac{1}{4} / 6 \quad \frac{1}{4} - \frac{6}{5} / 5$$

$$4 \frac{1}{4} - 6 \frac{2}{5} / 8 \quad 4 \frac{1}{35} - 7 \frac{2}{10} / 7$$

(١٠ - ١) خواص جمع الأعداد النسبية:

١/ مجموعة الأعداد النسبية مغلقة تحت عملية الجمع ، أي أن:

$$\text{لكل } \frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \frac{a}{b} + \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$$

جد:

$$= \frac{2}{4} + \frac{1}{3}$$

$$= \frac{2}{3} + \frac{2}{6}$$

ماذا تلاحظ؟

٢/ عملية الجمع على مجموعة الأعداد النسبية تبديلية أي أنه

$$\text{لكل } \frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b}$$

بين صحة:

$$\frac{2}{3} + \frac{5}{4} = \frac{5}{4} + \frac{2}{3}$$

$$\frac{3}{8} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{3}{8}$$

ماذا تلاحظ؟

٣/ العنصر المحايد الجماعي هو الصفر

$$\text{لكل } \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \frac{a}{b} + 0 = 0 + \frac{a}{b} = \frac{a}{b}$$

٤/ لكل عدد $\frac{a}{b}$ \Rightarrow ن يوجد عدد $- \left(\frac{a}{b} \right)$ (الناظير الجمعي)

حيث $\frac{a}{b} - \left(\frac{a}{b} \right) = صفر$

وعليه $- \left(\frac{a}{b} \right) = \left(-\frac{a}{b} \right)$

٥/ عملية الجمع على مجموعة الأعداد النسبية تجمعية أي انه

لكل $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f}$ فإن $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{e}{f} = \frac{af+cf+ef}{bf}$

تمرين : (١٠ - ١)

(١) اكتب الناظير الجمعي للأعداد الآتية:

$$2\frac{3}{4} / 5 - \frac{5}{6} / \frac{2}{3} ج / 25$$

(٢) اكتب الخاصية التي توضحها كل جملة مما يلي:

$$\frac{3}{5} + \frac{1}{6} = \frac{1}{6} + \frac{3}{5}$$

$$ب / \left(\frac{1}{4} + \frac{4}{5} \right) - \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{4} + \left(\frac{4}{5} + \frac{1}{2} \right)$$

$$\cdot = \frac{3}{5} + \frac{3}{5} / \frac{3}{4} = \cdot + \frac{3}{4} / ج$$

$$هـ / \left(\frac{3}{4} + \frac{5}{6} \right) \Rightarrow ن$$

(٣) املأ الفراغ بالعدد المناسب:

$$\frac{5}{6} + (\boxed{\quad}) + \frac{9}{3} = (\boxed{\quad} + 4) + \frac{9}{3} /$$

$$\boxed{\quad} = \left(-\left(\frac{3}{5} \right) \right)$$

٤) أ/ هل مجموعة الاعداد النسبية مغلقة تحت عملية الطرح؟ أعط أمثلة تؤيد اجابتك.

ب/ هل عملية الطرح على مجموعة الاعداد النسبية تبديلية؟ أعط أمثلة تؤيد اجابتك.

ج/ هل عملية الطرح على مجموعة الاعداد النسبية تجميعية؟ أعط أمثلة تؤيد اجابتك.

(١١-١) : خواص ضرب الأعداد النسبية:

١/ مجموعه الأعداد النسبية مغلقة بالنسبة لعملية الضرب أي أن

$$\text{لكل } \frac{a}{b}, \frac{c}{d} \Rightarrow n \text{ فإن } \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} \Rightarrow n$$

٢/ عملية الضرب للأعداد النسبية تبديلية أي أن

$$\text{إذا كان } \frac{a}{b}, \frac{c}{d} \Rightarrow n \text{ فإن } \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \times \frac{a}{b}$$

٣/ ضرب الأعداد النسبية تجمعي أي أن

$$\begin{aligned} &\text{لكل } \frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f} \Rightarrow n \\ &\text{فإن } \left(\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} \right) \times \frac{e}{f} = \frac{a}{b} \times \left(\frac{c}{d} \times \frac{e}{f} \right) \end{aligned}$$

٤/ العنصر المحايد الضريبي هو ١ أي أن

$$\text{لكل } \frac{a}{b} \Rightarrow n \text{ فإن } \frac{a}{b} \times 1 = 1 \times \frac{a}{b} = \frac{a}{b}$$

٥/ النظير الضريبي :

تعلم أن $\frac{5}{3} \times \frac{3}{5} = 1$ (العنصر المحايد الضريبي)

$1 = \frac{7}{2} \times \frac{2}{7}$ (العنصر المحايد الضريبي)

لكل $\frac{a}{b}$ يوجد $\frac{b}{a}$ ($a \neq 0$) تحقق العلاقة $\frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = 1$

يسمي $\frac{b}{a}$ النظير الضريبي للعدد (المقلوب)

٦ / خاصية التوزيع :

$$\frac{2}{5} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \times \frac{2}{3}, \left(\frac{2}{5} + \frac{1}{4} \right) \times \frac{2}{3}$$

جد ناتج :

قارن بين الناتجين

لكل $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$ فإن

$$\frac{e}{f} \times \frac{a}{b} + \frac{c}{d} \times \frac{a}{b} = \left(\frac{e}{f} + \frac{c}{d} \right) \times \frac{a}{b}$$

مثال: استخدم خاصية توزيع الضرب على الجمع لإيجاد:

$$\frac{18}{10} \times \frac{2}{9} + \frac{15}{4} \times \frac{2}{9} = \left(\frac{18}{10} + \frac{15}{4} \right) \frac{2}{9} /$$

$$\frac{2}{5} \times 1 + \frac{5}{2} \times \frac{1}{3} =$$

$$\frac{6 \times 2}{6 \times 5} + \frac{5 \times 5}{5 \times 6} = \frac{2}{5} + \frac{5}{6} =$$

$$\frac{37}{30} = \frac{12}{30} + \frac{25}{30} =$$

$$B / 4 + \frac{1}{3} \times 6 = 4 \frac{1}{3} \times 6$$

$$4 \times 6 + \frac{1}{3} \times 6 =$$

$$26 = 24 + 2 =$$

تمرين (١١ - ١)

(١) اذكر الخصيـة المتضمنـة في كل من العمليـات الآتـية:

$$1 = \left(\frac{9}{2} - \right) \times \left(\frac{2}{9} \right) - / \quad \text{أ}$$

$$\left(2 \frac{1}{2} \times \frac{5}{9} \right) \times \frac{3}{4} = 2 \frac{1}{2} \times \left(\frac{5}{9} \times \frac{3}{4} \right) / \quad \text{ب}$$

$$6 \times \frac{2}{5} + 7 \times \frac{2}{7} = \left(6 + \frac{2}{7} \right) \frac{2}{5} / \quad \text{ج}$$

(٢) املأ الفراغ بالعدد المناسب.

$$2 \times \boxed{} + 7 \times \boxed{} = \left(2 + 7 \right) \frac{4}{5} / \quad \text{أ}$$

$$\boxed{} \times 6 - + \boxed{} \times 6 - = \left(\frac{3}{11} + \frac{1}{4} \right) 6 - / \quad \text{ب}$$

(٣) جد قيم ما يأتي باستعمال خاصيـة توزـيع الضـرب عـلـى الـجـمـع.

$$(6 + \frac{1}{3}) \times \frac{1}{4} - / \quad \text{ب} \quad \left(\frac{2}{3} + \frac{4}{5} \right) \frac{1}{3} / \quad \text{أ}$$

(١٢ - ١) : مسائل متنوعة:

مثال (١)

اجر العمليات الآتية:

$$\text{أ} / \frac{1}{3} \times \left(\frac{3}{5} - 6 \right) / \text{ب}$$

$$\frac{1}{3} \times \frac{3}{5} - 6 / \text{أ}$$

$$\text{ج} / \left(\frac{3}{20} - \frac{6}{5} \right) \frac{2}{3} + \frac{3}{4} / \text{د} / \frac{3}{20} - \frac{6}{5} \times \frac{2}{3} + \frac{3}{4}$$

الحل:

$$4 = 2 - 6 = \underbrace{\frac{1}{3} \times \frac{3}{5}}_{\text{أ}} - 6 / \text{أ} \quad (\text{الضرب})$$

$$\text{ب} / \frac{1}{3} \times \left(\frac{3}{5} - 6 \right) / (\text{أبدأ بإجراء عملية القوس})$$

$$\frac{1}{3} \times \frac{27}{5} = \frac{1}{3} \times \frac{3-30}{5} = \frac{1}{3} \times \left(\frac{3}{5} - \frac{30}{5} \right)$$

$$18 = 2 \times 9 =$$

$$\text{ج} / \frac{3}{20} - \frac{6}{5} \times \frac{2}{3} + \frac{3}{4} / \underbrace{\frac{3}{20} - \frac{4}{5} + \frac{3}{4}}_{\frac{3}{20} - \frac{12}{10} + \frac{3}{4}}$$

$$\frac{3}{20} - \frac{4 \times 4}{4 \times 5} + \frac{5 \times 3}{5 \times 4} =$$

$$\frac{7}{5} = \frac{28}{20} = \frac{3-16+15}{20} = \frac{3}{20} - \frac{16}{20} + \frac{15}{20} =$$

$$\text{د} / \left(\frac{3}{20} - \frac{24}{20} \right) \frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \underbrace{\left(\frac{3}{20} - \frac{6}{5} \right)}_{\frac{21}{20}} \frac{2}{3} + \frac{3}{4}$$

$$\frac{21}{20} \times \frac{2}{3} + \frac{3}{4} =$$

$$\frac{29}{20} = \frac{14}{20} + \frac{15}{20} = \frac{7}{10} + \frac{3}{4} =$$

مثال (٢) :

$$\frac{3 \frac{1}{2}}{2 \frac{1}{4} + 1 \frac{1}{2}}$$

جد قيمة :

الحل:

$$\frac{\frac{7}{2}}{\frac{15}{4}} = \frac{\frac{7}{2}}{\frac{9}{4} + \frac{6}{4}} = \frac{\frac{7}{2}}{\frac{9}{4} + \frac{3}{2}} = \frac{\frac{7}{2}}{2 \frac{1}{4} + 1 \frac{1}{2}}$$

$$\frac{14}{15} = \frac{4}{15} \times \frac{7}{2} =$$

حل آخر

$$\frac{\xi \times \frac{7}{2}}{\xi \times \frac{9}{4} + \xi \times \frac{3}{2}} = \frac{\xi \times \frac{7}{2}}{\xi \times (\frac{9}{4} + \frac{3}{2})} = \frac{\frac{7}{2}}{2 \frac{1}{4} + 1 \frac{1}{2}}$$

$$\frac{14}{15} = \frac{14}{9+6} =$$

تمرين عام

(١) اكتب كلاً من الأعداد الآتية على الصورة $\frac{a}{b}$ ، $a \neq 0$ ، $b \neq 0$

$$أ / ١,٧ \quad ب / ٢ \quad ج / ٠,٦٥ \quad د / ٤,٠٦$$

(٢) اكتب مقلوبات الأعداد الآتية:

$$\frac{٥}{٩} / أ \quad ب / \left(\frac{٧}{١٣} \right) - \quad ج / \frac{١}{١٢}$$

(٣) ضع علامة < أو > لتصبح العبارة صحيحة:

$$\frac{٨\frac{١}{٣}}{١٠\frac{٣}{٤}} - \dots \dots \frac{١}{٤} - \frac{٢}{٣} - ب / \frac{٥}{١٢} - \dots \dots \frac{٥}{١١} / أ$$

(٤) رتب الأعداد النسبية الآتية ترتيباً تنازلياً

$$- ٣ ، ١\frac{٣}{١٦} ، ٢\frac{١}{٢} ، ١,٢٥$$

(٥) جد ناتج ما يلي:

$$أ / \left(٢\frac{١}{٣} + ١\frac{٥}{٦} \right) \div ١\frac{١}{٤}$$

$$ب / \frac{٧}{٢} - ١\frac{٥}{٧} \times ٣\frac{١}{٢} + \frac{٤}{٥} \times ١\frac{٧}{٨}$$

$$ج / ١\frac{١}{٤} \div ٣ - \frac{٥}{١١} \times ٢\frac{١}{٥} + ١\frac{٣}{٤}$$

$$د / ١\frac{١}{٣} \times ٢\frac{٣}{٤} + ١\frac{٤}{٥}$$

$$\frac{\frac{٢}{\left(١ \frac{١}{٢} \right)}}{١\frac{١}{٤} - ٢\frac{١}{٥}} \quad و / \quad \frac{\frac{٧}{٨} \times ٢\frac{١}{٢}}{\frac{٣}{٤} - ٦} \quad ه /$$

(٦) ضع العدد النسبي المناسب :

$$1 = \dots \times \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{4} \right) / \text{أ}$$

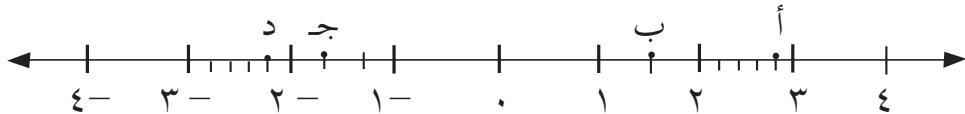
$$1 = \dots \times \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{4} \right) / \text{ب}$$

(٧) اذكر الخواصية في كل مما يأتي:

$$\text{أ} / 5(\text{س} + 2\text{ص}) = 5\text{س} + 10\text{ص}$$

$$\text{ب} / (7 \times \text{ع}) \times 4\text{هـ} = 7 \times (\text{ع} \times 4\text{هـ})$$

(٨) على خط الأعداد وضح العدد النسبي الذي تمثله النقاط أ ، ب ، ج ، د



(٩) ارسم الخط العددي في كراستك ثم وضح النقاط التي تمثل الأعداد النسبية الآتية:

$$\text{أ} / \frac{3}{4} \quad \text{ب} / -\left(\frac{2}{3}\right) \quad \text{ج} / \frac{2}{5}$$

(١٠) عدد ساعات العمل اليومي لموظف $\frac{1}{4}$ ساعة فإذا كان يقضي $\frac{3}{4}$ ساعة في العمل الميداني مع الجمهور وبباقي الزمن يعمل على مكتبه ؟

أ / ما نسبة ما يقضيه من عمله اليومي مع الجمهور ؟.

ب / ما نسبة ما يقضيه من عمله اليومي على مكتبه ؟.

(١١) يصرف رجل $\frac{2}{5}$ من مصروفه الأسبوعي على الأكل ، $\frac{2}{7}$ على المواصلات

إذا كان ما يصرفه على الأكل ٢٠٠٠ جنية جد:

أ / ما يصرفه على المواصلات ؟

ب / كم مصروفه الأسبوعي ؟

الوحدة الثانية

الجمل الرياضية والمعادلات

$$\begin{aligned} 5s + 2 &= 6, \quad s \Rightarrow 4 \\ s - 3 &= 5, \quad s \Rightarrow 8 \end{aligned}$$

(١-٢) الجمل الرياضية :

من خلال دراستك السابقة قد تدرست كثيراً على جمل رياضية تتطلب تحديد
ووضع مقدار مناسب لحل مسألة مثل :

$$12 = \boxed{\quad} - 15 \quad 8 = 3 + \boxed{\quad}$$
$$9 > \boxed{\quad} + 2 \quad 18 = \boxed{\quad} \times 6$$

و كنت تبحث دائماً عن عدد تضمه داخل $\boxed{\quad}$ لتحصل على عبارة صحيحة .

فمثلاً الجملة الأولى تعني : (عدد) $= 3 + 8$

والجواب هو 5 حيث $8 = 3 + 5$

والجملة الثانية تعني : $12 = 15 - (\text{عدد})$

والجواب هو 3 حيث $15 - 3 = 12$ وهكذا .

كل من الجمل الرياضية أعلاه وأمثالها تسمى **جملة مفتوحة** وعادةً نرمز للعدد

المجهول بأحدى الرموز مثل س ، ص ، ع ، ل ، ... الخ ويسمى **المتغير** .

إذن تأخذ الجملة المفتوحة السابقة الصور :

$$s + 3 = 12 - 5 \quad 8 = 3 + s$$

$$9 > l + 2 \quad 18 = 6 \times u$$

خذ مثلاً الجملة المفتوحة $s + 3 = 8$

لقد أشرنا إلى أنّ العدد الذي يجعل من هذه الجملة عبارة صحيحة هو 5 فلو أنّ

المتغير س أخذ القيمة 5 لكان $5 + 3 = 8$ عبارة صحيحة .

ولكن عدداً آخر مثل 7 لا يجعل هذه العبارة صحيحة و ذلك لأن إعطاء

س القيمة 7 يجعلنا نحصل على $7 + 3 = 10 \neq 8$ وهذه عبارة غير صحيحة .

لذلك نسمى العدد 5 **حلّاً للجملة المفتوحة** $s + 3 = 8$

العدد الذي يجعل من الجملة المفتوحة عبارة صحيحة
يسمى **حلّ الجملة المفتوحة** .

تمرين (١ - ٢)

في كل جملة من الجمل المفتوحة الآتية إذا أخذ المتغير القيمة المفروضة ، بيّن ما إذا كانت الجمل الناتجة صواباً أم خطأً:

$$1) \quad س = ٢ , \quad ٨ = ٦ + س$$

$$2) \quad س = ١٢ , \quad ٩ = ٤ - س$$

$$3) \quad س = ٢ - ٣ , \quad ٠ = ٢ + س$$

$$4) \quad س = ١٥ , \quad ١ = ٥ \times ص$$

$$5) \quad س = ١٨ , \quad ٤ = \frac{س}{٣}$$

$$6) \quad س = ٦ , \quad ٧ < ١ + س$$

$$7) \quad س = ٤ , \quad ١٠ > ٢ \times ص$$

$$8) \quad س = ١٠ , \quad س \text{ عدد زوجي}$$

$$9) \quad س = ١٦٢ , \quad س \text{ يقبل القسمة على } ٤$$

$$10) \quad ص = ٢ , \quad ١ = \frac{(١+٣) س}{٧}$$

(٢-٢) مجموعة التعويض ومجموعة الحل :

مثال (١): جد قيمة المجهول ص إذا كان :

$$ص + ٤ = ٩ \quad \text{حيث } ص \in \{٧, ٦, ٥, ٤\}$$

الحل: ص + ٤ = ٩ بالتعويض

$$\text{عند } ص = ٤ \quad ٤ + ٤ = ٩ \quad \text{وهي جملة غير صحيحة}$$

$$\text{عند } ص = ٥ \quad ٤ + ٥ = ٩ \quad \text{وهي جملة صحيحة}$$

$$\text{عند } ص = ٦ \quad ٤ + ٦ = ٩ \quad \text{وهي جملة غير صحيحة}$$

$$\text{عند } ص = ٧ \quad ٤ + ٧ = ٩ \quad \text{وهي جملة غير صحيحة}$$

∴ ص = ٥ هي القيمة الوحيدة التي تجعل الجملة المفتوحة ص + ٤ = ٩ جملة صحيحة

وتسمى المجموعة {٥} **مجموعة الحل** ، وتسمى المجموعة {٤، ٥، ٦، ٧} **مجموعة التعويض** .

لاحظ أن مجموعة الحل هي مجموعة جزئية من مجموعة التعويض .

تعريف:

مجموعة الحل هي المجموعة التي تحقق عناصرها الجملة المفتوحة لتصبح صواباً .

مثال (٢): جد مجموعة الحل للجملة المفتوحة

$$س - ٦ < ١٢ ، \text{ إذا كان بمجموعة التعويض } \{١١، ١٩، ١٥، ١٣، ١١، ٢١\}$$

الحل: س - ٦ < ١٢ بالتعويض

$$\text{عند } س = ١١ \quad ١١ - ٦ < ١٢ \quad ٥ < ١٢ \quad \text{وهي جملة غير صحيحة}$$

$$\text{عند } س = ١٣ \quad ١٣ - ٦ < ١٢ \quad ٧ < ١٢ \quad \text{وهي جملة غير صحيحة}$$

$$\text{عند } س = ١٥ \quad ١٥ - ٦ < ١٢ \quad ٩ < ١٢ \quad \text{وهي جملة غير صحيحة}$$

$$\text{عند } س = ١٩ \quad ١٩ - ٦ < ١٢ \quad ١٣ < ١٢ \quad \text{وهي جملة صحيحة}$$

$$\text{عند } س = ٢١ \quad ٢١ - ٦ < ١٢ \quad ١٥ < ١٢ \quad \text{وهي جملة صحيحة}$$

∴ مجموعة الحل هي {١٩، ٢١}

مثال (٣) : عِيْن مجموعـة الـحل لـلـجملـة المـفتوـحة التـالـية مـن مـجمـوعـة التـعـويـضـ المـرـفـقـة :

$$\{ 5, 4, 3, 0 \} \quad , \quad 3L = 15$$

الـحـل : $3L = 15$

بـالـتـعـويـضـ :

$$0 \times 3 = 15 \quad \text{وـهـي جـمـلـة غـير صـحـيـحةـ} \quad \text{عـنـدـلـ} = 0$$

$$3 \times 3 = 15 \quad \text{وـهـي جـمـلـة غـير صـحـيـحةـ} \quad \text{عـنـدـلـ} = 3$$

$$4 \times 3 = 15 \quad \text{وـهـي جـمـلـة غـير صـحـيـحةـ} \quad \text{عـنـدـلـ} = 4$$

$$5 \times 3 = 15 \quad \text{وـهـي جـمـلـة صـحـيـحةـ} \quad \text{عـنـدـلـ} = 5$$

∴ مجموعـة الـحل هي $\{ 5 \}$

تمرين (٢ - ٢)

عِيْن مجموعـة الـحل فـي كـل مـن المعـادـلات الآـتـية مـن مـجمـوعـة التـعـويـضـ المـرـفـقـة :

$$\{ 7, 6 \} \quad , \quad 8 = 2 + s \quad (1)$$

$$\{ 6, 5, 4 \} \quad , \quad 1 = 3 - s \quad (2)$$

$$\{ 5, 4, 3 \} \quad , \quad 3s = 9 \quad (3)$$

$$\{ 4, 2, 1 \} \quad , \quad 2 = \frac{2 + s}{4} \quad (4)$$

$$\{ 4, 3, 2, 1 \} \quad , \quad s + 2 > 5 \quad (5)$$

$$\{ 10, 9, 8, 7, 6 \} \quad , \quad s - 1 < 6 \quad (6)$$

(٣-٢) المعادلات :

نلاحظ أن بعض الجمل المفتوحة التي تعرّضنا لها سابقاً تتضمن علاقة التساوي (=) مثل $س + ٣ = ٥$ في حين يتضمن بعضها الآخر علاقات أخرى مثل : أصغر من (<) أو أكبر من (>) مثل $س + ٥ < ١١$ ، ص - ٤ < ٣ .
أن الجملة المفتوحة التي تتضمن علاقة التساوي مثل $س + ٣ = ٥$ تسمى **معادلة**

تعريف :

المعادلة هي جملة مفتوحة تتضمن علاقة التساوي

فك كل مما يأتي معادلة :

$$س + ٧ = ١١$$

$$٢ - ص = ١$$

$$٣ س = ٢٧$$

$$٥ = \frac{٧}{ص} + ٤$$

في كل معادلة من هذه المعادلات نلاحظ أنّ :

١) هناك قيمةً للمتغير يجعل من هذه الجملة صحيحة أو غير صحيحة ، وفي هذه الحالة يسمى **المتغير مجهولاً**.

٢) كل معادلة تحتوي على مجهول واحد ، لذلك تسمى المعادلة في هذه الحالة **معادلة مجهول واحد**.

لاحظنا في أمثلة الدرس السابق لإيجاد مجموعة الحل نقوم بتعويض عناصر مجموعة التعويض ونأخذ القيمة أو القيم التي يجعل العبارة صحيحة لمجموعة الحل.
وكما ترى فإن طريقة التعويض طويلة . ولكن بمراجعة خواص علاقة التساوي يمكن التوصل إلى أسلوب أبسط لإيجاد مجموعة الحل.

خواص علاقة التساوي :

١/ نعلم أنّ :

$$2+1 = 3 \quad , \quad 3 = 2+1$$

$$4 \times 2 = 8 \quad , \quad 8 = 4 \times 2$$

أي أنّ : إذا كان $a = b$ فإن $b = a$

$$\begin{aligned} & 8 = 6 + 2 \quad \text{و} \quad 6 + 2 = 8 \\ & \therefore s = 8 \end{aligned}$$

أي أنّ : إذا كان $a = b$ ، $b = c$ فإن $a = c$

$$1 - 4 = 4 = 4 \quad \text{و} \quad 4 = 1 + 4 = 1 - 4$$

أي أنّ : إذا كان $a = b$ فإن $a + c = b + c$
 $a - c = b - c$

$$4 - x \cdot 5 = 4 - x \cdot 5 = 4 \times 5 \quad \text{و} \quad 4 \times 5 = 5$$

أي أنّ : إذا كان $a = b$ فإن $a \times c = b \times c$
 $a \times -c = b \times -c$

$$6/ \text{ما أن } 6 = 6 \quad \text{فإن } \frac{6}{2} = \frac{6}{2} \quad \text{و} \quad \frac{6}{2} = \frac{6}{2}$$

أي أنّ : إذا كان $a = b$ فإن :

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{c} , (c \neq 0)$$

$$\frac{a}{-c} = \frac{b}{-c} , (c \neq 0)$$

مثال (١) : جد مجموعة الحل للمعادلة $s + 2 = 5$ $s \in \mathbb{R}$

الحل : $s + 2 = 5$

بإضافة - ٢ لكل من الطرفين نحصل على :

$$\text{الناظير الجمعي} \quad s + 2 + 5 = 2 - (2)$$

$$\text{المخصصة التجميعية} \quad s + ((2 - 2) + 2) = 3$$

$$\text{العنصر المحايد للجمع} \quad s + 0 = 3$$

$$\therefore \text{مجموعة الحل} = \{ 3 \}$$

وللحذر من صحة الحل :

$$2 + 3 = 5 \text{ عبارة صحيحة .}$$

مثال (٢) : جد مجموعة الحل للمعادلة $s - 3 = 11 - 2$ $s \in \mathbb{R}$

الحل : بإضافة ٣ لكل من الطرفين

$$s - 3 + 3 = 11 - 2$$

$$\text{لماذا ؟} \quad s + (3 - 3) = 8 - 2$$

$$\text{لماذا ؟} \quad s - 8 = 2$$

نقسم كل من الطرفين على ٢

$$\frac{s - 8}{2} = \frac{2}{2}$$

$$\text{لماذا ؟} \quad s - 4 = 1$$

$$\therefore s = -4$$

$$\text{مجموعة الحل} = \{ -4 \}$$

وللحذر من صحة الحل

$$11 - 3 - 2 \times (-4) = 2$$

مثال (٣) : جد مجموعة حل المعادلة : $5s + 2 = 6$ $s \in \mathbb{R}$

الحل : $5s + 2 = 6$

$$\text{بطرح ٢ من الطرفين} \quad 5s + 2 - 2 = 6 - 2$$

$$5s = 4$$

بقسمة الطرفين على ٥

ولكن $\frac{4}{5} \notin \mathbb{R}$ \therefore مجموعة الحل = \emptyset

تمرين (٢ - ٣)

جد مجموعة حل المعادلات الآتية

$$1) \quad س + ٤ = ١٥ \quad ، \quad س \geq ط$$

$$2) \quad س - ٣ = ٥ \quad ، \quad س \geq ص$$

$$3) \quad ٣ - ص = ٧ \quad ، \quad ص \geq ط$$

$$4) \quad ٧ + س = ١٧ \quad ، \quad س \geq ط$$

$$5) \quad م + ١٥ = ٢٥ \quad ، \quad م \geq ط$$

$$6) \quad ن = ٤٠ \quad ، \quad ن \geq ص$$

$$7) \quad ل = \frac{٥}{٤} \quad ، \quad ل \geq ط$$

$$8) \quad س + ٤ = ١٣ \quad ، \quad س \geq ط$$

(٤) المعادلات التي يظهر فيها المتغير في كل من الطرفين :

إنّ معادلة مثل $3s = 2s + 5$ تختلف من المعادلات السابقة ، حيث أنّ المتغير يظهر في كل من طرفي المعادلة بالطريقة نفسها ، فإنّ التحويل عن طريق الجمع والطرح يسمحان لك بالجمع والطرح لأي حد يشمل على المتغير من كل من الطرفين دون تغيير مجموعة الحل .

مثال (١) : جد مجموعة حل المعادلة :

$$2s = s + 5 , \quad s \in \mathbb{R}$$

الحل:

$$2s - s = s + 5 - s$$

$$s = 5$$

$$\therefore \text{مجموعة الحل} = \{5\}$$

للحقيق من صحة الحل :

$$\text{الطرف الأيمن} = 10 = 5 \times 2$$

$$\text{الطرف الأيسر} = 5 + 5$$

$$\therefore \text{الطرف الأيمن} = \text{الطرف الأيسر}$$

مثال (٢) : حل المعادلة $5s - 2 = 3s + 4$ وتحقق من صحة الحل

$$5s - 2 - 3s = 3s + 4 - 3s$$

الحل:

$$5s - 2 = 3s + 4$$

$$2s - 2 = 4$$

$$2s - 2 + 2 = 4 + 2$$

$$2s = 6$$

$$s = \frac{6}{2}$$

$$\therefore s = 3$$

للحقيق :

$$\text{الطرف الأيمن} : 5 \times 5 - 2 = 25 - 2 = 23$$

$$\text{الطرف الأيسر} : 3 \times 3 + 4 = 9 + 4 = 13$$

$$\therefore \text{الطرف الأيمن} = \text{الطرف الأيسر}$$

مثال (٣) : جد مجموعة حل المعادلة $\frac{s+1}{4} = \frac{s}{3}$ ، $s \geq 0$

الحل : $\frac{s+1}{4} = \frac{s}{3}$

بضرب الطرفين في ١٢ (المضاعف المشترك الأصغر لـ ٤ ، ٣) للتخلص من العدددين ٤ ، ٣ الموجودين في مقامي الطرفين

$$\frac{1+s}{4} \times 12 = \frac{s}{3} \times 12$$

$$4s = 3(s+1)$$

$$4s = 3s + 3$$

$$4s - 3s = 3$$

\therefore مجموعة الحل = { ٣ }

تمرين (٤ - ٢)

جد مجموعة حل المعادلات الآتية

١. $3s = s+1$
٢. $7s = 2s - 36$
٣. $6s - 18 = 3s$
٤. $4s + s = 16$
٥. $4s - 7s = 15 - 9s$
٦. $5(3s - 2) = 4(8s + 3)$
٧. $2 = \frac{1+s}{4}$
٨. $\frac{s-5}{2} = \frac{s}{4}$
٩. $3(s-4) = \frac{s-1}{4}$

(٢ - ٥) تطبيقات على حل المسائل اللفظية :

المسائل اللفظية :

لما كان أحد أهداف دراسة علم الجبر هو مساعدتنا على حل بعض المشكلات أو المسائل الرياضية فإننا نستعمل الجبر في حل كثير من المسائل الرياضية التي يصعب حلها بالطرق الحسابية البسيطة . فتتضمن هذه المسائل اللفظية بعض المقادير المجهولة التي يراد إيجاد قيمتها على حسب المعطيات في المسألة المعينة ولذلك نحاول تكوين معادلات وحلها .

التعبير عن المسائل اللفظية :

مثال (١) : عددان أحدهما ضعف الآخر ، عبر عن ذلك جبرياً
الحل : نفرض أن أحد العددين هو : س
∴ العدد الآخر هو ٢ س

مثال (٢) : عمر أكبر يزيد على عمر كلثوم بمقدار ٨ سنوات عبر عن عمر كل منهما جبرياً .

الحل : نفرض أن عمر أكبر = س
∴ عمر كلثوم = س - ٨

مثال (٣) : عددان طبيعيان متاليان ، عبر عنهما جبرياً
الحل : نفرض أن العدد الأصغر = ص

∴ العدد الأكبر = ص + ١

مثال (٤) : مستطيل طوله يزيد عن ثلاثة أمثال عرضه بمقدار ٥ عبر جبرياً عن بعديه .

الحل : نفرض أن عرض المستطيل = س
ثلاثة أمثال عرضه = ٣ س
∴ طول المستطيل = ٣ س + ٥

مثال (٥) : كسر بسطه يقل عن مقامه بمقدار ٢ عبر عن هذا الكسر جبرياً .

الحل : نفرض أن مقام الكسر = س
بسط الكسر = س - ٢

$$\therefore \text{الكسر} = \frac{s - 2}{s}$$

تمرين (٢ - ٥)

عبر جبرياً عن المسائل اللغوية التالية :

١. عدداً فردياً متتالياً .
٢. عمر يعقوب يزيد على ضعف عمر سجود بقدر ٩ سنوات .
٣. مستطيل عرضه ينقص بقدر ٧ سم عن طوله .
٤. ثلاثة أعداد صحيحة متتالية .
٥. كسر يقل مقامه عن بسطه بقدر ٣ .
٦. العدد ٩ مضاعف إليه خمسة أمثال عدد ما .

(٦-٢) حل المسائل اللغوية :

حل المسائل اللغوية تتبع الخطوات التالية :

١. عبر عن الشيء المطلوب بإيجاده في المسائل اللغوية بصورة رمزية ، أي نفترض أن هذا الشيء س أو ص أو ع الخ .
٢. كون من المسألة معادلة رياضية .
٣. حل المعادلة لإيجاد القيمة العددية للرمز الذي فرضته .

مثال (١) : إذا أضيف العدد ٥ إلى ٧ أمثال عدد ما ، كان الناتج ٢٦ فما العدد ؟

الحل : نفرض أن العدد = س

$$\therefore 7 \text{ أمثاله} = 7 \text{ س}$$

$$\text{المعادلة هي : } 26 = 7 + 5 \text{ س}$$

$$26 - 7 = 5 \text{ س} - 7$$

$$21 = 5 \text{ س}$$

$$\frac{21}{5} = \text{س}$$

$$\therefore \text{س} = 3$$

$$\text{للتتحقق } 5 + 7 + 3 \times 7 = 21 + 5 = 26$$

\therefore العدد المطلوب هو ٣

مثال (٢) : عدادان صحيحيان متتاليان مجموعهما ١٧ ، ما العددان؟

الحل : نفرض أن العدد الأول = س

$$\therefore \text{العدد الثاني} = \text{س} + 1$$

$$\therefore \text{س} + (\text{س} + 1) = 17$$

$$17 = 1 + 2s$$

$$16 = 2s$$

$$8 = s$$

$\therefore \text{العدد الأول} = \text{س} = 8$ ، $\text{العدد الثاني} = \text{س} + 1 = 8 + 1 = 9$

مثال (٣) : عدد يزيد على نظيره الجمعي بمقدار ٤ جد هذا العدد.

الحل : نفرض أن العدد = س

$$\therefore \text{النظير الجمعي} = -s$$

$$s = -s + 4$$

$$s + s = 4$$

$$2s = 4$$

$$s = 2$$

$\therefore \text{العدد هو} 2$

نلاحظ أن إضافة النظير الجمعي إلى الطرفين يعني إختفاء العدد من أحد الطرفين وظهوره بالطرف الآخر بتغيير إشارته ، لذلك يطلق على هذه العملية تحويل المد إلى الطرف الآخر مع تغيير إشارته .

مثال (٤) : محيط غرفة مستطيلة الشكل ٢٨ مترًا فإذا كان طولها يزيد عن عرضها

٤ أمتار فما هو عرض الغرفة وطولها؟ .

الحل : أفرض أن عرض الغرفة = س مترًا

$$\text{طول الغرفة} = (s + 4) \text{ مترًا}$$

$\text{المحيط} = \text{الطولين} + \text{العرضين}$

$$\text{محيط الغرفة} = 2(s + 4) + 2s = 2s + 8 + 2s = 4s + 8$$

$$\text{وبما أن محيط الغرفة} = 28 \text{ مترًا} \quad \therefore 4s + 8 = 28$$

$$\therefore 4s = 20, \quad \therefore s = 5$$

$$\therefore \text{طول الغرفة} = s + 4 = 5 + 4 = 9 \text{ أمتار}$$

$$\text{وعرض الغرفة} = s = 5 \text{ أمتار}$$

$$\text{وللحقيق: } 4 \times 5 = 20 = 8 + 2s = 8 + 5 = 13$$

مثال (٥) : عند ضحى ضعف ما عند نبيل من الجنيهات ، وعند أحمد ٨ جنيهات أكثر مما عند ضحى . فإذا كان مجموع ما عندهم من الجنيهات ٤٨ جنيهاً كم جنيهاً عند كل واحد منهم ؟

الحل : ما عند نبيل = س جنيهاً

ما عند ضحى = ٢ س جنيهاً

ما عند أحمد = (٢ س + ٨) جنيهاً

• مجموع ما عندهم = (س + ٢ س + ٨ س + ٨) جنيهاً

س + ٨ س =

ولكن ما عندهم ٤٨ جنيهاً

المعادلة هي : ٤٨ = س + ٨ س

$$5 س = 40 , \quad \therefore س = 8$$

ما عند نبيل = س جنيهاً = ٨ جنيهات

ما عند ضحى = ٢ س = ٨ × ٢ = ١٦ جنيهاً

ما عند أحمد = ٢ س + ٨ س = ٨ + ٨ × ٢ = ٢٤ جنيهاً

للتتحقق : ١٦ + ٨ = ٢٤ + ٤ = ٤٨ جنيهاً

تمرين (٦-٣)

١. إذا أضيف العدد ١٥ إلى ضعف عدد ما ، كان الناتج ٢٧ جد العدد .
٢. عبر بالمعادلات عن الشكل التالي ثم جد قيمة س :

٣. جد العدد الذي إذا طرح ١٠ من خمسة أمثاله كان الناتج ١٥ .

٤. جد الأعداد الطبيعية الثلاثة المتتالية التي مجموعها ٢٤ .

٥. عند عثمان ٤ أمثال ما عند أبرار ، فإذا كان مجموع ما عندهم ١٠٥ جنيه فكم جنيهًا عند كل منهم ؟

٦. يزيد عمر يوسف ٧ سنوات عن عمر حسن فإذا كان مجموع عمريهما ٢٩ سنة فما عمر كل منهم .

٧. عدد مكون من رقمين ، رقم آحاده ضعف رقم عشراته ومجموع رقمهما يساوي ٦ ، جد هذا العدد .

٨. أربعة أمثال عدد مضاف إليه ٧ يساوي النظير الجمعي لهذا العدد مضافاً إليه ٣٢ فما هو العدد ؟

تمرين عام

١/ جد مجموعة حل المعادلات التالية (مجموعة التعويض ص) :

$$(أ) 2s - 3 = 5$$

$$(ب) 2s + 7 = 24$$

$$(ج) s - \frac{1}{3} = \frac{2}{7}$$

$$(د) 17s - 6 = 12s + 9$$

$$(هـ) \frac{s}{2} + \frac{s}{3} = 5$$

٢/ جد مجموعة الحل للمعادلات التالية (مجموعة التعويض نـ)

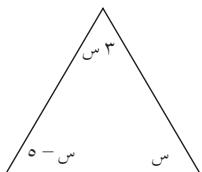
$$(أ) 2 = \frac{1}{3}s - \frac{2}{3} + \frac{1}{3}s$$

$$(ب) 2 = \frac{s}{4} + \frac{2(5-s)}{4}$$

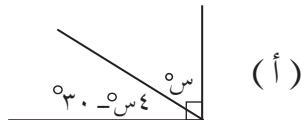
$$(ج) \frac{3}{5}s = \frac{1}{3}s + 3s$$

$$(د) 3 = \frac{2}{(1+2s)}$$

٣/ عَبَرْ بالمعادلات عن الاشكال التالية ثم جد قيمة س :



(ب)



(أ)

٤/ ما العدد الذي إذا طرح منه ٩ وقسم ضعف الباقي على ٣ كان الناتج ١٢ ؟

٥/ عددان صحيحان متتاليان ، إذا كان ٤ أمثال أصغرهما يزيد عن ٣ أمثال

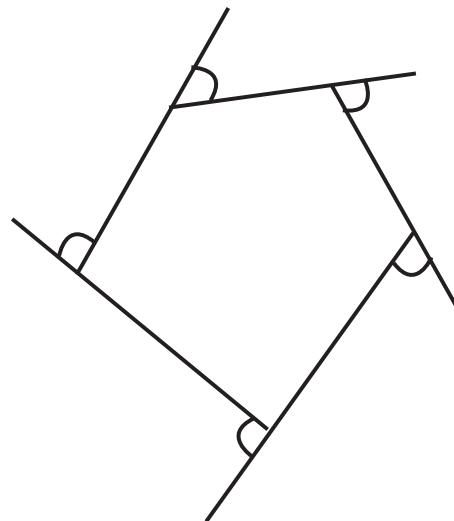
أكبرهما بقدر ١٢ فما هما العددان ؟

٦/ ثلاثة أعداد صحيحة متتالية إذا كان ثلاثة أمثال الحد الأوسط يزيد عن مجموع العدددين الآخرين بقدر ٩ ، فما هذه الأعداد ؟

٧/ مستطيل طوله ضعف عرضه ، وضلع مربع يزيد ٢ سم عن عرض المستطيل ، فإذا كان محيط المربع يساوي محيط المستطيل أو جد ضلع المربع وبعدي المستطيل .

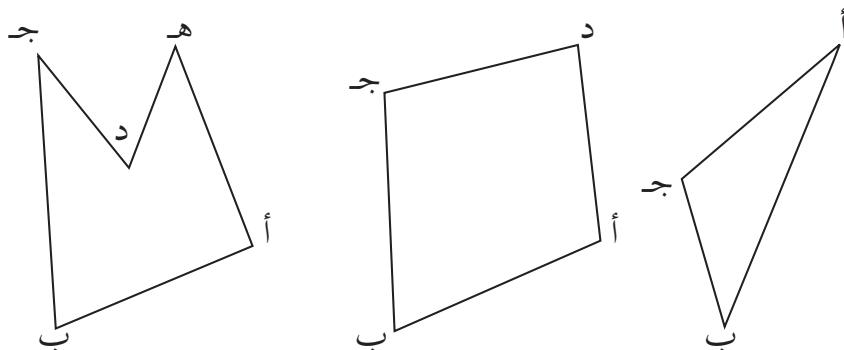
الوحدة الثالثة

المضلعات

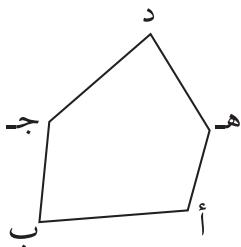


تمرين مراجعة

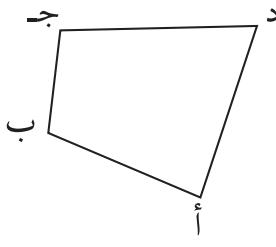
- ١) اذكر أنواع المثلثات التي تعرفها.
- ٢) للمثلث ثلاثة وثلاثة
- ٣) مجموع درجات الزوايا الداخلية لأي مثلث تساوي
- ٤) اذكر حالات تطابق المثلثات.
- ٥) كم ضلعاً في المربع؟ وكذلك في المستطيل؟
- ٦) كم زاوية داخلية في المربع؟ وكذلك في المستطيل؟
- ٧) كم تساوي مجموع درجات الزوايا الداخلية للمربع؟ وكذلك في المستطيل؟
- ٨) اذكر أنواع الأشكال الرباعية وخصائصها.
- ٩) اذكر أنواع الزوايا. أ/.....ب/.....ج/.....د/.....ه/.....
- ١٠) ما هو قياس الزاوية القائمة؟
- ١١) قس الزوايا الداخلية للأشكال الآتية ثم جد مجموعها ؟



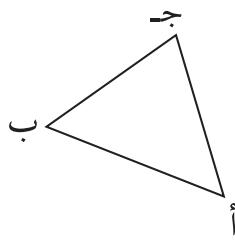
(١-٣) المضلع:



(٣)



(٢)



(١)

ادرس كلاً من الأشكال الهندسية المستوية أعلاه :

(١) الشكل (١) :

(أ) كم ضلعاً يحدده ؟

(ب) كم زاوية فيه ؟

(ج) ما اسم هذا الشكل ؟

(٢) الشكل (٢) :

(أ) كم ضلعاً فيه ؟

(ب) كم عدد زواياه ؟

(ج) ما اسمه ؟

(٣) الشكل (٣) :

(أ) كم عدد اضلاعه ؟

(ب) هل عدد زواياه الداخلية تساوي عدد اضلاعه ؟

(ج) ماذا نسمى هذا الشكل ؟

تلاحظ :

١ / أن الشكل يسمى بـ عدد اضلاعه.

٢ / عدد اضلاع الشكل يساوي عدد زواياه الداخلية.

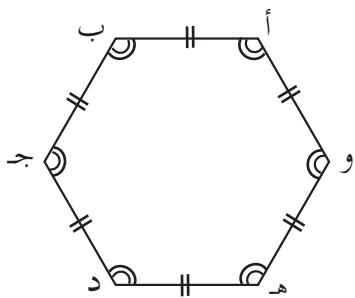
مثل هذه الأشكال الهندسية المستوية السابقة تسمى **مضلعات** وأصغرها المثلث.

تعريف :

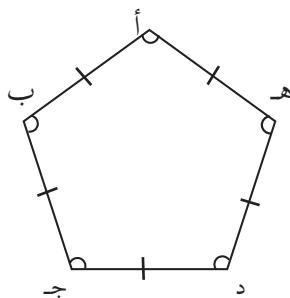
المضلع : هو شكل هندسي مستو مغلق يتكون من ثلاثة اضلاع فأكثر.
ويشتق اسمه من عدد أضلاعه.

المضلع المنتظم : هو مضلع اضلاعه متساوية وزوايا الداخلية متساوية
مثل المثلث المتساوي الاضلاع والمربع.

مثال (١) : انظر الاشكال التالية :



شكل (٢)

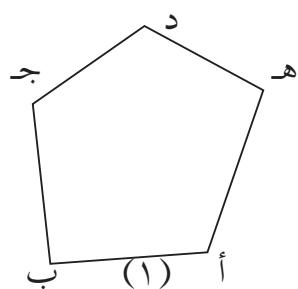
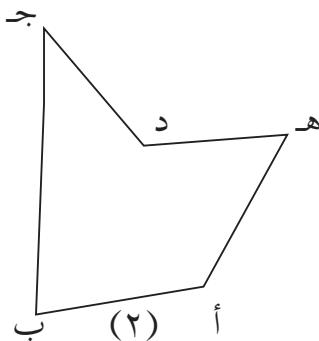


الشكل (١)

١. اكتب أسماء الاضلاع المتساوية في كل شكل كما هو موضح في الرسم.
 ٢. هل كل الاضلاع وكل الزوايا الداخلية متساوية في كل شكل؟.
- إذن الشكل (١) يسمى خماسي منتظم و الشكل (٢) يسمى سداسي منتظم

المضلع المحدب والمضلع المقعر:

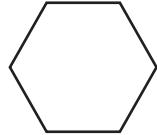
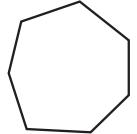
انظر إلى الشكلين التاليين:



الشكل الأول (١) يوضح مضلعاً كل زواياه الداخلية اقل من 180° ويسمى **مضلعاً محدباً**.
أما الشكل (٢) فهو يوضح أن الزاوية $\angle H$ منعكسة أو أكبر من 180° فهو يسمى **مضلعاً مقعرأ**.

تمرين (١ - ٣)

(أ) أملأ الفراغات التي في الجدول أدناه:

الشكل	عدد أضلاعه	عدد زواياه الداخلية	اسمها
	٥	٥	خمساوي
			
			
			ثماني

(ب) اذكر المضلعات غير المنتظمة مما يأتي :

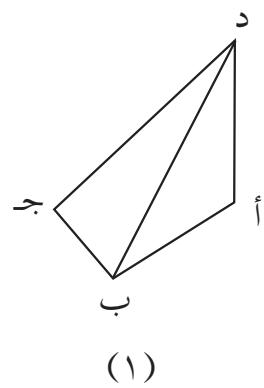
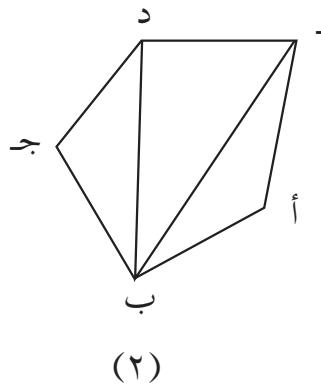
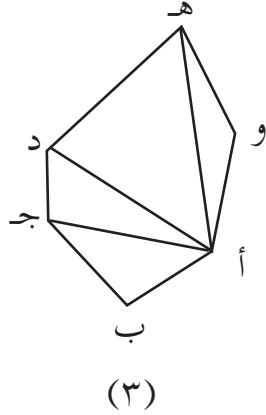
- ١ . المثلث متساوي الأضلاع .
- ٢ . المثلث متساوي الساقين .
- ٣ . المعين .

٤ . متوازي الأضلاع .

(ج) ارسم باستخدام المسطرة فقط مضلعاً خماسياً .

٢-٣) مجموع الزوايا الداخلية للمضلع:

الأشكال الهندسية أدناه توضح مضلعات قسمت الأشكال الممكنة من رأس واحد.



في الشكل (١) قسم رباعي إلى مثلثين.

في الشكل (٢) قسم خماسي إلى من المثلثات

في الشكل (٣) قسم إلى من المثلثات.

نلاحظ من الأشكال السابقة أن عدد المثلثات أقل من عدد أضلاع المضلع باثنين .

ونعلم أن مجموع الزوايا الداخلية لأي مثلث = 180° قائمة

أكمل الجدول أدناه :

المضلع	عدد الأضلاع	عدد المثلثات	مجموع الزوايا الداخلية القوائم
المثلث	٣	١ = ٢ - ٣	$2 = 2 \times 1$
الرباعي	٤	٢ = ٢ - ٤	$4 = 2 \times 2$
الخماسي	٥	٣ = ٢ - ٥	$6 = 2 \times 3$
السداسي			
السباعي			
الثماني			

من الجدول السابق يمكننا الحصول على قانون عام لإيجاد مجموع الزوايا الداخلية لل مضلع :

قاعدة :

إذا كان عدد أضلاع المضلعل ضلعاً ، فيكون به $(n - 2)$ مثلثاً ، ويكون مجموع الزوايا الداخلية للمضلعل مساوياً لعدد المثلثات مضروباً في مجموع زوايا المثلث الواحد الداخلية إذن :

$$\text{مجموع الزوايا الداخلية للمضلعل} = (n - 2) \times 2 \text{ زاوية قائمة} \\ = (n - 4) \text{ زاوية قائمة}$$

مثال (١) :

$$(1) \text{ المثلث عدد اضلاعه } 3, \text{ إذن } n = 3$$

$$\text{مجموع زواياه الداخلية له هي} (3 - 2) \times 2 \text{ زاوية قائمة} \\ = 2 \text{ زاوية قائمة} = 180^\circ$$

$$(2) \text{ المربع عدد اضلاعه } 4, \text{ إذن } n = 4$$

$$\text{مجموع الزوايا الداخلية له هي} (4 - 2) \times 2 \text{ قائمة} \\ = 4 \text{ قوائم} = 4 \times 90^\circ = 360^\circ$$

$$(3) \text{ ما مجموع الزوايا الداخلية للخمساني؟}$$

$$n = 5 \text{ إذن مجموع الزوايا الداخلية} = (n - 2) \times 2 \text{ قائمة}$$

$$= (5 - 2) \times 2 \text{ قائمة} = 6 \text{ قوائم} = 6 \times 90^\circ = 540^\circ$$

مثال (٢) : جد الزاوية الداخلية لمضلعل منتظم به ١٠ أضلاع.

الحل: مجموع زواياه الداخلية = $(n - 4) \times 2$ زاوية قائمة

$$= (10 - 4) \times 2 = 16 \text{ زاوية قائمة}$$

$$= 16 \times 90^\circ = 1440^\circ$$

$$\text{مقدار الزاوية الداخلية} = \frac{1440^\circ}{10} = \frac{16 \times 90^\circ}{10} = 144^\circ$$

مثال (٣):

جد عدد أضلاع المضلع المنتظم الذي فيه كل من زواياه الداخلية 150° .

الحل:

$$\text{كل زاوية داخلية} = 150^\circ$$

$$\text{افتراض إن عدد أضلاع المضلع} = n$$

$$\text{مجموع الزوايا الداخلية للمضلع} = (n - 2) \times 2 \text{ زاوية قائمة}$$

$$= (2n - 4) \text{ زاوية قائمة}$$

$$\text{عدد الزوايا الداخلية} = \text{عدد الأضلاع} = n$$

إذن :

$$\frac{(2n - 4) \times 90^\circ}{n} = 150^\circ$$

$$150n = 180n - 360$$

$$360 = 30n$$

$$n = \frac{360}{30} = 12 \text{ ضلع}$$

تمرين (٢ - ٣)

١) إذا كانت زاويتان في مثلث هي 80° , 70° . جد الزاوية الثالثة.

٢) جد الزاوية الخامسة في خماسي فيه أربعة من زواياه الداخلية هي 140° , 65° , 55° , 160° .

٣) جد مجموع الزوايا الداخلية من المضلعات الآتية:

أ/ سداسي

ب/ عشاري

ج/ مضلع به ١٣ ضلعاً.

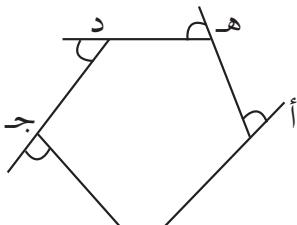
٤) جد عدد أضلاع مضلع منتظم فيه كل من زواياه الداخلية 135° .

٥) في المضلع الخماسي المنتظم أ ب ج د ه أحسب مقدار كل من زوايا المثلث أ ب ج.

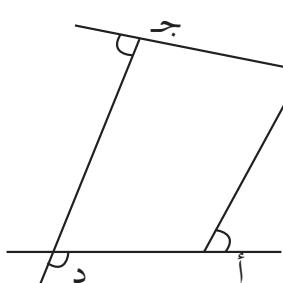
(٣ - ٣) : الزوايا الخارجية للمضلع

تمهيد:

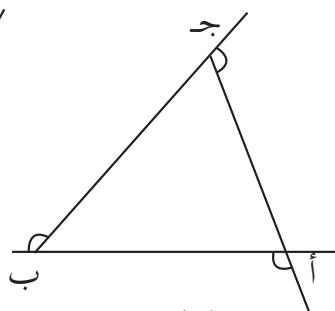
- ١) إذا مد كل ضلع في مضلع في اتجاه واحد فإن الزاوية التي يصنعها امتداد كل ضلع مع الضلع الآخر تسمى زاوية خارجية للمضلع.
- ٢) انظر الأشكال التالية:



(٣)



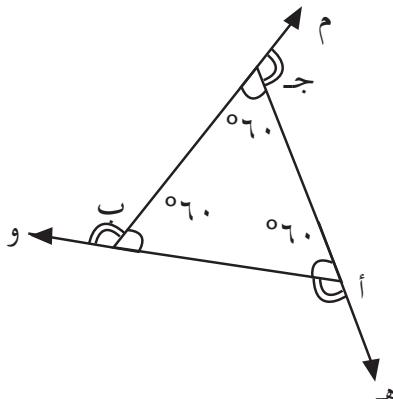
(٢)



(١)

كل الزوايا المشار إليها في كل مضلع هي زواياه الخارجية.

مثال (١): جد مجموع الزوايا الخارجية في المثلث متساوي الاضلاع أدناه.



الحل: مجموع زوايا المثلث الداخلية = 180° .

بما أن المثلث $A B C$ متساوي الأضلاع فإن كل زاوية داخلية = 60° .

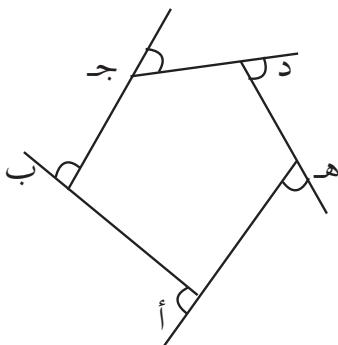
$$\angle HAB + \angle GAC = 180^\circ \text{ (متكمالتان)}$$

$$\text{ولكن } \angle GAC = 60^\circ, \angle HAB = 60^\circ - 180^\circ = 120^\circ$$

$$\text{وبنفس الطريقة } \angle AGC = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ \text{ و } \angle WBC = 120^\circ$$

$$\therefore \text{مجموع الزوايا الخارجية} = 120^\circ + 120^\circ + 120^\circ = 360^\circ = 4 \text{ قوائم.}$$

مثال (٢) : جد مجموع الزوايا الخارجية لخمساني منتظم أ ب ج د ه



الحل: الزاوية الداخلية + الزاوية الخارجية المجاورة لها = 180° قائمة.
 مجموع زوايا الخماسي الداخلي = $(5 - 2) \times 2$ قائمة = ٦ قوائم .
 ولكن كل الزوايا الداخلية والخارجية للخماسي =
 $5 \times (\text{الزاوية الداخلية} + \text{الزاوية الخارجية المجاورة لها})$
 $= 2 \times 5 = 10$ قوائم.

∴ مجموع الزوايا الخارجية لل الخماسي = $10 - 6 = 4$ قوائم .
 ومن الأمثلة السابقة يمكن التوصل للقاعدة التالية :

قاعدة:

مجموع الزوايا الخارجية لأي مضلع = ٤ قوائم = 360° .

مثال (٣) :

جد عدد أضلاع مضلع منتظم فيه مقدار الزاوية الداخلية له تساوي 160° .

الحل: مقدار الزاوية الخارجية = $180^\circ - 160^\circ = 20^\circ$

مجموع الزوايا الخارجية = عدد أضلاع المضلع \times مقدار الزاوية الخارجية

$$\therefore \text{عدد الأضلاع} = \frac{360^\circ}{20^\circ} = 18 \text{ ضلع}$$

مثال (٤) : جد مقدار الزاوية الخارجية لمضلع منتظم به ١٥ ضلعاً.

الحل: مجموع الزوايا الخارجية له = ٤ قوائم = 360°

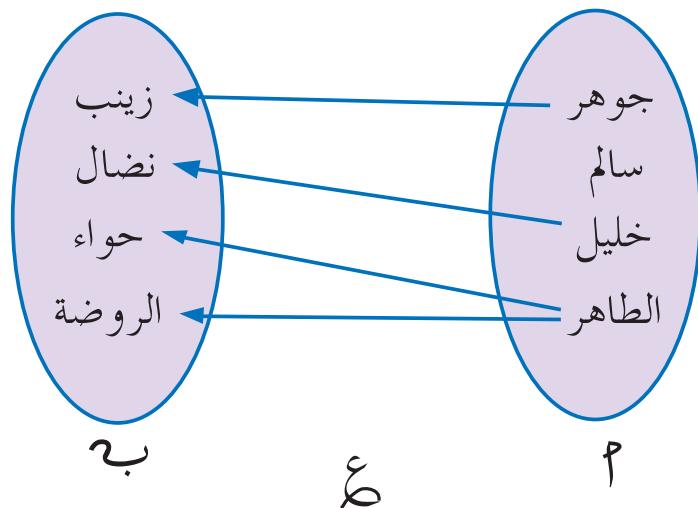
$$\therefore \text{الزاوية الخارجية} = \frac{360^\circ}{15} = 24^\circ$$

تمرين : (٣-٣)

- (١) أحسب مقدار الزاوية الخارجية لـ كل من:
- أ. مضلع منتظم به ١٠ أضلاع.
 - ب. مضلع منتظم به ٢٠ ضلع.
 - ج. مضلع منتظم سداسي.
- (٢) ما عدد أضلاع مضلع منتظم زاويته الداخلية:
- أ. 140° .
 - ب. 90° .

الوحدة الرابعة

الزوج المرتب والعلاقات



(٤ - ١) الزوج المترتب

المریخ	٣	٤	الهلال	الشكل (١)
المریخ	٤	٣	الهلال	الشكل (٢)

نلاحظ في مباريات كرة القدم أن نتيجة المباراة تكتب على صورة الشكل (١) ماذا تعني هذه النتيجة في الشكل (١)؟
ماذا تعني نتيجة المباراة في الشكل (٢)؟
هل نتيجة المباراة في الشكل (١) هي نفس نتيجة المباراة في الشكل (٢)؟ فالشكل (١) يعني أن فريق الهلال سجل أربعة أهداف في مرمى المریخ بينما دخل مرماه ثلاثة أهداف.
أما الشكل (٢) يعني أن فريق الهلال سجل ثلاثة أهداف في مرمى المریخ بينما دخل مرماه أربعة أهداف.
وما سبق يمكن القول أن:
التعبيران ٤ ، ٣ ، ٤ و ٣ ، ٤ مختلفان.
ومثل هذه التعبيرات تكتب بين قوسين (... ، ...) هكذا ونفصل بين المتغيرين داخل القوس بفواصل هكذا (،) ويسمى زوجاً مرتباً.
ونظراً لأهمية الترتيب كما لاحظنا فإن التعبيرين السابقين يكتبيان على الصورة الآتية:
(٤ ، ٣ ، ٤) ، حيث (٤ ، ٣) تختلف عن (٣ ، ٤)

إذن الزوج المترتب المكون من العنصرين س، ص نرمز له بالرمز (س، ص)
حيث نسمي س بالمكون (المسقط) الأول، ص بالمكون (المسقط) الثاني.

ونلاحظ مما سبق ما يلي:

- (١) (س ، ص) ≠ (ص ، س) إلا إذا كان س = ص .
- (٢) إذا كان (س ، ص) = (أ ، ب) فإن س = أ ، ص = ب .
- (٣) الزوج المترتب (س ، ص) مختلف عن المجموعة {س ، ص}
لأن (س ، ص) ≠ (ص ، س)
بينما {س ، ص} = {ص ، س} .

مثال (١) : أي الأزواج التالية أزواج مرتبة. حدد المكون الأول والمكون الثاني إذا كان الزوج مرتبًا. (١، ٧) ؛ (٥ - ١) ؛ (٤، ٠) ؛ (-٣، ١)

الحل: (١، ٧) زوج مرتب مكونه الأول ١ والثاني ٧
 ٦، ٢ ليس زوجاً مرتبًا ، (٥ - ١) ليس زوجاً مرتبًا.
 (٤، ٠) زوج مرتب مكونه الأول ٤ والثاني ٠
 (-٣، ١) ليس زوجاً مرتبًا.

مثال (٢) : جد قيمة كل من س ، ص في الحالات التالية إذا كان:

$$\begin{aligned} \text{أ. } (س، ١) &= (٢، ص) \\ \text{ب. } (س - ٢، ٣) &= (١، ٢ ص + ١) \end{aligned}$$

الحل: أ. :: (س، ١) = (٢، ص)
 :: س = ٢ ، ص = ١
 ب. :: (س - ٢، ٣) = (١، ٢ ص + ١)
 فإن س - ٢ = ١ :: س = ٣
 ١ = ٢ ص + ٣ :: ص = ٣

ć

(أ) أي الأزواج التالية أزواج مرتبة؟

- | | | | |
|------------|------------|----------------|----------------|
| (١) (٦، ٧) | (٢) (٩، ٥) | (٣) (١ - ١، ٦) | (٤) (ب - ص، س) |
|------------|------------|----------------|----------------|

(ب) حدد المكون الأول والمكون الثاني من الأزواج المرتبة الآتية:

$$(١) (٨، ٢) \quad (٢) (ن - م)$$

$$(٣) (١ + س، ص) \quad (٤) (ص + هـ، ص - س)$$

(ج) جد قيمة كل من س ، ص إذا كان:

- | | | |
|---------------------|-------------------------|--------------------------|
| (١) (١، ٩) = (ص، س) | (٢) (١، ص) = (س - ٣، س) | (٣) (-٢، ٢) = (ص - ٤، س) |
|---------------------|-------------------------|--------------------------|

(٤ - ٢) حاصل الضرب الديكارتي :

إذا كانت توجد ثلاثة طرق تصل بين منزلك والمدرسة التي تدرس بها، ولتكن مجموعة

هذه الطرق هي:

$$س = \{أ، ب، ج\}$$

ويمكنك الوصول إلى المدرسة بوسيلتي مواصلات هي الدراجة ولتكن د، والحافلة

ولتكن هـ، اي مجموعة المواصلات هي:

$$ص = \{د، هـ\}$$

ما الحالات التي تصل بها من منزلك إلى المدرسة مستخدماً هذه الطرق وتلك المواصلات؟

الحالات	المواصلات	الطرق
(أ، د)		أ
(أ، هـ)		أ
(ب، د)		ب
(... ، ...)		هـ
(... ، ...)		د
(... ، ...)		ج

اكمل الجدول السابق.

إذا كتبنا الحالات المختلفة للوصول إلى المدرسة على هيئة مجموعة من الأزواج المرتبة التي مكوناتها الأولى تتبع إلى مجموعة الطرق س ومكوناتها الثانية تتبع إلى مجموعة وسائل المواصلات ص فإننا نحصل على المجموعة التالية:

$$\{(أ، د)، (أ، هـ)، (ب، د)، (ب، هـ)، (ج، د)، (ج، هـ)\}$$

ما سبق تلاحظ أنه إذا كان لدينا مجموعتان S ، C فإننا نحصل على مجموعة الأزواج المرتبة التي مكوناتها الأولى هي عناصر المجموعة الأولى ، ومكوناتها الثانية هي عناصر المجموعة الثانية ، وتسمى مجموعة الأزواج المرتبة هذه بـ حاصل الضرب الديكارتي للمجموعتين S ، C بهذا الترتيب وتكتب في الصورة $S \times C$ اي أن:

$$S \times C = \{(s, c) : s \in S, c \in C\}$$

حيث $(s, c) \neq (c, s)$ إلا إذا كانت $s = c$

مثال (١) : إذا كان $S = \{1, 2, 3\}$ ، $C = \{4, 5\}$ جد:

$$(1) S \times C \quad (2) C \times S \quad (3) S \times S$$

$$(4) \text{ هل } S \times C = C \times S$$

$$(5) \text{ هل عدد عناصر } S \times C = \text{عدد عناصر } C \times S$$

الحل:

$$(1) S \times C = \{(1, 4), (1, 5), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5)\}$$

$$(2) C \times S = \{(4, 1), (4, 2), (5, 1), (5, 2)\}$$

$$(3) S \times S = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$$

$$(4) \text{ بما أن } (s, c) \neq (c, s)$$

$$\therefore S \times C \neq C \times S$$

$$(5) \text{ عدد عناصر } S \times C = 6$$

$$\text{عدد عناصر } C \times S = 6$$

$$\therefore \text{عدد عناصر } S \times C = \text{عدد عناصر } C \times S$$

نتيجة:

إذا كانت S ، C مجموعتين متنهيتين وغير خاليتين فإن:

$$(1) S \times C \neq C \times S \text{ حيث } S \neq C$$

$$(2) \text{ عدد عناصر } S \times C = \text{عدد عناصر } C \times S$$

$$= \text{عدد عناصر } S \times \text{عدد عناصر } C$$

$$(3) S \times S = \{(a, b) : a \in S, b \in C\} \text{ وتكتب أحياناً } S^2$$

وتقراً (س تحصيل نفسها)

$$(4) \text{ إذا كان } (m, n) \in S \times C \text{ فإن } m \in S, n \in C$$

مثال (٢) : إذا كان $S = \{3, 4, 5\}$ ، $C = \{2, 3, 4\}$

جد:

$$(1) S \times (C \setminus \{4\}) \quad (2) (S \setminus C) \times C \quad (3) (S \times C) \setminus (C \times S)$$

الحل:

$$\begin{aligned}
 & (1) \text{ ص} \cap \text{ج} = \{2\} \\
 & \therefore \text{س} \times (\text{ص} \cap \text{ج}) = \{2\} \times \{3\} = \{2, 3\}, \text{ب} \\
 & \{2, 3\} = \{(2, 3), (3, 2)\} \\
 & (2) \text{ س} \cup \text{ص} = \{3, 2\}, \text{ب}, \text{ج} \\
 & (\text{س} \cup \text{ص}) \times \{2, 3\} = \{3, 2\} \times \{2, 3\} = \{(3, 2), (2, 3), (3, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 2)\} \\
 & \{(3, 2), (2, 3), (3, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 2)\} \\
 & (3) \text{ س} \times \text{ج} = \{(2, 3), (3, 2), (2, 2), (3, 3), (2, 3), (3, 2)\} \\
 & \text{ص} \times \text{ج} = \{(3, 2), (2, 2), (3, 2), (2, 3), (2, 2), (3, 3)\} \\
 & \therefore \{(3, 2) \times (2, 3) \times (3, 2)\} = \{(2, 3) \times (3, 2) \times (2, 2)\}
 \end{aligned}$$

تمرين (٤ - ٢)

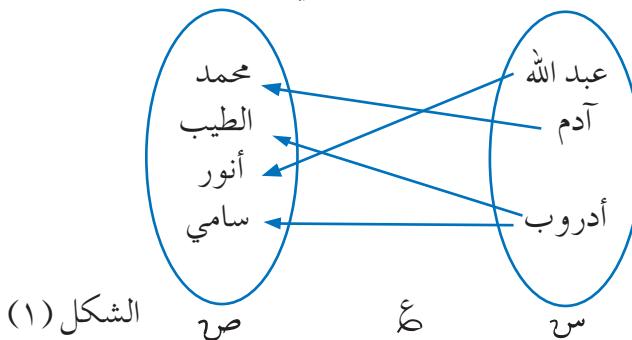
- (أ) إذا كان $\text{س} = \{1, 2, 4, 5\}$, $\text{ص} = \{1, 2, 5, 7\}$ جد:
- $$(1) \text{ س} \times \text{ص} \quad (2) \text{ ص} \times \text{س} \quad (3) \text{ س} \times \text{س} \quad (4) \text{ ص}^2$$
- (ب) إذا كان $\text{س} = \{1, 2, 5, 7\}$, $\text{ص} = \{2, 5, 7\}$ جد:
- $$\begin{aligned}
 & (1) \text{ س} \times \text{ج} \quad (2) \text{ س}^2 \quad (3) \text{ س} \times (\text{ص} \cap \text{ج}) \\
 & (4) (\text{ص} \cap \text{ج}) \times \text{س} \quad (5) (\text{س} \times \text{ص}) \cup (\text{ص} \times \text{س}) \\
 & (6) (\text{ج} - \text{ص}) \times (\text{س} \cup \text{ص})
 \end{aligned}$$

(٤ - ٣) العلاقات

تأمل المثال التالي:

لنفترض أن المجموعة س هي مجموعة التلاميذ: عبدالله ، آدم ، أدروب .
أي أن س = {عبد الله ، آدم ، أدروب }
وأن ص = {محمد ، الطيب ، أنور ، سامي }

ونفرض أن علاقة صداقة ربطت بين عناصر هاتين المجموعتين حيث كان عبدالله صديقاً لأنور ، وآدم صديقاً لمحمد ، وأدروب صديقاً لكل من الطيب وسامي .
يمكننا التعبير عن علاقة الصداقة السابقة بالشكل التالي:



حيث أن التعبير بالشكل (١) يسمى **المخطط السهمي**.

وأيضاً يمكن التعبير عن هذه العلاقة بطريقة أخرى وذلك بضم كل شخصين تربطهما هذه العلاقة معاً كزوج مرتب، المكون الأول فيه من المجموعة س صديق المكون الثاني من المجموعة ص .

فالزوج المرتب (عبد الله ، أنور) يدل على أن عبدالله صديق أنور ، وكذلك (آدم ، محمد) يعني أن آدم صديق محمد وهكذا.

ونعبر عن علاقة الصداقة هذه بمجموعة الأزواج التي مكوناتها الأولى عناصر من المجموعة س تربطها علاقة الصداقة هذه مع المكونات الثانية من المجموعة ص ، وكثيراً ما نرمز للعلاقة بالرموز .

وتكتب \leftrightarrow : $S \leftrightarrow S$ و تقرأ \leftrightarrow علاقة من المجموعة س إلى المجموعة ص .

ويعبر عنها بالصفة المميزة $\leftrightarrow = \{(S, S) : S \in S, S \in S\}$
فلاقة الصداقة السابقة يمكن تمثيلها بمجموعة الأزواج المرتبة:

$\leftrightarrow = \{(عبد الله ، أنور) ، (آدم ، محمد) ، (أدروب ، الطيب) ، (أدروب ، سامي)\}$

نلاحظ مما سبق:

- (١) أن كل عنصر من عناصر العلاقة هو زوج مرتب .
- (٢) وجود الصلة بين المكون الأول والمكون الثاني في الزوج المرتب الواحد والصلة هي صديق.

إن الصلة التي تربط كل عنصر في المجموعة S وعنصر آخر في المجموعة T تسمى **قاعدة الاقتران**.

ونقول أن قاعدة الاقتران هذه تعرف العلاقة من المجموعة S إلى المجموعة T .

تعريف:

العلاقة هي ارتباط بين عناصر مجموعتين. تسمى المجموعة **الأولى المجال** وتسمى المجموعة **الثانية المجال المقابل**.

ففي المثال السابق تكون S هي المجال ، T المجال المقابل.

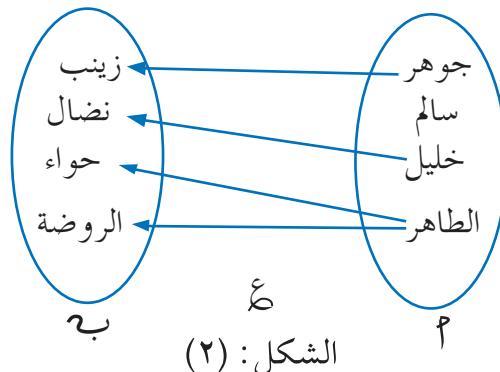
نلاحظ من التعريف الآتي:

(١) ليس من الضروري أن يرتبط كل عنصر في المجال بعنصر أو أكثر في المجال المقابل.

(٢) ليس من الضروري أن يكون كل عنصر في المجال المقابل يرتبط به عنصر أو أكثر من المجال.

مثال (١): إذا كان $S = \{\text{جوهر} , \text{سالم} , \text{خليل} , \text{الطاهر}\}$
 $T = \{\text{زينب} , \text{نضال} , \text{حواء} , \text{الروضة}\}$

وكان there علقة (زوج) من المجموعة S إلى المجموعة T موضحة بالخط السهمي التالي:



الشكل : (٢)

عُبر عن العلاقة there في صورة مجموعة عناصرها أزواج مرتبة.

الحل:

there = {(جوهر ، زينب) ، (خليل ، نضال) ، (الطاهر ، حواء) ، (الطاهر ، الروضة)}

العلاقات على مجموعات الأعداد:

هناك علاقات من نوع آخر كالتالي عناصرها أعداد. ومن هذه العلاقات:

- ١ / علاقة (أكبر من)
- ٢ / علاقة (أصغر من)
- ٣ / علاقة (يساوي)
- ٤ / علاقة (ضعف)
- ٥ / علاقة (ثلاثة أمثال)
- ٦ / علاقة (عامل من عوامل)

مثال (٢): إذا كان $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ، $C = \{3, 4, 5, 6, 7\}$

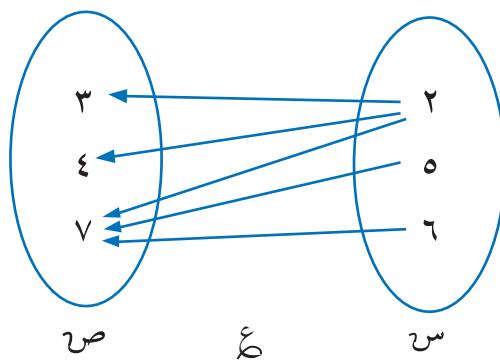
حيث \subseteq : $S \subseteq C$

معرفة بقاعدة الاقتران أصغر من

- (١) مثل العلاقة \subseteq بخط سهمي.
- (٢) اكتب المجال والمجال المقابل للعلاقة \subseteq .

الحل:

(١)



(٢) المجال = $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ أو S
المجال المقابل = $\{3, 4, 5, 6, 7\}$ أو C

مثال (٣): إذا كان \subseteq : $\subseteq \rightarrow \subseteq$ علاقة معرفة بقاعدة الاقتران: $S + C = 4$
اكتب \subseteq في صورة مجموعة عناصرها أزواج مرتبة.

الحل: للإجابة على هذا يجب أولاً أن نحدد المجال والمجال المقابل ثم نحدد طبيعة الاقتران.

نلاحظ أن كلاً من المجال والمجال المقابل هو مجموعة الأعداد الطبيعية.

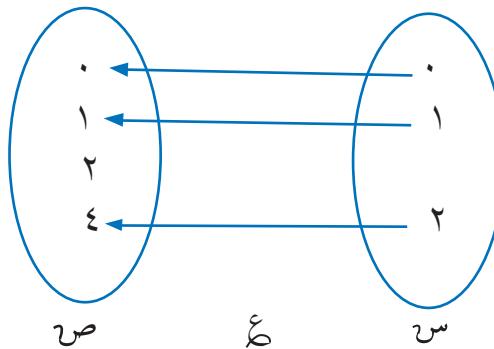
حيث أن كل عنصر في \mathcal{R} هو زوج مرتب مكونه الأول عدد طبيعي والثاني عدد طبيعي أيضاً ومجموعهما يحقق: $s + r = 4$

$$\mathcal{R} = \{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\}$$

إذا كان مجال العلاقة \mathcal{R} ومجالها المقابل هو المجموعة نفسها فنقول أن العلاقة \mathcal{R} علاقة على هذه المجموعة.
 $\therefore \mathcal{R}$ علاقة على \mathbb{N} .

تمرين : (٤ - ٣)

(١) إذا كان $s = \{2, 1, 0\}$ ، $r = \{4, 2, 1, 0\}$: $s \leftarrow r$ ع : $s \leftarrow r$ علاقة معرفة بالخطط السهمي التالي:



أ/ اكتب المجال والمجال المقابل للعلاقة \mathcal{R} .

ب/ اكتب \mathcal{R} في صورة أزواج مرتبة.

ج/ اكتب قاعدة الاقتران للعلاقة \mathcal{R} .

(٢) إذا كان $\mathcal{R} : \{أ, ب, ج\} \leftarrow \{٧, ٥, ٣, ٢\}$

حيث $\mathcal{R} = \{(أ, ٧), (ب, ٢), (ب, ٥), (ج, ٣)\}$
 ع : \mathcal{R} معرفة بالخطط السهمي.

(٣) إذا كان $\mathcal{R} = \{٩, ٧, ٥, ٣, ١\}$

ع : $\mathcal{R} : \mathbb{N} \leftarrow \mathbb{N}$ معرفة بالقاعدة: $s + r < 8$ ($s, r \in \mathbb{N}$)

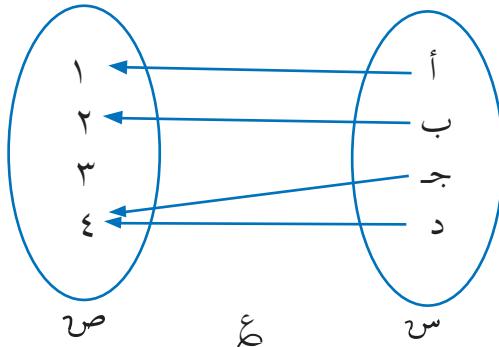
أ/ ما المجال والمجال المقابل للعلاقة \mathcal{R} ؟

ب/ اكتب \mathcal{R} في صورة أزواج مرتبة.

(٤ - ٤) صورة العنصر ومدى العلاقة:

إذا كان $S = \{A, B, C, D\}$ ، $C = \{1, 2, 3, 4\}$

وكان $\mathcal{R} : S \rightarrow C$ معرفة بالخطط السهمي التالي:



نلاحظ مما سبق:

- $\mathcal{R} = \{(A, 1), (B, 2), (C, 3), (D, 1, 2)\}$

حيث أن العبارة $(A, 1) \in \mathcal{R}$ تكتب $A \mathcal{R} 1$

وتقرأ A يرتبط مع 1 بالعلاقة \mathcal{R} .

وأن العبارة $(A, 2) \notin \mathcal{R}$ عبارة غير صحيحة وتكتب $(A, 2) \notin \mathcal{R}$
أو $A \not\mathcal{R} 2$ وتقرأ A لا يرتبط مع 2 بالعلاقة \mathcal{R} .

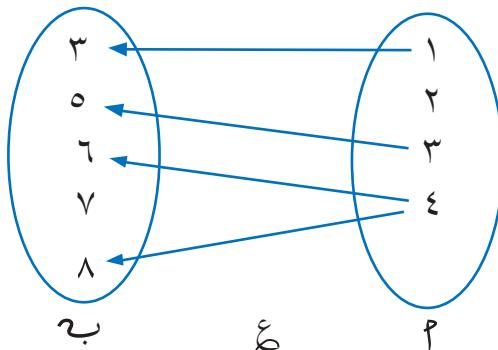
- إن العنصر A في المجال S اقترن مع العنصر 1 في المجال المقابل C ،
ونسمى العنصر 1 صورة للعنصر A . وبالمثل نسمى العنصر 2 صورة للعنصر B .
ما صورة كل من العنصرين C ، D ؟

- إن المجموعة $\{1, 2, 3\}$ هي صور لعناصر المجال وتسمي **مدى العلاقة**.
لاحظ أن المدى مجموعة جزئية من المجال المقابل.

تعريف:

مدى العلاقة هو مجموعة صور عناصر المجال في المجال المقابل

مثال (١): إذا كان $\mathcal{R} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ معرفة بالخطط السهمي التالي:



(١) اكتب المجال والمجال المقابل.

(٢) جد صور كل من العناصر ١ ، ٢ ، ٣

(٣) اكتب مدى \mathcal{R} .

(٤) اكتب \mathcal{R} في صورة مجموعة عناصرها أزواج مرتبة.

الحل: (١) المجال = $\{1, 2, 3\}$

المجال المقابل = $\{3, 5, 6, 7, 8\}$

(٢) صورة العنصر ١ هي ٣ ، العنصر ٢ ليس له صورة ،

صورة العنصر ٣ هي ٥

(٣) مدى العلاقة $\mathcal{R} = \{3, 5, 6, 7\}$

(٤) $\mathcal{R} = \{(1, 3), (2, 5), (3, 6), (4, 7), (4, 3)\}$

مثال (٢): $\mathcal{R} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ $\left(\mathcal{A} = \{1, 2, 3, 4\}, \mathcal{B} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \right)$

بحيث أنه اذا كان س يتبع إلى مجال \mathcal{R} فإن س يقترن مع س + ١.

أي العبارات التالية صواب وأيها خطأ؟

(١) $0 \in \mathcal{R}$

(٢) $5 \in \mathcal{R}$

(٣) $3 \in \mathcal{R}$

(٤) $2 \in \mathcal{R}$

(٥) $5 \in \mathcal{R}$

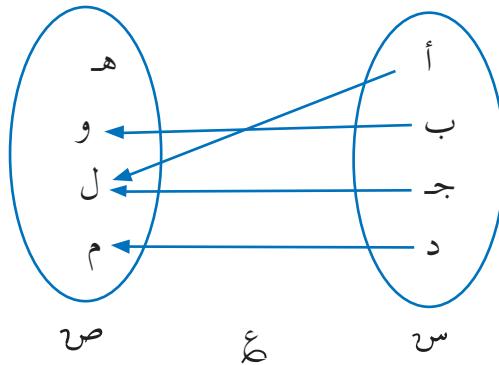
(٦) $1 \in \mathcal{R}$ صواب.

(٧) $3 \in \mathcal{R}$ خطأ.

(٨) $2 \in \mathcal{R}$ خطأ.

تمرين (٤ - ٤)

(١) إذا كانت $\mathcal{M} : S \rightarrow C$ معرفة بالمخيط السهمي التالي:



(أ) جد صور كل من ب ، ج ، د .

(ب) اكتب مدى \mathcal{M} .

(ج) اكتب \mathcal{M} في صورة مجموعة عناصرها أزواج مرتبة.

(د) أي العبارات التالية صائبة: أ \mathcal{M} ه ، ج \mathcal{M} و ، د \mathcal{M}

(٢) إذا كانت $\mathcal{M} : C \rightarrow B$ وضح أي العبارات التالية صواب وأيها خطأ:

(أ) $C \ni c \mapsto b$

(ب) إذا كان $S \mathcal{M} C$ فإن S صورة C .

(ج) إذا كانت S صورة C فإن C صورة S .

(د) مجال \mathcal{M} دائماً يساوي C .

(٣) إذا كان $\mathcal{M} = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$

جد: (أ) مجموعة العناصر التي صورتها ٣ .

(ب) مجموعة العناصر التي تمثل صوراً للعنصر ٢ .

(٤) إذا كانت $S = \{1, 3, 4\}$ ، $C = \{10, 8, 6, 2, 0\}$

وكان $\mathcal{M} : S \rightarrow C$ معرفة على النحو التالي:

S ترتبط بـ ٢ S ، $S \ni s \mapsto 2s$

(أ) مثل \mathcal{M} بمخطط سهمي .

(ب) اكتب مدى العلاقة \mathcal{M} .

(ج) اكتب \mathcal{M} كمجموعة أزواج مرتبة .

(٥) لتكن $\mathcal{R} = \{(1, 1), (2, 6), (5, 3), (15, 2)\}$ اكتب قاعدة اقتران العلاقة \mathcal{R} .

(٦) إذا كانت $A = \{1, 2\}, B = \{2, 3, 4, 6, 8\}$ ، يرتبط مع ص $\ni B$

وكان $\mathcal{R} : A \rightarrow B$ حيث $s \in A$ إذا كان $s > \text{ص}$.

(أ) اكتب \mathcal{R} في صورة أزواج مرتبة.

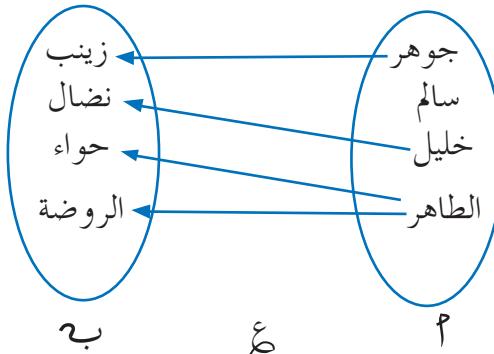
(ب) ما مدى العلاقة \mathcal{R} ? هل المدى = المجال المقابل؟

(٤ - ٥) العلاقة العكسية:

إذا اعتبرنا علاقة زوج التي مرت بنا سابقاً والتي ربطت بين المجموعة:
 $\Omega = \{\text{جوهر، سالم، خليل، الطاهر}\}$

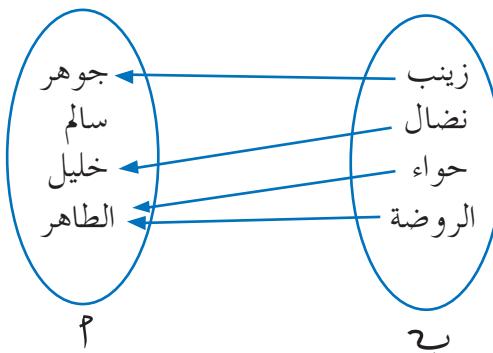
وعناصر المجموعة:

$B = \{\text{زينب، نضال، حواء، الروضة}\}$
 والتي مثلها المخطط السهمي:



الشكل (١)

فإننا يمكننا التعبير عن العلاقة التي تربط العناصر من المجموعة الثانية B بعناصر المجموعة الأولى Ω والتي نعرفها بعلاقة زوجة نجد أن: زينب زوجة جوهر، نضال زوجة خليل، حواء زوجة الطاهر، الروضة زوجة الطاهر.
 وهي أيضاً علاقة يمكن تمثيلها من المجموعة B إلى المجموعة Ω سهرياً كالتالي:



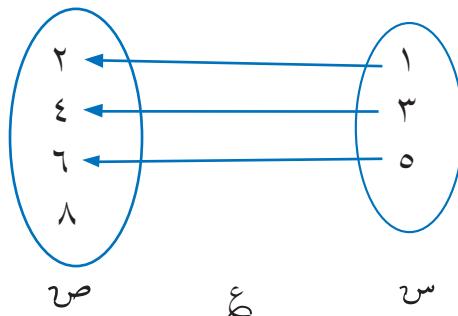
الشكل (٢)

نجد أن العلاقة الجديدة تنتج إذا عكستنا اتجاه الأسهم في العلاقة الأولى $\Omega \rightarrow B$ وجعلنا المجال المقابل للعلاقة الأولى $B \rightarrow \Omega$ لها، و المجال العلاقة $\Omega \rightarrow B$ مجالاً مماثلاً لها.

تسمى هذه العلاقة بالعلاقة العكسية للعلاقة \subseteq ويمثلها المخطط السهمي بالشكل (٢) السابق ويرمز لها بالرمز \subseteq^{-1} وتقرأ العلاقة العكسية للعلاقة \subseteq . وإذا كانت \subseteq علاقه من A إلى B فإن \subseteq^{-1} (العلاقة العكسية) من B إلى A نعرفها على النحو التالي:

$\subseteq^{-1} = \{(s, s) : (s, s) \in \subseteq\}$
مثال (١): إذا كان $\subseteq : S \rightarrow S$ حيث:

$S = \{1, 3, 5, 2, 4, 6, 8\}$ معرفة بالمخطط السهمي التالي:

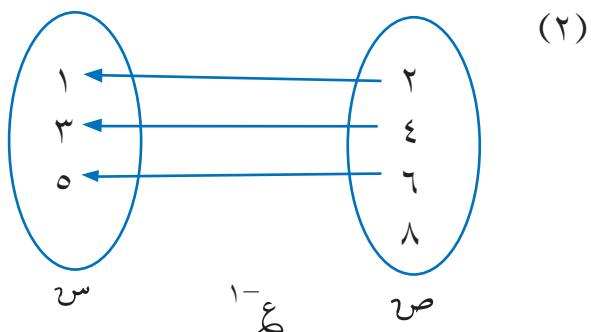


(١) اكتب \subseteq^{-1} في صورة مجموعة.

(٢) مثل \subseteq^{-1} بخطط سهمي.

(٣) اكتب \subseteq^{-1} في صورة مجموعة.

الحل: (١) $\subseteq^{-1} = \{(1, 2), (2, 4), (3, 6), (5, 6)\}$



(٣) $\subseteq^{-1} = \{(1, 2), (2, 4), (3, 6), (5, 6)\}$

مثال (٢): إذا كانت $s = \{2, 3, 4, 5, 6\}$

علاقة من s إلى s قاعدة اقترانها هي: s يقترن مع $s + 2$.

(١) اكتب ع في صورة مجموعة.

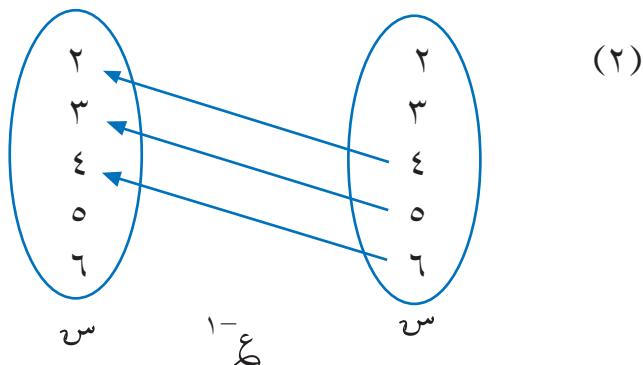
(٢) مثل ع بخطط سهمي.

(٣) اكتب قاعدة اقتران ع.

(٤) جد مدى كل من ع، ع^{-١}.

(٥) ما العلاقة بين مدى ع و المجال ع^{-١}؟

الحل: (١) ع = {2, 4, 5, 6}.



(٣) قاعدة اقتران ع هي: s يقترن مع $s - 2$.

(٤) مدى ع = {6, 5, 4}

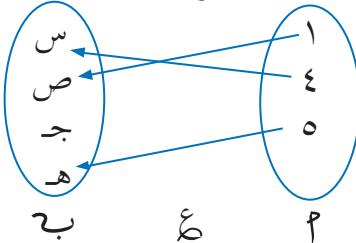
مدى ع^{-١} = {4, 3, 2}

(٥) مدى ع مجموعة جزئية من مجال ع.

تمرين: (٤ - ٥)

(١) إذا كانت ع: ٢ → ب حيث: ٢ = {٥, ٤, ١}

ب = {س، ص، ج، هـ} معرفة بالخطط السهمي التالي:



أ. اكتب \cup في صورة مجموعة.

ب. اكتب \cap في صورة مجموعة.

ج. عَبَرْ عن \cup . مخطط سهمي.

د. جد مدى كل من \cup ، \cap

(٢) إذا كانت \mathcal{M} : $\mathcal{M} \leftarrow \mathcal{M}$ معرفة بقاعدة الاقتران: س يقترن مع س٢ .

اكتب قاعدة الاقتران لـ \mathcal{M} .

(٣) إذا كان $S = \{A, B, C, D\}$

\mathcal{M}_1 : $S \leftarrow S$ ، \mathcal{M}_2 : $S \leftarrow S$

$\mathcal{M}_1 = \{A, C, B, D\}$ ، $\{B, A, C, D\}$ ، $\{C, D, A, B\}$

$\mathcal{M}_2 = \{A, D, B, C\}$ ، $\{B, D, A, C\}$ ، $\{C, A, D, B\}$

جد:

أ. مدي \mathcal{M}_1 ب. مدي \mathcal{M}_2

د. $\mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2 \cap \mathcal{M}_1$ هـ. $\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2 \cup \mathcal{M}_1$

ي. $\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2 \cap \mathcal{M}_1$

(٤) إذا كانت \mathcal{M} : $\mathcal{M} \leftarrow \mathcal{M}$ معرفة بالعلاقة $\mathcal{M} = \{S, C\}$: $S + C = 5$

جد: أ. \mathcal{M} في صورة مجموعة عناصرها أزواج مرتبة.

ب. \mathcal{M} في صورة مجموعة عناصرها أزواج مرتبة.

ج. مدي \mathcal{M} ، مدي \mathcal{M} .

د. ما العلاقة بين مدي \mathcal{M} ، مدي \mathcal{M} .

تمرين عام

(١) إذا كان $(S, C) = (2, 3)$ (ص، س) جد قيمة س ، ص.

(٢) إذا كان $(S + 1, C - 3) = (S + 2, C)$

جد: س ، ص حيث س ، ص $\Rightarrow \mathcal{M}$.

(٣) إذا كان $S = \{1, 2, 3\}$ ، $C = \{1, 0, 4\}$ ، $\mathcal{M} = \{4\}$ ، جد الآتي:

أ. $S \times \mathcal{M}$ ب. $S \times C$ ج. $\mathcal{M} \times C$

د. $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$ هـ. $(S \cap C) \times \mathcal{M}$ و. $(\mathcal{M} - C) \times S$

ي. $(S \times \mathcal{M}) \cup (C \times \mathcal{M})$

(٤) إذا كان $A = \{s, c, t\}$, $B = \{h, u, w\}$
 $\subseteq : A \rightarrow B$ حيث: $\subseteq = \{(s, h), (c, u), (t, w)\}$

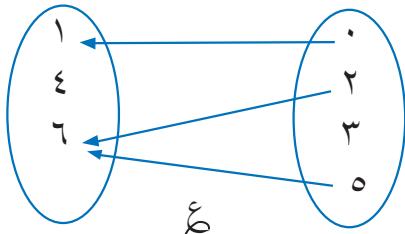
أ. ماذا تسمى \subseteq بالنسبة للعلاقة \subseteq ؟

ب. ماذا تسمى \subseteq بالنسبة للعلاقة \subseteq ؟

ج. ارسم مخططًا سهلياً يوضح \subseteq

د. ما العلاقة بين \subseteq , $\subseteq \times \subseteq$ ؟

(٥) $\subseteq : \{6, 4, 1\} \rightarrow \{5, 3, 2, 0\}$ معرفة بالمخططات السهمية التالي:



أ. جد صورة كل من $0, 2, 5$.

ب. هل العبارات التالية صحيحة أم خطأ:

$2 \subseteq 6, 3 \subseteq 4, 5 \subseteq 1, 0 \subseteq 1, 0 \subseteq 0, 1 \subseteq 1$

(٦) إذا كانت $C = \{3, 2, 1, 0\}$, $\subseteq : C \rightarrow C$ معرفة كالتالي:

$$\subseteq = \{(0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$$

أ. اكتب \subseteq^1 في صورة مجموعة.

ب. اكتب قاعدة الاقتران \subseteq .

ج. ما العلاقة بين \subseteq , \subseteq^1 ؟

(٧) إذا كانت: $\subseteq_1 = \{(0, 2), (2, 0), (1, 3), (0, 0), (1, 1)\}$, $\subseteq_2 = \{(1, 1), (2, 3), (3, 1)\}$. جد:

أ. $\subseteq_1 \cap \subseteq_2$

ب. مدى \subseteq_1 ؟ و مدى \subseteq_2 ؟

ج. $\subseteq_1 \cup \subseteq_2$

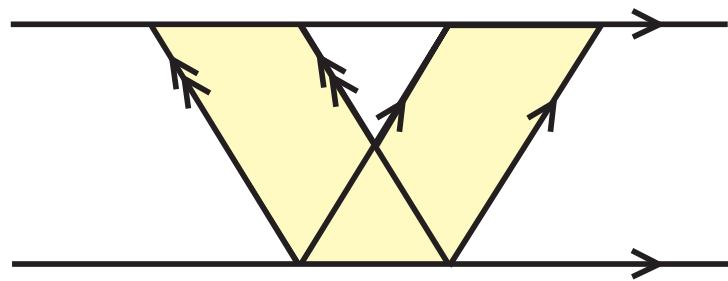
(٨) إذا كان $A = \{3, 0\}$, $B = \{1, 5\}$ مستعيناً بالمخططات السهمية

وضّح كم علاقة يمكن تعريفها من A إلى B حيث أن كل عنصر في A له

صورة واحدة في B ؟

الوحدة الخامسة

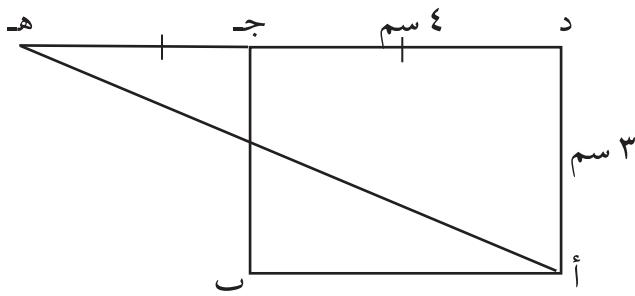
التكافؤ



تمرين مراجعة

- (١) جد طول ضلع مربع مساحته تساوي مساحة مثلث قاعدته ١٠ سم وارتفاعه ٥ سم
- (٢) أحسب مساحة مستطيل طوله ٦ سم ، وعرضه ٤ سم .
- (٣) أحسب مساحة متوازي أضلاع طول قاعدته ٨ سم وارتفاعه ٦ سم .
- (٤) أحسب طول قاعدة متوازي أضلاع ارتفاعه ١٢ سم ، ومساحته تساوي مساحة مستطيل طوله ١٥ سم ، وعرضه ٨ سم .
- (٥) في الشكل أدناه ، إذا كان $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ مستطيل طوله ٤ سم ، وعرضه ٣ سم

$$\overline{DH} = \overline{JC}$$
 .



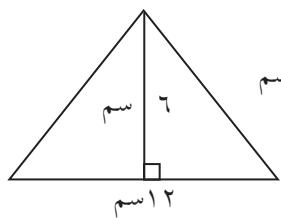
الشكل : (١)

أحسب :

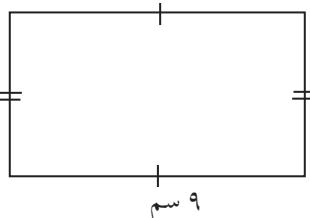
- (أ) أحسب مساحة المستطيل $ABJD$.
- (ب) أحسب مساحة المثلث AHD .
- (ج) صل \overline{AJ} ، \overline{BH} . ما نوع الشكل $ABHD$? أحسب مساحته .

(١ - ٥) مفهوم التكافؤ :

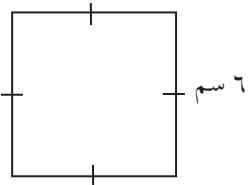
مثال (١) : احسب مساحة الأشكال الآتية :



الشكل (٣)



الشكل (٢)



الشكل (١)

الحل :

$$\text{مساحة المربع في الشكل (١)} = 6 \times 6 = 36 \text{ سم}^2$$

$$\text{مساحة المستطيل في الشكل (٢)} = 4 \times 9 = 36 \text{ سم}^2$$

$$\text{مساحة المثلث في الشكل (٣)} = \frac{6 \times 12}{2} = 36 \text{ سم}^2$$

ماذا تلاحظ في المساحات الثلاثة السابقة ؟ .

نلاحظ أن المساحات الثلاثة السابقة متساوية.

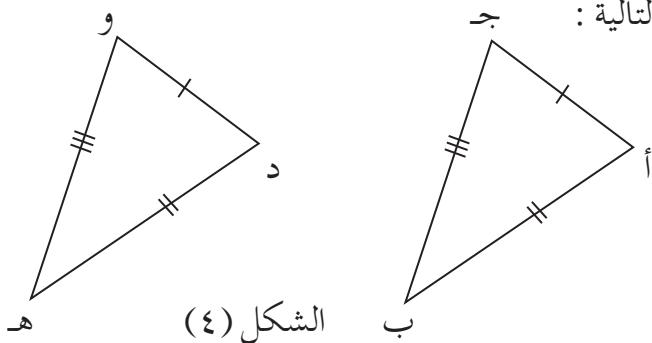
في هذه الحالة نقول أن مساحة المثلث **تكافئ** مساحة المستطيل **تكافئ** مساحة المربع.

إذن تساوى مساحات لمضلعات مختلفة يسمى **تكافؤ**.

تكافؤ مضلعين مستويين يعني تساوى مساحتيهما

مثال (٢) :

من الأشكال التالية :



الشكل (٤)

- هل يتطابق المثلثان $A B G$ ، $D H$ و ؟ لماذا ؟
- هل المثلثان $A B G$ ، $D H$ و متكافئان ؟
من الأمثلة السابقة نلاحظ أنّ :

الأشكال المتطابقة جمیعها متكافئة ولكن ليس من
 الضروري أن تكون الأشكال المتكافئة متطابقة .

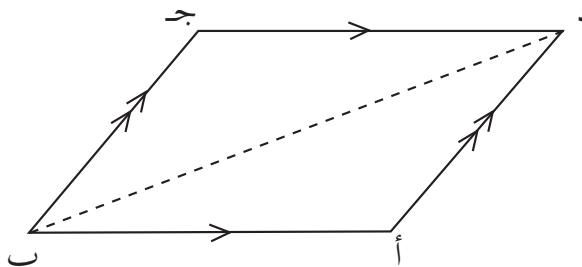
تمرين (١ - ٥)

- (١) احسب طول قاعدة مثلث ارتفاعه ٨ سم ، ويکافیع مربعًا طول ضلعه ٦ سم
- (٢) احسب طول ضلع مربع يکافیع مستطیلاً طوله ١٨ سم ، وعرضه ٨ سم .
- (٣) احسب نصف قطر دائرة تکافیع مستطیلاً طوله ١٤ سم ، وعرضه ١١ سم .
- (٤) احسب طول ضلع مربع يکافیع متوازی أضلاع قاعدته ١٦ سم ،
وارتفاعه ٤ سم .

(٢ - ٥) نظريات على التكافؤ :

نشاط :

خذ متوازي الأضلاع $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ أدناه:



الشكل (١)

أ / صل \overline{BD} ، ماذا نسمى المستقيم \overline{BD} ؟

ب / إلى كم مثلث قسم القطر \overline{BD} متوازي الأضلاع $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ؟

ج / سم هذين المثلثين . هل المثلثان متطابقان ؟

د / هل المثلثان متكافئان ؟

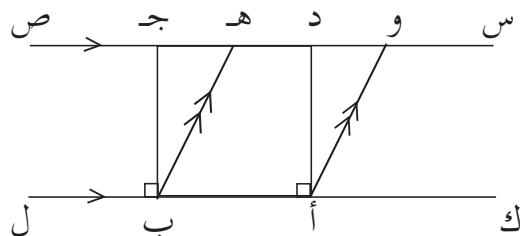
إذن هذان المثلثان متطابقان وبالتالي متكافئان.

أي أن كل من المثلثين $\triangle ABD$ و $\triangle BCD$ يكفي نصف المتوازي $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$.
وكذلك ينطبق هذا على المستطيل فإن القطر يقسمه إلى مثلثين متطابقين وكل
مثلث يكفي نصف المستطيل . وأيضاً بالنسبة للمرربع والمعين .

نظريّة (١) :

إذا اشتراك مستطيل ومتوازي أضلاع في القاعدة ،
وانحصراً بين مستقيمين متوازيين فإنهما متكافئان .

(أ) البرهان العملي :



الشكل (٢)

المعطى :

س ص // ك ل

**أ ب ج د مستطيل ، أ ب ه و متوازيي أضلاع .
أ ب قاعدة مشتركة .**

المطلوب إثباته : المستطيل أ ب ج د يكافئ متوازيي الأضلاع أ ب ه و
العمل والبرهان :

- (١) على ورقة خارجية ارسم الشكل (٢) بدقة .
 - (٢) اقطع المثلث أ د و ثم اطبقه على المثلث ب ج ه .
 - (٣) هل وجدت أن الجزء المعطى بهذا المثلث مع الشكل أ ب ه د يكونان المستطيل أ ب ج د ؟
- (أ) البرهان النظري :**

في Δ ب ج ه ، Δ أ د و

$\overline{ب ج} = \overline{أ د}$ (ضلعان متقابلان في مستطيل)

$\overline{ب ه} = \overline{أ و}$ (ضلعان متقابلان في متوازيي أضلاع)

$\angle \text{ب ج ه} = \angle \text{أ د و} = 90^\circ$

∴ المثلثان متطابقان (وتروضلعي في Δ قائم الزاوية)

∴ مساحة Δ ب ج ه = مساحة Δ أ د و

∴ مساحة المستطيل أ ب ج د = مساحة Δ ب ج ه + مساحة أ ب ه د

= مساحة Δ أ د و + مساحة أ ب ه د

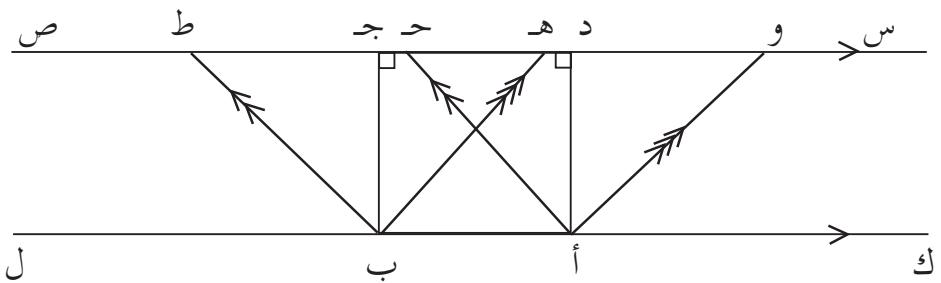
∴ مساحة المستطيل أ ب ج د = مساحة متوازيي الأضلاع أ ب ه و

∴ المستطيل أ ب ج د يكافئ متوازيي الأضلاع أ ب ه و .

نتيجة :

متوازييات الأضلاع التي لها قاعدة واحدة ، وتقع بين مستقيمي متساويين متكافئة .

البرهان :



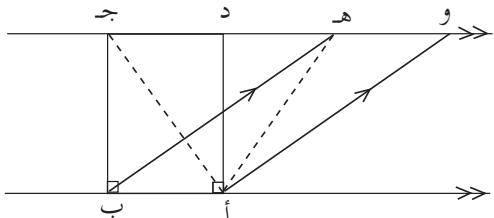
الشكل (٣)

متوازي الأضلاع ΔAB هو يكافئ المستطيل $\Delta ABCD$ (نظيرية)

متوازي الأضلاع ΔABH يكافئ المستطيل $\Delta ABCD$ (نظيرية)

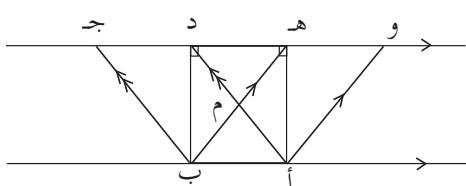
∴ متوازي الأضلاع ΔABH يكافئ متوازي الأضلاع $\Delta ABCD$

تمرين (٢ - ٥)



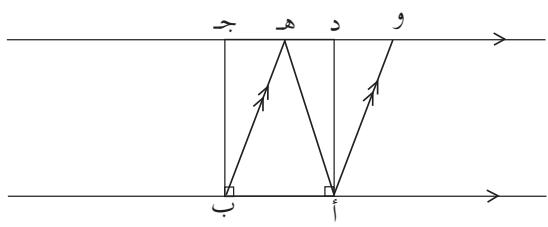
(١) في الشكل (٤) المقابل :
أثبت أن ΔABD يكافئ ΔJAH

الشكل (٤)



(٢) في الشكل (٥) المقابل :
أثبت أن ΔAHD يكافئ الشكل BGD

الشكل (٥)



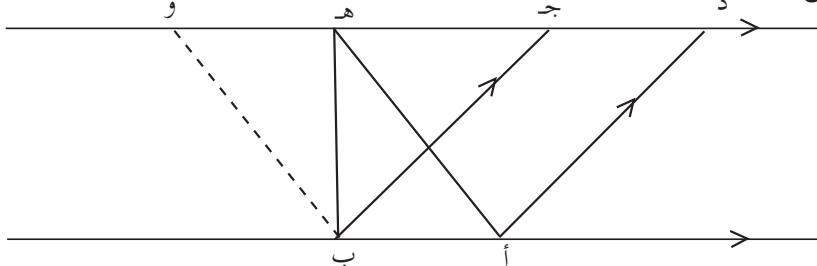
(٣) في الشكل (٦) المقابل :
أثبت أن : ΔABD يكافئ $\frac{1}{2}$ المستطيل $\Delta ABCD$

الشكل (٦)

٣ - ٥ (نظرية ٢) :

إذا اشترك متوازي أضلاع ومثلث في القاعدة ، وانحصرا بين مستقيمين متوازيين ، فإن المثلث يكافئ نصف متوازي الأضلاع .

البرهان:



الشكل (١)

المعطى:

$\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ ، \overline{AB} جد متوازي أضلاع .

ΔABC له قاعدة مشتركة مع متوازي الأضلاع $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$.

المطلوب إثباته:

ΔABC يكافئ $\frac{1}{2}$ متوازي الأضلاع $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$.

العمل:

ارسم $\overline{B_1W}$ يوازي \overline{AD} و يلقي إمتداد \overline{DC} في W .

البرهان:

في الشكل $\overline{AB} \parallel \overline{B_1W}$

$\overline{AB} \parallel \overline{HW}$ (عملاً)

$\overline{AD} \parallel \overline{B_1W}$ (عملاً)

$\therefore \overline{AB} \parallel \overline{HW}$ متوازي أضلاع

$\therefore \overline{B_1W}$ قطر متوازي الأضلاع $\overline{AB} \parallel \overline{HW}$

$\therefore \Delta ABC$ يكافئ نصف متوازي الأضلاع $\overline{AB} \parallel \overline{HW}$

$\therefore \Delta ABC$ يكافئ $\frac{1}{2}$ متوازي الأضلاع $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ (معطى)

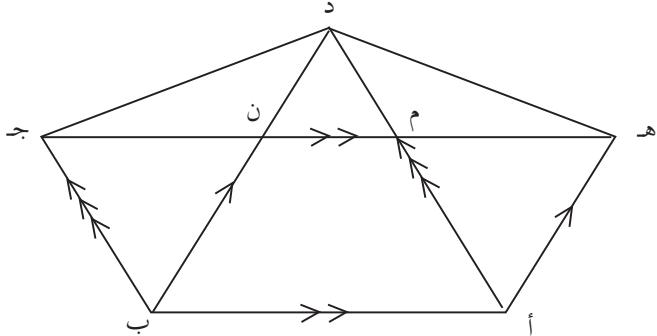
\overline{AB} قاعدة مشتركة .

\therefore متوازي الأضلاع $\overline{AB} \parallel \overline{HW}$ يكافئ متوازي الأضلاع $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ (نظرية)

ΔABC يكافئ $\frac{1}{2}$ متوازي الأضلاع $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ (بالبرهان)

$\therefore \Delta ABC$ يكافئ $\frac{1}{2}$ متوازي الأضلاع $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$

مثال : في الشكل التالي : أثبت أن ΔADE يكفي ΔBGD



الشكل (٢)

المعطيات :

$$AB \parallel HG, AE \parallel BD, AD \parallel BG$$

البرهان :

$$AB \parallel HG \text{ (معطى)}$$

\overline{AB} قاعدة مشتركة لمتوازي الأضلاع $AB \parallel GM$, $AB \parallel NH$

\therefore متوازي الأضلاع $AB \parallel NH$ يكافي متوازي الأضلاع $AB \parallel GM$ (نظرية) (١)

$$AE \parallel BD \text{ (معطى)}$$

\overline{AH} قاعدة مشتركة لمتوازي الأضلاع $AH \parallel NH$, و المثلث ADE

$\therefore \Delta ADE$ يكافي $\frac{1}{2}$ متوازي الأضلاع $AH \parallel NH$ (نظرية) (٢)

$$AD \parallel BG \text{ (معطى)}$$

\overline{BG} قاعدة مشتركة لمتوازي الأضلاع $AB \parallel GM$, و المثلث BGD

$\therefore \Delta BGD$ يكافي $\frac{1}{2}$ متوازي الأضلاع $AB \parallel GM$ (نظرية) (٣)

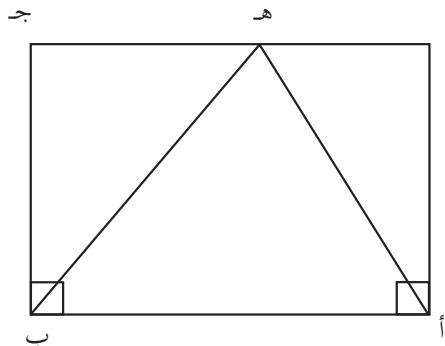
من (١) و (٢) و (٣) نجد أنّ :

ΔADE يكافي ΔBGD

تمرين (٣ - ٥)

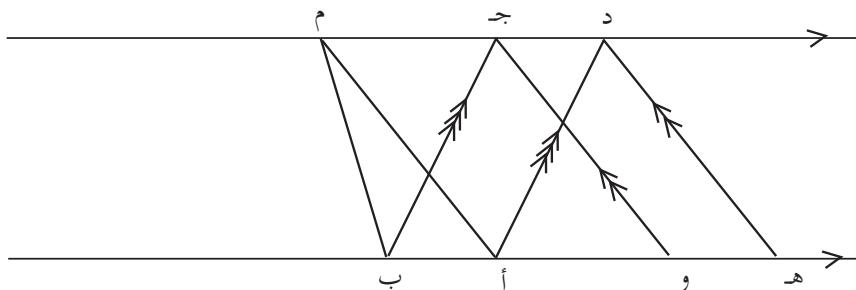
(١) في الشكل (٣) أب ج د مستطيل أثبت أنّ Δ أب ه يكافيء

$\frac{1}{2}$ المستطيل أب ج د .



الشكل (٣)

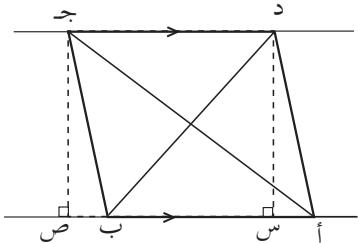
(٢) في الشكل (٤) أثبت أنّ : Δ أب م يكافيء $\frac{1}{2}$ متوازي الأضلاع ج د ه و



الشكل (٤)

(٣) أب ج د مستطيل ، رسمت النقطة ه داخل هذا المستطيل ، أثبت أنّ :
 Δ أه د + Δ ب ج ه يكافيء $\frac{1}{2}$ المستطيل أب ج د .

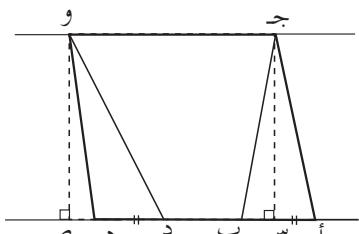
(٤) تكافؤ المثلثات :



الشكل (١)

■ في شكل (١) س ص ج د مستطيل
 $\therefore \overline{DS} = \overline{JC}$ لماذا؟
 مساحة $\Delta ABD = \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{DS}$
 مساحة $\Delta ABC = \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{JS}$
 $\therefore \Delta ABC \text{ يكفي } \Delta ABD$
نظريّة (٣) :

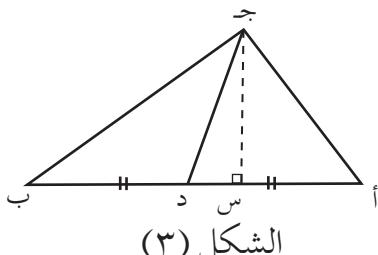
إذا اشتراك مثلثان في القاعدة ورأساهما على
مستقيمي يوازي هذه القاعدة متكافئان .



الشكل (٢)

■ في شكل (٢) س ص وج مستطيل
 $\therefore \overline{JS} = \overline{WS}$ لماذا؟
 مساحة $\Delta AHD = \frac{1}{2} \times \overline{AD} \times \overline{WS}$
 مساحة $\Delta ABC = \frac{1}{2} \times \overline{AD} \times \overline{WS}$
 $\therefore \overline{AD} = \overline{DH}$ (معطى)
 $\therefore \Delta ABC \text{ يكفي } \Delta AHD$
نظريّة (٤) :

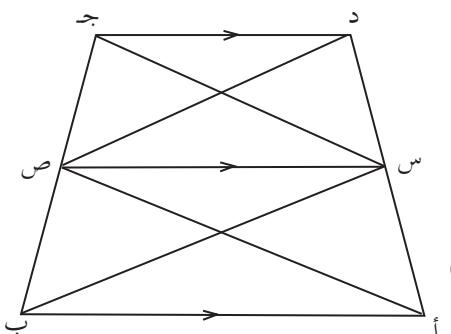
المثلثات المتساوية القواعد الواقعة بين مستقيمين متوازيين متكافئات.



الشكل (٣)

■ في الشكل (٣) :
 مساحة $\Delta ADB = \frac{1}{2} \times \overline{AD} \times \overline{JS}$
 مساحة $\Delta DCB = \frac{1}{2} \times \overline{DC} \times \overline{JS}$
 $\therefore \overline{AD} = \overline{DC}$ (معطى)
 $\therefore \Delta ADB \text{ يكفي } \Delta DCB$
نظريّة (٥) :

المستقيم الذي يصل رأس المثلث بمنتصف الضلع
المقابل ، يقسم المثلث إلى مثلثين متكافئين .



الشكل (٤)

مثال (١) : من الشكل المقابل أثبت أنّ:

$\Delta \text{ أص د} \cong \Delta \text{ ب س ج}$

البرهان : في الشكل أب ص س :

س ص // أب (معطى)

س ص قاعدة مشتركة

$\therefore \Delta \text{ أص ص يكافيء } \Delta \text{ ب ص س}$

في الشكل س ص ج د :

س ص // د ج (معطى)

س ص قاعدة مشتركة

$\therefore \Delta \text{ س ص د يكافيء } \Delta \text{ س ص ج}$ (٢)

بجمع (١) و (٢) :

$\Delta \text{ أص ص} + \Delta \text{ س ص د يكافيء } \Delta \text{ ب ص س} + \Delta \text{ س ص ج}$

$\therefore \Delta \text{ أص د يكافيء } \Delta \text{ ب س ج}$

مثال (٢) : أب ج د شبه منحرف فيه أد // ب ج ، وصل أ ج ، ب د فتقاطعاً

في هـ . أثبت أنّ : $\Delta \text{ أب هـ يكافيء } \Delta \text{ د هـ ج}$

البرهان : أد // ب ج (معطى)

د أ قاعدة مشتركة

$\therefore \Delta \text{ د أب يكافيء } \Delta \text{ د أ ج}$

طرح $\Delta \text{ د أ هـ}$ من المثلثين نجد أنّ :

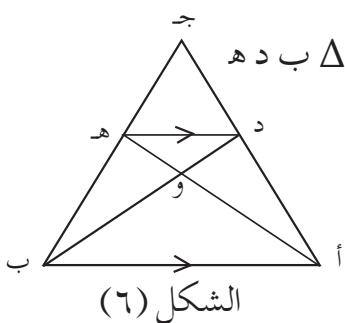
$\Delta \text{ أب هـ يكافيء } \Delta \text{ د هـ ج}$

تمرين (٤ - ٥)

(١) أب ج مثلث ، هـ منتصف الصلع أب ، دـ منتصف الصلع أ ج جـ المثلث الذي يكافيء :

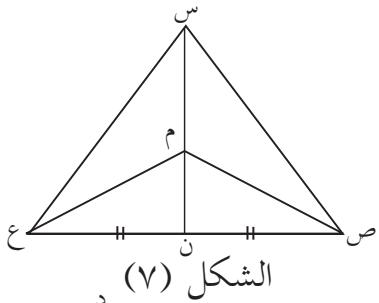
(أ) $\Delta \text{ أب د}$ (ب) $\Delta \text{ ج أ هـ}$ (ج) $\Delta \text{ ب د هـ}$

(٢) في الشكل التالي : إذا كان أب // د هـ اكتب المثلثات المتكافئة .

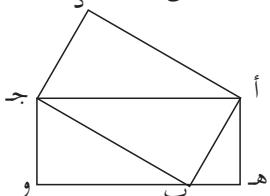


الشكل (٦)

(٣) في الشكل (٧) :
إذا كان $\overline{ص} \parallel \overline{ن}$ أثبت أنّ :
 $\Delta س ص م$ يكافئ $\Delta س ع م$



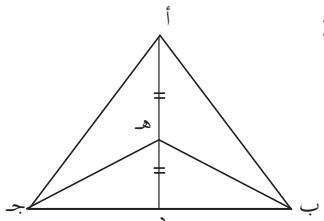
الشكل (٧)



تمرين عام

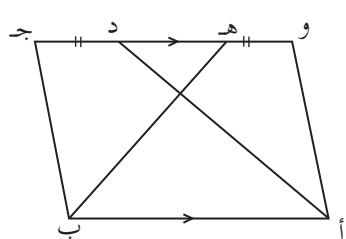
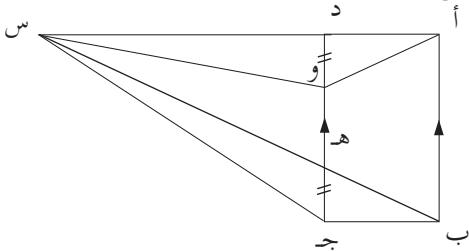
(١) في الشكل التالي أثبت أنّ :
المستطيل $A B G D$ يكافئ المستطيل $A H W B$

(٢) $A B G$ مثلث ، ل نقطة على $\overline{A B}$ ، ك نقطة على $\overline{A G}$
حيث $L ك \parallel B ج$ ، أثبت أنّ : $\Delta A L G$ يكافئ $\Delta A B K$



(٣) في الشكل التالي : إذا كان $A H = H D$ أثبت أنّ :
 $\Delta B G H$ يكافئ $\frac{1}{2} \Delta A B G$

(٤) في الشكل أدناه $A B \parallel D G$ ، $D O = H G$
أثبت أنّ : $\Delta A O S$ يكافئ $\Delta B G D$



(٥) في الشكل أدناه :
 $A B \parallel O G$ ، $O H = D G$
أثبت أنّ : الشكل $A B H D$ يكافئ الشكل $A B G D$
(إرشاد : صل $A H$ ، $B D$)

الوحدة السادسة

النظام الثنائي

الرمز	العدد
.....	1111
.....	4

X	IX	VIII	VII	VI	V	IV	III	I	I
10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

(١-٦) نبذة تاريخية عن الأعداد :

منذ أقدم العصور توصل الإنسان إلى استعمال رموز لبعض الأعداد ، فقد كان يستخدم رموزاً على هيئة خطوط مثل :

الرمز	١	١١	١١١	...
العدد	١	٢	٣	...

وهي طريقة صعبة وطويلة عندما يكون العدد كبيراً . ظهرت رموز أكثر اختصاراً عند الرومانيين القدماء مثل:

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠

ثم استخدم الهنود نوعاً جديداً من الرموز (الأرقام) ، أخذها عنهم العرب ، وأدخلوا عليها الصفر ليشغل خانة ، مما أعطى فوائد كبيرة في تسهيل الترقيم ، والعمليات الحسابية ، والأرقام التي انتشرت في الأقطار الإسلامية العربية الشرقية وهي : ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩ ...

وقد تمكّن العلماء من تطوير نظام آخر لكتابة الأرقام يسمى بالأرقام الغبارية ، نسبة لكتابتها على لوحة من الرمل ، وهي منتشرة في المغرب العربي بما في ذلك الأندلس ، ومنها دخلت إلى أوروبا وسميت بالأرقام العربية وهي :

. ٩ ، ٨ ، ٧ ، ٦ ، ٥ ، ٤ ، ٣ ، ٢ ، ١ ، ٠

وقد بني العرب والمسلمون معرفتهم للأرقام الغبارية على نظرية الزاوية.

العدد	١	٢	٣	٤	...
عدد الزوايا	١	٢	٣	٤	...

ومن ذلك نشأ ما يعرف بالنظام العشري وهو نظام أساسه ١٠ وأرقامه : ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩ وبجانبه أنظمة عددية أخرى كالنظام الثنائي الذي أساسه ٠ ، وأرقامه : ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩ وبتطور الصناعة وظهور الدوائر الكهربائية وتصميم الآلات الحاسبة والحااسب الإلكتروني ، بدأ ظهور أنظمة أخرى للترقيم منها النظام الثنائي الذي يستخدم في الحاسوبات الإلكترونية والذي أساسه ٢ ويستخدم الأرقام ٠ ، ١ .
(يأتي في الأهمية بعد النظام العشري الذي نستخدمه في حياتنا)

لاحظ: العملية $2 \times 2 \times 2$ تكتب باختصار على الصورة 2^3 .
العدد ٢ يسمى الأساس ، العدد ٣ يسمى الأس (القوة) ويشير إلى عدد مرات ضرب العدد ٢ في نفسه.

$$\text{فمثلاً: } 5^6 = 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5$$

$$10^4 = 10 \times 10 \times 10 \times 10$$

وستعرف لاحقاً أن:

$$(أي عدد) = 1 \text{ أي أن } 2 = 10, 1 = 1$$

أن كل عدد ينتمي للنظام العشري يمكن كتابته في صورة حاصل جمع لقوى العدد ١٠ (أساس النظام) . حيث معامل كل قوى أحد أرقام النظام العشري وتسمى هذه الصورة **المفکوك** أو نشر العدد

	٤١٠	٣١٠	٢١٠	١١٠	٠١٠	الخانة
القيمة	١٠٠٠٠	١٠٠٠	١٠٠	١٠	١	
...

فمثلاً: العدد ٢٣ يمكن كتابته في النظام العشري = $3 \times 10^3 + 2 \times 10^2$

$$3 \times 10^3 + 2 \times 10^2 = 315$$

$$= 10 \times 8 + 10 \times 2 + 10 \times 0 + 10 \times 3 = 8203$$

$$8203 = 8000 + 200 + 3$$

تمرين : (٦ - ١)

انشر الأعداد (اكتب مفكوك)

٩٠٢٠٦ ج / ١٠٠٦ ب / ٧٤٥ أ /

(٢ - ٦) النظام الثنائي :

النظام الثنائي هو نظام ترقيم بالأماكن اساسه ٢ وأرقامه ٠ ، ١ و قيم الأماكن

في هذا النظام هي قوى الأساس ٢ أي $2^0, 2^1, 2^2, \dots$ و حيث أن كل قوة من قوى العدد ٢ معاملها إما ٠ أو ١ فإن العدد الثنائي هو مجموع قيم الأماكن التي يظهر فيها الرقم ١ ، هذا المجموع يعطينا مباشرةً العدد العشري المكافئ لهذا العدد الثنائي .

فالعدد العشري ٠ يقابل العدد الثنائي $0 = 2^0$

والعدد العشري ١ يقابل العدد الثنائي $1 = 2^1$

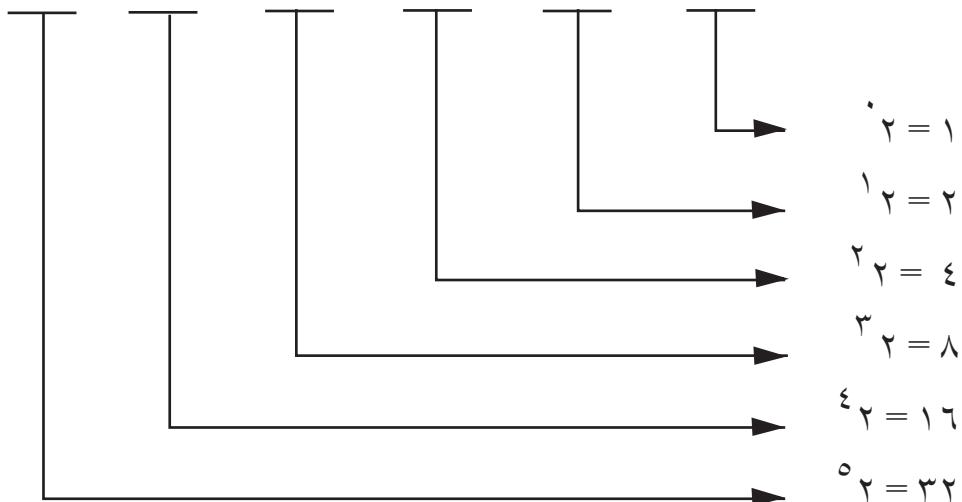
والعدد العشري ٢ يقابل العدد الثنائي $10 = 2^2 + 2^0$

والعدد العشري ٣ يقابل العدد الثنائي $11 = 2^2 + 2^1$

والعدد العشري ٤ يقابل العدد الثنائي $100 = 2^2 + 2^0 + 2^2$

والعدد العشري ٥ يقابل العدد الثنائي $101 = 2^2 + 2^0 + 2^1$ وهكذا ،

نلاحظ إن ترقيم الأماكن في النظام الثنائي يُمثل بقوى العدد ٢ كما يوضحها الشكل التالي :



المدول التالي يوضح التمثيل الثنائي للأعداد العشرية من ٠ إلى ١٠ :

العدد الثنائي				العدد
٣	٢	١	٠	العشرى
			.	.
			١	١
		١	٠	٢
		١	١	٣
	١	٠	٠	٤
	١	٠	١	٥
	١	١	٠	٦
	١	١	١	٧
١	٠	٠	٠	٨
١	٠	٠	١	٩
١	٠	١	٠	١٠

العدد الثنائي ١١٠١١ في النظام الثنائي يقرأ :
 (واحد ، واحد ، صفر ، واحد ، واحد) للأساس ٢ ويكتب

$$2^4 \times 1 + 2^3 \times 1 + 2^2 \times 0 + 2^1 \times 1 + 2^0 \times 1 = 2(11011)$$

$$27 = 16 + 8 + 2 + 1 =$$

مثال : حول الأعداد الثنائية التالية إلى النظام العشري :

(أ) $(10110)_2$ (ب) $(111010)_2$

الحل :

$$(أ) (111010)_2 = 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0$$

$$= 32 + 16 + 8 + 2 =$$

$$(ب) (10110)_2 =$$

$$2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0$$

$$= 16 + 4 + 2 =$$

وبهذه الطريقة يمكن تحويل العدد الثنائي إلى العدد المكافئ له في النظام العشري .

تمرين : (٦ - ٢)

(١) جد مفكوك ما يأتي في صورة قوى للعدد ٢ :

$$(أ) (1011)_2 \quad (ب) (110011)_2 \quad (ج) (11100)_2$$

(٢) حول ما يأتي للنظام العشري :

$$(أ) (101)_2 \quad (ب) (111)_2 \quad (ج) (10001)_2$$

$$(د) (10101)_2 \quad (ه) (11001)_2 \quad (و) (110101)_2$$

٦-٣) تحويل العدد العشري إلى ثانئي:

آلية التحويل من النظام العشري إلى النظام الثنائي تقوم على تقسيم العدد بشكل متكرر على ٢ (الباقي إما ، أو ١) وتسجيل الباقي في كل عملية إلى أن يصبح ناتج القسمة صفر . ثم نأخذ الباقي متابعة حسب ظهورها ، وتكتب من اليمين إلى اليسار لتعطينا المكافئ الثنائي .

فمثلاً العدد ١٣ :

$$\text{والباقي } ١ \quad ٦ = ٢ \quad \div ١٣$$

$$\text{والياتي} \quad . \quad ٣ \quad = \quad ٢ \quad \div \quad ٦$$

$$\text{والباقي } ١ = ٢ \div ٣$$

$$\text{الباقي : } ١ \div ٢ =$$

$$(\textcircled{1} + \textcircled{1}) = 13$$

ويمكن اختصار الخطوات السابقة كالتالي :

الباقي	=	العدد	القسمة
١		٦	٢
٠		٣	٢
١		١	٢
١		٠	٢
١٣	=	(١١٠١)	

ملاحظة:

للتحقق من الإجابة يمكن استخدام نشر العدد وتحويله إلى الصورة العشرية

$$2 \times 1 + 2 \times 1 + 2 \times 1 + 2 \times 1 = (11.1)$$

$$13 = \lambda + \xi + \cdot + 1 =$$

مثال (١) : جد المكافئ الثنائي للعدد العشري ٨٣ ثم تحقق من إجابتك
الحل :

القسمة	العدد	الباقي
٢	٨٣	
٢	٤١	١
٢	٢٠	١
٢	١٠	٠
٢	٥	٠
٢	٢	١
٢	١	٠
	٠	١

∴ المكافئ الثنائي للعدد العشري $83 = (1010011)_2$

لتتحقق :

$$2 \times 1 + 2 \times 0 + 2 \times 1 + 2 \times 0 + 2 \times 0 + 2 \times 1 + 2 \times 1 = (1010011)_2$$

$$83 = 64 + 0 + 16 + 0 + 0 + 2 + 1 =$$

مثال (٢) :

جد المكافئ الثنائي للعدد ١٠٩

القسمة	العدد	الباقي
٢	١٠٩	
٢	٥٤	١
٢	٢٧	٠
٢	١٣	١
٢	٦	١
٢	٣	٠
٢	١	١
	٠	١

$$(1101101)_2 = 109$$

هناك طريقة أخرى للتحقق أو لتحويل العدد الثنائي إلى الصورة العشرية بإتباع الخطوات التالية :

- أ / ضاعف أول رقم أقصى اليسار ثم اجمعه للرقم التالي .
- ب / ضاعف ناتج الجمع وضعه تحت الرقم التالي ثم أجمع .
- ج / كرر الخطوة الثانية حتى الرقم الأخير أقصى اليمين فيكون ناتج الجمع الأخير هو العدد العشري المكافئ .

فمثلاً : (١٠١٠١١)_٢

$$\begin{array}{r}
 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
 \times 2 & & 4 & 10 & 20 & 40 & 82 \\
 \hline
 & 2 & 5 & 10 & 20 & 41 & 83
 \end{array}$$

العدد العشري المكافئ

تمرين : (٣ - ٦)

جد المكافئ الثنائي لكل من الأعداد التالية وتحقق من إجابتك في كل مرة .

أ / ٦٣ ب / ٧٧ ج / ٩٩ د / ١٢٨ .

(٤) جمع الأعداد الثنائية :

نعلم أنه في جمع الأعداد على النظام العشري نجمع الأرقام في خانة الآحاد (أول عمود أقصى اليمين) ، فإذا زاد الجمع على ٩ يرحل رقم العشرات إلى العمود التالي وتكرر عملية الترحيل في الأعمدة الأخرى فإذا زاد ناتج الجمع عن ٩ هذا النظام يصلاح لجمع الأعداد الثنائية ولكن بمراجعة القواعد التالية :

$$\begin{array}{r} 1 + 1 = 0 \text{ ويرحل ١} \\ 1 + 1 + 1 = 1 \text{ ويرحل ١} \\ 1 = 0 + 1 \\ 1 = 0 + 1 \end{array}$$

مثال (١) : جد ناتج

$$(111)_2 + (101)_2$$

الحل :

$$\begin{array}{r} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 + \\ \hline 1 & 1 & 0 \end{array}$$

$$(1100)_2 = (111)_2 + (101)_2 \quad \therefore$$

مثال (٢) : جد ناتج

$$(10110111)_2 + (110011101)_2$$

الحل :

$$\begin{array}{r} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 + \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 = \end{array}$$

$$(10110111)_2 + (110011101)_2 = (10110100)_2 + (10110111)_2$$

مثال (٣) : جد ناتج

$$\begin{array}{r} 1001 \\ + 1101 \\ + 110 \\ + 1011 \\ \hline \end{array}$$

الحل :

$$\begin{array}{r} 1011 \\ \text{العدد الأول} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 110 \\ + \\ \hline 1001 \\ \text{العدد الثاني} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1101 \\ + \\ \hline 11110 \\ \text{العدد الثالث} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1001 \\ + \\ \hline 100111 \\ \text{العدد الرابع} \end{array}$$

تمرين (٤ - ٦)

جد حاصل جمع الأعداد التالية :

$$\begin{array}{r} 1010 \\ + \\ \hline 101 \\ \text{(١)} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 10101 \\ + \\ \hline 11011 \\ \text{(٢)} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1110 \\ + \\ \hline 1011 \\ + \\ \hline 1001 \\ \text{(٣)} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 10011 \\ + \\ \hline 10110 \\ \text{(٤)} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 100111 \\ + \\ \hline 101101 \\ + \\ \hline 11001 \\ \text{(٥)} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 11100101 \\ + \\ \hline 11011101 \\ \text{(٦)} \end{array}$$

(٤ - ٦) : طرح الأعداد الثنائية :

في الطرح الثنائي نستخدم نفس خطوات الطرح في النظام العشري ، فعندما نستلف ١ من العمود التالي يسار الصفر فإن القيمة المستلبة هي ٢ بدلاً عن ١٠ في النظام العشري ، وطرح ١ من العدد المستلف منه فمثلاً :

$$\begin{array}{r}
 \text{نستلف ١ يسار الصفر قيمته (٢)} \\
 \text{ويصبح مكان الصفر (٢) ومكان الواحد (٠)} \\
 \hline
 & 2 \\
 & 1 \\
 & 0 \\
 & 1 \\
 \hline
 & 1
 \end{array}$$

وتصبح حقائق الطرح كما يلي:

$$\begin{array}{r}
 1 = 0 - 1 \quad , \quad 0 = 0 - 0 \\
 1 - 1 = 0 \quad , \quad 0 = 1 - 1
 \end{array}$$

مع استلاف ١ من العمود التالي

مثال (١) : جد $(1011) - (11101)$

الحل :

$$\begin{array}{r}
 1 1 1 0 1 \\
 1 0 1 1 - \\
 \hline
 1 0 0 1 0
 \end{array} =$$

$$(1011) + (11101) = (11101)$$

مثال (٢) :

$$\text{جد قيمة } (1101101) - (11101101)$$

الحل :

$$\begin{array}{r}
 1 1 1 0 1 0 1 1 \\
 1 1 0 1 1 0 0 1 - \\
 \hline
 0 0 0 1 0 0 1 0
 \end{array}$$

$$(11101101) + (1101101) = (11101011)$$

مثال (٣): جد قيمة

$$\frac{1}{2}(1101011) - \frac{1}{2}(111010) + \frac{1}{2}(1101101)$$

الحل :

$$\begin{array}{r}
 1101101 \\
 111010 + \\
 \hline
 10100111 \\
 1101011 - \\
 \hline
 00111100
 \end{array}$$

تمرين : (٥ - ٦)

جد ناتج ما يأتي :

$$\frac{1}{2}(11101) - \frac{1}{2}(1100110) \quad (1)$$

$$\frac{1}{2}(100110) - \frac{1}{2}(1101011) \quad (2)$$

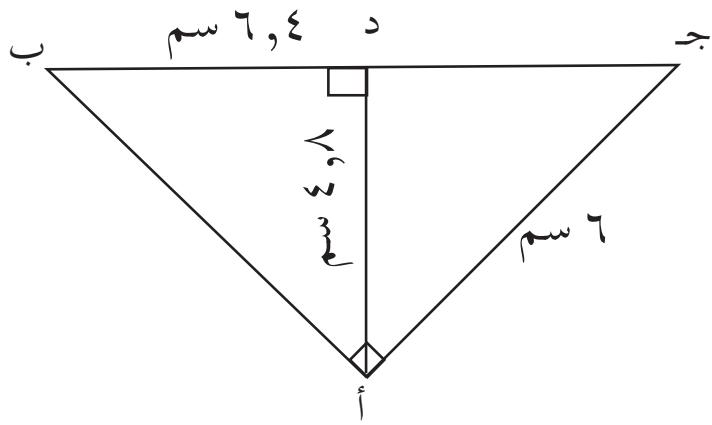
$$\frac{1}{2}(1110001) - \frac{1}{2}(10111010) \quad (3)$$

$$\frac{1}{2}(100011) - \frac{1}{2}(101110) + \frac{1}{2}(101011) \quad (4)$$

$$\frac{1}{2}(1010110001) - \frac{1}{2}(10111010110) \quad (5)$$

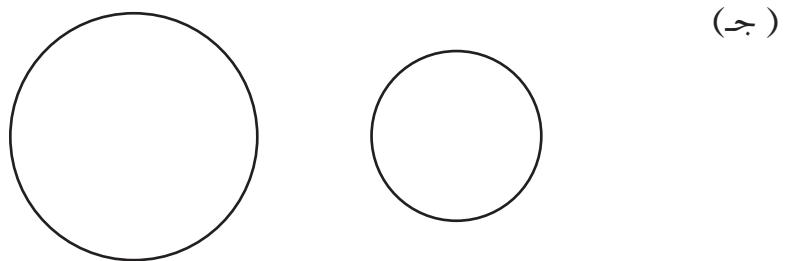
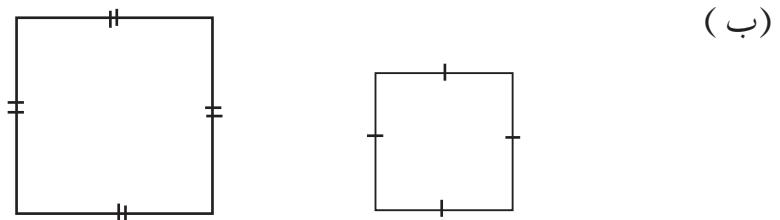
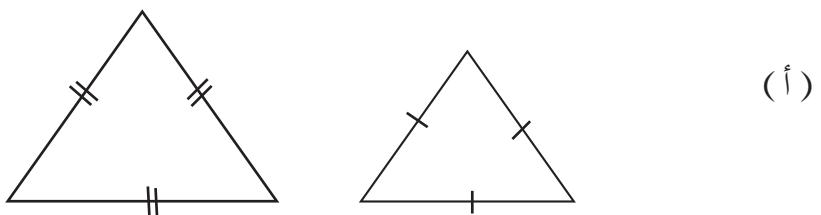
الوحدة السابعة

التشابه



(١-٧) مفهوم التشابه :

انظر لكل زوج من الأشكال الهندسية التالية . ماذا تلاحظ ؟



نلاحظ الآتي :

(أ) المثلثان متساويان الأضلاع متباينان .

(ب) المربعان متباينان .

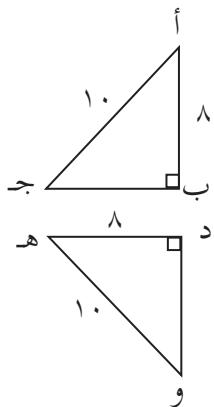
(ج) الدائريتان متباينات .

وبصورة عامة التشابه في الهندسة ذو علاقة بالتكبير أو التصغير للشكل . ورغم أن الأشكال الهندسية المستوية قد تكون متشابهة إلا أنها سبقت دراستنا على تشابه المثلثات في هذا الكتاب .

(٢-٧) تشابه المثلثات :

(أ) تشابه المثلثات بتساوي الزوايا :

في الشكل (١) :



الشكل (١)

- هل المثلثان متطابقان؟ لماذا؟

- اذكر أزواج الأضلاع المتناظرة.

- اذكر أزواج الزوايا المتناظرة.

- هل المثلثان متشابهان؟

نشاط (١) :

(١) أرسم ΔABC الذي فيه $\overline{AB} = 5$ سم ، $\angle A = 45^\circ$ ، $\angle B = 65^\circ$.

(٢) أرسم ΔDHE الذي فيه $\overline{DH} = 3$ سم ، $\angle D = 45^\circ$ ، $\angle H = 65^\circ$.

- اذكر أزواج الزوايا المتناظرة.

- ماذا تلاحظ عن الزوايا المتناظرة.

- هل المثلثان متشابهان؟

- هل المثلثان متطابقان؟

مما سبق نلاحظ الآتي :

يتشابه المثلثان إذا كانت الزوايا المتناظرة فيهما متساوية

- قس أضلاع المثلثين.

- ما هي أزواج الأضلاع المتناظرة؟

- جد النسب الآتية :

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DH}}, \frac{\overline{BC}}{\overline{HE}}, \frac{\overline{CA}}{\overline{ED}}$$

- ماذا تلاحظ عن النسب التي تحصلت عليها؟

إذا كان رسمك دقيقاً فستجده أن النسب الثلاث متساوية .

المثلثات المتشابه أضلاعها المتناظرة متناسبة

نلاحظ من النشاط (١) أن تساوي الزوايا المتناظرة يستوجب تناوب الأضلاع المتناظرة
(ب) تشابه المثلثات بتناسب الأضلاع :

نشاط (٢) :

(١) أرسم ΔABC الذي فيه $\overline{AB} = 5$ سم ، $\overline{BC} = 4$ سم ، $\overline{CA} = 6$ سم .

(٢) أرسم ΔDHE الذي فيه $\overline{DH} = 4$ سم ، $\overline{HE} = 3$ سم ، $\overline{ED} = 8$ سم .

- جد النسب الآتية :

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DH}} \quad \frac{\overline{BC}}{\overline{HE}} \quad \frac{\overline{CA}}{\overline{ED}}$$

- ماذا تلاحظ ؟

- قس زوايا المثلثين . ماذا تلاحظ عن الزوايا المتناظرة ؟

- هل المثلثان متشابهان ؟

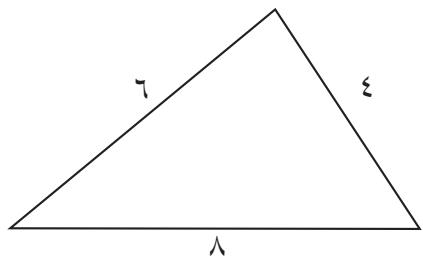
إذا تناوب أضلاع مثلثين فإنهما يتشابهان .

نلاحظ من النشاط (٢) أن تناوب الأضلاع المتناظرة في المثلثين يستوجب تساوي الزوايا المتناظرة فيهما
نستنتج من النشطتين (١) و (٢) الآتي :

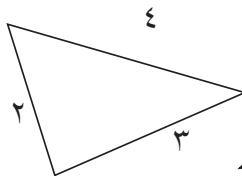
لكي يتتشابه مثلثان إما أن تكون الزوايا المتناظرة متساوية ،
أو الأضلاع المتناظرة متناسبة .

نشاط (٣) :

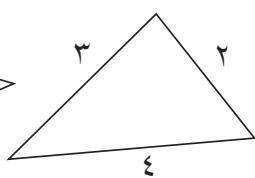
من الأشكال التالية :



(ج)



(ب)



(أ)

الشكل (٢)

- هل يتطابق المثلثان (أ) ، (ب) ؟ لماذا ؟

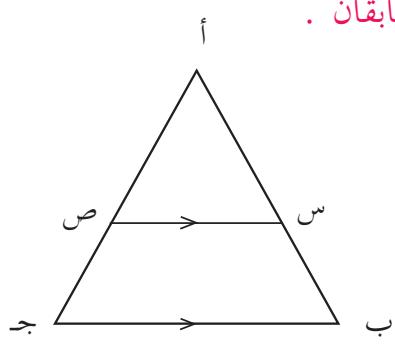
- هل يتشابه المثلثان (أ) ، (ب) ؟ لماذا ؟

كل مثلثين متطابقين متتشابهان .

- هل يتشابه المثلثان (ب) ، (ج) ؟ لماذا ؟

- هل يتطابق المثلثان (ب) ، (ج) ؟ لماذا ؟

ليس كل مثلثين متتشابهين متطابقان .



الشكل (٣)

مثال :

في ΔABC بالشكل (٣)

إذا كان $\overline{SC} \parallel \overline{BQ}$

$\overline{AB} = 10$ سم ، $\overline{AC} = 7$ سم

$\overline{BQ} = 8$ سم ، $\overline{SC} = 6$ سم

(١) أثبت أن $\Delta ABC \sim \Delta ACS$ متتشابهان .

(٢) جد أطوال (١) AC (٢) BQ

الحل : (١) $\Delta ABC \sim \Delta ACS$

$\overline{SC} \parallel \overline{BQ}$ (معطى)

$\Delta ABC \sim \Delta ACS$ (النظر)

$\Delta BQC \sim \Delta SCA$ (النظر)

$\triangle ABC \sim \triangle PQR$ (مشتركة)
:: المثلثان متباينان (الزوايا المتناظرة متساوية)

(ب) بما أن المثلثين متباينان :

$$\frac{BC}{PQ} = \frac{AC}{PR} = \frac{AB}{QR} \quad \therefore$$

$$\frac{6}{8} = \frac{10}{10} \quad \therefore \quad (1)$$

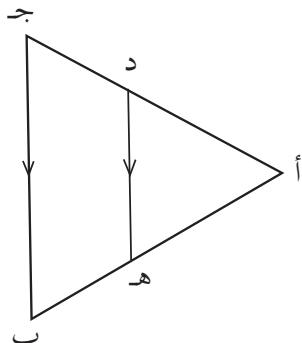
$$7 \frac{1}{2} \text{ سم} = \frac{10 \times 6}{8} = \frac{10}{\overline{AB}} \quad \therefore$$

$$\frac{8}{6} = \frac{\overline{AJ}}{\overline{AC}} \quad (2) \text{ بما أن :}$$

$$\frac{8}{6} = \frac{\overline{AJ}}{7} \quad \therefore$$

$$9 \frac{1}{3} \text{ سم} = \frac{8 \times 7}{6} = \overline{AJ} \quad \therefore$$

تمرين (١-٧)



الشكل (٤)

(١) إذا كان $\overline{HD} \parallel \overline{BJ}$ ،

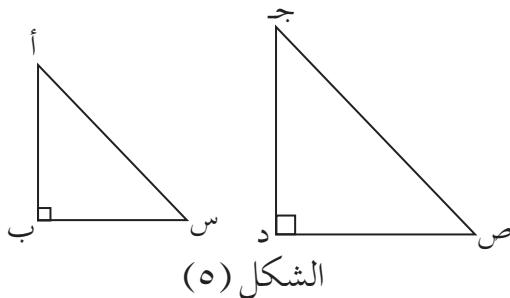
$$\overline{HD} = 5 \text{ سم} , \overline{AD} = 6 \text{ سم}$$

$$\overline{AB} = 10 \text{ سم} , \overline{BJ} = 8 \text{ سم}$$

- سـم المثلثين المتباينـين .

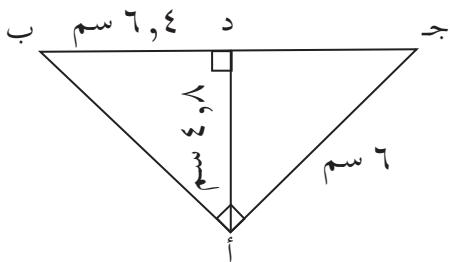
- جـد طـول (أ) \overline{AH}

(ب) \overline{AJ}



(٢) في الشكل (٥):
 أ ب ، ج د عمودان
 ب س ، د ص ظلا العمودين
 في اللحظة نفسها
 ماذا يمثل أ س ، ج ص

- (أ) أثبت أن المثلثين متتشابهان .
- (ب) إذا كان العمود أ ب = ١,٢ متر ، ج د = ١,٥ متر ، و طول ظل العمود
 أ ب = ٣ أمتار ، جد طول ظل العمود ج د .



(٣) في الشكل (٦) المقابل

الشكل (٦)

$$\angle ج أ ب = \angle د أ ب = 90^\circ$$

أثبت أن : $\Delta أ ب ج$ ، $\Delta د ب أ$ متتشابهان .

إذا كان أ ج = ٦ سم ، د أ = ٤,٨ سم
 ب د = ٤,٦ سم ، جد طول أ ب .

٣-٧) تشابه المثلثات بتناسب ضلعين وتساوي الزاوية المحصورة بينهما :

نشاط :

(١) أرسم ΔABC حيث $\angle A = 60^\circ$ سم ، $\angle B = 45^\circ$ سم ، $\angle C = 50^\circ$.

(٢) أرسم ΔDHE حيث $\angle D = 80^\circ$ سم ، $\angle H = 60^\circ$ سم ، $\angle E = 50^\circ$.

ماذا تلاحظ من النسبتين ؟

$$\frac{AB}{DE}, \frac{BC}{EH}$$

قس طول \overline{AJ} ، \overline{DW} ثم جد النسبة $\frac{\overline{AJ}}{\overline{DW}}$

ماذا تلاحظ ؟

لابد أنك لاحظت أن : $\frac{\overline{AJ}}{\overline{DW}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BJ}}{\overline{EH}}$

•• الأضلاع المتناظرة في المثلثين متناسبة .

•• المثلثان متتشابهان .

قس \overline{KB} ، \overline{HD} ، \overline{KJ} ، \overline{HD}

ماذا تلاحظ عن الزوايا المتناظرة في المثلثين ؟

•• المثلثان متتشابهان .

يشابه المثلثان إذا ساوت زاوية في أحدهما زاوية في المثلث الآخر و تناسب الضلعان اللذان يحصران الزاوية مع نظيريهما في المثلث الآخر .

مثال:

في الشكل أدناه :

$$\overline{AB} = 4,8 \text{ سم}, \overline{BD} = 8 \text{ سم}$$

$$\overline{AG} = 6 \text{ سم}, \overline{AD} = 10 \text{ سم}$$

$$\Delta BAG \sim \Delta BDA$$

أثبت أن :

$\Delta ABD \sim \Delta GBD$ متشابهان.

ثم جد طول \overline{BG} .

الشكل (١)

البرهان:

في $\Delta ABD \sim \Delta GBD$ متشابهان.

$$\Delta BAG \sim \Delta BDA \text{ (معطى)}$$

$$\frac{3}{5} = \frac{6}{10} = \frac{\overline{AG}}{\overline{AD}}$$

$$\frac{3}{5} = \frac{4,8}{8,0} = \frac{4,8}{8} = \frac{\overline{BA}}{\overline{BD}}$$

$$\frac{\overline{BA}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AG}}{\overline{AD}} \therefore$$

\therefore المثلثان متشابهان.

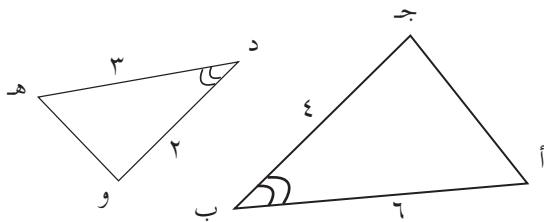
$$\frac{\overline{BA}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AG}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{BG}}{\overline{AB}} \therefore$$

$$\frac{6}{10} = \frac{\overline{BG}}{4,8} \therefore$$

$$\therefore \overline{BG} = \frac{6 \times 4,8}{10} = 2,88 \text{ سم}$$

حاول إثبات تشابه المثلثين مستخدماً تساوي الزوايا.

تمرين (٢-٧)



الشكل (٢)

(١) في الشكل (٢) التالي :

هل المثلثان متشابهان ؟ لماذا ؟

$$\Delta \text{أ ج ب} = \Delta \text{د ه و} \dots\dots\dots$$

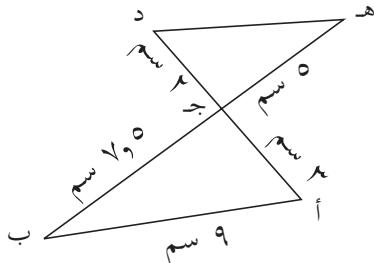
$$\Delta \text{ب أ ج} = \Delta \text{ه و د} \dots\dots\dots$$

$$\frac{\text{جد قيمة } \frac{\text{ه و}}{\text{أ ج}}}{}$$

(٢) في الشكل (٣) التالي :

أثبت أن :

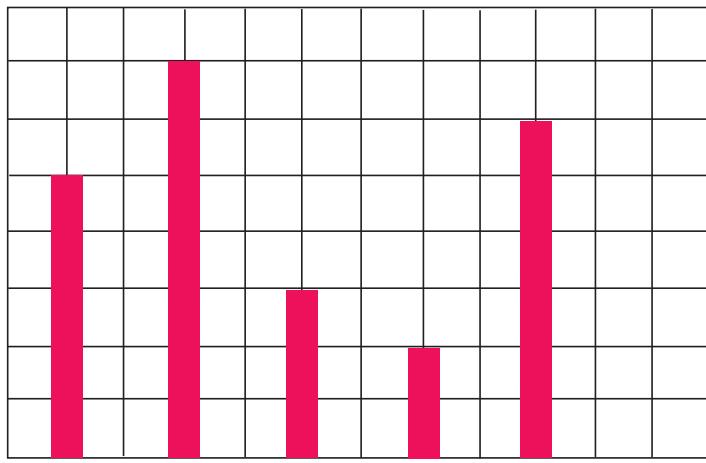
$\Delta \text{أ ب ج} \sim \Delta \text{د ه ج}$ متشابهان .
وإذا كان $\frac{\text{أ ب}}{\text{د ه}} = 9$ سم جد طول ه ج .



الشكل (٣)

الوحدة الثامنة

الإحصاء



تمهيد:

إنَّ استخدامات الإحصاء كثيرة، منها دراسة المجتمع ودراسة الطبيعة كما أنها تستخدم بفعالية في مجال الصحة والصناعة والتجارة وإدارة الاعمال والزراعة والعلوم التجريبية.

إنَّ علم الإحصاء يرتبط بتطوير طائق وأساليب جمع البيانات وتنظيمها وتحليلها وتفسيرها بطريقة يمكن معها التنبؤ بالمستقبل بما يمكن من درء خطر أو جلب مصلحة.

(١-٨) البيانات الإحصائية

- كم عدد أفراد كل أسرة في قريتك؟

- ما الدرجات التي تحصل عليها تلاميذ صفك في امتحان الرياضيات الأخير؟

- كم عدد سكان ولاية وسط دارفور؟

- كم عدد الوفيات بحيك خلال هذا العام؟

إنَّ الإجابة عن أسئلة من هذا النوع تتطلب البحث عن معلومات تجمع عن الموضوع الذي يتضمنه السؤال وهذه المعلومات التي تجمع عن موضوع محدد تسمى **البيانات الإحصائية**. وكل واحدة من هذه البيانات تسمى **مفردة**.

إنَّ علم الإحصاء يعني بجمع البيانات وعرضها بطرق مختلفة، ومن ثم استخلاص النتائج.

ويتم الحصول على البيانات الإحصائية بعد تحديد الموضوع المراد دراسته بطرق مختلفة، فقد تجمع البيانات المطلوبة كاملة من مصدرها إذا كانت بسيطة ومحدودة أو بأخذ عينة من الموضوع إذا كانت البيانات كثيرة جداً والذي يعرف **بالمجتمع الإحصائي** وجمع البيانات من العينة.

وقد نحصل على البيانات الإحصائية أيضاً من التجارب العلمية المختلفة التي تجرى للحصول على معلومات معينة.

وهنالك أدوات لجمع البيانات الإحصائية ومنها:

١) الاستبانة .

٢) السجلات الرسمية.

٣) المقابلات الفردية والجماعية.

٤) الاختبارات .

٥) الملاحظات .

ويراعى عند جمع المعلومات الصدق والسرعة وقلة التكلفة.

وفيما يلي أمثلة لبيانات إحصائية جمعت عن الموضوعات التالية:

- ١) مرضى مستشفى الكاب المصابين بالملاريا خلال العام ٢٠٢٠ م.
- ٢) متحني الشهادة الثانوية بمدرسة الفداء الثانوية خلال الأعوام ٢٠١٥، ٢٠١٦، ٢٠١٧، ٢٠١٨، ٢٠١٩ م.

- ٣) متوسط عدد المواليد بإحدى القرى خلال الأسبوع الأول من شهر مايو للعام ٢٠٢١ م.

والبيانات هي:

- ١) عدد مرضى مستشفى الكاب المصابين بالملاريا خلال العام ٢٠٢٠ م.

الشهر	عدد المصابين	الشهر	عدد المصابين	الشهر	عدد المصابين
يناير	٣٢	مايو	١١	سبتمبر	٦٢
فبراير	٥٤	يونيو	٠٧	أكتوبر	٣٧
مارس	٢٧	يوليو	٢٣	نوفمبر	٢٥
ابريل	١٦	أغسطس	٤٥	ديسمبر	٠٩

- ٢) متحني الشهادة الثانوية بمدرسة الفداء الثانوية خلال الأعوام ٢٠١٥، ٢٠١٦، ٢٠١٧، ٢٠١٨، ٢٠١٩ م.

العام	٢٠١٥	٢٠١٦	٢٠١٧	٢٠١٨	٢٠١٩
عدد المتحندين	٧٦	٦٩	٨٢	٦٣	٥٥

- ٣) متوسط عدد المواليد بإحدى القرى خلال الأسبوع الأول من شهر مايو للعام ٢٠٢١ م.

اليوم	السبت	الأحد	الاثنين	الثلاثاء	الأربعاء	الخميس	الجمعة
متوسط عدد المواليد	١٣	٢٥	١٧	١٩	١٢	٢١	٨

تمرين (١-٨)

١) اختر موقعًا يمكن الوصول إليه كالمدرسة التي أنت بها أو مدرسة مجاورة أو المركز الصحي أو مصنع قريب أو غيره وحدد موضوعاً معيناً ثم قم بجمع البيانات عنه.

٢) مستخدماً الانترنت اكتب عدد الإصابات الشهرية لمرض الكرونا (COVED- 19) في ولايتك للعام ٢٠٢٠ م.

(٢-٨) عرض البيانات واستخلاص النتائج

افترض أن البيانات التالية تمثل درجات تلاميذ صفك في امتحان العلوم حيث كانت الدرجة القصوى له ٥٠ درجة وأن الدرجات كانت:

٢٠	١٠	٣٠	٢٠	٤٠	٥٠	١٠	٢٠	١٠	٣٠
١٠	٢٠	٣٠	٢٠	١٠	٤٠	٣٠	١٠	٥٠	٤٠
٥٠	٣٠	١٠	٤٠	٥٠	٢٠	١٠	٤٠	٢٠	٥٠
١٠	٤٠	٢٠	٣٠	٤٠	٢٠	٣٠	٥٠	١٠	٣٠

جدول (١)

- ١) كم عدد التلاميذ الذين أحرزوا ٢٠ درجة؟
- ٢) كم عدد التلاميذ الذين أحرزوا ٥٠ درجة؟
- ٣) كم عدد التلاميذ الذين أحرزوا ١٠ درجات؟

هل باستطاعتك الإجابة عن تلك الأسئلة. بمجرد النظر إلى تلك البيانات بالصورة التي عرضت بها؟

ما أن تتم عملية جمع البيانات حتى يستلزم الالتفات إلى مسألة استخلاص المعلومات التي تتضمنها تلك البيانات، حيث أنه من غير الممكن أو من الصعب الحصول على المعلومات المطلوبة من البيانات خاصة إذا كانت كثيرة العدد، إذ تبذل جهود كبيرة لتنظيمها وإعادة عرض البيانات **بطرق مختلفة منها:**

- ١) الجداول التكرارية.
- ٢) الصور البيانية.
- ٣) التمثيل بالأعمدة.
- ٤) التمثيل بالدائرة.

عرض البيانات بالجداول التكرارية:

مثال (١) :

أراد تلاميذ الصف السادس وعددهم ٢٨ تلميذاً شراء هدية لأستاذهم مناسبة تقاعده للماضي. فكتب كل تلميذ اسم الهدية التي يراها مناسبة في قطعة من الورق وكانت كالتالي:

كتاب	نظارة	ساعة	كتاب	قلم	كتاب	حقيبة
كتاب	نظارة	كتاب	كتاب	نظارة	كتاب	كتاب
كتاب	كتاب	قلم	كتاب	ساعة	نظارة	كتاب
كتاب	ساعة	نظارة	حقيبة	كتاب	ساعة	كتاب

جدول (٢)

كيف يستطيع التلاميذ تحديد نوع الهدية؟
باستطاعة التلاميذ تحديد نوع الهدية بمجرد النظر لهذه الأوراق أو يحتاجون لتنظيم المعلومات (البيانات) التي تحويها هذه الأوراق.
تم تكوين لجنة لمعرفة نوع الهدية التي اختارها التلاميذ وقادت اللجنة بتكوين جدول يوضح الحقائق كالتالي:

٤	////	ساعة
٧	// ####	نظارة
٢	//	قلم
١٢	// #### ####	كتاب
٣	///	حقيبة

جدول (٣)

التصويت لاختيار الهدية
(الرمز #### تعني ٥ لتسهيل العد)

- ١) كم عدد التلاميذ الذين اختاروا النظارة هدية لاستاذهم؟
 - ٢) كم عدد التلاميذ الذين اختاروا الساعة هدية لاستاذهم؟
 - ٣) كم عدد التلاميذ الذين اختاروا الكتاب هدية لاستاذهم؟
 - ٤) كم عدد التلاميذ الذين اختاروا القلم هدية لاستاذهم؟
 - ٥) كم عدد التلاميذ الذين اختاروا الحقيقة هدية لاستاذهم؟
 - ٦) أيهما أسهل للإجابة على الأسئلة السابقة من الجدول (٣) أم من الأوراق؟
 - ٧) ما الهدية التي اختارها أكبر عدد من التلاميذ لاستاذهم؟
- عندما تنظم المعلومات أو البيانات بطريقة تسهل فهمها واستخلاص النتائج منها، نقول إننا عرضنا تلك البيانات.

الأعداد الموضحة في الجدول (٣) تسمى التكرارات ويسمى الجدول (٣) الجدول التكراري ويمكن إعادة تكوينه في الصورة الآتية:

النوع	المفردات	النوع
ساعة	////	٤
نظارة	// ////	٧
قلم	//	٢
كتاب	// //// ////	١٢
حقيقة	///	٣

جدول (٤)

مثال (٢):

البيانات التالية عبارة عن أوزان تلاميذ الصف الأول متوسط بالكيلو جرام.

٤٠	٣١	٤٠	٣٢	٤٠	٣٥	٣٧	٣١	٤٠	٣٥
٣٢	٣٧	٤٠	٣٥	٣٢	٣٧	٣٥	٤٠	٣١	٤٠
٣٧	٤٠	٣١	٣٧	٤٠	٣٢	٤٠	٣٥	٣٢	٣٥

جدول (٥)

اعرض هذه البيانات في جدول تكراري ومن ثم أجب عن الأسئلة التالية:

- ١) كم مرة تكرر الوزن ٣١ كيلو جرام؟
- ٢) كم تكرر الوزن ٣٧ كيلو جرام؟
- ٣) كم عدد التلاميذ الذين أوزانهم ٣٥ كيلو جرام؟
- ٤) كم عدد التلاميذ الذين أوزانهم ٤٠ كيلو جرام؟
- ٥) ما مجموع التكرارات؟
- ٦) كم عدد تلميذ هذا الصف؟
- ٧) ما أقل التلاميذ وزناً وأكبر التلاميذ وزناً؟

الحل:

عرض الأوزان في جدول تكراري:

التكرارات	المفردات	الأوزان بالكيلو جرام
٤		٣١
٥		٣٢
٦	/	٣٥
٥		٣٧
١٠		٤٠

جدول (٦)

- ١) تكرر الوزن ٣١ كيلو جرام ٤ مرات.
- ٢) تكرر الوزن ٣٧ كيلو جرام ٥ مرات.
- ٣) عدد التلاميذ الذين أوزانهم ٣٥ كيلو جرام ٦ تلاميذ.
- ٤) عدد التلاميذ الذين أوزانهم ٤٠ كيلو جرام ١٠ تلاميذ.
- ٥) مجموع التكرارات ٣٠ تلميذاً.
- ٦) عدد تلاميذ الصف ٣٠ تلميذاً.
- ٧) أقل التلاميذ وزناً هو ٣١ كيلو جرام. وأكبر التلاميذ وزناً هو ٤٠ كيلو جرام.

تمرين (٨-٢)

- ١) قم بزيارة المركز الصحي بقريتك أو حيك واجمع بيانات عدد المرضى خلال أسبوع ثم اعرضها في جدول ومن ثم أجب عن الآتي:
- ما اليوم الذي ارتد فيه المركز الصحي أقل عدد من المرضى؟
 - ما اليوم الذي ارتد فيه المركز الصحي أكبر عدد من المرضى؟
 - ما الفرق بين مرضى اليومين؟
- ٢) البيانات التالية توضح أجور عمال اليومية بالجنيه السوداني في مصنع من المصانع:

٢٥٠٠	٢٧٠٠	٢٠٠٠	٢٥٠٠	٢٣٠٠	٢٧٠٠	٢٠٠٠	٢٥٠٠	٢٠٠٠
٢٠٠٠	٢٥٠٠	٢٥٠٠	٢٣٠٠	٢٥٠٠	٢٠٠٠	٢٥٠٠	٢٣٠٠	٢٥٠٠
٢٥٠٠	٢٧٠٠	٢٦٠٠	٢٠٠٠	٢٧٠٠	٢٦٠٠	٢٧٠٠	٢٦٠٠	٢٥٠٠
٢٣٠٠	٢٠٠٠	٢٥٠٠	٢٥٠٠	٢٠٠٠	٢٧٠٠	٢٥٠٠	٢٣٠٠	٢٠٠٠

جدول (٧)

- كون جدولًا تكراريًا يوضح الأجر وعدد العمال.
 - كم عدد العمال الذين يتتقاضون أقل أجر؟
 - كم عدد العمال الذين يتتقاضون أكبر أجر؟
 - كم عدد عمال المصنع؟
- ٣) أكمل الجدول التكراري الآتي وهو عبارة عن بيانات حركة عبور كبرى أم الطيور بمدينة الدامر رصدتها شرطة المرور خلال ساعة.

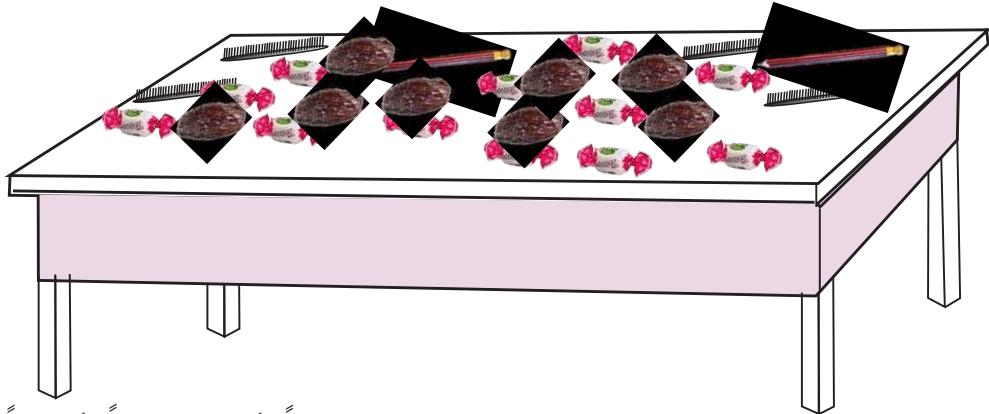
التكرارات	المفردات	النوع
	/ ////	دراجة
١٣		دراجة نارية
	// //// //// ////	سيارة
٨		حافلة
	/// ////	ناقلة

جدول (٨)

(٨ - ٣) عرض البيانات بالصور البيانية

مثال (١):

لو طلب منك معرفة عدد كل نوع من أنواع الأشياء التي على هذه المنضدة، فأول خطوة تقوم بتنفيذها هي عد هذه الأشياء كل على حدة.



ولتسهيل عملية استخلاص النتائج كما تعلمنا سابقاً نكون جدولًا تكرارياً يوضح توزيع ما على المنضدة من أشياء كما هو موضح في الجدول التالي:

النوع	المفردات	التكرارات
قلم	//	٢
بلح	/// ////	٨
مشط	////	٤
حلوى	// //// ////	١٢

جدول (١)

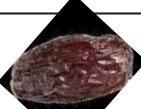
ولتوسيع هذه المعلومات أكثر يمكن تمثيلها بصور بيانية وهي تساعدنا كثيراً في مقارنة الأشياء بسرعة، واستخلاص المعلومات المهمة.

ولتمثيل البيانات في الجدول (١) بصور بيانية نتبع الخطوات التالية:

١) نحدد صورة مناسبة لتمثيل البيانات فيمكن اختيار صورة الأشياء الحقيقية للأشياء على المنضدة.

٢) نحدد عدد الصور التي تمثل كل عدد من الأشياء التي بالجدول (١) فصورة القلم الواحد تمثل قلمين وهكذا بقية الأشياء.

تمثيل المجدول (١) بالصور البيانية:

عنما تمثل البيانات بصورة نقول إننا عرضنا هذه البيانات **بالصورة البيانية**.

مثال (٢):

اختر ما يناسب من الرموز لتمثيل ١٨ دراجة، و ١٢ ولداً، و ٤ بنات بالصور البيانية.

الحل:

افرض أن الرمز  يمثل ٤ دراجات.

والرمز  يمثل ٤ أولاد.

والرمز  يمثل ٤ بنات.

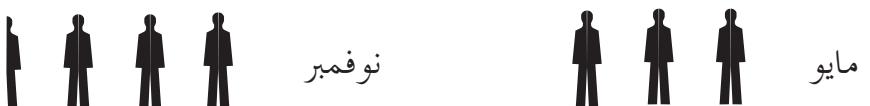
والرمز  يمثل نصف العدد الذي يمثله الرمز

وعليه نوضح ما سبق على النحو التالي:



مثال (٣):

الصور التالية توضح عدد مواليد كل شهر في قرية ما:



يمثل ١٠ مواليد



مقاييس الرسم:

يمثل ٥ مواليد

مستعيناً بعرض البيانات بالصور البيانية السابقة أجب عن الأسئلة التالية:

- ١) كم مولوداً في شهر فبراير؟
- ٢) ما الشهر الذي ولد فيه أقل عدد من المواليد؟
- ٣) ما الشهر الذي ولد فيه أكبر عدد من المواليد؟
- ٤) ما الفرق بين عدد مواليد مايو ومارس؟
- ٥) كم مجموع مواليد يوليو وأغسطس وأكتوبر؟
- ٦) أيهما أكبر عدداً مجموع مواليد يناير وابريل وديسمبر أم مواليد سبتمبر ونوفمبر؟ وكم الفرق؟

الحل:

- ١) عدد مواليد شهر فبراير = ١٥ مولوداً
- ٢) أقل عدد من المواليد ولد في ابريل وأغسطس وديسمبر.
- ٣) أكبر عدد من المواليد ولد في شهر يونيو.
- ٤) الفرق بين عدد مواليد مايو ومارس = $30 - 25 = 5$ مواليد
- ٥) مجموع مواليد يوليو وأغسطس وأكتوبر

$$= 20 + 10 + 15 + 40 = 65$$
 مولوداً
- ٦) مواليد يناير وابريل وديسمبر = $10 + 10 + 40 = 60$ مولوداً
 مواليد سبتمبر ونوفمبر = $30 + 35 = 65$ مولوداً
 مواليد سبتمبر ونوفمبر أكبر عدداً
 الفرق = $65 - 60 = 5$ مواليد

تمرين (٨-٣)

(١) الجدول الآتي يوضح إنتاج مصنع صلصة معلبة ما خلال أسبوع:

اليوم	الإنتاج بالعلبة
الاحد	٨٠
الاثنين	٩٥
الثلاثاء	١٠٠
الأربعاء	٧٥
الخميس	٦٠
الجمعة	٥٥
السبت	٨٥

جدول (٢)

اختر ما يناسب من الصور ومثل المجدول بالصور البيانية بمقاييس رسم مناسب ومن ثم أجب عن الآتي:

- ما اليوم الذي أنتج فيه المصنع أقل عدد من علب الصلصة؟
- ما اليوم الذي أنتج فيه المصنع أكبر عدد من علب الصلصة؟
- (٢) في أحد الأعوام كان عدد الحالسين لامتحان الشهادة الثانوية في بعض الولايات على النحو التالي:

الولاية	عدد الحالسين
نهر النيل	٩٠٠٠
غرب دارفور	١١٥٠٠
البحر الأحمر	١٢٠٠٠
شمال كردفان	٧٥٠٠

المجدول (٣)

مستعيناً بالرمز ليرمز لـ ١٠٠ جالس اعرض بيانات المجدول بالصور البيانية.

(٣) اختر ما يناسب من الصور وبمقاييس رسم مناسب اعرض البيانات الآتية بالصور البيانية. حظيرة حيوانات بها الأعداد الآتية من أنواع الحيوانات المختلفة:

الضأن	٢٠ من الضأن
الماعز	١٦ من الماعز
الأبقار	١٠ بقرات
الإبل	٨ من الإبل
الغزلان	٤ من الغزلان

المجدول (٤)

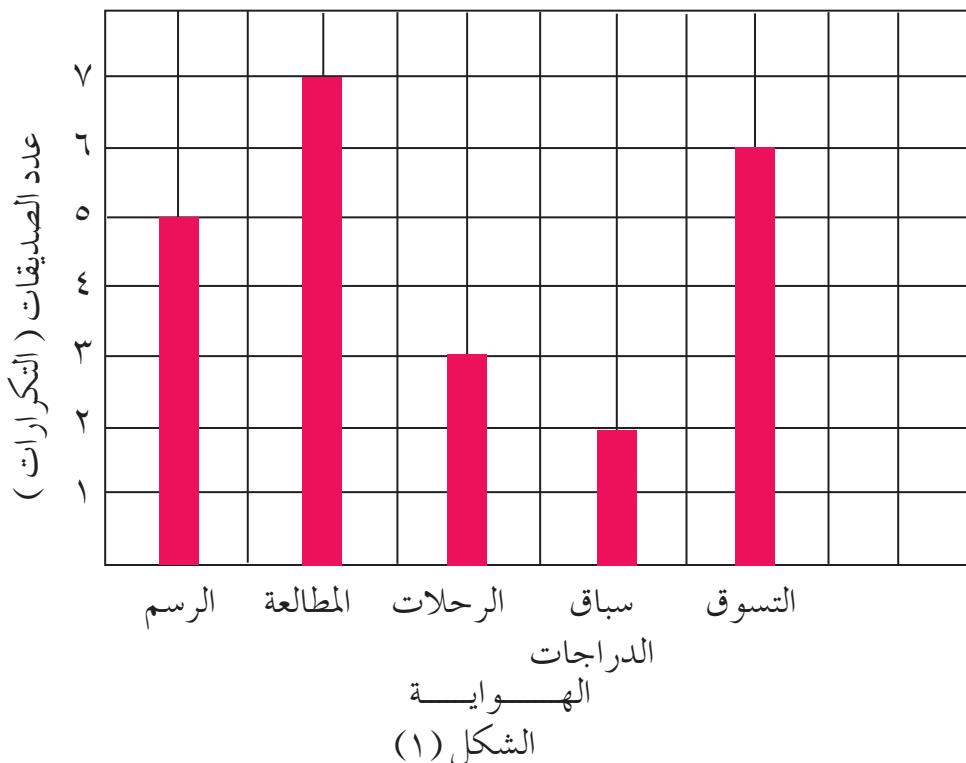
(٤-٤) عرض البيانات بالأعمدة

قامت سحر بسؤال مجموعة من صديقاتها في الصف عن هواياتهن المفضلة وجمعت المعلومات في الجدول الآتي:

الهواية	عدد الصديقات (التكرارات)
الرسم	٥
المطالعة	٧
الرحلات	٣
سباق الدراجات	٢
التسوق	٦

جدول (١)

ثم قامت بعرض المعلومات التي في الجدول (١) السابق بالطريقة التالية:



تسمى الطريقة التي مثلت بها البيانات في الشكل (١) **بالممثل البياني بالأعمدة** وتساعد هذه الطريقة في سرعة قراءة البيانات، والمقارنة بينهما بطريقة سهلة. ولتمثيل البيانات السابقة بالأعمدة البيانية نتبع **الخطوات التالية:**

- ١) رسم المحورين الأفقي والرأسي.
- ٢) اجعل المحور الأفقي يمثل الهوائيات، والمحور الرأسي يمثل التكرارات.
- ٣) خذ مقياس رسم مناسب لمحور الرأسي الذي يمثل التكرارات، وقسم المحور الأفقي إلى أقسام متساوية البعد بينها يساوي ٢ سم مثلاً، وضع نقاطاً تدل على ذلك.
- ٤) مثل الهوائيات على المحور الأفقي بحيث تمثل كل هواية بعمود أو مستطيل، قاعدته منتظمة على المحور الأفقي وارتفاعه يقابل العدد الدال على التكرار، ويفضل أن تكون قواعد المستطيلات متساوية حفاظاً على الناحية الجمالية للشكل، وأن المقارنة تكون مبنية على مساحة المستطيلات.
- ٥) يكتب عنوان للرسم في أعلى الرسم البياني.

مثال:

الجدول أدناه يوضح عدد تلاميذ كل صف بإحدى المدارس الابتدائية:

الصف	عدد التلاميذ
الأول	٢٠
الثاني	٣٠
الثالث	٥٠
الرابع	٢٠
الخامس	٤٠
السادس	٦٠

المطلوب: مثل البيانات السابقة بيانياً بالأعمدة.

ومن الرسم البياني الذي رسمته أجب عن الأسئلة الآتية:

- ١) ما عدد تلاميذ الصف الثاني؟
- ٢) أي الصفوف به ٢٠ تلميذاً؟
- ٣) أي الصففين به أكبر عدد من التلاميذ، الثالث أم الخامس؟
- ٤) أي الصفوف أقل عدداً من بين الصفوف؟ وأيها أكثر عدداً؟
- ٥) كم مجموع تلاميذ المدرسة؟

الحل:



الشكل (٢)

- ١) عدد تلاميذ الصف الثاني = ٣٠ تلميذ
- ٢) الصفوف التي بها ٢٠ تلميذاً هي الأول والرابع.
- ٣) الصف الذي به أكبر عدد من التلاميذ هو الصف الثالث.
- ٤) الصفوف التي بها أقل عدد من التلاميذ هي الأول والرابع. الصفوف التي بها أكثر عدد من التلاميذ هي الصف السادس فقط.
- ٥) مجموع تلاميذ المدرسة = ٢٢٠ تلميذ

تمرين (٤ - ٨)

١) الجدول التالي يوضح ما ادخله أدروب بالجنيهات خلال الشهور الخمسة الأولى من العام:

الشهر	الادخار بالجنيه
يناير	٢٠٠٠
فبراير	٤٠٠٠
مارس	١٠٠٠
ابريل	٥٠٠٠
مايو	٨٠٠٠

جدول (٣)

مثل البيانات السابقة بيانياً بالأعمدة ثم أجب عن الآتي:

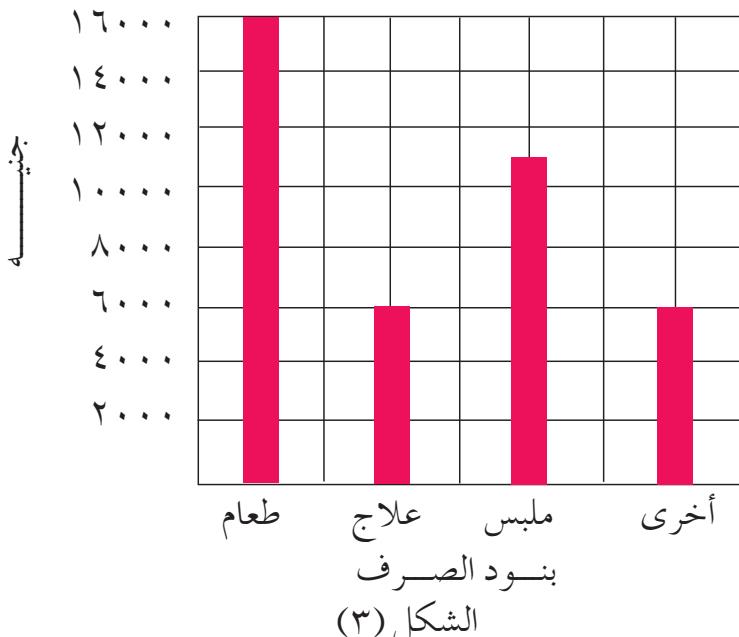
أ. ما أكبر مبلغ ادخره؟ وما أقل مبلغ ادخره؟

ب. كم مجموع ما ادخله في الشهور الخمسة؟

٢) الشكل التالي يوضح توزيع الدخل الشهري لرب أسرة.

مقاييس الرسم على الخط الرأسى:

١ سم ≡ ٢٠٠٠ جنيه



- أ . ما البند الذي صرف عليه الأب أكبر كمية من الجنيهات؟
 ب . كم صرف الأب على الملبس؟
 ج . ما دخل الأب الشهري؟
 د . ارسم جدولًا تكرارياً لهذا الصرف.

٣) راقب أحد التلاميذ حركة السيارات العابرة بنقطة عبور جبل أولياء القادة من مدينة الخرطوم خلال ساعة واحدة وقام بحصرها حسب أنواعها حسب الجدول التالي:

العدد	النوع
١٠	بص
٨	بوكس
٣	تاكسي
٦	شاحنة
٤	لوري

جدول (٤)

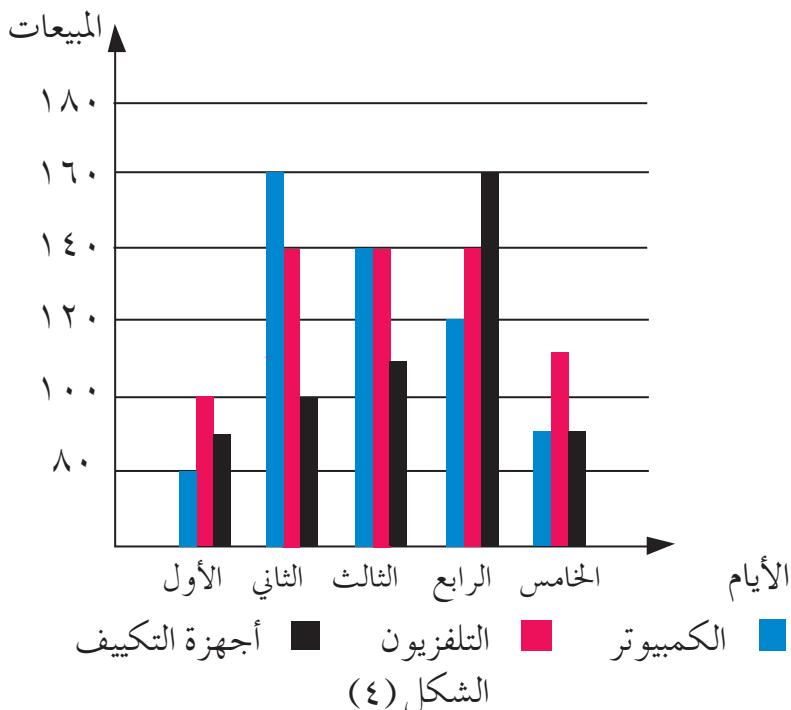
يمقياس رسم مناسب ارسم رسمًا بيانيًا بالأعمدة لهذا الجدول
 ٤) حصل تلميذ على الدرجات الآتية في ٧ اختبارات في مادة الرياضيات درجته القصوى ٤٠ درجة

٣٠ ٤٠ ٢٠ ٣٥ ٣٠ ٤٠ ٢٥

ارسم رسمًا بيانيًا بالأعمدة لهذه الدرجات. يمقياس رسم:

١ سم = ١٠ درجات

٥) الشكل التالي يوضح مبيعات الكمبيوتر، التلفزيون، وأجهزة التكييف بالآلاف الجنيهات في أحد المحلات التجارية في خمس أيام متتالية:



- أ . ما اليوم الذي تتساوی فيه مبيعات التلفزيون والكمبيوتر ؟
- ب . ما اليوم الذي تتساوی فيه مبيعات الكمبيوتر وأجهزة التكييف ؟
- ج . ما اليوم الذي تزيد فيه مبيعات الكمبيوتر عن التلفزيون ؟
- د . ما اليوم الذي تزيد فيه مبيعات أجهزة التكييف عن الكمبيوتر ؟
- ٦) البيانات الآتية توضح درجات تلاميد في امتحان اللغة العربية درجته القصوى ٥٠ درجة .

٢٠	٤٠	٥٠	٣٠	٢٠	١٠	٥٠	٣٠
٣٠	٢٠	٤٠	٥٠	٣٠	١٠	٤٠	٥٠
١٠	٥٠	٣٠	٤٠	٥٠	٥٠	١٠	٤٠
٥٠	٣٠	٤٠	٣٠	١٠	١٠	٥٠	٢٠

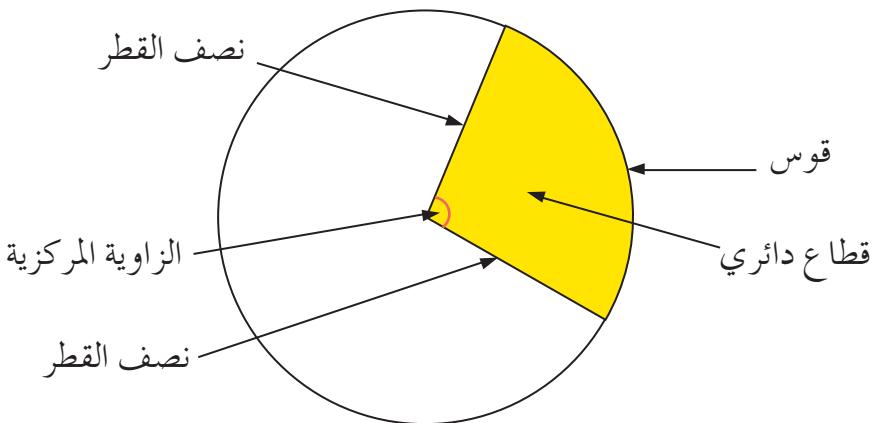
جدول (٥)

- ١ . كون جدولًا تكرارياً لتوزيع هذه الدرجات .
- ٢ . عقیاس رسم مناسب ارسم رسمًا بيانيًا بالأعمدة للجدول الذي كونته .

(٤-٥) تمثيل البيانات بطريقة القطاعات الدائرية

احياناً يتوزع المجتمع الاحصائي إلى عدة اجزاء مختلفة. وفي هذه الحالة قد نلجأ إلى تمثيل هذه الاجزاء بقطاعات من دائرة واحدة تمثل المجموع الكلي لبيانات المجتمع الاحصائي. وتكون مساحات هذه القطاعات الدائرية متناسبة مع الارقام الاحصائية المطلوب بيانها.

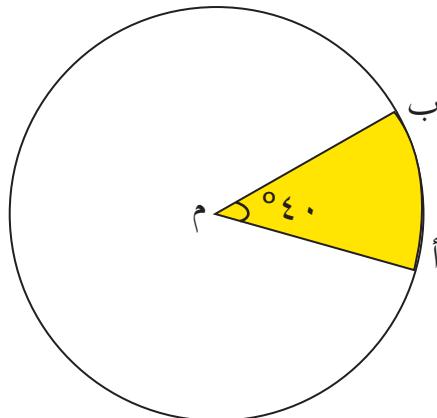
ولما كان **القطاع الدائري** هو جزء من مساحة الدائرة محصور بين نصف قطرتين وقوس من هذه الدائرة كما يبينه الشكل (١)



الشكل (١)

فإن القطاعات الدائرية المرسومة في اي دائرة تتلاقى رؤوسها عند مركز الدائرة. ومساحة كل قطاع تتناسب مع مقدار زاوية رأسه عند مركز الدائرة (**الزاوية المركزية**). ولما كان مجموع الزوايا المركزية كلها 360° . فإننا نقسم هذا العدد من الدرجات تقسيماً متناسباً مع الارقام الاحصائية التي نريد توضيحها، فيتحدد ذلك بزوايا القطاعات التي تمثل هذه الارقام. ولكي نرسم قطاعاً دائرياً زاويته المركزية 40° نتبع الخطوات الآتية:

١. نرسم دائرة مركزها M بنصف قطر مناسب.
 ٢. نرسم نصف قطر $M A$.
 ٣. نرسم بالمنقلة $\angle A M B = 40^\circ$, بحيث تكون ب على الدائرة.
- ويكون القطاع الدائري المطلوب هو الجزء المظلل في الشكل (٢)



الشكل (٢)

مثال (١): اجرينا احصاء عن جنسية المسافرين في إحدى رحلات الخطوط الجوية السودانية وأنشأنا الجدول (١) الآتي:

النوع	الجنسية
٦٠	سودانية
٤٠	سعودية
٢٠	قطرية
٥٠	مصرية
١٠	سورية
١٨٠	المجموع

جدول (١)

ولزيادة الأمر وضوحاً مثلنا الجنسيات المختلفة بقطاعات دائيرية تتناسب مساحتها أو زواياها مع تكرار الجنسية المعينة. مثلاً: السودانيون ٦٠ من ١٨٠ وبما أن ١٨٠ تقابلها 180° من الدائرة، لذلك فإن ٦٠ تقابلها ١٢٠ لأن:

$$\frac{120}{360} = \frac{60}{180}$$

$$^{\circ}120 = \frac{60}{180} \times 360$$

لذلك نمثل السودانيين بقطاع دائري زاويته المركبة = $^{\circ}120$
كذلك نمثل السعوديين بقطاع دائري زاويته المركبة

$$^{\circ}80 = \frac{40}{180} \times 360 =$$

والقطريون بقطاع دائري زاويته

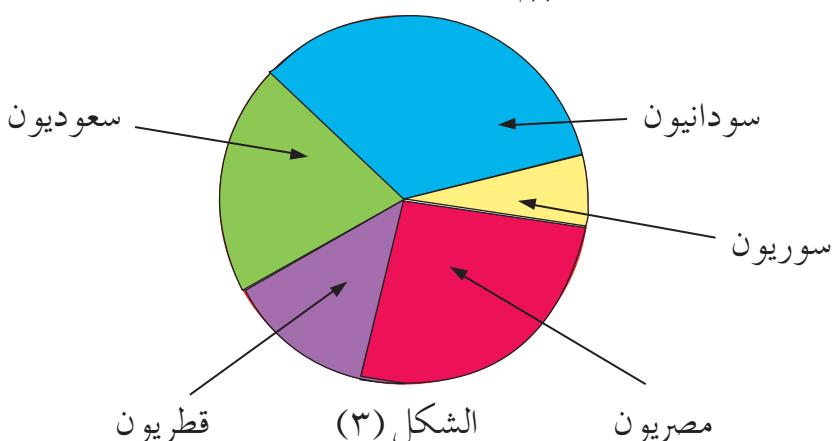
$$^{\circ}40 = \frac{20}{180} \times 360 =$$

والمصريون بقطاع دائري زاويته

$$^{\circ}100 = \frac{50}{180} \times 360 =$$

والسوريون بقطاع دائري زاويته

$$^{\circ}20 = \frac{10}{180} \times 360 =$$



الشكل أعلاه يسمى تمثيل البيانات الاحصائية بطريقة **القطاعات الدائرية**.

مثال (٢): اشتري اسماعيل وطه وبراءة فطيرة بيتزا ثمنها ٨٠٠ جنيه، فدفع اسماعيل ٤٠٠ جنيه ودفع طه ٢٤٠ جنيه ودفع براءة باقي الثمن. حيث قسمت بمقدار ما دفعه كل منهم، ووضح نصيب كل واحد بطريقة القطاعات الدائرية.

الحل: جملة المبلغ ٨٠٠ جنيه
ما دفعه اسماعيل ٤٠٠ جنيه
ما دفعه طه ٢٤٠ جنيه

$$\therefore \text{ما دفعته براءة} = ٨٠٠ - (٤٠٠ + ٢٤٠) = ١٦٠ \text{ جنيه}$$

وبما أن ٨٠٠ جنيه تمثلها في الدائرة °٣٦٠

∴ الزاوية المركزية للقطاع الذي يمثل نصيب اسماعيل

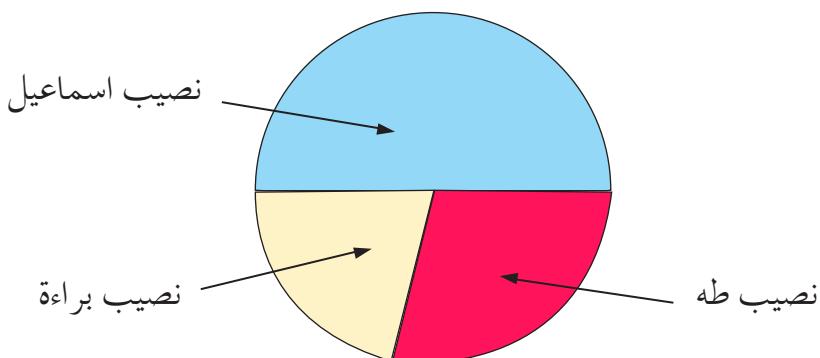
$$^{\circ}١٨٠ = \frac{٤٠٠}{٨٠٠} \times ٣٦٠ =$$

الزاوية المركزية للقطاع الذي يمثل نصيب طه

$$^{\circ}١٠٨ = \frac{٢٤٠}{٨٠٠} \times ٣٦٠ =$$

الزاوية المركزية للقطاع الذي يمثل نصيب براءة

$$^{\circ}٧٢ = \frac{١٦٠}{٨٠٠} \times ٣٦٠ =$$



الشكل (٤)

حل آخر:

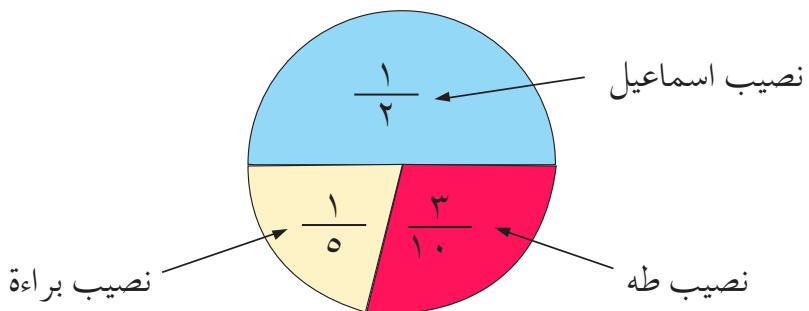
جملة المبلغ = ٨٠٠ جنيه

ما دفعته براءة = (٤٠٠ + ٢٤٠) - ٨٠٠ = ١٦٠ جنيه

نصيب اسماعيل = $\frac{1}{2}$ من الفطيرة = $\frac{4}{8} \text{ ج.}$ الفطيرة

نصيب طه = $\frac{24}{8} \text{ ج.}$ من الفطيرة = $\frac{3}{10}$ الفطيرة

نصيب براءة = $\frac{1}{5}$ من الفطيرة = $\frac{16}{80} \text{ ج.}$ الفطيرة



شكل (٥)

تمرين (٨ - ٥)

(١) قامت انتصار بتوزيع مبلغ ٦٠٠٠ جنية على ثلاث أسر فقيرة وكان نصيب كل أسرة حسب عدد أفرادها موضح في الجدول أدناه:

الثالثة	الثانية	الأولى	الأسرة
١٠٠٠	٢٠٠٠	٣٠٠٠	نصيب الأسرة

جدول (٢)

مثل البيانات السابقة في رسم بياني بطريقة القطاعات الدائرية.

(٢) في بحث ميداني بأحد الأحياء وجد أن أنواع وقود الطهي المستخدمة في المنازل على النحو التالي:

% ٥٠	غاز
% ٥	كهرباء
% ٣٠	فحم
% ١٥	حطب

جدول (٣)

وضّح هذا التوزيع برسم بياني بطريقة القطاعات الدائرية.

(٣) الجدول التكراري التالي يبيّن توزيع درجات تلاميذ الصف الأول متوسط في اختبار مادة الرياضيات. مثل هذا الجدول في رسم بياني بطريقة القطاعات الدائرية.

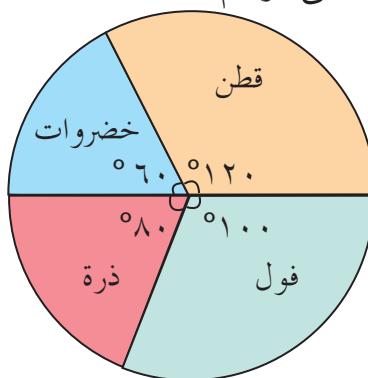
الدرجات	٥٠	٤٠	٣٠	٢٠	١٠	٠
التكرارات	٣	٩	١٥	٧	٤	٢

جدول (٤)

ومن ثم أجب عن الأسئلة التالية:

- أ. كم عدد التلاميذ الذين احرزوا درجات أقل من ١٠ درجات؟
 ب. أيهما أكثر عدد التلاميذ الناجحين أم التلاميذ الراسبين إذا كانت درجة النجاح ٣٠ درجة؟

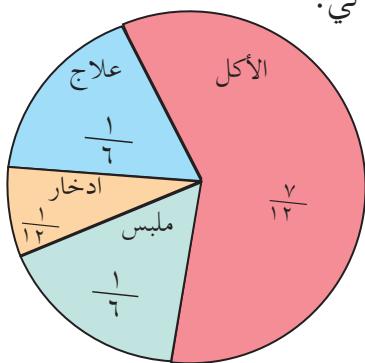
٤) الشكل التالي يمثل رسمًا بيانيًّا بطريقة القطاعات الدائرية، يوضح توزيع مساحة مزرعة للمحاصيل المبينة على الرسم.



الشكل (٦)

- أ. أيهما أكبر مساحة الأرض المزروعة قطن أم المزروعة فول؟
 ب. أيهما أصغر مساحة الأرض المزروعة خضروات أم المزروعة ذرة؟
 ج. إذا كانت مساحة المزرعة ١٢ فدانًا، فكم المساحة المزروعة خضروات؟

٥) الشكل أدناه يمثل توزيع الدخل الشهري لإحدى الأسر عدد أفرادها ستة، ادرس الشكل ثم أجب عن الآتي:



الشكل (٧)

- أ . في أي الجوانب تصرف هذه الأسرة أكثر وفي أيها تصرف أقل ؟
 ب. إذا كان الدخل الشهري لهذه الأسرة هو ٣٠٠٠ جنية شهرياً جد ما تدخره
 شهرياً ؟
 ج . ما البند الذي سينقص في الشكل إذا زاد عدد أفراد الأسرة شخصين، وظل
 الدخل ثابتاً ؟
- ٦) ينفق طالب جامعي مصروفه الشهري والبالغ ١٨٠٠٠ جنيه كالآتي:

$\frac{1}{6}$ المبلغ للمواصلات.

$\frac{1}{9}$ المبلغ للكتب والمذكرات.

$\frac{2}{3}$ المبلغ للأكل.

والباقي للترفيه.

- أ . مثل ذلك بقطاعات دائرية.
 ب. كم جنيهاً أنفقها الطالب خلال هذا الشهر للمواصلات والترفيه ؟