جمهورية السودان

وزارة التعليم العام

المركز القومي للمناهج والبحث التربوي

بخت الرضا

التعليم الثانوي

الرياضيات الأساسية

$$\bar{س} = \frac{\sum_{ر=1}^{ن} س_ر}{ن}$$

الصف الثالث

بسم الله الرحمن الرحيم

المركز القومي للمناهج والبحث التربوي

بخت الرضا

كتاب الرياضيات

الأساسية للصف الثالث

إعـــداد :

أ. علي محمد الجاك	المركز القومي للمناهج والبحث التربوي
د. عبد الله محمود عبد المجيد	المركز القومي للمناهج والبحث التربوي
د. عبد الرحمن الهادي أحمد	المركز القومي للمناهج والبحث التربوي
د. إبراهيم عثمان حسن	كلية التربية / جامعة الخرطوم

المراجعون :

د. بشرى الفاضل إبراهيم	المركز القومي للمناهج والبحث التربوي
أ. عبد الكريم أحميدي طه	توجيه الرياضيات / ولاية الخرطوم
أ. عبد الكريم عباس خليفة	التعليم الثانوي / ولاية الخرطوم
د. شوقي حسين عبد الله	كلية العلوم والتكنولوجيا / جامعة السودان

تصميم الغلاف :

أ. مجدي محجوب فتح الرحمن	المركز القومي للمناهج والبحث التربوي

الجمع بالحاسوب :

إلهام عبد الرحيم علي	المركز القومي للمناهج والبحث التربوي

أكتوبر ٢٠٠٩م

المحتويــــات

المقدمة

الحمد لله الذي بنعمته تتم الصالحات ، والصلاة والسلام على اشرف خلق الله سيدنا محمد صلى الله عليه وسلم وعلى آله وأصحابه أجمعين .

أما بعد .

فاستكمالاً لمناهج المرحلة الثانوية ، يسعدنا أن نقدم لأبنائنا الطلاب والمعلمين كتاب الرياضيات للصف الثالث الثانوي **(الأساسية)** في إطار خطة التطوير التربوي للتعليم الثانوي من جانب ، وتمشياً مع التطور الكبير الذي حدث في محتوى مادة الرياضيات في النصف الأخير من القرن العشرين من جانب آخر ، هذا التطور الذي شمل طريقة عرضها وأسلوبها ولغتها كذلك . ولم تتح الفرصة لمناهج المرحلة الثانوية في السودان لمواكبته طوال الفترة الماضية لذلك حاولنا أن يكون منهجنا في الرياضيات مواكباً لذلك التطور.

لقد تم إعداد مقرر الرياضيات للصف الثالث الثانوي . ويشمل هذا المقرر المفاهيم التي تستكمل البناء الرأسي للمحتوى المعرفي الذي يجب أن يلم به الطالب وهو على أعتاب مرحلة التعليم العالي أو ممارسة الحياة العملية والمشاركة الفاعلة في المجتمع .

لقد تم إعداد هذا الكتاب ليشمل التفاضل والتكامل ، والإحصاء ، والاحتمالات ، والمصفوفات ، آخذين في الاعتبار أن يشمل كل المفاهيم التي يحتاجها الطالب لمواصلة دراسته في الكليات الأدبية .

لقد عرضت مادة الكتاب ؛ من خلال دروس تحتوى كل منها على فكرة واحدة في الغالب ، ويتوافر في كل درس عدد مناسب من الأمثلة والمسائل لتعميق التدريب في الصف ، أو تعطى على شكل واجب منزلي . وقد توخينا في هذا الكتاب ربط موضوعاته بموضوعات كتب الرياضيات للصفوف السابقة مع الاهتمام بالبرهان الرياضي للحقائق العلمية ومراعاة التوازن بين المفاهيم والمهارات آملين أن نكون قد وفقنا في ذلك كله مرحبين بكل نقد بناء من الموجهين والمعلمين والطلاب وأولياء الأمور لإثراء الكتاب وتطويره .

والله الموفق

المؤلفون

الوحدة الأولي

الدوال الحقيقية والنهايات

أهداف الوحدة الأولى

بعد دراسة هذه الوحدة نتوقع أن يكون الطالب قادراً على أن :

١/ يميز الدالة الحقيقة ويجد صورة العنصر بالقيمة الحقيقية .
٢/ يعرف نهاية الدالة عندما س تؤول إلى قيمة معينة .
٣/ يجد الدالة الناتجة من تركيب دالتيين .
٤/ يجد نهاية الدالة كثيرة الحدود والدالة الكسرية البسيطة في الحالات التي يكون ناتج التعويض فيها عدداً حقيقياً $\left(\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}\right)$ أو $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.
٥/ يطبق بعض القواعد المتعلقة بنهاية الدوال في حالات الدوال الناتجة من تركيب أكثر من دالة لجمع وطرح الدالتين وضرب وقسمة الدالتين .
٦/ يجد نهايات بعض الدوال المثلثية مثل جا س ، جتا س ، ظا س ، (جاس ÷ س) وذلك عندما س تؤول إلى صفر .

الوحدة الأولى

حساب التفاضل والتكامل (الحسبان)

الدوال الحقيقية والنهايات

(١-١) مقدمة تاريخية :

أطلق الرياضيون على حساب التفاضل والتكامل (الحسبان) ، وهو علم دراسة التغيرات والحركة ، ويدخل في دراسة الكثير من الظواهر الطبيعية والاقتصادية والاجتماعية والنفسية . وله دور عظيم في تطوير الفيزياء والعلوم الهندسية ، كما يدخل في بناء النماذج الرياضية وفي مجالات شتى مثل إدارة الأعمال والطب والأحياء وحتى العلوم السياسية . لذلك يعتبر التفاضل والتكامل محور الرياضيات الأولية بسبب أفكاره وأساليبه وتطبيقاته .

ولم تظهر فكرة التفاضل والتكامل حديثاً إلا في القرن السابع عشر كما يعتقد معظم الرياضيين لكنها ظهرت قبل الميلاد عندما استخدم الإغريق فكرة التكامل عند إيجادهم للمساحة المحددة بمنحنيات .

ويقال أن ثابت بن قرة (٨٢٦ – ٩٠١) م – وهو من علماء المسلمين – وضع أساس علم التفاضل . فقد تمكن من إيجاد حجم الجسم المتولد من دوران القطع المكافئ حول محوره .

ولم يكن التفاضل والتكامل في ذلك الوقت علماً منفصلاً بذاته بل كان جزءاً من علم الجبر إلى أن جاء كل من العالم الانجليزى اسحق نيوتن (١٦٤٢ – ١٧٢٧) م والفيلسوف الألماني جوتفرد ليبتنز (١٦٤٦ – ١٧١٦) م واكتشف كل منهما مستقلاً عن الأخر علم التفاضل والتكامل . وكان هذا الاكتشاف بداية لعصر جديد في العلوم والرياضيات .

وكتب ليبتنز أول كتاب في هذا العلم عام ١٦٨٤م ونشر عام ١٦٩٣م . كما قام نفس العالم بنشر مقالات عن الحساب المجموعة ثم عدل العنوان في عام ١٦٩٦م إلى حساب التفاضل . وهو الذي وضع الرموز المختلفة لهذا العلم مثل :

د (س) ، د س ، $\int$.

أما إسحق نيوتن فقد توصل إلى حساب التفاضل والتكامل في بحثه عن حلول لمسائل في الفيزياء والفلك . وقد تمكن من استخدامه في وصف حركة الكواكب حول الشمس .

وقد أثبت علم التفاضل والتكامل وعلم الهندسة التحليلية أنهما وسيلتان لهما قوة مذهلة وقدرة فائقة على حل حشد كبير من المسائل والمشكلات التي كانت محيرة وتبدو غير قابلة للحل في ذلك الوقت .

ونسبة لهذه الخصائص المميزة لعلم التفاضل والتكامل ، فقد جذب إليه الكثير من الرياضيين والباحثين، مثل العالم الالمانى اويلر (١٧٠٧ – ١٧٨٣) م ، الذي بحث في كل ميادين الرياضيات الموجودة في عصره وركز في أبحاثه على التفاضل والتكامل حيث قدم التفاضل الجزئي وحساب التغيير وتطبيقاتها . أما العالم لويس لاجرانج (١٧٣٦ – ١٨١٣) م فقد ساهم في تطوير جميع فروع الرياضيات بالإضافة إلى تطويره لحساب التفاضل والتكامل .

وشهد القرن التاسع عشر تقدماً عظيماً في التحليل الرياضي (التفاضل والتكامل والهندسة التحليلية) ، ففي عام ١٨٢١م اكتشف العالم كوشي (١٧٨٩ – ١٨٥٧) م نظرية النهايات ، وعرف بعض المفاهيم الأساسية مثل التقارب والتباعد والتكامل المحدد باستخدام النهايات .

أما العالم الالمانى ريمان (١٨٢٦ – ١٨٦٦) م فقد اكتشف التكامل الريمانى .

ويتميز القرن العشرين بانطلاقة واسعة في مجال التطبيق العملي لمعظم فروع الرياضيات – رغم طبيعتها التجريدية – ومن بينها الحسبان الذي قال عنه الرياضي المشهور جون طون نيومان (١٩٠٣ – ١٩٥٧) م " الحسبان هو أول انجاز في الرياضيات الحديثة " .

ونبدأ دراستنا للحسبان بتعرّف الدوال الحقيقية والنهايات لصلتها الوثيقة بحساب التفاضل والتكامل ونتعرض بشئ من التفصيل لمفهوم التفاضل وقواعده الأساسية وتطبيقاته ، ومن ثم نتناول مفهوم التكامل كعملية عكسية للتفاضل ونختتم دراستنا للحسبان التي تشمل الفصول الخمسة الأولى من هذا الكتاب بتعرّف التكامل المحدد وتطبيقاته .

(١ – ٢) التطبيق (الدالة) :

درسنا سابقاً ، وبشئ من التفصيل التطبيقات (الدوال). تعرف الدالة على أنها علاقة من مجموعة غير خالية س إلى مجموعة غير خالية ص يقترن فيها كل عنصر في س بعنصر واحد فقط من ص .

ونقول إن المتغير ص دالة في المتغير س . يسمى س بالمتغير المستقل و ص بالمتغير التابع .

وستقتصر دراستنا في الحسبان على الدوال الحقيقية ، وهى الدوال التى يكون مجالها ومجالها المقابل مجموعتين جزئيتين من مجموعة الأعداد الحقيقية ح .

وتمثل قاعدة الدالة في أغلب الأحيان بتتابع عمليات حسابية نجريها على عنصر س من المجال س لنصل إلى صورته ص في المجال المقابل ص

مثال (١) :

فصورة العنصر ٣ وفق الدالة د (س) = س^{٢} + ٢س

هي د (٣) = ٣^{٢} + ٢ × ٣ = ١٥ .

وصورة العنصر –٢ بالدالة ص = هـ (س) = $\dfrac{\text{٢س + ١}}{\text{س – ١}}$ (س $\neq$ ١)

هي هـ (–٢) = $\dfrac{\text{٢ × (–٢) + ١}}{\text{–٢ – ١}}$ = $\dfrac{\text{-٣}}{\text{-٣}}$ = ١

الدالة العددية (الدالة الحقيقية)

إذا عرف تطبيق د من مجموعة جزئية من ح مجموعة الأعداد الحقيقية إلى مجموعة جزئية أخرى منها فإننا نسمى مثل هذا التطبيق دالة عددية ذات متغير حقيقي .

قد نعرف مثل هذه الدالة بعلاقة بين س متغير المجال ، ص صورته في المجال المقابل مثل .

ص = د (س) .

حيث د (س) ناتج عمليات متتالية نجريها على س . تسمى س متغير هذه الدالة .

فالدالة الحقيقية هي دالة عددية متغيرها عدد حقيقي ومعرفة بعلاقة رياضية . وكثيرا ما نهمل عند تعريف دالة عددية المجال والمجال المقابل ونعطى فقط قاعدة الربط بشكل علاقة رياضية . نعتبر في هذه الحالة إن مجال الدالة هي أوسع مجموعة جزئية من ح يمكننا إن نجرى عليها العمليات الداخلة في القاعدة. وبصورة خاصة إذا كانت الدالة من الشكل :

د (س) = $أ_ن$ $س^ن$ + $أ_{ن-١}$ $س^{ن-١}$ + ... + $أ_١$ س + $أ_٠$. (س ∈ ح)

قلنا إن هذه الدالة كثيرة حدود أو دالة حدودية وننسبها إلى أعلى قوة في د (س) فإذا كانت في كثيرة الحدود الواردة أعلاه $أ_ن$ ≠ ٠ قلنا أنها كثيرة حدود من الدرجة ن .

مثال : (٢)

لتكن الدالة د المعرفة بالقاعدة

ص = ٣ س + ٧ .

يمكننا ذكر هذه القاعدة بقولنا : نحصل على صورة س بضرب س بالعدد ٣ وإضافة الناتج إلى ٧ . يدخل في هذه القاعدة عمليتان هما الضرب والجمع .

ونلاحظ أنه يمكن إجراء هاتين العمليتين على كل قيمة تأخذها س من ح لذا نقول أن مجال هذه الدالة هي المجموعة ح كاملة .

فلو أخذنا مثلا العدد ٢ قيمة لـ س فإننا نجد صورة هذا العدد وفق الدالة المفروضة بان نضربه بالعدد ٣ ثم نضيف إلى الناتج ٧ أي ٣ × ٢ + ٧ = ١٣

ونقول عندها أن العدد ١٣ هو صورة العدد ٢ وفق الدالة د ونكتب :

د (٢) = ١٣

د (– ٣) = ٣ × (– ٣) + ٧ = – ٢ .

أي أن العدد –٢ هو صورة العدد –٣ وفق الدالة د .

مثال : (٣)

إذا عرفنا دالة ت بالقاعدة :

$$ص = ت (س) = \frac{٣س^{٢} + ١}{س + ٢}$$

فإننا نلاحظ أنه يدخل في هذه القاعدة الجمع والطرح والضرب والقسمة. وأنه يمكن إجراء كل هذه العمليات على قيم س مهما اختلفت إلا على القيمة المساوية ٢ لأنه عندها سنحتاج للقسمة على ٢ − ٢ = ٠ وهذا غير ممكن .
لذا نقول إن مجال الدالة هو ح −{ ٢} أي المجموعة ح بعد رفع العدد ٢ منها .
وعلى الطالب حساب ما يلي :

ت (١) ، ت (٠) ، ت (−٣) ، ت (٥)

مجموعة تعريف الدالة ومدى الدالة :

نسمى مجموعة المجال للدالة مجموعة تعريف هذه الدالة ونسمى مجموعة صور عناصر المجال وفق هذه الدالة مدى هذه الدالة . فإذا عدنا إلى الدالة ص = ٣ س + ٧ .

فإن مدى هذه الدالة يساوى مجالها المقابل ، أي أن مجموعة الأعداد الحقيقية ح كاملة . إذ أنه مهما كانت القيمة التي نطيعها لـ ص فإنه يمكننا أن نجد قيمة س تقبل قيمة ص المفروضة صورة لها وذلك بحل معادلة قاعدة التطبيق باعتبار س مجهولا .

مثال (٤) :

إذا كان ص = د (س) = $س^{٢}$ − ٥ فجد :

د (٣) ، د (٥) ، د (٤ + و)

الحل :

د (٣) = $٣^{٢}$ − ٥ = ٩ − ٥ = ٤

د (٥) = $٥^{٢}$ − ٥ = ٢٥ − ٥ = ٢٠

د (٤ + و) = $(٤ + و)^{٢}$ − ٥

= ١٦ + ٨ و + $و^{٢}$ − ٥

= ١١ + ٨ و + $و^{٢}$

تمرين (١ – ١)

(١) إذا كان ص = د (س) = $س^{٢}$ – ٥ فجد :

د (٠) ، د (٢) ، د (د (٢)) ، د (– ٣)
د (٣ أ) .

(٢) إذا كان د (س) = $\frac{١ - س}{٢ + س}$ فجد :

د (٠) ، د (–١) ، د (٢ و) ، د (س + و)

(٣) إذا كان د (س) = $\frac{س٢ + ١}{٢ س - ١}$

جد د (٣) ، د (٢ + د) ، د (–١) .

(٤) إذا كانت د (س) = أ س + ب فجد :

$\frac{د (س + و) - د (س)}{و}$ حيث و $\neq$ ٠

(١ – ٣) العمليات على الدوال :

لتكن د ، هـ الدالتين المعرفتين بـــ :
د (س) = $س^{٢}$ ، هـ (س) = ٣ س + ١
فالعبارة $س^{٢}$ + ٣ س + ١ المكونة من حاصل جمع د (س) ، هـ (س) .
تعرّف دالة ثالثة ق (س) حيث :
ق (س) = د (س) + هـ (س) = $س^{٢}$ + ٣ س + ١
الدالة ق تسمى حاصل جمع الدالتين د ، هـ ويرمز لها بالرمز (د + هـ) ويكون :
ق (س) = (د + هـ) (س) = د (س) + هـ (س)

مثلاً : ق (٢) = د (٢) + هـ (٢) = ٢^{٢} + ٣ × ٢ + ١ = ١١

وبنفس الطريقة يمكن تعريف الفرق بين أى دالتين د ، هـ أو حاصل الضرب أو القسمة أو تركيب دالتين (دالة الدالة) كالآتى :

ر (س) = (د − هـ) (س) = د(س) − هـ (س)

ت (س) = (د . هـ) (س) = د(س) . هـ (س)

و (س) = $\frac{\text{د}}{\text{هـ}}$ (س) = $\frac{\text{د (س)}}{\text{هـ (س)}}$ ، حيث هـ (س) ≠ صفر

د ٥ هـ (س) = د (هـ (س))

لاحظ في الحالة الأخيرة أننا نعرض في مكان المتغير س : الدالة د (س) بفرض الدالة هـ (س) فيكون كما هو موضح أعلاه د ٥ هـ (س) = د (هـ : س) وكذلك في الحالة هـ ٥ د (س) نضع الدالة د (س) في مكان المتغير س في الدالة هـ (س) فيكون هـ ٥ د (س) = هـ (د (س)) كما يتضح من خلال الأمثلة التالية :

مثال (٥) :

إذا كان د (س) = س^{٢} + ١ ، هـ (س) = س^{٣}

جد (١) د ٥ هـ (س) ، هـ ٥ د (س) .

الحل :) د ٥ هـ (س) = د (هـ (س)) = د (س^{٣}) = (س^{٣})^{٢} + ١ = س^{٦} + ١

هـ ٥ د (س) = هـ (د (س)) = هـ (س^{٢} + ١) = (س^{٢} + ١)^{٣} .

مثال (٦) :

إذا كان د (س) = س^{٣} ، هـ (س) = ٢ س − ١ فإن :

ق (س) = (د + هـ) (س) = د (س) + هـ (س)

= س^{٣} + ٢ س − ١

ر (س) = (د − هـ) (س) = د (س) − هـ (س)

= س^{٣} − ٢ س + ١

ل (س) = (د . هـ) (س) = د(س) . هـ (س)

= س^{٣} (٢ س − ١) = ٢ س^{٤} − س^{٣}

م (س) = $\frac{\text{د}}{\text{هـ}}$ (س) = $\frac{\text{د (س)}}{\text{هـ (س)}}$ = $\frac{\text{س}^{٣}}{\text{٢س − ١}}$ حيث س ≠ $\frac{١}{٢}$

د ٥ هـ (س) د (هـ (س)) = د (٢ س − ١) = (٢ س − ١)^{٣}

هـ ٥ د(٢) = هـ (د (٢)) = هـ (٢^{٣}) = هـ (٨) = ٢ × ٨ − ١ = ١٥

تمرين (١ − ٢)

(١) إذا كانت د (س) = ٣ − ٢ س ، هـ (س) = س^{٢} + ١

جد : (أ) (د + هـ) (٢) ، (ب) (د − هـ) (٢) ، (جـ) $\frac{\text{د}}{\text{هـ}}$

(د) د ٥ هـ (٢) ، (هـ) هـ ٥ د (٢)

(٢) إذا كانت د (س) = ٤ س − ٣ ، هـ (س) = س^{٢} − ٥ س + ١

جد :

(أ) د + هـ (ب) د − هـ (جـ) د ٠ هـ (د) $\frac{\text{د}}{\text{هـ}}$

(هـ) د ○ هـ

(٣) إذا كان د (س) = س^{٢} ، هـ (س) = جا س

جد : (د + هـ) (س) ، (د ٠ هـ) (س)

د (هـ (س)) ، هـ (د (س))

(١ − ٤) النهـايات :

في هذا الفصل نتناول مفهوم ومعنى النهايات والتى لاغنى عنها لدراسة الموضوع الرئيس في هذا الكتاب موضوع التفاضل والتكامل . ونمهد للنهايات بالمثال التالى :

اعتبر الدالة

$$\text{ص} = \text{د (س)} = \frac{\text{٢ س}^{٢} - \text{س} - ٦}{\text{س} - ٢}$$

نلاحظ أننا نستطيع إيجاد قيمة د (س) عند أى قيمة حقيقية للمتغير س ما عدا القيمة س = ٢ ، إذ أن التعويض بالعدد ٢ في د (س) يعطينا د (٢) = $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ وهذا ليس عدداً حقيقياً معرفاً .

ما سنبحثه في هذا الفصل هو : إذا كان من المستحيل إيجاد قيمة د (س) عندما س = ٢ فما هى أقرب قيمة تأخذها د (س) عندما تكون س أقرب ما يمكن من العدد ٢ ؟ أى ما هى القيمة التى تقترب منها د (س) عندما تكون س قريبة جداً من ٢ ؟

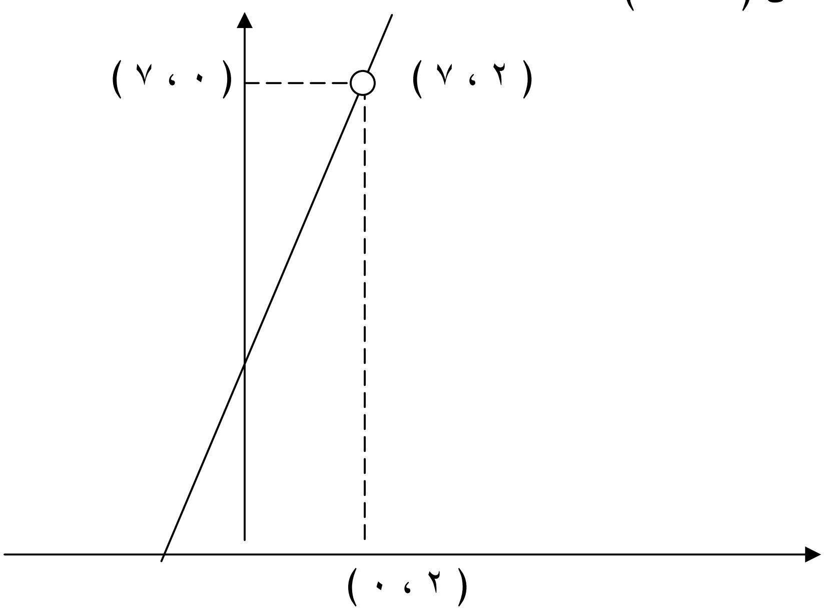
بالنسبة لهذا المثال نلاحظ أن :

$$د (س) = \frac{٢ س^{٢} - س - ٦}{س - ٢}$$

$$= \frac{(س - ٢) (٢ س + ٣)}{س - ٢} = ٢ س + ٣$$

بشرط س $\neq$ ٢

هذا يعنى أن الدالة د (س) تساوى الدالة ت (س) = ٢ س + ٣ لكل قيم س عدا س = ٢ . فمن الناحية الهندسية فإن الشكل البيانى للدالة د (س) هو المستقيم ص = ٢ س + ٣ محذوفاً منه النقطة (٢ ، ٧) . أنظر الشكل (١ – ١) .



الشكل (١ – ١)

ومن الشكل إذا اقتربت س من العدد ٢ فإن د (س) تكون قريبة جداً من العدد ٧ . يوضح ذلك الجدول (١ – ١) والجدول (١ – ٢) ، حيث حسبنا قيم د (س) المناظرة لبعض قيم س التى تقترب شيئاً فشيئاً من العدد ٢ .

ففى الجدول (١ – ١) تقترب س من العدد ٢ من اليمين ونرمز لذلك بالرمز س ← ٢^+ .

وفي الجدول (١ – ٢) تقترب س من ٢ من اليسار ونرمز لذلك بالرمز س ← ٢^- .

س	د (س)
٣	٩
٢,٥	٨
٢,١	٧,٢
٢,٠١	٧,٠٢
٢,٠٠١	٧,٠٠٢
٢,٠٠٠١	٧,٠٠٠٢
٢,٠٠٠٠١	٧,٠٠٠٠٢
↓	↓
٢	٧

جدول رقم (١ – ١)
الاقتراب من ٢ من اليمين .

س	د (س)
١	٥
١,٥	٦
١,٩	٦,٨
١,٩٩	٦,٩٨
١,٩٩٩	٦,٩٩٨
١,٩٩٩٩	٦,٩٩٩٨
١,٩٩٩٩٩	٦,٩٩٩٩٨
↓	↓
٢	٧

جدول رقم (١ – ٢)
الاقتراب من ٢ من اليسار .

فالعدد ٧ هو العدد الذى تقترب منه د (س) عندما تكون س قريبة من العدد ٢ . نعبر عن هذا رمزياً كالآتى :

$$\text{نها}_{\text{س} \leftarrow ٢} \ \text{د} (\text{س}) = ٧$$

وتقرأ : نهاية الدالة د (س) عندما تؤول س إلى ٢ تساوى ٧ .

لاحظ إن س تؤول إلى أ لا دخل له بالقيمة د (أ) . ففى المثال التمهيدى السابق كان للنهاية قيمة حقيقية تساوى ٧ بينما الدالة نفسها غير معرفة عند س = ٢ .
فهناك حالات تكون فيها د (أ) غير معرفة ولكن نها د (س) موجودة بينما هنالك حالات فيها د (أ) معرفة ولكن $\underset{س \leftarrow أ}{نها}$ د (س) غير موجودة أو إن وجدت لاتساوى د (أ) . وفي بعض الحالات تكون د (أ) موجودة وتساوى $\underset{س \leftarrow أ}{نها}$ د (س) .

وجود النهاية نها د (س) يقتضى أن تساوى عدداً حقيقياً معيناً . أمَّا إذا كانت هذه النهاية لها أكثر من قيمة مختلفة أو كانت أكبر من أى عدد يمكن أن نتصوره فإننا نقول إن النهاية ليس لها وجود . وقد اتفق على كتابتها على النحو التالى :

$$\underset{س \leftarrow أ}{نها} د (س) = \infty$$

إذا كانت ليس لها قيمة محدودة

مثال (١) :

إذا كان :

$$د (س) = \begin{cases} س + ١ & ، س < ١ \\ ٢ س + ٥ & ، س \geq 1 \end{cases}$$

فإن :

$\underset{س \leftarrow ١}{نها}$ د (س) غير موجودة .

وذلك لأنه إذا اقتربت س من ١ من جهة اليمين أي من جهة القيم التي تكبر العدد ١ فإن قيمة الدالة تقترب من ٧ لأننا نعوضها في المقدار ٢س + ٥ أما إذا اقتربت س من ١ من جهة اليسار أي من جهة القيم التي تصغر العدد ١

فإن قيمة الدالة تقترب من ٢ لأننا نعوض العدد ١ بدلاً عن س في المقدار (س + ١) حسب تعريف الدالة . (لاحظ أن قيمة د (١) = ٧ معرفة لماذا ؟) .

مثال (٢) :

إذا كانت

$$د (س) = \frac{١}{س + ٢}$$

$$فإن \lim_{س \to -٢} \frac{١}{س + ٢} = \infty$$

أي غير موجودة وذلك لأنه كلما اقتربت س من - ٢ فإن المقام يقترب من الصفر شيئاً فشيئاً وكلما اقترب المقام من الصفر فإن قيمة د (س) تزداد عددياً بصورة غير محدودة فتقترب من اللانهاية .

من الأمثلة التمهيدية السابقة يتضح إنه ليس هنالك علاقة بين قيمة الدالة د (س) عند أ وبين $\lim_{س \to أ}$ د (س) ، فقد تكون الدالـــة معرفة عند أ وليس لها نهاية عندما تؤول س إلى أ ، كما قد تكون الدالة غير معرفة عند أ بينما تؤول فيها إلى نهاية محددة عند أقتراب س من أ .

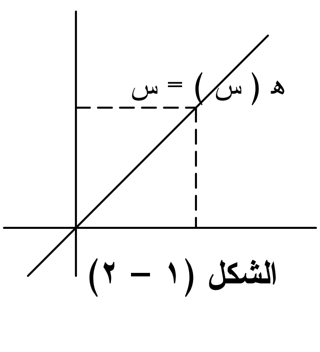
ويمكننا التوصل إلى بعض النظريات أو القواعد التى تساعدنا على إيجاد النهاية بصورة سريعة دون أن نلجأ إلى طريقة الرسم أو تكوين الجداول .

فالدالة الثابتة د (س) = ٣ مثلاً لاتتغير قيمة د (س) بتغير قيم س وهذا يعنى أن :

$$\lim_{س \to أ} د (س) = ٣ \quad لأى عدد حقيقى أ$$

وكذلك الدالـــة هـ (س) = س . فـــإذا كوّنا الجدول أو رسمنا منحنى هذه الدالة (شكل (١ – ٢)) نجـــد أن قيمـــة هـ (س) عندما تقترب قيمة س من أى عدد حقيقى أ هى :

$$\lim_{س \to أ} س = أ$$



الشكل (١ – ٢)

وكذلك إذا رسمنا منحنى الدالة :

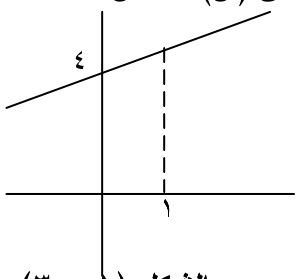
ق (س) = ٢ س + ٤

وبحثنا عن نها ق (س) نلاحظ :
س ← ١

من الرســـم (شكل (١ – ٣)) أن :

نها (٢ س + ٤) = ٦
س ← ١

ق (س) = ٢ س + ٤



الشكل (١ – ٣)

لاحظ أن نها ٢ س = ٢ وأن نها ٤ = ٤
س ← ١ س ← ١

من الأمثلة السابقة يمكننا التوصل إلى النظرية التالية :

نظرية (١ – ١) :

(١) إذا كان د (س) = جـ حيث جـ عدد حقيقى فإن نها د (س) = جـ
س ← أ
لأى عدد حقيقى أ .

(٢) إذا كان ق (س) = س
فإن نها ق (س) = أ لآى عدد حقيقى أ
س ← أ

(٣) وإذا كان هـ (س) = م س + جـ فإن
نها هـ (س) = م أ + جـ
س ← أ

مثال (٣) :

إذا كان هـ (س) = س + ٥ جد :

(أ) ٣ هـ (س) (ب) نها ٣ هـ (س) (جـ) ٣ نها هـ (س)
س ← 1 س ← 1

الحل :

(أ) ٣ هـ (س) = ٣ (س + ٥) = ٣ س + ١٥

(ب) نها ٣ هـ (س) = نها (٣ س + ١٥) = ١٨
س ← 1 س ← 1

(جـ) ٣ نها هـ (س) = ٣ نها (س + ٥) = ٣ × ٦ = ١٨
س ← 1 س ← 1

مثال (٤) :

إذا كان ق (س) = س^{٢}

هـ (س) = س + ١ ، جد :

(أ) ق (س) × هـ (س)

(ب) $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نها}}$ (ق (س) × هـ (س))

(جـ) $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نها}}$ ق (س) × $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نها}}$ هـ (س)

الحل :

(أ) قاعدة ق (س) × هـ (س) = س^{٢} (س + ١) = س^{٣} + س^{٢}

(ب) $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نها}}$ (ق (س) × هـ (س)) = $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نها}}$ (س^{٣} + س^{٢}) = ٨ + ٤ =١٢

(جـ) $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نها}}$ ق (س) × $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نها}}$ هـ (س) = $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نها}}$ س^{٢} . $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نها}}$ (س + ١) = ٤ × ٣=١٢

من الأمثلة السابقة يمكننا التوصل إلى النظرية التالية :

نظرية (١ – ٢) :

إذا كانت $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نها}}$ ق (س) = ل ، $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نها}}$ هـ (س) = ك

وكان جـ و ن عددين حقيقيين ثابتين فإن :

(١) $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نها}}$ (ق (س) ± هـ (س)) = $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نها}}$ ق (س) ± $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نها}}$ هـ (س)

= ل ± ك

(٢) $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نها}}$ جـ ق (س) = جـ $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نها}}$ ق (س) = جـ ل

(٣) $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نها}}$ (ق (س) . هـ (س)) = $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نها}}$ ق (س) . $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نها}}$ هـ (س) = ل ك

(٤) $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نها}}$ $\dfrac{\text{ق (س)}}{\text{هـ (س)}}$ = $\dfrac{\underset{س \leftarrow أ}{\text{نها}} \text{ ق (س)}}{\underset{س \leftarrow أ}{\text{نها}} \text{ هـ (س)}}$ = $\dfrac{\text{ل}}{\text{ك}}$ (ك ≠ ٠)

(٥) $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نها}}$ (ق (س))^{ن} = ($\underset{س \leftarrow أ}{\text{نها}}$ ق (س))^{ن} = ل^{ن}

مثال (٥) :

إذا كان د (س) = س^{٢} – ٣ س + ٥ ، جد :

(أ) د (–٢) (ب) $\underset{س \leftarrow -٢}{\text{نها}}$ د (س)

الحل :

(أ) د (–٢) = (–٢)^{٢} – ٣ (–٢) + ٥

= ٤ + ٦ + ٥ = ١٥

(ب) $\underset{س \leftarrow -٢}{\text{نها}}$ (س^{٢} – ٣ س + ٥) = $\underset{س \leftarrow -٢}{\text{نها}}$ س^{٢} – ٣ $\underset{س \leftarrow -٢}{\text{نها}}$ س + $\underset{س \leftarrow -٢}{\text{نها}}$ ٥

= ٤ – ٣ × –٢ + ٥ = ٤ + ٦ + ٥ = ١٥

لاحظ أن $\underset{س \leftarrow -٢}{\text{نها}}$ د (س) = د (–٢)

يمكننا التوصل إلى القاعدة التالية :

> إذا كان ق (س) كثيرة حدود من الدرجة ن ، حيث :
>
> ق (س) = م$_{ن}$ س^{ن} + م$_{ن - 1}$ س$^{ن - ١}$ + ... + م$_{١}$ س + م. ، م$_{ن}$ ≠ ٠
>
> فإن $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نها}}$ ق (س) = ق (أ)

تمرين (١ – ٣)

(١) استخدم نظريات النهايات لايجاد نهاية كل من الدوال التالية:

(أ) $\underset{س \leftarrow \sqrt{٣}}{\text{نها}}$ ١٣ (ب) $\underset{س \leftarrow -1}{\text{نها}}$ (٤ س + ٣)

(جـ) $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نها}}$ (٢ س^{٢} + ٥ س) (س^{٣} + ١)

(٢) إذا علمت أن $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نها}}$ د (س) = ٥ ، $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نها}}$ هـ (س) = –٣ فجد :

قيمة كل من :

(أ) $\underset{س \leftarrow ٢}{نها} \left(٢\ د (س) - هـ (س) \right)$

(ب) $\underset{س \leftarrow ٢}{نها}\ هـ^{٢} (س)$

(جـ) $\underset{س \leftarrow ٢}{نها} \left(د (س) \times ٣\ هـ (س) \right)$

(٣) احسب : $\underset{س \leftarrow -١}{نها} \left(٣\ س^{٥} - ٢\ س^{٢} - ١ \right)$

(٤) جد النهايات التالية :

(أ) $\underset{س \leftarrow ٠}{نها} \left(٧\ س^{٢} - ٥ \right)$ (ب) $\underset{س \leftarrow ٢}{نها} \left(٢\ س + ٣ \right) \left(س^{٢} - ١ \right)$

(جـ) $\underset{س \leftarrow \frac{١}{٢}}{نها} \left(٣ - ٢\ س \right)^{٥}$ (د) $\underset{س \leftarrow -١}{نها}\ ٢ \left(س^{٥} - ٣\ س^{٣} + ١ \right)$

(٥) إذا علمت أن $\underset{س \leftarrow ٣}{نها}\ د (س) = ٧$

فجد النهايات التالية :

(أ) $\underset{س \leftarrow ٣}{نها} \left(٢\ د (س) - ٥ \right)$ (ب) $\underset{س \leftarrow ٣}{نها}\ د^{٢} (س)$

(١ – ٥) النهايات للدوال الكسرية :

ما يعنينا الآن هو دراسة بعض الطرق لإيجاد النهايات عندما نحصل على قيم غير معرفة في حالة التعويض المباشر في الدالة . في دراستنا لهذه الطرق سنركز فقط على الحالة التى تكون فيها الدالة على الصورة :

$$\frac{د_{١} (س)}{د_{٢} (س)} \quad \text{، حيث أن :}$$

$$\underset{س \leftarrow \infty}{نها}\ د_{١} (س) = \underset{س \leftarrow \infty}{نها}\ د_{٢} (س) = \infty$$

أو :

$$\underset{س \leftarrow أ}{نها}\ د_{١} (س) = \underset{س \leftarrow أ}{نها}\ د_{٢} (س) = \text{صفر}$$

نوضح ذلك في الأمثلة التالية :

مثال (١) :

جد نها $\lim_{س \to \infty} \frac{٢ س^{٢} - ٣ س + ٧}{٣ س^{٢} + ٥ س - ١}$

الحل :

نقسم كلاً من البسط والمقام على س٢ (أعلى قوة للمتغير س) لنحصل على :

$$\lim_{س \to \infty} \frac{٢ س^{٢} - ٣ س + ٧}{٣ س^{٢} + ٥ س - ١} = \lim_{س \to \infty} \frac{٢ - \frac{٣}{س} + \frac{٧}{س^{٢}}}{٣ + \frac{٥}{س} - \frac{١}{س^{٢}}}$$

فعندما تغدو س أكبر فاكبر ، فإن الحدين $\frac{-٣}{س}$ ، $\frac{٧}{س^{٢}}$ في البسط يغدوان أصغر فاصغر ، وبالتالى فإن البسط كله يقترب من ٢ ، وبالمثل يقترب المقام من ٣ .

وبالتالى فإن الدالة المعطاه تقترب من القيمة النهائية $\frac{٢}{٣}$.

مثال (٢) :

جد نها $\lim_{س \to \infty} \frac{٤ س^{٢} + ٣}{٥ س^{٣} - ٧}$

بالقسمة على أعلى قوة للمتغير س وهي س٣ نحصل على :

الحل :

$$\lim_{س \to \infty} \frac{٤ س^{٢} + ٣}{٥ س^{٣} - ٧} = \lim_{س \to \infty} \frac{\frac{٤}{س} + \frac{٣}{س^{٣}}}{٥ - \frac{٧}{س^{٣}}}$$

$$= \frac{صفر}{٥} = صفر$$

مثال (٣) :

جد : $\lim\limits_{س \to \infty} \dfrac{س^{٤} + ٥ س - ١}{س^{٣} + ٣}$

الحل :

بالقسمة على أعلى قوة للمتغير س نحصل على :

$$\lim\limits_{س \to \infty} \dfrac{س^{٤} + ٥ س - ١}{س^{٣} + ٣} = \lim\limits_{س \to \infty} \dfrac{١ + \dfrac{٥}{س^{٣}} - \dfrac{١}{س^{٤}}}{\dfrac{١}{س} + \dfrac{٣}{س^{٤}}} = \dfrac{1}{صفر} = \infty$$

مثال (٤) :

جد : $\lim\limits_{س \to ٤} \dfrac{س^{٢} - ٢س - ٨}{س - ٤}$

الحل :

عند التعويض المباشر نحصل على $\dfrac{صفر}{صفر}$ وهى قيمة غير معرفة

ولكن :

$$\dfrac{س^{٢} - ٢س - ٨}{س - ٤} = \dfrac{(\cancel{س - ٤})(س + ٢)}{(\cancel{س - ٤})}$$

$$= س + ٢ \quad ، \quad س \neq ٤$$

إذن :

$$\lim\limits_{س \to ٤} \dfrac{س^{٢} - ٢س - ٨}{س - ٤} = \lim\limits_{س \to ٤} (س + ٢) = ٦$$

لاحظ في حالة المثال أعلاه إنه عندما س تؤول إلى أ قيمة عددية معينة وينتج عن تعويضها الناتج (صفر ÷ صفر) فإننا نتوقع أن يكون العامل (س – أ) أحد عوامل البسط وكذلك أحد عوامل المقام عند تحليل كل منها . وفي هذه الحالة نلجأ إلى تحليل كل من البسط والمقام واستخراج العامل المشترك (س – أ) فيهما ، أو اختصارهما ثم نعوض عن س بقيمة أ بعد الاختصار ليكون الناتج هو النهاية المطلوبة .

مثال (٥) :

جد $\lim\limits_{س \to -١} \dfrac{٢ س^{٢} + ٣س + ١}{س^{٢} - ١}$

الحل :

بتعويض س = −١ ينتج (صفر ÷ صفر) وهي قيمة غيـــر معينـــة وعليه نلجأ إلى التحليل :

$$\underset{س \to -١}{\text{نها}} \frac{٢س^٢ + ٣س + ١}{س^٢ - ١} = \underset{س \to -١}{\text{نها}} \frac{(٢س + ١)\cancel{(س + ١)}}{(س - ١)\cancel{(س + ١)}}$$

$$= \underset{س \to -١}{\textbf{نها}} \frac{٢س + ١}{س - ١}$$

$$= \frac{٢ \times (-١) + ١}{-١ - ١}$$

$$= \frac{-١}{-٢}$$

$$= \frac{١}{٢}$$

تمرين (١ − ٤)

جد النهايات التالية :

(١) $\underset{س \to ٢}{\text{نها}} \frac{س^٢ - س - ٢}{س - ٢}$

(٢) $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{(١ + س)^٢ - ١}{س}$

(٣) $\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{٤س^٢ + ٥}{٢س^٢ + ١}$

(٤) $\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{١ + ٢س^٣}{س^٢ + ٢س}$.

(٥) $\underset{س \to ٢}{\text{نها}} \frac{س^٢ - ٤}{س - ٢}$

(٦) $\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{٢س^٥ + ٣س^٢}{س^٣ - ١}$

(١ – ٦) بعض النهايات المهمة :

(١) إذا كان ن عدداً صحيحاً موجباً فإن :

$$\underset{س \leftarrow أ}{نها} \frac{س^{ن} - أ^{ن}}{س - أ} = ن\, أ^{ن - ١}$$

البرهان :

فك القوسين في المقدار التالي :

$$(س - أ) (س^{ن - ١} + أ\, س^{ن - ٢} + أ^{٢} س^{ن - ٣} + \ldots + أ^{ن - ٢} س + أ^{ن - ١})$$

$$= س^{ن} + أ\, س^{ن - ١} + أ^{٢} س^{ن - ٢} + \cdots + أ^{ن - ١} س - أ\, س^{ن - ١}$$

$$- أ^{٢} س^{ن - ٢} - \cdots - أ^{ن - ١} س - أ^{ن} = س^{ن} - أ^{ن}$$

$$\therefore س^{ن} - أ^{ن} = (س - أ) (س^{ن - ١} + أ\, س^{ن - ٢} + أ^{٢} س^{ن - ٣} + \cdots + أ^{ن - ١})$$

بالقسمة على س – أ

$$\frac{س^{ن} - أ^{ن}}{س - أ} = س^{ن - ١} + أ\, س^{ن - ٢} + \ldots + أ^{ن - ٢} س + أ^{ن - ١}$$

(لاحظ أن هناك ن من الحدود في الطرف الأيسر) .

$$\therefore \underset{س \leftarrow أ}{نها} \frac{س^{ن} - أ^{ن}}{س - أ} = \underset{س \leftarrow أ}{نها} (س^{ن - ١} + أ\, س^{ن - ٢} + \cdots + أ^{ن - ٢} س + أ^{ن - ١})$$

$$= أ^{ن - ١} + أ^{ن - ١} + \cdots + أ^{ن - ١} + أ^{ن - ١}$$

$= ن\, أ^{ن - ١}$ وهو المطلوب

مثال (١) :

$$\underset{س \leftarrow ٥}{نها} \frac{س^{٤} - ٥^{٤}}{س - ٥} = ٤ \times ٥^{٤-١}$$

$$= ٤ \times ١٢٥$$

$$= ٥٠٠$$

نتيجة مباشرة :

$$\underset{س \leftarrow أ}{نها} \frac{س^{ن} - أ^{ن}}{س^{م} - أ^{م}} = \frac{ن}{م} أ^{ن - م}$$

حيث ن ، م عددان صحيحان موجبان .

البرهان :

$$\frac{س^{ن} - أ^{ن}}{س^{م} - أ^{م}} = \frac{س^{ن} - أ^{ن}}{س - أ} \div \frac{س^{م} - أ^{م}}{س - أ}$$

$$\underset{س \leftarrow أ}{نها} \frac{س^{ن} - أ^{ن}}{س^{م} - أ^{م}} = \frac{\underset{س \leftarrow أ}{نها} \frac{س^{ن} - أ^{ن}}{س - أ}}{\underset{س \leftarrow أ}{نها} \frac{س^{م} - أ^{م}}{س - أ}} = \frac{ن أ^{ن - ١}}{م أ^{م - ١}}$$

$$\therefore \underset{س \leftarrow أ}{نها} \frac{س^{ن} - أ^{ن}}{س^{م} - أ^{م}} = \frac{ن}{م} أ^{ن - م}$$

وهو المطلوب

مثال (٢) :

$$\underset{س \leftarrow ٢}{نها} \frac{س^{٥} - ٣^{٥}}{س^{٤} - ٣^{٤}} = \frac{٥}{٤} \times ٣^{٥ - ٤}$$

$$= \frac{١٥}{٤}$$

في الواقع أن هذه النهاية ليست صحيحة فقط حينما تكون ن عدداً صحيحاً موجباً ، بل هي صحيحة كذلك حينما تكون ن أي عدد حقيقي ولكن برهان ذلك خارج نطاق هذا الكتاب .

مثال (٣) :

$$\underset{س \leftarrow أ}{نها} \frac{\sqrt{س} - \sqrt{أ}}{س - أ} = \underset{س \leftarrow أ}{نها} \frac{س^{\frac{١}{٢}} - أ^{\frac{١}{٢}}}{س - أ}$$

$$= \frac{١}{٢} \text{أ}^{\frac{١}{٢} - ١} = \frac{١}{٢\sqrt{\text{أ}}}$$

تمرين (١ – ٥)

جد النهايات التالية :

(١) $\underset{\text{س} \to ١}{\text{نها}} \frac{\text{س}^{٣} - ١}{\text{س} - ١}$

(٢) $\underset{\text{س} \to -١}{\text{نها}} \frac{\text{س}^{٥} + ١}{\text{س} + ١}$

(٣) $\underset{\text{س} \to ٣}{\text{نها}} \frac{\text{س}^{٣} - ٢٧}{\text{س} - ٣}$

(٤) $\underset{\text{س} \to -٢}{\text{نها}} \frac{\text{س}^{٥} + ٣٢}{\text{س}^{٣} + ٨}$

(٥) $\underset{\text{س} \to ٢}{\text{نها}} \frac{\text{س}^{٦} - ٦٤}{\text{س} - ٢}$

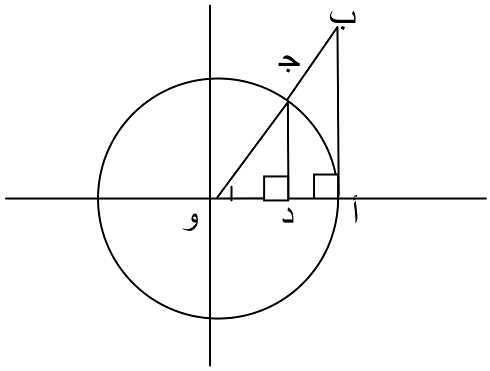
(٦) $\underset{\text{س} \to ١}{\text{نها}} \frac{\sqrt{\text{س}} - ١}{\text{س} - ١}$

(٧) $\underset{\text{س} \to -٢}{\text{نها}} \frac{\text{س} + ٢}{\text{س}^{٣} + ٨}$

(٨) $\underset{\text{س} \to \frac{١}{٣}}{\text{نها}} \frac{٢٧\text{س}^{٣} - ١}{٣\text{س} - ١}$

(١–٧) نهايات الدوال المثلثية :

البرهان :



الشكل (١ – ٤)

الشكل (١ – ٤) يمثل دائرة نصف قطرها الوحدة مركزها نقطة الأصل و∠ أ و جـ = س (بالتقدير الدائري) ، $\overline{\text{أ ب}}$ مماس للدائرة عند أ ، $\overline{\text{جـ د}}$ عمود نازل من جـ على $\overline{\text{أ و}}$.

$$\text{طول القوس أ جـ} = \text{محيط الدائرة} \times \frac{\text{الزاوية المركزية (س)}}{\text{الزاوية الكاملة }(2\pi)}$$

$$= 2\pi \times \frac{\text{س}}{2\pi} = \text{س}$$

$$\text{ظا س} = \frac{\overline{\text{أ ب}}}{\overline{\text{أ و}}} = \frac{\overline{\text{أ ب}}}{1} = \overline{\text{أ ب}}$$

$$\text{جا س} = \frac{\overline{\text{جـ د}}}{\overline{\text{جـ و}}} = \frac{\overline{\text{جـ د}}}{1} = \overline{\text{جـ د}}$$

لاحظ من الشكل أن :

طول القوس $\overline{\text{أ جـ}} > \overline{\text{جـ د}}$

$\overline{\text{جـ د}}$ = جا س ، القوس $\overline{\text{أ جـ}}$ = س

∴ جا س < س

فإذا كانت $0 < \text{س} < \frac{\pi}{2}$

فإن $٠ < \text{جا س} < \text{س}$

ونأخذ النهاية عندما س ← ٠ نجد أن :

$$\lim_{\text{س} \leftarrow ٠} \text{جا س} = ٠$$

لاحظ من الشكل أن $\overline{\text{جـ د}}$ < طول القوس أ جـ < $\overline{\text{أ ب}}$

أي أن :

$\text{جا س} < \text{س} < \text{ظا س}$

بما أن س موجبة فإن :

$$\frac{١}{\text{جا س}} > \frac{١}{\text{س}} > \frac{١}{\text{ظا س}}$$

بالضرب في جا س نجد أن :

$$١ > \frac{\text{جا س}}{\text{س}} > \text{جتا س}$$

هذه المتباينة صحيحة حتى إذا كان س سالبة حاول إثبات ذلك .

بأخذ النهاية عندما س ← ٠ .

$$\lim_{\text{س} \leftarrow ٠} ١ \geq \lim_{\text{س} \leftarrow ٠} \frac{\text{جا س}}{\text{س}} \geq \lim_{\text{س} \leftarrow ٠} \text{جتا س}$$

أى $١ \geq \lim_{\text{س} \leftarrow ٠} \frac{\text{جا س}}{\text{س}} \geq ١$ (لأن $\lim_{\text{س} \leftarrow ٠} \text{جتا س} = ١$)

إذن

$$١ = \lim_{\text{س} \leftarrow ٠} \frac{\text{جا س}}{\text{س}} = ١$$

$$\boxed{\lim_{\text{س} \leftarrow ٠} \frac{\text{جا س}}{\text{س}} = ١}$$ ، وهو المطلوب .

مثال (٤) :

أثبت أن $\underset{س \leftarrow ٠}{نها} \frac{ظا\,س}{س} = ١$

الحل :

$$\frac{ظا\,س}{س} = \frac{جا\,س}{س} \times \frac{١}{جتا\,س}$$

$$\underset{س \leftarrow ٠}{نها} \frac{ظا\,س}{س} = \underset{س \leftarrow ٠}{نها} \frac{جا\,س}{س} \times \underset{س \leftarrow ٠}{نها} \frac{١}{جتا\,س}$$

$$= ١ \times ١ = ١$$

مثال (٥) :

جد $\underset{س \leftarrow ٠}{نها} \frac{جا٣\,س}{س}$

الحل :

ضع ع = ٣ س . ع ← ٠ عندما س ← ٠

$$\therefore \underset{س \leftarrow ٠}{نها} \frac{جا٣\,س}{س} = \underset{ع \leftarrow ٠}{نها} \frac{جا\,ع}{\frac{ع}{٣}} = \underset{ع \leftarrow ٠}{نها} \frac{٣جا\,ع}{ع}$$

$$= ٣ \underset{ع \leftarrow ٠}{نها} \frac{جا\,ع}{ع} = ٣ \times ١ = ٣$$

تمرين (١ – ٦)

جد النهايات التالية :

(١) $\lim_{س \to ٠} \frac{جا\ ٣\ س}{جا\ ٥\ س}$

(٢) $\lim_{س \to \infty} س\ جا \frac{١}{س}$.

(٣) $\lim_{س \to ٠} \frac{جا\ ٥\ س}{س}$

(٤) $\lim_{س \to ٠} \frac{ظا\ ٣\ س}{س}$

(٥) $\lim_{س \to ٠} \frac{١ - جتا\ س}{س^٢}$

(٦) $\lim_{س \to ٠} \frac{جا\ ٢\ س + ظا\ ٣\ س}{س}$

(٧) $\lim_{س \to ٠} \frac{جا\ ٣\ س\ جا\ ٥\ س}{س^٢}$

(٨) $\lim_{س \to ٠} \frac{جا\ ٤\ س + ١ - جتا\ س}{س}$

الوحدة الثانية

التفاضل

أهداف الوحدة الثانية
التفاضل

بعد دارسة هذه الوحدة نتوقع أن يكون الطالب قادراً على أن :

١/ يعرف متوسط معدل التغير ومعدل التغير .
٢/ يجد معدل التغير للدالة إذا عرف مقدار التغير في متغيرها المستقل .
٣/ يجد مشتقة الدالة كثيرة الحدود .
٤/ يجد مشتقة الدالة الناتجة من حاصل ضرب وحاصل قسمة دالتين .
٥/ يجد مشتقة دالة الدالة .
٦/ يجد مشتقة الدالة المعرفة ضمنياً .
٧/ يجد المشتقة الثانية والثالثة للدالة .
٨/ يجد العلاقة بين قيمة المشتقة الأولى للدالة عند نقطة وميل المماس عند تلك النقطة ويطبق ذلك لإيجاد الميل ومعادلة المماس عند نقطة معينة .

الوحدة الثانية

التفاضل

(٢ – ١) التغير ومتوسط معدل التغير :

في هذا الفصل سنهتم بمعالجة مسألة إيجاد ما يسمى بمعدل التغير ، مثل معدل التغير في المسافة التي يقطعها صاروخ بالنسبة إلى الزمن عند نقطة معينة في الفضاء ، أو معدل الزيادة في المساحة السطحية لقرص يتمدد بالحرارة بالنسبة إلى نصف قطره ، أو معدل التغير في إنتاج سلعة بالنسبة لعدد المشتغلين بصناعة هذه السلعة . في كل هذه الأمثلة وغيرها نفترض معرفتنا للدالة التي تربط بين المتغيرين المذكورين ، بين المسافة والزمن ، و بين مساحة سطح القرص ونصف قطره ، و بين الإنتاج وعدد العمال وهكذا .

وبصورة عامة نفرض أن ص = د (س) وأن س تغيرت من $س_١$ إلى $س_٢$ تبعاً لذلك تتغير ص من $ص_١$ = د ($س_١$) إلى $ص_٢$ = د ($س_٢$) . ونقول إن س قد طرأ عليها تغير بمقدار $س_٢ - س_١$ ، ونرمز له بـــ Δ س (دلتا س) وتبعاً لذلك تغيرت ص بمقدار $ص_٢ - ص_١$ ، ونرمز له بـــ Δ ص . أي :

$$\Delta س = س_٢ - س_١ .$$

$$\Delta ص = ص_٢ - ص_١ = د\ (س_٢) - د\ (س_١)$$

بكتابة $س_٢ = س_١ + \Delta س$ فإن :

$\Delta ص = د\ (س_١ + \Delta س) - د\ (س_١)$ ولكل س يمكن حساب التغير في ص بـــ :

$$\Delta ص = د\ (س + \Delta س) - د\ (س) .$$

متوسط معدل التغير :

يعرف متوسط معدل تغير الدالة ص = د (س) إذا تغيرت س من س إلى س + Δ س بـــ :

$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{د\ (س + \Delta س) - د\ (س)}{\Delta س} \qquad \Delta س \neq ٠$$

مثال (١) :

احسب متوسط معدل التغير للدالة ص = د (س) = $\sqrt{س - ٢}$
عندما تتغير س من ٣ إلى ٣,٢١ .

الحل :

Δ ص = د (س + Δ س) – د (س)

س = ٣ ، Δ س = ٣,٢١ – ٣ = ٠,٢١

∴ Δ ص = د (٣,٢١) – د (٣) = $\sqrt{٣,٢١ - ٢}$ – $\sqrt{٣ - ٢}$

= $\sqrt{١,٢١}$ – $\sqrt{١}$ = ١,١ – ١ = ٠,١

∴ $\frac{Δ ص}{Δ س}$ = $\frac{٠,١}{٠,٢١}$ = $\frac{١٠}{٢١}$ ≈ ٠,٤٧٦

مثال (٢) :

تتمدد صفيحة دائرية بالتسخين . احسب متوسط معدل التغير في مساحتها عندما يتغير طول نصف قطرها من ٦ سم إلى ٦,١ سم .

الحل :

نفرض أن طول نصف القطر = نق

مساحة الصفيحة م = د (نق) = π نق^{٢}

$\frac{Δ م}{Δ نق}$ = $\frac{د (٦,١) - د (٦)}{٦,١ - ٦}$ = $\frac{\pi [(٦,١)^{٢} - ٦^{٢}]}{٠,١}$

= $\frac{\pi (٦,١ - ٦) (٦,١ + ٦)}{٠,١}$ = $\frac{\pi \times ٠,١ \times ١٢,١}{٠,١}$

= ١٢,١ π

تمرين (٢ – ١)

(١) جد متوسط معدل التغير للدوال المذكورة .

أ ٠ د (س) = ٢ س – ١ عندما تتغير س من ١ إلى –٢ .

ب٠ د (ر) = $\sqrt{ر + ٣}$ عندما تتغير ر من ٠ إلى –٢ .

جـ٠ د (س) = $س^{٣}$ – ١ عندما تتغير س من ٠ إلى $\frac{١}{٢}$

(٢) يتحرك جسم في خط مستقيم بحيث يكون بعده ف عن نقطة ثابتة بعد ن ثانية معطى بالعلاقة :

$$ف = ن^{٢} – ٢ ن + ٥$$

احسب سرعته المتوسطة (أى متوسط تغير ف بالنسبة لـــ ن) خلال التغير من ن = ١ ث إلى ن = ٣ ث .

(٣) فقاعة من الصابون كروية الشكل تتمدد محافظة على شكلها الكروي . احسب متوسط معدل التغير في مساحة السطح الكروي للفقاعة عندما يتغير طول نصف قطرها من ٦ مم إلى ٦,٢ مم . (مساحة سطح الكرة بدلالة نصف قطرها نق تساوى ٤π $نق^{٢}$) .

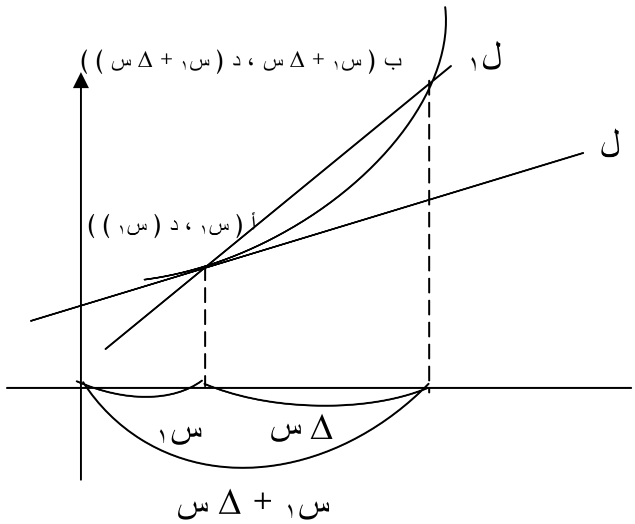
(٢ – ٢) مشتقه الدالة :

نمهد للمشتقة بالمسألة الهندسية التالية :

جد ميـــل الممـــاس لمنحنـــى الدالـــة ص = د (س) عنـــد النقطـــة ($س_{١}$، د ($س_{١}$) . من دراستنا للهندسة الإحداثية عرفنا أن ميل المستقيم الواصل بين أي نقطتين يساوي فرق الإحداثيين الصاديين للنقطتين مقسوماً على فرق الإحداثيين السينيين لهما ميزات الترتيب. إذن :

ميل الوتر $ل_{١}$ الواصل بين النقطتين أ($س_{١}$ ، د ($س_{١}$)) و ب ($س_{١}$+Δ س، د ($س_{١}$ + Δ س)) يساوي :

$$\frac{د (س_{١} + \Delta س) - د (س_{١})}{س_{١} + \Delta س - س_{١}} = \frac{د(س_{١}+\Delta س) - د (س_{١})}{\Delta س}$$



الشكل (٢ – ٢)

فإذا تحركت ب نحو أ اقترب الوتر ل١ شيئاً فشيئاً من المماس ل لمنحنى ص = د (س) عند أ (س١ ، د (س١)) ومن ثم يقترب المقدار :

$$\frac{\text{د}\,(\text{س}_1 + \Delta\,\text{س}) - \text{د}\,(\text{س}_1)}{\Delta\,\text{س}}$$

نحو ميل المماس للمنحنى عند أ (س١ ، د (س١)) إذاً ميل المماس عند س = س١ هو النهاية التى يستقر عندها المقدار :

$$\frac{\text{د}\,(\text{س}_1 + \Delta\,\text{س}) - \text{د}\,(\text{س}_1)}{\Delta\,\text{س}}$$

كلما اقتربت ب من أ (أي كلما اقتربت Δ س من الصفر) .

إذن ميل المماس لمنحنى الدالة ص= د(س) عند س = س١ هو النهاية.

$$\lim_{\Delta\,\text{س} \to 0} \frac{\text{د}\,(\text{س}_1 + \Delta\,\text{س}) - \text{د}\,(\text{س}_1)}{\Delta\,\text{س}}$$

بفرض وجود تلك النهاية .

بما أن $س_١$ أى نقطة في نطاق أو مجال تعريف الدالة ص = د (س) فإن النهاية .

$$\lim_{\Delta س \leftarrow ٠} \frac{د (س + \Delta س) - د (س)}{\Delta س}$$

إن وجدت ، تعنى هندسياً ميل المماس لمنحنى الدالة ص = د (س) عند س ويسمى بالمشتقة الأولى للدالة ص بالنسبة س ، ويرمز للمشتقة بـــ :

$$ص' \text{ أو } \frac{د ص}{د س} \text{ أو } د' (س) \text{ أو } \frac{د}{د س} (د (س))$$

وتسمى أيضاً بالمعامل التفاضلي الأول لــ ص بالنسبة لــ س وتسمى بمعدل تغير ص بالنسبة لـــ س .

إذن نكتب :

$$د' (س) = \lim_{\Delta س \leftarrow ٠} \frac{د (س + \Delta س) - د (س)}{\Delta س}$$

سنتطرق لاحقاً إلى قواعد أساسية لإيجاد المشتقات الأولى للدوال المختلفة غير أنه يمكن إيجاد المشتقات مباشرة من التعريف وذلك بما يعرف بإيجاد المشتقة من المبادئ الأولية .

مثال (١) :

جد المشتقة الأولى للدالة ص = $س^٢$ من المبادئ الأولية ، ثم جد قيمتها العددية عند س = ٣ ، ماذا يعنى ذلك هندسياً ؟

الحل :

ص = د (س) = $س^٢$

$$د' (س) = \lim_{\Delta س \leftarrow ٠} \frac{د (س + \Delta س) - د (س)}{\Delta س}$$

وبما أن د (س) = س^{٢}

$\therefore$ د (س + Δ س) = (س + Δ س)^{٢}

$$\therefore د'(س) = \lim_{\Delta س \to ٠} \frac{(س + \Delta س)^{٢} - س^{٢}}{\Delta س}$$

$$= \lim_{\Delta س \to ٠} \frac{س^{٢} + ٢ س \Delta س + (\Delta س)^{٢} - س^{٢}}{\Delta س}$$

$$= \lim_{\Delta س \to ٠} \frac{٢ س \Delta س + (\Delta س)^{٢}}{\Delta س}$$

$$= \lim_{\Delta س \to ٠} \frac{\Delta س (٢ س + \Delta س)}{\Delta س}$$

$$= \lim_{\Delta س \to ٠} (٢ س + \Delta س)$$

وبما أن Δ س $\leftarrow$ ٠

$\therefore$ د$'$ (س) = ٢ س ، عند س = ٣

$\therefore$ د$'$ (٣) = ٢ × ٣ = ٦

هندسياً تعنى ان ميل المماس لمنحنى الدالة ص = س^{٢} عند النقطة (٣ ، ٩) هو ٦ .

مثال (٢) :

إذا كان ص = $\frac{١}{س}$ فجد $\frac{د ص}{د س}$ من المبادئ الأولية .

الحل :

$$ص = \frac{١}{س}$$

$$\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \frac{\text{د} (\text{س} + \Delta \text{س}) - \text{د} (\text{س})}{\Delta \text{س}}$$

$$= \frac{\frac{1}{\text{س} + \Delta \text{س}} - \frac{1}{\text{س}}}{\Delta \text{س}}$$

$$= \frac{\text{س} - (\text{س} + \Delta \text{س})}{(\Delta \text{س}) \, \text{س} \, (\text{س} + \Delta \text{س})}$$

$$= \frac{- \Delta \text{س}}{(\Delta \text{س}) \, \text{س} \, (\text{س} + \Delta \text{س})}$$

$$= - \frac{1}{\text{س} (\text{س} + \Delta \text{س})}$$

$$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \underset{\Delta \text{س} \leftarrow 0}{\text{نها}} \frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \underset{\Delta \text{س} \leftarrow 0}{\text{نها}} \left(- \frac{1}{\text{س} (\text{س} + \Delta \text{س})} \right)$$

$$= \frac{-1}{\text{س}^{2}}$$

تمرين (٢ – ٢)

جد المشتقات الأولى للدوال التالية من المبادئ الأولية :

(١) ص = ٥ – ٣ س

(٢) ص = س^{2} – ٢

(٣) ص = س$^{\frac{5}{3}}$.

(٤) ص = $(٢ س + ٥)^{٢}$

(٥) ص = $\frac{١}{س^{٢}}$

(٦) ص = $\sqrt{س}$.

(٢ – ٣) إيجاد المشتقة الأولى لبعض الدوال :

(أ) الدالة الثابتة ص = أ (أ ثابت) :

ص = د (س) = أ

$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{د (س + \Delta س) - د (س)}{\Delta س}$$

$$= \frac{أ - أ}{\Delta س} = \frac{٠}{\Delta س} = صفر$$

$$\therefore \frac{د ص}{د س} = \lim_{\Delta س \leftarrow ٠} \frac{\Delta ص}{\Delta س} = صفر$$

$$\therefore \frac{د}{د س} (أ) = ٠$$

(ب) الدالة ص = $س^{ن}$ (ن عدد صحيح ثابت) :

ص = د (س) = $س^{ن}$

$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{د (س + \Delta س) - د (س)}{\Delta س}$$

$$= \frac{(س + \Delta س)^{ن} - س^{ن}}{\Delta س}$$

$$= \frac{(س + \Delta س)^{ن} - س^{ن}}{(س + \Delta س) - س}$$

ضع ع = س + Δ س . إذن ع ← س عندما Δ س ← ٠

$$\frac{د ص}{د س} = \lim_{\Delta س \to ٠} \frac{\Delta ص}{\Delta س} = \lim_{ع \to س} \frac{ع^{ن} - س^{ن}}{ع - س}$$

$$= ن س^{ن - ١}$$

∴ إذا كان ص = $س^{ن}$

فإن $\frac{د ص}{د س} = ن س^{ن - ١}$

(جـ) الدالة ص = أ د(س) ، أ ثابت :

$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{أ د (س + \Delta س) - أ د (س)}{\Delta س}$$

$$\therefore \frac{\Delta ص}{\Delta س} = \lim_{\Delta س \to ٠} \frac{أ د (س + \Delta س) - أ د (س)}{\Delta س}$$

$$= أ \lim_{\Delta س \to ٠} \frac{د (س + \Delta س) - د (س)}{\Delta س}$$

$$= أ د' (س)$$

أي أن مشتقة حاصل ضرب الثابت في الدالة يساوى حاصل ضرب الثابت في مشتقة الدالة .

فإذا كان ص = أ $س^{ن}$

فإن $\frac{د ص}{د س}$ = أ ن $س^{ن-١}$

مثلاً : إذا كان ص = ٥$س^{٧}$ فإن

$\frac{د ص}{د س}$ ٣٥ $س^{٦}$

(د) الدالة ص = جا س :

ص = د (س) = جا س

$$\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \frac{\text{د}(\text{س} + \Delta \text{س}) - \text{د}(\text{س})}{\Delta \text{س}}$$

$$= \frac{\text{جا}(\text{س} + \Delta \text{س}) - \text{جا س}}{\Delta \text{س}}$$

$$= \frac{\text{٢ جتا} \dfrac{\text{٢ س} + \Delta \text{س}}{\text{٢}} \ \text{جا} \dfrac{\Delta \text{س}}{\text{٢}}}{\Delta \text{س}}$$

$$= \text{جتا}\left(\text{س} + \frac{\Delta \text{س}}{\text{٢}}\right) \frac{\text{جا} \dfrac{\Delta \text{س}}{\text{٢}}}{\dfrac{\Delta \text{س}}{\text{٢}}}$$

$$\therefore \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \underset{\Delta \text{س} \leftarrow \text{٠}}{\text{نها}} \ \text{جتا}\left(\text{س} + \frac{\Delta \text{س}}{\text{٢}}\right) \underset{\Delta \text{س} \leftarrow \text{٠}}{\text{نها}} \ \frac{\text{جا} \dfrac{\Delta \text{س}}{\text{٢}}}{\dfrac{\Delta \text{س}}{\text{٢}}}$$

$$= \text{جتا س} \times \text{١} = \text{جتا س}$$

لأنه بوضع ع = $\dfrac{\Delta \text{س}}{\text{٢}}$ فإن :

$$\underset{\Delta \text{س} \leftarrow \text{٠}}{\text{نها}} \ \frac{\text{جا} \dfrac{\Delta \text{س}}{\text{٢}}}{\dfrac{\Delta \text{س}}{\text{٢}}} = \underset{\text{ع} \leftarrow \text{٠}}{\text{نها}} \ \frac{\text{جا ع}}{\text{ع}} = \text{١}$$

إذا كان ص = جا س

فإن $\frac{د ص}{د س}$ = جتا س

(هـ) الدالة ص = جتا س :

أما إذا كانت ص = د (س) = جتا س

فإن $\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{جتا (س + \Delta س) - جتا س}{\Delta س}$

$$= \frac{-٢ جا \frac{٢ س + \Delta س}{٢} جا \frac{\Delta س}{٢}}{\Delta س}$$

$$= - جا (س + \frac{\Delta س}{٢}) \frac{جا \frac{\Delta س}{٢}}{\frac{\Delta س}{٢}}$$

$$\therefore \frac{د ص}{د س} = \lim_{\Delta س \to ٠} (- جا (س + \frac{\Delta س}{٢})) \lim_{\Delta س \to ٠} \frac{جا \frac{\Delta س}{٢}}{\frac{\Delta س}{٢}}$$

= − جا س × ١ = − جا س

إذا كان ص = جتا س

فإن $\frac{د ص}{د س}$ = − جا س

تمرين (٢ – ٣)

جد قيمة $\frac{د ص}{د س}$ في كل من الحالات التالية :

(١) ص = –٧

(٢) ص = $س^{٥}$

(٣) ص = $\sqrt{س}$

(٤) ص = ٥ $س^{\frac{١}{٥}}$

(٥) ص = ٣ جتا س + $س^{٤}$ + ٣ $س^{٢}$ – ٤ س + ٣

(٦) ص = $\frac{٧}{س^{٤}}$

(٧) ص = ٢$س^{-٣}$

(٨) ص= $\frac{١}{٢\sqrt{س}}$

(٢ – ٤) القواعد الأساسية للتفاضل :

(أ) مشتقة مجموع أو فرق الدالتين :

لتكن كل من ل ، ع دالتين في المتغير س

ص = ل ± ع

فإذا تغيرت س بمقدار Δ س فإن كلاً من ص ، ل ، ع تتغير بمقدار Δ ص ، Δ ل ، Δ ع على الترتيب .

$\therefore$ ص + Δ ص = (ل + Δ ل) ± (ع +Δ ع)

Δ ص = Δ ل ± Δ ع

$$\therefore \frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{\Delta ل}{\Delta س} \pm \frac{\Delta ع}{\Delta س}$$

بأخذ النهايات عندما Δ س $\longrightarrow$ ٠

$$\underset{\Delta س \leftarrow ٠}{نها} \frac{\Delta ص}{\Delta س} = \underset{\Delta س \leftarrow ٠}{نها} \frac{\Delta ل}{\Delta س} \pm \underset{\Delta س \leftarrow ٠}{نها} \frac{\Delta ع}{\Delta س}$$

$$\therefore \frac{د ص}{د س} = \frac{د ل}{د س} \pm \frac{د ع}{د س}$$

أي المشتقة الأولى بمجموع أو فرق الدالتين يساوى مجموع أو فرق مشتقتي الدالتين . ويمكن تعميم ذلك بأن :

المشتقة الأولى للمجموع أو الفرق لأي عدد من الدوال يساوى المجموع أو الفرق لمشتقات تلك الدوال.

مثال (١) :

جد $\frac{د}{د س}$ (س^{٥} – ٤ س^{٢} + ٢ س + ٤)

الحل :

$\frac{د}{د س}$ (س^{٥} – ٤ س^{٢} + ٢ س + ٤)

= $\frac{د}{د س}$ س^{٥} – $\frac{د}{د س}$ ٤ س^{٢} + $\frac{د}{د س}$ ٢ س + $\frac{د}{د س}$ ٤

= ٥ س^{٤} – ٨ س + ٢ + صفر

(ب) مشتقة حاصل ضرب الدالتين :

إذا كانت كل من ل ، ع دالتين في المتغير س وكان ص = ل ع

وتغيرت س الي س + Δ س

فإن ص تتغير إلى ص + Δ ص

و ل تتغير إلى ل + Δ ل

و ع تتغير إلى ع + Δ ع

ويكون : ص + Δ ص = (ل + Δ ل) (ع+ Δ ع)

= ل ع + ل Δ ع + ع Δ ل + Δ ل Δ ع

$\therefore \Delta ص = ل \;\Delta ع + ع \;\Delta ل + \Delta ل \;\Delta ع$

$\therefore \frac{\Delta ص}{\Delta س} = ل \frac{\Delta ع}{\Delta س} + ع \frac{\Delta ل}{\Delta س} + \Delta ل \frac{\Delta ع}{\Delta س}$

وبأخذ النهايات عندما $\Delta س \leftarrow ٠$

$\underset{\Delta س \leftarrow ٠}{نها} \frac{\Delta ص}{\Delta س} = \underset{\Delta س \leftarrow ٠}{نها} \frac{ل \Delta ع}{\Delta س} + \underset{\Delta س \leftarrow ٠}{نها} \frac{ع \Delta ل}{\Delta س} + \underset{\Delta س \leftarrow ٠}{نها} \Delta ل \frac{\Delta ع}{\Delta س}$

$\therefore \frac{د ص}{د س} = ل \underset{\Delta س \leftarrow ٠}{نها} \frac{\Delta ع}{\Delta س} + ع \underset{\Delta س \leftarrow ٠}{نها} \frac{\Delta ل}{\Delta س} + \underset{\Delta س \leftarrow ٠}{نها} \Delta ل \;\underset{\Delta س \leftarrow ٠}{نها} \frac{\Delta ع}{\Delta س}$

$= ل \frac{د ع}{د س} + ع \frac{د ل}{د س} + ٠$ ، لأن $\underset{\Delta س \leftarrow ٠}{نها} \Delta ل = ٠$

$$\boxed{\frac{د (ل ع)}{د س} = ل \frac{د ع}{د س} + ع \frac{د ل}{د س}}$$ وهو المطلوب

تعرف مشتقة حاصل ضرب دالتين بأنها :

الأولى × مشتقه الثانية + الثانية × مشتقه الأولى

نشاط :

جد: $\frac{د}{د س}(س^{٥} \times س^{٣})$ باستخدام القاعدة السابقة ، ثم جد $\frac{د}{د س} س^{٨}$

ماذا تلاحظ ؟

مثال (٢) :

جد : $\frac{د}{د س} (٥ س^{٣} - ٢ س) (جا س)$

الحل :

$$\frac{\text{د}}{\text{د س}}\left(\text{٥ س}^{٣} - \text{٢ س}\right)\left(\text{جا س}\right)$$

$$= \left(\text{٥ س}^{٣} - \text{٢س}\right) \times \frac{\text{د}}{\text{د س}}\left(\text{جا س}\right) + \left(\text{جا س}\right) \frac{\text{د}}{\text{د س}}\left(\text{٥س}^{٣} - \text{٢س}\right)$$

$$= \left(\text{٥ س}^{٣} - \text{٢ س}\right)\left(\text{جتا س}\right) + \left(\text{جا س}\right)\left(\text{١٥س}^{٢} - ٢\right)$$

$$= \left(\text{٥ س}^{٣} - \text{٢ س}\right) \text{جتا س} + \left(\text{١٥س}^{٢} - ٢\right) \text{جا س}$$

(ج) مشتقة قسمة دالتين :

$$\boxed{\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{\text{د}}{\text{د س}}\left(\frac{\text{ل}}{\text{ع}}\right) = \frac{\text{ع}\ \frac{\text{د ل}}{\text{د س}} - \text{ل}\ \frac{\text{د ع}}{\text{د س}}}{\text{ع}^{٢}}}$$

تعرف مشتقة خارج قسمة دالتين بـــ :

$$\frac{\textbf{المقام × مشتقه البسط – البسط × مشتقه المقام}}{\textbf{مربع المقام}}$$

مثال (١) :

جد : $\frac{\text{د}}{\text{د س}}\left[\frac{\text{س}^{٣} - ٤}{\text{٣ س}^{٢} + ٥}\right]$

الحل :

$$\frac{\text{د}}{\text{د س}}\left[\frac{\text{س}^{٣} - ٤}{\text{٣ س}^{٢} + ٥}\right]$$

$$= \frac{\left(\text{٣ س}^{٢} + ٥\right)\left(\text{٣س}^{٢}\right) - \left(\text{س}^{٣} - ٤\right)\left(\text{٦س}\right)}{\left(\text{٣ س}^{٢} + ٥\right)^{٢}}$$

أكمل الحل

مثال (٢) :

أثبت أن : $\frac{د}{د\, س}$ (ظا س) = قا^{٢} س

الحل :

ضع ص = ظا س = $\frac{جا\, س}{جتا\, س}$

بتفاضل خارج قسمة دالتين

$$\frac{د\, ص}{د\, س} = \frac{جتا\, س \ \frac{د}{د\, س}(جا\, س) - (جا\, س) \frac{د}{د\, س}(جتا\, س)}{جتا^{٢}\, س}$$

$$= \frac{جتا\, س\ جتا\, س - جا\, س\ (- جا\, س)}{جتا^{٢}\, س}$$

$$= \frac{جتا^{٢}\, س + جا^{٢}\, س}{جتا^{٢}\, س} = \frac{١}{جتا^{٢}\, س} = قا^{٢}\, س$$

نشاط :

أثبت أن :

(١) $\frac{د}{د\, س}$ (قا س) = ظا س قا س

(٢) $\frac{د}{د\, س}$ (ظتا س) = − قتا^{٢} س

(٣) $\frac{د}{د\, س}$ (قتا س) = − ظتا س قتا س

تمرين (٢ – ٤)

جد قيمة $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ في كل من الحالات التالية :

(١) $\text{ص} = \text{س}^{٤} + ٣\,\text{س}^{٢} + ٥$

(٢) $\text{ص} = ٥\,\text{س}^{٣} + ٢\,\text{س}^{٢} + \text{س} + ١$

(٣) $\text{ص} = ١ + \text{س} + \text{جا س}$

(٤) $\text{ص} = \frac{١}{\text{س}} + ٥\,\text{جا س}$

(٥) $\text{ص} = \frac{\text{س}}{١ + \text{جا س}}$

(٦) $\text{ص} = \text{س}^{٢}\,\text{جا س}$

(٧) $\text{ص} = \frac{٢\,\text{س} + ٣}{\text{س} - ٢}$ ، $\text{س} \neq ٢$

(٨) $\text{ص} = \frac{\text{س}^{٢} - ٩}{\text{س}^{٢} - ٥\,\text{س}}$ ، $\text{س} \neq ٥$

(٩) $\text{ص} = (\text{جا س} + ١)(\text{س}^{٢} - \text{س})$

(١٠) $\text{ص} = \frac{٣\,\text{س}^{٢}}{\text{س} + ١}$ ، $\text{س} \neq -١$

(١١) $\text{ص} = \frac{\text{س}^{٥} - \text{س}^{٤} + ٣\,\text{س}^{٢}}{٢\text{س} + ٧}$ ، $\text{س} \neq \frac{-٧}{٢}$

(١٢) $\text{ص} = \frac{\text{س}^{١} - ١}{\text{س}^{٢} + ١}$

(١٣) ص = جا س + جتا س

(١٤) ص = $س^{٣}$ جا س

(١٥) ص = جا س جتا س

(٢ – ٥) دالة الدالة :

لتكن ص = د (ل) دالة في المتغير ل ، و ل = ر (س) دالة في المتغير س . عليه فإن

$$\frac{د ص}{د س} = \frac{د ص}{د ل} \times \frac{د ل}{د س}$$

البرهان :

إذا تغيرت س إلى س + Δ س فإن ل تتغير إلى ل + Δ ل وتبعاً لذلك تتغير ص إلى ص + Δ ص .

$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{\Delta ص}{\Delta ل} \cdot \frac{\Delta ل}{\Delta س}$$

$$\therefore \quad \frac{د ص}{د س} = \lim_{\Delta س \to ٠} \frac{\Delta ص}{\Delta س}$$

$$= \lim_{\Delta ل \to ٠} \frac{\Delta ص}{\Delta ل} \cdot \lim_{\Delta س \to ٠} \frac{\Delta ل}{\Delta س} \quad (\text{لأن } \Delta ل \to ٠ \text{ عندما } \Delta س \to ٠)$$

$$= \frac{د ص}{د ل} \cdot \frac{د ل}{د س}$$

مثال (١) :

جد $\frac{د ص}{د س}$ إذا كان :

(١) ص = $(٥ س^{٢} + ٧)^{\frac{٣}{٢}}$

(٢) ص = جا $س^{٢}$

الحل :

(١) ضع ل = ٥ س^{٢} + ٧

إذن ص = ل$^{\frac{٣}{٢}}$

عليه فإن ص دالة في ل و ل دالة في س وهذا تركيب لدالة دالة .

$$\therefore \frac{د ص}{د س} = \frac{د ص}{د ل} \cdot \frac{د ل}{د س}$$

$$= \frac{٣}{٢} ل^{\frac{١}{٢}} (١٠ س)$$

$$= \frac{٣}{٢} (٥ س^{٢} + ٧)^{\frac{١}{٢}} (١٠ س)$$

$$= ١٥ س (٥ س^{٢} - ٧)^{\frac{١}{٢}}$$

(٢) ضع ل = س^{٢}

$\therefore$ ص = جا ل

$$\therefore \frac{د ص}{د س} = \frac{د ص}{د ل} \cdot \frac{د ل}{د س}$$

= جتا ل (٢ س)

= ٢ س جتا س^{٢}

تلاحظ في المثال السابق أنه يتم اشتقاق القوس دون النظر لما في داخله ويضرب في مشتقة ما بداخل القوس ، هذا في المسألة الأولى ، أمّا في الثانية فقد تم اشتقاق الجيب دون النظر للزاوية س^{٢} ثم ضرب في تفاضل الزاوية .

مثال (٢) :

جد $\frac{د}{د س}$ جا (أ س + ب)

الحل :

$$\frac{د}{د\ س} = \text{جتا}\ (\ أ\ س + ب\ ) \times \frac{د}{د\ س}\ (\ أ\ س + ب\ )$$

$$= أ\ \text{جتا}\ (\ أ\ س + ب\ )$$

تمرين (٢ – ٥)

جد مشتقات الدوال التالية :

(١) $ص = (\ ٢\ س^{٢} + ٣\ )^{٥}$

(٢) $ص = (٢س^{٣} + س)^{\frac{١}{٢}}$

(٣) $ص = (١ + ٢\ س - س^{٢}\ )^{٣}$

(٤) $ص = \text{حا}^{٢}\ س$

(٥) $ص = \text{جا}\ (٢\ س + ٣)$

(٦) $ص = \text{جا}(س^{٣}+س)$

(٢ – ٦) تفاضل (اشتقاق) الدوال المعرفة ضمنياً :

في كل ما سبق من دوال نرى أن المتغير التابع الذي يعرف الدالة يكتب مباشرة بدلالة المتغير المستقل وتسمى الدالة في هذه الحالة دالة صريحة. لكن في كثير من الأحيان يمكن أن يرتبط المتغيران بصورة غير مباشرة ، في هذه الحالة نقول إنه يمكن تعريف متغير كداله في الآخر ضمنياً وتسمى الدالة في هذه الحالة دالة معرفة ضمنياً. مثال لدالة ضمنية :

$$\sqrt{س^{٢} + ص^{٢}} = \text{جا}\ ص + س$$

ماذا تفعل لإيجاد $\frac{د\ ص}{د\ س}$ بالنظر لـــ ص كداله في المتغير س ، في مثل قاعدة هذه الدالة.

لنفرض أن ص = د(س) ، عليه فإن أى داله ر (ص) في ص يمكن النظر لها كداله في س وباستخدام قاعدة دالة الدالة فإن :

$$\frac{د}{د\ س}\ (\ ر\ (\ ص\ )\ ) = ر'\ (\ ص\ )\ \frac{د\ ص}{د\ س}$$

إذن يمكن كتابة :

$$\frac{\text{د}}{\text{د س}}\,\text{ص}^{\text{ن}} = \text{ن ص}^{\text{ن} - ١}\,\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$$

$$\frac{\text{د}}{\text{د س}}\,\text{جا ص} = \text{جتا ص}\,\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$$

وهكذا .

مثال (١) :

جد $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ إذا كان $\text{س} + \text{ص}^{٢} = ٥\,\text{س ص}$

الحل :

تفاضل كل الحدود بالنسبة لـــ س لنحصل على :

$$١ + ٢\,\text{ص}\,\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = ٥\left[\text{س}\,\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} + \text{ص}\right]$$

إذن :

$$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}\left[٢\,\text{ص} - ٥\,\text{س}\right] = ٥\,\text{ص} - ١$$

$$\therefore \quad \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{٥\,\text{ص} - ١}{٢\,\text{ص} - ٥\,\text{س}}$$

مثال (٢) :

جد $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ إذا كان $\text{ص}^{٢} + \text{س}^{٢} = ٤$

الحل :

$$٢\,\text{ص}\,\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} + ٢\,\text{س} = \text{صفر}$$

$$\therefore \quad \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = -\frac{\text{س}}{\text{ص}}$$

مثال (٣) :

جد $\frac{د ص}{د س}$ إذا كان ص = ظا$^{-١}$ س (الزاوية التي ظلها س)

الحل :

إذا كانت ص = ظا$^{-١}$ س فإن س = ظا ص

بشتقاق الطرفين بالنسبة لـــ س نحصل على :

$$١ = قا^{٢} ص \quad \frac{د ص}{د س}$$

$$\therefore \quad \frac{د ص}{د س} = \frac{١}{قا^{٢} ص}$$

لإيجاد ذلك بدلالة س ، لاحظ أن :

قا^{٢} ص = ١ + ظا^{٢} ص = ١ + س^{٢}

$$\therefore \quad \frac{د ص}{د س} = \frac{١}{١ + س^{٢}}$$

تمرين (٢ – ٦)

جد $\frac{د ص}{د س}$ في كل من الدوال التالية :

(١) ٣ س + ٤ ص = ٦

(٢) ٤ س^{٢} + ٣ س ص = ٠

(٣) س + $\sqrt{ص}$ = جا ص

(٤) س = س^{٢} + ص^{٣}

(٥) س + ص ظا س = ٠

(٦) س^{٢} + ص^{٢} = س ص

(٧) س^{٤} + ١ = س + ص^{٢}

(٨) س^{٣} + ص^{٣} – ٤ س ص = ٠

$$(٩)\quad \frac{١}{ص} + \frac{١}{س} = ١$$

$$(١٠)\quad \sqrt{ص} + \sqrt{س} = ٢$$

$$(١١)\quad س^{٣} - ٢\, س\, ص^{٢} + ص^{٣} = ٧$$

(٢ – ٧) المشتقات العليا :

لتكن ص = د (س) دالة في المتغير س ولتكن $\frac{د\, ص}{د\, س} = د'(س)$ ، المشتقة الأولى للدالة ص بالنسبة لـــ س موجودة . وإذا كانت النهاية

$$\lim_{\Delta س \to ٠} \frac{د'(س + \Delta س) - د'(س)}{\Delta س}$$

موجودة أيضاً .

فتسمى بالمشتقة الثانية للمتغير ص بالنسبة لـــ س ونرمز لها بالرمـــز

$$د''(س) \quad أو \quad \frac{د^{٢}\, ص}{د\, س^{٢}}$$

بالمثل إذا وضعنا $ص_{٢} = د''(س)$ فإن $ص_{٢}$ داله في س ، ويمكـــن تعريف مشتقتها $\frac{د\, ص_{٢}}{}$ بالنسبة لـــ س إذا وجدت النهاية

$$\lim_{\Delta س \to ٠} \frac{د''(س + \Delta س) - د''(س)}{\Delta س}$$

ونكتب :

$$\frac{د\, ص_{٢}}{د\, س} = د'''(س)$$

نسمى $د'''(س)$ بالمشتقة الثالثة لـــ ص بالنسبة لـــ س ونرمز لها أيضاً بـــ :

$$ص''' \quad أو \quad \frac{د^{٣}\, ص}{د\, س^{٣}} \quad أو \quad \frac{د^{٣}}{د\, س^{٣}}(ص)$$

وهكذا يمكن تعريف المشتقة النونية (ن) للدالة ص بالنسبة لـ س بـ :

$$\frac{د^{ن} ص}{د س^{ن}} = \frac{د}{د س} \left(\frac{د^{ن-١} ص}{د س^{ن-١}} \right)$$

ن = ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ...

ويرمز لها أيضاً بـ $ص^{(ن)}$.

مثال (١) :

إذا كان ص = ٦ $س^{٣}$ − ١ فجد $\frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}}$ عند س = ٥ .

الحل :

$$\frac{د ص}{د س} = ١٨ س^{٢}$$

$$\frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}} = ٣٦ س$$

$$\therefore \left. \frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}} \right|_{س = ٥} = ٣٦ \times ٥ = ١٨٠$$

مثال (٢) :

جد المشتقة الثالثة للدالة ص = جتا ٢ س

الحل :

$$\frac{د ص}{د س} = -٢ \text{ جا } ٢ س$$

$$\frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}} = -٤ \text{ جتا } ٢ س$$

$$\frac{د^{٣} ص}{د س^{٣}} = ٨ \text{ جا } ٢ س$$

مثال (٣) :

إذا كان ص = س جا س

جد $\frac{د^٢ ص}{د س^٢}$

الحل :

$$\frac{د ص}{د س} = س \text{ جتا } س + \text{جا } س$$

$$\frac{د^٢ ص}{د س^٢} = \text{جتا } س - س \text{ جا } س + \text{جتا } س$$

تمرين (٢ – ٧)

جد المشتقة الثانية لكل من الدوال التالية :

(١) ص = $س^٣$ + ١

(٢) ص = جا س – جتا س

(٣) ص = جتا ٢ س

(٤) ص = ٣$س^٤$ – ٢ $س^٣$ + ٤ س

(٥) ص = $\text{جا}^٢$ س

(٢–٨) <u>تطبيقات التفاضل على الهندسة التحليلية :</u>

سبق أن أشرنا إلى المعنى الهندسي لمشتقه الدالة ص = د (س) . بميل المماس عند النقطة ($س_١$ ، د ($س_١$)) يساوى د′ ($س_١$) هذا يساعد كثيراً في حل بعض المسائل في الهندسة التى سبق أن اشرنا إلى بعضها في تمارين سابقة .

مثال (١) :

جد معادلة المماس لمنحنى الداله ص = $\frac{١}{س}$ عند النقطة (١ ، ١) .

الحل :

$$\frac{د ص}{د س} = - \frac{١}{س^٢}$$

∴ ميل المماس عند س = ١ يساوى -١

∵ ص - ص$_١$ = م (س - س$_١$) إذن معادلة المماس هى :

ص - ١ = -١ (س - ١)

أو

س + ص - ٢ = صفر

مثال (٢) :

جد معادلة المماس و العمودي على المماس لمنحنى الدالة وميله :

ص = س^٢ - س + ١ عند س = ٠

الحل :

$$\frac{د ص}{د س} = ٢ س - ١$$

∴ ميل المماس عند النقطة (٠ ، ١) يساوى -١

∴ معادلة المماس :

ص - ص$_١$ =م (س - س$_١$)

ص - ١ = -١ (س - ٠)

⇐ س + ص - ١ = ٠

ميل العمودي على المماس = ١

تمرين (٢ - ٨)

(١) جد ميل المماس لمنحنى الدالة د (س) = س٢ - ٣ س + ١ عند النقطة (٠ ، ١) .

(٢) جد ميل منحنى الدالة د (س) = ٣ - س عند النقطة س = ١ .

(٣) اكتب معادلة المماس لمنحنى الدالة ص= ٣ س^٢ عند س = ٢ .

(٤) إذا كان المماس لمنحنى الدالة د (س) = س^٢ + ٥ س عند س = س$_١$ يصنع مع محور السينات الموجب زاوية قياسها ٤٥° ، جد احداثيى نقطة التماس .

الوحدة الثالثة

التكامل

أهداف الوحدة الثالثة
التكامـل

بعد دراسة هذه الوحدة نتوقع أن يكون الطالب قادراً على أن :

١/ يعرف عملية التكامل .
٢/ يجد تكامل الدالة على صورة أس^{ن} (ن ≠ − ١) .
٣/ يجد تكامل الدالة الناتجة من مجموع أو فرق دوال على الصورة أس^{ن} (ن ≠ − ١) .
٤/ يجد تكامل الدوال المثلثية على صورة جا س ، جتا س ، جا أس ، جتا أ س ، قا^{٢} أ س ، قتا^{٢} أ س كعملية عكسية للتفاضل .

الوحدة الثالثة

التكامل

(٣ – ١) التكامل كعملية عكسية للتفاضل :

في التفاضل نعطى الداله ص في متغير ما س مثلاً ويطلب منا ايجـــاد $\frac{د\,ص}{د\,س}$. في العملية العكسية نعطى $\frac{د\,ص}{د\,س}$ ويطلب منا ايجاد الداله ص .

هذه العملية العكسية تسمى بالتكامل فمثلاً إذا اعطينا .

$$\frac{د\,ص}{د\,س} = ٢\,س$$

بسهولة يمكن ايجاد ص = $س^{٢}$ ، وبملاحظة خاطفة نجد أن ص يمكن أن تساوى $س^{٢}$ + ١ أو $س^{٢}$ – ٧ أو $س^{٢}$ + أ وبصورة عامـــة ص = $س^{٢}$ + ث (ث ثابت) كلها تمثل حلاً لايجاد ص إذا كان :

$$\frac{د\,ص}{د\,س} = ٢\,س \,.$$

وبصورة عامة نفترض أن :

ص = د (س)

فإذا كان $\frac{د\,ص}{د\,س}$ = ر (س)

فإننا نقول إن ص هى تكامل ر (س) بالنسبة لـــ س وتكتب

ص = $\int$ ر (س) د س

ويساوى ذلك د (س) + ث حيث ث أى ثابت يسمى ثابت التكامل .

مثال (١) :

كامل (جد تكامل) الدالة ٣ س + ١ .

الحل :

$$\int (٣ س + ١) \, د س = \frac{٣}{٢} س^{٢} + س + ث$$

لأن $\frac{د}{د س} \left(\frac{٣}{٢} س^{٢} + س + ث \right) = ٣ س + ١$

الآن لكل ن $\neq$ −١

$$\frac{د}{د س} \left(س^{ن+١} \right) = (ن + ١) س^{ن}$$

أو $\frac{د}{د س} \left(\frac{س^{ن+١}}{ن + ١} \right) = س^{ن}$

عليه فإن :

$$\boxed{\int س^{ن} \, د س = \frac{س^{ن+١}}{ن + ١} + ث}$$

مثال (٢) :

$$\int س^{٨} \, د س = \frac{س^{٨+١}}{٨ + ١} + ث$$

$$= \frac{س^{٩}}{٩} + ث$$

$$\int ٤ س^{٥} \, د س = ٤ \times \frac{١}{٦} س^{٦} + ث$$

$$= \frac{٢}{٣} س^{٦} + ث$$

مثال (٣) :

جد :

(أ) $\int \left(\text{س}^{٣} + \frac{١}{\text{س}^{٣}} \right) \text{د س}$

(ب) $\int \left(\sqrt{\text{س}} + \frac{١}{\sqrt{\text{س}}} \right) \text{د س}$

(جـ) $\int \left(\text{س} - \frac{١}{\text{س}} \right)^{٢} \text{د س}$

الحل :

(أ) $\int \left(\text{س}^{٣} + \frac{١}{\text{س}^{٣}} \right) \text{د س}$

$= \int \left(\text{س}^{٣} + \text{س}^{-٣} \right) \text{د س}$

$= \frac{١}{٤} \text{س}^{٤} - \frac{١}{٢} \text{س}^{-٢} + \text{ث}$

$= \frac{\text{س}^{٤}}{٤} - \frac{١}{٢\text{س}^{٢}} + \text{ث}$

(ب) $\int \left(\sqrt{\text{س}} + \frac{١}{\sqrt{\text{س}}} \right) \text{د س}$

$= \int \left(\text{س}^{\frac{١}{٢}} + \text{س}^{-\frac{١}{٢}} \right) \text{د س}$

$$= \frac{\text{س}^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{\text{س}^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + \text{ث}$$

$$= \frac{2}{3}\,\text{س}^{\frac{3}{2}} + 2\,\text{س}^{\frac{1}{2}} + \text{ث}$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{\text{س}^{3}} + 2\sqrt{\text{س}} + \text{ث}$$

(جـ) $\int \left(\text{س} - \frac{1}{\text{س}}\right)^{2} \text{د س}$

$$= \int \left(\text{س}^{2} - 2 + \text{س}^{-2}\right) \text{د س}$$

$$= \frac{\text{س}^{3}}{3} - 2\,\text{س} + \frac{\text{س}^{-1}}{-1} + \text{ث}$$

$$= \frac{\text{س}^{3}}{3} - 2\,\text{س} - \frac{1}{\text{س}} + \text{ث}$$

لاحظ أن التكامل يعتمد بصورة مباشرة على معرفتنا بالصيغ الأساسية في التفاضل ، وبمقتضى ما درسناه في التفاضل يجب علينا معرفة هذه الصيغ الأساسية الموضحة في الجدول (٤ – ١) والتى يمكن إثباتها مباشرة باجراء التفاضل .

الدالة	تكاملها بالنسبة لـــ س
$س^{ن}$	$\frac{س^{ن+1}}{ن+1}$ + ث ، ن ≠ −١
جا س	جتا س + ث
جتا س	جا س + ث
جا أ س	− $\frac{1}{أ}$ جتا أ س + ث
جتا أ س	$\frac{1}{أ}$ جا أ س + ث
$قا^{2}$ أ س	$\frac{1}{أ}$ ظا أ س + ث
$قتا^{2}$ أ س	− $\frac{1}{أ}$ ظتا أ س + ث
قا أ س ظا أ س	$\frac{1}{أ}$ قا أ س + ث
قتا أ س ظتا أ س	− $\frac{1}{أ}$ قتا أ س + ث

جدول (٣ − ١)

مثال (٤) :
جد :

(أ) ∫ جا ٧ س د س

(ب) ∫ جا ٢ س جتا س د س

الحل :

(أ) من الجدول :

∫ جا ٧س د س = − $\frac{١}{٧}$ جتا ٧ س + ث

(ب) جا ٢ س جتا س ليست مع الصيغ الأساسية ولكن

جا ٢ س جتا س = $\frac{١}{٢}$ [جا ٣ س + جا س]

إذن : ∫ جا ٢ س جتا س د س = ∫ $\frac{١}{٢}$(جا ٣ س + $\frac{١}{٢}$جا س) د س

= $\frac{١}{٢}$(− $\frac{١}{٣}$جتا ٣س) + $\frac{١}{٢}$ (− جتا س) + ث

= − $\frac{١}{٦}$ جتا ٣ س − $\frac{١}{٢}$ جتا س + ث

تمرين (٣ – ١)

جد التكاملات الآتية :

(١) $\int$ س^{٧} د س

(٢) $\int \dfrac{\text{س}^{٣} - ١}{\text{س}^{٢}}$ د س

(٣) $\int \left(\dfrac{١}{\text{ن}} + \text{ن} \right)^{٢}$ د ن

(٤) $\int$ (١ – ٣ س) (١ + س) د س

(٥) $\int$ ظا^{٢} س د س

(٦) $\int$ جا^{٢} س د س

(تلميح : جتا ٢ س = ١ – ٢ جا^{٢} س)

(٧) $\int \dfrac{\text{س}^{٢} + ٦\text{س} + ٥}{\text{س} + ٥}$ د س

(٨) $\int \dfrac{\text{س}^{٢} - ١}{\text{س} - ١}$ د س

(٩) $\int$ جتا ٣ س د س

(١٠) $\int (\sqrt{\text{س}} - ٤)$ د س

الوحدة الرابعة

الاحصاء

أهداف الوحدة الرابعة
الإحصاء

بعد دراسة هذه الوحدة نتوقع أن يكون الطالب قادراً على أن :

١/ يعرّف علم الإحصاء .
٢/ يحدد أهداف علم الإحصاء .
٣/ يعرّف مقاييس النزعة المركزية والتشتت لفظياً ورياضياً .
٤/ يحل مسائل مقاييس النزعة المركزية والتشتت باستخدام قوانينها الرياضية .
٥/ يميز بين مقاييس النزعة المركزية والتشتت .
٦/ يحسب مقاييس النزعة المركزية والتشتت من الجداول التكرارية .
٧/ يجد خواص مقاييس النزعة المركزية والتشتت .

الوحدة الرابعة

الإحصاء

(٤– ١) مقدمة ونبذة تاريخية :

لعلم الاحصاء دور متزايد في حياتنا اليومية بحيث أصبح يشغل حيزاً مرموقاً بين بقية العلوم الأخرى . وهو فرع من فروع المنهجية العلمية ، فهو علم النظرية والأسلوب ، ويختص بالطرق العلمية ، لجمع وتنظيم وتلخيص وعرض وتحليل وتفسير البيانات التى تم الحصول عليها بالمسوحات أو بالتجارب الإحصائية . ويهدف علم الإحصاء أساساً إلى الوصول إلى استدلالات عن معالم المجتمع الاحصائى من خلال بيانات العينة العشوائية (التى تمثل المجتمع تمثيلاً صادقاً) كما يهدف إلى تفسير وتوقع الظواهر .

وهو علم تمتد جذوره إلى ما قبل الميلاد بألاف السنين حيث قام قدماء المصريين بعمل تعداد لسكان مصر وثرواتها والأعمال الموسمية فيها واستخدموا نتائج ذلك في تنفيذ بناء الأهرامات ، كما تم تعداد للسكان والأراضى الصالحة للزراعة بهدف إعادة توزيعها على السكان بطريقة عادلة . وفي صدر الاسلام أمر الرسول ﷺ باحصاء المسلمين في المدينة رجالاً ونساء واطفالاً في حديثه (اكتبوا لى ما تلفظ بالاسلام من الناس) . كما قام سيدنا عمر بتنظيم الشئون الادارية للدولة الاسلامية بإنشاء الدواوين التى تحوى سجلات الجند والمواليد والمال .

وفي العصر الذهبى للدولة الاسلامية ، قام الخليفة المأمون باجراء تعداد للسكان والثروات لتحديد الإمكانيات العسكرية للدولة . وفي العصور الوسطى قام الملوك ورؤساء الدول وزعماء القبائل بتعدادات مماثلة .

أما في القرن السابع عشر ، فقد استخدمت الأرقام للدلالة على ما يجمع من معلومات بشكل واسع .

وأطلق على العلم الذى يبحث طرق جمع البيانات الرقمية التى تهم الدولة (علم حساب الدولة) حيث تتناول إحصاءات المواليد والوفيات وعدد السكان ومقدار الثروات والدخول والضرائب وفي الحقيقة فإن كلمة الإحصاء باللغة الانجليزية (Statistics) مشتقة من كلمة (State) وهذا ما يشير إلى أن جمع البيانات كان يهدف إلى خدمة اغراض الدولة ، خاصة العسكرية منها . وفي اللغة

العربية أحصى الشئ عده وهى مأخوذة من الحصاة وهى العقل ، والحصى هو ذو العقل القوى يقول تعالى :

﴿ واحاط بما لديهم وأحصى كل شئ عددا ﴾ " الجن : ١٤ "

﴿ لقد أحصاهم وعدهم عداً ﴾ " مريم : ٩٤ "

﴿ وإن تعدو نعمة الله لاتحصوها إن الله لغفور رحيم ﴾ " النحل : ١٨ "

لقد تطورت العلوم الرياضية خلال القرن الثامن عشر تطوراً سريعاً أدى ذلك إلى تطور مماثل في علم الإحصاء ظهر خلال القرن الثامن عشر والقرن التاسع عشر العلماء الأوائل الذين كان لهم الفضل الأول في تطوير النظريات الإحصائية مثل دانيال برنوللى ، والرياضى الالمانى فردريك جاوس والرياضى الفرنسى لابلاس ، والعالمان الانجليزيان جولتون وكارل بيرسون .

وخلال القرن العشرين تطور الاحصاء ليساير التطور الذى حصل على العلوم الأخرى وتطور المجالات الصناعية والزراعية والتربوية والاقتصادية وغيرها فازدادت الحاجة لإستخدام الطرق الاحصائية في مختلف هذه المجالات، ولعل إعتماد كثير من الدول على التخطيط كاسلوب لرسم السياسات زاد من اهتمامها بالأساليب الاحصائية لجمع وعرض وتفسير بياناتها بشكل يحقق الأهداف المرجوة .

ومن هذا المنطلق يمكننا تعريف علم الأحصاء على النحو التالى :

تعريف :

> يعرف الإحصاء بأنه مجموعة الطرق والنظريات العلمية التى تهدف إلى جمع البيانات الرقمية وعرضها ووصفها وتحليلها واستخدام نتائجها في أغراض التنبؤ أو التقرير أو التحقق .

من هذا التعريف نستخلص الأهداف الرئيسة التالية للاحصاء :

(١) جمع البيانات :

حيث يتم جمع البيانات عن الظاهرة المدروسة للوصول إلى النتائج النهائية .

(٢) عرض البيانات :

بعد جمع البيانات عن الظاهرة المدروسة يهدف الإحصاء إلى عرض هذه البيانات بأشكال متعددة كعرضها في جداول تكرارية أو باشكال هندسية أو برسوم بيانية كما سبق وأن درست وذلك لاجراء المقارنات السريعة بين مختلف أوجه الظاهرة التى نقوم بدراستها .

(٣) وصف البيانات :

بعد جمع البيانات وعرضها يهدف الإحصاء إلى دراسة الخصائص الأساسية للظاهرة المدروسة لوصفها وقياسها بمقاييس محددة تعبر عن هذه الخصائص ومن أهم المقاييس المستخدمة لوصف مجموعة من البيانات :

أ- مقاييس النزعة المركزية

ب- مقاييس التشتت .

جـ- مقاييس الإلتواء .

هـ- مقاييس الإعتدال .

وسندرس في هذا الباب بشئ من التفصيل الموضوعين الأولين وهما مقاييس النزعة المركزية ومقاييس التشتت .

(٤) تحليل البيانات :

بعد وصف البيانات يتم تحليلها واستخلاص النتائج التى أمكن الحصول عليها بصورة علمية للوصول إلى الحقائق المتعلقة بالظاهرة المدروسة .

(٥) إستخدام النتائج :

بعد تحليل البيانات يهدف الإحصاء إلى تفسير البيانات التى تم التوصل إليها تفسيراً منطقياً لإستخدامها في أغراض متعددة كالتنبؤ بالقيم المستقبلية للظاهرة (مثلاً بتعداد سكان جمهورية السودان عام ٢٠٥٠م) .

أو التقرير بإتخاذ قرار معين تجاه مشكلة ما لدرء خطرها أو الإستفادة منها .

(٤ – ٢) مقاييس النزعة المركزية :

يحدث في أغلب المجتمعات الإحصائية وفي توزيعاتها التكرارية أن تتراكم (تتمركز) القيم عند نقطة متوسطة ، وهو ما يعرف بظاهرة النزعة المركزية، أى نزعة القيم المختلفة إلى التمركز عند القيمة النموذجية أو الممثلة لمجموعة القيم في التوزيع . ونظراً لأن مثل هذه القيمة تميل إلى الوقوع في المركز داخل مجموعة

البيانات ، لذلك تسمى هذه القيمة بالقيمة المتوسطة أو مقياس النزعة المركزية . آخذين في الاعتبار أنه يوجد عدة أسس لتحديد القيمة المتوسطة ، وبالتالى فيوجد عدة صور لهذه القيمة ، أهمها واكثرها شيوعاً هى : الوسط الحسابى (أو باختصار المتوسط) ، والوسيط ، والمنوال ، وهناك أيضاً الوسط الهندسى والوسط التوافقى – لكنها أقل استعمالاً – ولكل من هذه المتوسطات مزاياه وعيوبه ، وهذا بالطبع يعتمد على البيانات وعلى الهدف من استخدام المتوسط .

الوسط الحسابى : (المتوسط)

يعتبر الوسط الحسابى من أبسط وأشهر المتوسطات واكثرها سهولة في الحساب ويعرف بأنه القيمة التى لو اعطيت لكل مفردة من مفردات المجموعة لكان مجموع هذه القيم الجديدة هو نفس المجموع الفعلى للقيم الأصلية ، وباختصار فهو القيمة التى تخص كل مفردة لو أن مجموع القيم الأصلية وزع على جميع المفردات بالتساوى . ولذلك يمكن حسابه رياضياً بالمجموع الجبرى لقيم المفردات مقسوماً على عدد هذه المفردات .

وسنوضح فيما يلى طريقة حسابه :

مثال (١) :

إذا كانت أوزان ثلاثة أولاد بالكيلوجرام هى :

٣٤ كيلوجرام ، ٤٧ كيلوجرام ، ٣٩ كيلوجرام

أحسب الوسط الحسابى لأوزان الأولاد

الحل :

بما أن الوسط الحسابى = $\frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عددها}}$

∴ الوسط الحسابى $= \frac{٣٩ + ٤٧ + ٣٤}{٣}$

$= \frac{١٢٠}{٣}$

= ٤٠ كيلوجراماً

ولوضع القاعدة العامة لذلك باستخدام الرموز ، إذا فرضا أن القيم الثلاث السابقة هى :

$س_١$ ، $س_٢$ ، $س_٣$

وإذا رمزنا للوسط الحسابى بالرمز $\overline{س}$ (ونقرأ س شرطة) فإن قيمته حسب التعريف هى :

$$\overline{س} = \frac{س_١ + س_٢ + س_٣}{٣}$$

أما إذا كان لدينا عدد من القيم وليكن ن وأن القيم هى :

$س_١$ ، $س_٢$ ، $س_٣$ ، ... ، $س_ن$

فالوسط الحسابى $\overline{س}$ يكون :

$$\boxed{\overline{س} = \frac{س_١ + س_٢ + ... + س_ن}{ن}}$$

وإختصاراً في التعبير للوسط الحسابى $\overline{س}$ نرمز للبسط من الطرف الأيسر أعلاه بالرمز $\sum$س (ويقرأ سيقما س) الذى يدل على الجمع حيث :

$$\sum_{ر=١}^{ن} س_ر = س_١ + س_٢ + س_٣ + ... + س_ن$$

(ويقرأ $\sum_{ر=١}^{ن} س_ر$ هكذا سيقما $س_ر$ من ر = ١ إلى ر = ن)

أى مجموع $س_ر$ من ر = ١ إلى ر = ن

وبذلك تصبح الصيغة المبسطة للوسط الحسابى :

$$\boxed{\overline{س} = \frac{\sum_{ر=١}^{ن} س_ر}{ن}}$$

مثال (١) :

فيما يلى درجات ١٠ طلاب حصلوا عليها في امتحان للرياضيات درجته القصوى ٤٠ درجة .

٣٥ ، ٢٤ ، ١٧ ، ٢٩ ، ٣٧ ، ٤٠ ، ٣٨ ، ٣٠ ، ٣٠ ، ٤٠ .

والمطلوب حساب الوسط الحسابى لهذه الدرجات :

الحل :

$$\bar{س} = \frac{\sum_{ر=١}^{ن} س_ر}{ن}$$

$$\therefore \bar{س} = \frac{٣٥ + ٢٤ + ١٧ + ٢٩ + ٣٧ + ٤٠ + ٣٨ + ٣٠ + ٣٠ + ٤٠}{١٠}$$

$$\therefore \bar{س} = \frac{٣٢٠}{١٠} = ٣٢$$

أى أن متوسط درجات الطلاب في ذلك الامتحان ٣٢ درجة .

أما في حساب الوسط الحسابى في حالة البيانات المبوبة فنوضحه بالمثال التالى :

مثال (٢) :

أفترض أنه في أحد المصانع ١٠ عمال يعملون يومياً بالتناوب حسب الاتفاق مع صاحب العمل بحيث يعمل ٣ عمال ٦ ساعات يومياً و٥ عمال ٨ ساعات يومياً وعاملان ٩ ساعات يومياً كما في الجدول أدناه :

ساعات العمل	عدد العمال
٦	٣
٨	٥
٩	٢

أحسب الوسط الحسابى لساعات العمل اليومية للعمال

الحل :

لحساب الوسط فإنه يجب أولاً حساب مجموع ساعات العمل اليومية في المصنع والناتجة من عمل المجموعات الثلاث من العمال ، فالمجموعة الأولى تتكون من ٣ كل منهم يعمل ٦ ساعات أى أن : ساعات العمل اليومية للمجموعة الأولى = ٣ × ٦ = ١٨

وهى حاصل ضرب عدد العمال في المجموعة الأولى في ساعات العمل.

وبالمثل فإن :

مجموع ساعات العمل للمجموعة الثانية = ٥ × ٨ = ٤٠

ومجموع ساعات العمل للمجموعة الثالثة = ٢ × ٩ = ١٨

وبجمع حواصل الضرب نحصل على ساعات العمل اليومية فإذا رمزنا لساعات العمل بالرمز س ، ولعدد العمال أو التكرارات المناظرة بالرمز ك فإن خطوات الحل تكون كما في الجدول التالى :

ساعات العمل س	التكرار ك	ساعات العمل × التكرار س× ك
٦	٣	٦ × ٣ = ١٨
٨	٥	٨ × ٥ = ٤٠
٩	٢	٩ × ٢ = ١٨
المجموع	$\sum$ ك = ١٠	$\sum$ ك × س = ٧٦

ومنه نجد أن :

عدد العمال = $\sum$ ك = ١٠ عمال

مجموع الساعات = $\sum$ك × س = ٧٦ ساعة

وبالتالى فإن الوسط الحسابى $\overline{\text{س}}$ = $\frac{٧٦}{١٠}$ = ٧,٦ ساعة

أى أن معادلة الوسط الحسابى تصبح في هذه الحالة :

$$\bar{س} = \frac{\sum_{ر=1}^{ن} ك_ر س_ر}{\sum_{ر=1}^{ن} ك_ر}$$

حيث $\sum_{ر=1}^{ن} ك_ر س_ر$ هى مجموعة القيم التى نحصل عليها بضرب القيم في التكرارات المناظرة لها .

$\sum_{ر=1}^{ن} ك_ر$ هى عدد القيم أو مجموع التكرارات .

مثال (٣)

إختار أحد الدارسين ٨٠ فصلاً بالمدارس الثانوية بولاية الخرطوم ووجد أن كثافة الطلاب في الفصل موضحة في الجدول التالى :

عدد الفصول ك	٤	٨	١٢	١٨	١٤	١٠	٧	٤	٣
عدد الطلاب س	٤٨	٥٢	٥٤	٥٨	٦٠	٦٢	٦٤	٦٥	٦٨

جد الوسط الحسابى لعدد الطلاب في الفصل

الحل :

لحل المثال نضع هذا الجدول ونضيف إليه عموداً آخر لحساب حاصل ضرب التكرارات في قيم س المناظرة كما يلى :

عدد الطلاب ك	عدد الفصول س	ك × س
٤٨	٤	١٩٢
٥٢	٨	٤١٦
٥٤	١٢	٦٤٨
٥٨	١٨	١٠٤٤
٦٠	١٤	٠٨٤٠
٦٢	١٠	٠٦٢٠
٦٤	٧	٤٤٨
٦٥	٤	٢٦٠
٦٨	٣	٢٠٤
	٨٠	٤٦٧٢

∴ الوسط الحسابى $\overline{س} = \frac{\sum ك\ س}{\sum ك}$

$= \frac{٤٦٧٢}{٨٠} = ٥٨,٤$

مثال (٥) :

متوسط مصروفات أسرة اليومى ٥٠٠ ديناراً ، جد منصرفات هذه الأسرة خلال شهر اكتوبر .

الحل :

لاحظ أن بالقانون $\overline{س} = \frac{\sum_{ر=١}^{ن} س_ر}{ن}$ ثلاثة كميات مجهولة هى الوسط الحسابى $\overline{س}$ ، مجموع المفــردات $\sum_{ر=١}^{ن} س_ر$ وعدد المفردات ن . إذا اعطينا اثنين منها يمكن الحصول على المجهول الثالث :

$\overline{س}$ = ٥٠٠ دينار ، ن = ٣١ يوماً

∴ $\sum_{ر=1}^{ن}$ س ر = ؟

∴ من القانون : $\sum_{ر=1}^{ن}$ س ر = $\overline{س}$ × ن

= ٥٠٠ × ٣١ = ١٥٥٠٠

∴ منصرفات هذه الأسرة خلال شهر اكتوبر = ١٥٥٠٠ ديناراً .

تمرين (٤ – ١)

(١) جد الوسط الحسابى لإنتاج مزرعة دواجن من البيض إذا كان انتاجها اليومى خلال ١٠ أيام كالآتى :
٥٠٠ ، ٩٠٠ ، ١٢٠٠ ، ٧٢٠ ، ٨٠٠ ، ٦٠٠ ، ١٠٠٠ ، ٩٥٠ ، ٨٥٠ ، ٧٠٠

(٢) إذا كان انتاج خمسة من آبار البترول السودانى ١٠٠٠٠ برميل من البترول الخام ، جد متوسط انتاج البئر الواحدة .

(٣) إذا كان متوسط درجات عدد من التلاميذ ٣٦ درجة جد عدد التلاميذ إذا كان مجموع درجاتهم ٥٤٠ درجة .

(٤) إحدى المصالح الحكومية أخذت عينة مكونة من١٦٠ عاملاً ووجد أن متوسط ساعات العمل اليومية التى يقضونها موضحة في الجدول التالى :

عدد ساعات العمل	٤	٥	٦	٧	٨	المجموع
عدد العمال	٧	٢٨	٦٥	٤٣	١٧	١٦٠

أحسب متوسط ساعات العمل اليومية .

(٥) فصل دراسى به ٤٢ طالباً . جلس منهم ٤٠ طالباً في أحد إمتحانات الرياضيات وتغيب إثنان بسبب المرض فكان الوسط الحسابى لدرجاتهم

٦٧ . وبعد اسبوع تقدم الطالبان اللذان تغيبا للامتحان في المادة نفسها فحصل أحدهما على الدرجة ٤٥ وحصل الثانى على ٩٠ فكم يصبح الوسط الحسابى لدرجات جميع طلاب هذا الفصل .

(٦) مجموعتان من طلاب تتكون المجموعة الأولى من ١٠ طلاب والثانية من ١٢ طالباً أحرز طلاب المجموعة الأولى الدرجات التالية في مادة الرياضيات :

٤٠ ، ٥٢ ، ٣٣ ، ٣٥ ، ٣٧ ، ٤٢ ، ٤٤ ، ٣٧ ، ٣٩ ، ٤١ .

وأحرز كل من طلاب المجموعة الثانية الدرجات التالية في مادة الرياضيات:

٤٤ ،٥٠ ، ٦٠ ، ٢٧ ، ٤٩ ، ٤٠ ، ٥٠ ، ٥٦ ، ٤٤ ،٣٠ ، ١٧ ، ٢٣ .

جد الوسط الحسابى لكل مجموعة ، ومن ثم قارن بين مستوى المجموعتين في مادة الرياضيات .

(٧) بمدرسة ثانوية كان متوسط عدد أيام الغياب خلال شهر بالصفوف الأول والثانى والثالث ٤ ، ٥ ، ٣ على الترتيب إذا علمت أن عدد الطلاب في الصفوف الثلاثة هو ٣٠ ، ٢٦ ، ٣٤ على الترتيب فما متوسط عدد ايام الغياب في المدرسة .

(هل المتوسطات تساوى المتوسط العام الذى حصلت عليه ؟)

(٤ – ٣) حساب الوسط الحسابى من جدول تكرارى ذى فئات :

إن الفرق بين حساب الوسط الحسابى من جدول تكرارى بسيط ومن جدول تكرارى فئاته ذات أطوال متساوية هو أننا لا نعرف القيم الأصلية للمفردات في الجدول الثانى . فإذا كان عدد تكرارات الفئة (٠ – ١٠) هو ٧ فإننا لا نعرف القيم الأصلية لكل من المفردات السبعة وبالتالى لايمكن إيجاد مجموعها كما فعلنا في حالة الوسط الحسابى من الجدول البسيط . لهذا نعتبر بأن كل قيمة من هذه المفردات مساوية لمركز الفئة (متوسط طول الفئة) أى نعطى القيمة ٥ لكل مفردة من المفردات السبعة وبذلك يكون مجموع قيم هذه المفردات ٥ × ٧ = ٣٥ . ونقوم بحساب الوسط الحسابى باعتبار أن قيمة المفردات لكل فئة هى مركز الفئة . وأن

جميع المفردات ضمن الفئة الواحدة تأخذ قيمة تساوى قيمة مركز فئتها ولذلك تتبع الخطوات التالية لإيجاد الوسط الحسابى من الجدول التكرارى .

(١) نرسم جدولاً من ثلاثة أعمدة يحتوى عموده الأول على التكرارات (ك) ، والعمود الثانى يحتوي على مراكز الفئات (م) والعمود الثالث يحتوي على حاصل ضرب التكرارات في مراكز الفئات .

(٢) نوجد حاصل ضرب تكرار كل فئة في مركزها وهى :

$م_١ ك_١$ ، $م_٢ ك_٢$ ، $م_٣ ك_٣$ ، ....

(٣) نجمع حواصل ضرب مراكز الفئات في التكرارات فنحصل على المجموع الكلى لقيم الظاهرة وهو $\sum_{ر = ١}^{ن} م_ر ك_ر$

(٤) نقسم الناتج على التكرارات فنحصل على الوسط الحسابى ، أي :

$$\overline{س} = \frac{\sum_{ر = ١}^{ن} م_ر ك_ر}{\sum_{ر = ١}^{ن} ك_ر}$$

مثال (١) :

جد الوسط الحسابى من الجدول التكرارى التالى :

الفئات	التكرارات
٠ – ١٠	٣
١٠ – ٢٠	٥
٢٠ – ٣٠	٤
٣٠ – ٤٠	٧
٤٠ – ٥٠	٦

الحل :

ننشئ الجدول ونحسب القيم كما في الجدول أدناه :

التكرارات ك	مراكز الفئات م	م ك
٣	٥	١٥
٥	١٥	٧٥
٤	٢٥	١٠٠
٧	٣٥	٢٤٥
٦	٤٥	٢٧٠
٢٥		٧٠٥

$$\therefore \overline{\text{س}} = \frac{\sum \text{م ك}}{\sum \text{ك}} = \frac{٧٠٥}{٢٥} = ٢٨,٢$$

مثال (٢) :

الجدول التالي يمثل أعمار ١٠٠ عامل في أحد المؤسسات جد الوسط الحسابى لعمر العامل :

الفئة	١٦-	٢٠-	٢٤-	٢٨-	٣٢-	٣٦-	٤٠-	٤٤-	٤٨-
التكرار	٣	٨	١٢	١٦	٢٥	١٥	١٠	٦	٥

الحل :

التكرار ك	مركز الفئة م	ك م
٣	١٨	٥٤
٨	٢٢	١٧٦
١٢	٢٦	٣١٢
١٦	٣٠	٤٨٠
٢٥	٣٤	٨٥٠
١٥	٣٨	٥٧٠
١٠	٤٢	٤٢٠
٦	٤٦	٢٧٦
٥	٥٠	٢٥٠
١٠٠		٣٣٨٨

$\sum$ك = ١٠٠ ، $\sum$ك م = ٣٣٨٨

$$\therefore \bar{س} = \frac{\sum م ك}{\sum ك} = \frac{٣٣٨٨}{١٠٠} = ٣٣,٨٨$$

يمكننا تخفيف العمل الحسابى بدرجة كبيرة ومفيدة بأن نختار وسطاً فرضياً للاعمار (و) مثلاً وهو مركز احدى الفئات المتوسطة ونطرحه من م ونسمى الفرق الانحراف عن الوسط الفرضى . ونلاحظ أن هذه الانحرافات تكون أعداداً صغيرة بعضها سالب وبعضها الآخر موجب ويكون أحدها صغيراً إذا اخترنا مركز إحدى الفئات ليكون هو الوسط الفرضى . ونكتب ذلك في خانة خاصة تحت عنوان ح = م – و .

ثم نضرب كلاً من هذه الانحرافات في تكرار الفئة الخاصة ونكتب ذلك في خانة خاصة تحت عنوان ح × ك وسيكون بعض هذه الحواصل سالباً وبعضها الآخر موجباً وذلك تبعاً للإنحرافات ح نفسها . ونجرى عملية الجمع لنحصل على المجموع الجبرى لها ثم نحسب متوسطها بقسمة $\sum$ح × ك على $\sum$ك ويكون الوسط الحسابى هو :

$$\bar{س} = و + \frac{\sum ح ك}{\sum ك}$$

ففى المثال السابق إذا اخترنا و = ٣٠ فيكون الجدول كالآتى :

التكرار ك	مركز الفئة م	ح = م – ٣٠	ح × م
٣	١٨	– ١٢	–٣٦
٨	٢٢	–٨	–٦٤
١٦	٢٦	–٤	–٤٨
١٢	٣٠	٠	٠
٢٥	٣٤	٤	١٠٠
١٥	٣٨	٨	١٢٠
١٠	٤٢	١٢	١٢٠
٦	٤٦	١٦	٩٦
٥	٥٠	٢٠	١٠٠
١٠٠			٣٨٨

∴ $\overline{\text{س}} = ٣٠ + \frac{٣٨٨}{١٠٠} = ٣٠ + ٣,٨٨$

$= ٣٣,٨٨$

مثال (٣) :

أحسب الوسط الحسابى للبيان الاحصائى المصنف في الجدول التالى :

الفئة	٠−	٥−	١٠−	١٥−	٢٠−	٢٥−	٣٠−	٣٥−	المجموع
التكرار	٢	٦	٨	١٨	٢١	١٦	٥	٤	٨٠

الحل :

إذا أردنا حل هذا المثال مستخدمين الوسط الفرضى يمكن أن نختار ٢٢,٥ كوسط فرضى :

مركز الفئة م	التكرار ك	ح = م − و	ح × ك
٢,٥	٢	−٢٠	−٤٠
٧,٥	٦	−١٥	−٩٠
١٢,٥	٨	−١٠	−٨٠
١٧,٥	١٨	−٥	−٩٠
٢٢,٥	٢١	٠	٠
٢٧,٥	١٦	٥	٨٠
٣٢,٥	٥	١٠	٥٠
٣٧,٥	٤	١٥	٦٠
	٨٠		−١١٠

$\sum \text{ك} = ٨٠ \quad \sum \text{ح} \times \text{ك} = -١١٠ \text{ ، و } = ٢٢,٥$

∴ $\overline{\text{س}} = \text{و} + \frac{\sum \text{ح} \times \text{ك}}{\sum \text{ك}} = ٢٢,٥ + \left(\frac{-١١٠}{٨٠}\right)$

$= ٢٢,٥ + (-١,٣٧٥) = ٢١,١٢٥$

مميزات الوسط الحسابى : (المتوسط)

الوسط الحسابى من أكثر مقاييس النزعة المركزية إستعمالاً لاتصاله بالخصائص التالية :

(١) وضوح معناه وتعريفه وسهولة حسابه .

(٢) تأثره بجميع قيم الأعداد الموجودة في المجتمع الاحصائى وخضوعه للعمليات الجبرية .

أما من عيوبه أنه مضلل وخاصة في الحالات التى تحتوى فيها المجموعة الاحصائية على بعض القيم المتطرفة بالكبر الشديد أو الصغر الشديد .

تمرين (٤ – ٢)

(١) الجدول التالى يوضح سنوات الخبرة لمعلمى المرحلة الثانوية بإحدى الولايات . احسب الوسط الحسابى للخبرة .

الفئات (الخبرة)	٠–	٥–	١٠–	١٥–	٢٠–	٢٥–
عدد المعلمين (التكرار)	٢٠	١٥	٢٥	٢٠	١٢	٨

(٢) الجدول التالى يمثل التوزيع التكرارى للدرجات التى حصل عليها ٦٥ تلميذاً في أحد الاختبارات

الفئات الدرجات	١٠–	٢٠–	٣٠–	٤٠–	٥٠–	٦٠–	٧٠–	٨٠–	٩٠–	المجموع
التكرارات	٢	٥	٨	١٠	١٣	٩	٧	٤	٢	٦٠

مستخدماً طريقة الوسط الفرضى أحسب متوسط درجات هذا الفصل .

(٣) فيما يلى التوزيع التكرارى للأجور اليومية لعدد من العاملين باحدى المؤسسات :

الفئات الأجور بالدينار	٦٠–	١٢٠–	١٨٠–	٢٤٠–	٣٠٠–	المجموع
عدد العاملين	٣	٥	٢٠	١٠	١٢	٥٠

أحسب متوسط أجور العاملين اليومية

(٤) احسب الوسط الحسابى من الجدول التكرارى التالى :

الفئات	٠-	٥-	١٠-	١٥-	٢٠-	٢٥-	٣٠-	٣٥-
التكرارات	٢	٦	١٠	٢٠	٣٠	٢٠	٧	٥

(٥) مستخدماً الوسط الفرضى جد الوسط الحسابى من الجدول التالى :

الفئات	٠-	٤-	٨-	١٢-	١٦-	٢٠-	٢٤-	٢٨-	٣٢-
التكرارات	١	٢	٢	١٠	١٥	١٢	٥	٢	١

(٤- ٤) الوسيط :

الوسيط هو القيمة أو المفردة التى تتوسط المفردات حينما نرتبها ترتيباً تصاعدياً أو تنازلياً . وهذه المفردة يكون عدد المفردات الأكبر منها يساوى تماماً عدد المفردات الأصغر منها ، وبناء على هذه الخاصية يمكن إعتبار الوسيط متوسطاً يمثل المجموعة كلها تمثيلاً عادلاً .

ويمكن الحصول على الوسيط بيانياً أو حسابياً . فلإيجاد الوسيط لبيانات غير مبوبة في توزيع تكرارى حسابياً نقوم بترتيب القيم تصاعدياً أو تنازلياً ونحدد ترتيب القيمة الوسيطية . وتحديد ترتيب الوسيط يعتمد على عدد القيم ن حيث يكون هنالك وسيط واحد إذا كان ن عدداً فردياً وترتيبه هو
ويكون هنالك وسيطين إذا كان ن عدداً زوجياً ترتيبهما $\frac{ن}{٢}$ ، $\frac{ن}{٢} + ١$.
ونحصل على الوسيط في هذه الحالة بجمع الوسيطين ويقسم الناتج على ٢ . ويتضح في الحالة الأخيرة أن الوسيط هو قيمة قد لايكون لها وجود فعلى في المجموعة ولكنها تؤدى معنى خاصاً هو المعنى الموجود في تعريف الوسيط . ويرمز للوسيط عادة بالرمز ط .

مثال (١) :

لدينا مجموعة القياسات :

٧ ، ٢ ، ٩ ، ١٦ ، ١٠ ، ٤ ، ٨ . ما هو الوسيط ؟

الحل :

نرتب هذه القيم من الاصغر إلى الأكبر فنجد

٢، ٤ ، ٧ ، ٨ ، ٩ ، ١٠ ، ١٦

ولما كان عدد القياسات ٧ وهو عدد فردى فيكون الوسيط هو القياس الذى ترتيبه

$$\frac{٧ + ١}{٢} = ٤$$

أى العدد الرابع مبتدئين بالترتيب من العدد الأول ٢ أى أن الوسيط هو ٨ .

مثال (٢) :

لدينا مجموعة القياسات :

١٢ ، ٢١ ، ٨ ، ١٧ ، ٢٥ ، ١٨ ، ٩ ، ٣١

ما هو الوسيط ؟

الحل :

نرتب الأعداد فنجد :

٨ ، ٩ ، ١٢ ، ١٧ ، ١٨ ، ٢١ ، ٢٥ ، ٣١

وبما أن عدد القياسات ن = ٨ زوجى

نأخذ متوسط العددين الذين ترتيبهما $\frac{٨}{٢}$ ، $\frac{٨}{٢}$ + ١ .

أى ٤ ، ٥ .

ولكن العدد الرابع هو ١٧ ، العدد الخامس ١٨

$$\therefore \text{الوسيط} \quad ط = \frac{١٧ + ١٨}{٢} = ١٧,٥$$

إيجاد الوسيط لبيانات مبوبة في جدول تكرارى :

في حالة البيانات المبوبة في الجدول التكرارى لإجراء مرحلة الترتيب التصاعدى أو التنازلى لابد من تحويل الجدول التكرارى إلى جدول التكرار المتجمع الصاعد أو المتجمع النازل . علماً أن مجموع التكرارات المقابلة لجميع

القيم الأقل من الحد الأعلى لفئة معينة يسمى بالتكرار المتجمع لهذه الفئة والمتضمن تكرارها أيضاً ومثل هذا التوزيع يسمى التوزيع المتجمع الصاعد أى التوزيع المتجمع على أساس (الأقل من) . في حين يسمى التوزيع التكرارى المتجمع لجميع القيم الأكبر من أو المساوية للحد الأول لكل فئة بالتوزيع المتجمع النازل أى على أساس (الأكثر من) .

أى في حالة تكوين التوزيع المتجمع الصاعد نأخذ الفئات على أساس (الأقل من) الحد الأعلى لكل فئة ثم نجمع تكرارات الفئات جمعاً تراكمياً . بينما لتكوين التوزيع المتجمع النازل – نأخذ الفئات على أساس (الأكثر من) الحد الأول للفئة ، ثم نقوم بطرح تكرار كل فئة طرحاً متتابعاً .

فالمثال التالى يوضح تكوين الجدولين المتجمع الصاعد والمتجمع النازل للجدول التكرارى التالى .

٠-	١٠-	٢٠-	٣٠-	٤٠-	٥٠-	٦٠-	٧٠-
٥	١٢	١٧	٢٤	١٨	١١	٩	٤

المتجمع الصاعد

لمجموعة من القيم الموزعة في جدول تكرارى ذى فئات فإننا نوجد التكرار المتجمع الصاعد أولاً ولإيجاد الوسيط ومنه نعرف موقف ترتيب الوسيط بين هذه التكرارات المتجمعة على أساس أن ترتيب الوسيط هو نصف عدد المفردات أى نصف مجموع التكرارات . ومتى عرفنا موقع ترتيب الوسيط يمكننا معرفة الفئة التى يقع الوسيط نفسه بين حديها الأدنى والأعلى

المتجمع النازل

الحدود الدنيا للفئات	التكرار المتجمع النازل
أكثر من ٠	١٠٠
أكثر من ١٠	١٠٠ – ٥ = ٩٥
أكثر من ٢٠	٩٥ – ١٢ = ٨٣
أكثر من ٣٠	٨٣ – ١٧ = ٦٦
أكثر من ٤٠	٤٢
أكثر من ٥٠	٢٤
أكثر من ٦٠	١٣
أكثر من ٧٠	٤
أكثر من ٨٠	٠

فترتيب الوسيط في الجدول السابق = $\frac{١٠٠}{٢}$ = ٥٠

الحدود العليا للفئات	التكرار المتجمع الصاعد
أقل من ١٠	٥
أقل من ٢٠	٥ + ١٢ = ١٧
أقل من ٣٠	١٧ + ١٧ = ٣٤
أقل من ٤٠	٣٤ + ٢٤ = ٥٨
أقل من ٥٠	٧٦
أقل من ٦٠	٨٧
أقل من ٧٠	٩٦
أقل من ٨٠	١٠٠

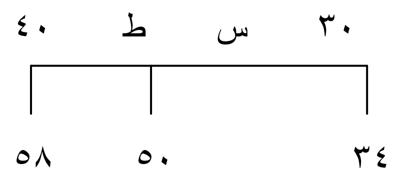
لمجموعة من القيم الموزعة في جدول تكرارى ذى فئات فإننا نوجد التكرار المتجمع الصاعد أولاً ولإيجاد الوسيط ومنه نعرف موقف ترتيب الوسيط بين هذه التكرارات المتجمعة على أساس أن ترتيب الوسيط هو نصف عدد المفردات أى نصف مجموع التكرارات . ومتى عرفنا موقع ترتيب الوسيط يمكننا معرفة الفئة التى يقع الوسيط نفسه بين حديها الأدنى والأعلى .

فترتيب الوسيط في الجدول السابق = $\frac{١٠٠}{٢}$ = ٥٠

وبالنظر إلى جدول التكرار المتجمع الصاعد نجد أن الترتيب ٥٠ يقع بين التكرارين ٣٤ و ٥٨ فهو أكبر من ٣٤ وأقل من ٥٨ وهذا معناه أن الوسيط بين ٣٠ و ٤٠ أى أكبر من ٣٠ وأقل من ٤٠ . وعليه فإن فئة الوسيط هى ٣٠ وأقل من ٤٠

أى أن الوسيط ط = ٣٠ + س

ولتحديد قيمة س يمكن تطبيق نظرية التناسب البسيط حيث نعتبر أن قيمة الوسيط تقع بين ٣٠ و ٤٠ بنفس النسبة التى يقع بها ترتيب الوسيط بين التكرارين ٣٤ و ٥٨ . وبالإستعانة بالشكل الهندسى التالى :



يمكن حساب قيمة س بالتقسيم التناسبى كما يلى :

$$\frac{\text{س}}{٤٠ - ٣٠} = \frac{٥٠ - ٣٤}{٥٨ - ٣٤}$$

أى $\frac{\text{س}}{١٠} = \frac{١٦}{٢٤}$ فتكون س $= \frac{١٦}{٢٤} \times ١٠ =$

$$= \frac{٢٠}{٣} = ٦\frac{٢}{٣}$$

$$\text{ط} = ٣٠ + \text{س} = ٣٠ + ٦\frac{٢}{٣}$$

$$\therefore \text{ط} = ٣٦\frac{٢}{٣}$$

ومن حل هذا المثال يمكن أن نستنتج معادلة رياضية لربط العناصر المستخدمة في الحل . وهذه العناصر هى ترتيب الوسيط $= \frac{\text{ن}}{٢}$ في حالة ن عدد زوجي أو فردي طول الفئة ف الحد الأول لفئة الوسيط $\text{ه}_{١}$

التكرار المتجمع المناظر للحد الأدنى لفئة الوسيط ويسمى بالتكرار المتجمع السابق $\text{ك}_{١}$

التكرار المتجمع المناظر للحد الأعلى لفئة الوسيط ويسمى بالتكرار المتجمع اللاحق $\text{ك}_{٢}$

وهذه العناصر يمكن ربطها بالمعادلة التالية :

$$\text{الوسيط} = \text{بداية فئة الوسيط} + \frac{(\text{ترتيب الوسيط} - \text{التكرار المتجمع السابق})}{\text{التكرار المتجمع اللاحق} - \text{التكرار المتجمع السابق}} \times \text{طول الفئة}$$

$$\text{أو ط} = \text{ه}_{١} + \frac{\frac{\text{ن}}{٢} - \text{ك}_{١}}{\text{ك}_{٢} - \text{ك}_{١}} \times \text{ف}$$

تلاحظ أن $\text{ك}_{٢} - \text{ك}_{١} =$ تكرار الفئة الوسيطية .

مثال (١) :

أحسب الوسيط من الجدول التكرارى التالى :

الفئة	٢٠-	٢٥-	٣٠-	٣٥-	٤٠-	٤٥-	٥٠-	٥٥-	المجموع
التكرار	٣	٦	٨	١٥	٢٥	١٢	٨	٣	٨٠

الحل :

نكون الجدول التكرارى المتجمع الصاعد :

الحدود العليا للفئات	التكرار المتجمع الصاعد
أقل من ٢٥	٣
أقل من ٣٠	٩
أقل من ٣٥	١٧
أقل من ٤٠	٣٢
أقل من ٤٥	٥٧
أقل من ٥٠	٦٩
أقل من ٥٥	٧٧
أقل من ٦٠	٨٠

ترتيب الوسيط = $\frac{٨٠}{٢}$ = ٤٠

فئة الوسيط = ٤٠ – ٤٥ وطولها = ٥

التكرار المتجمع السابق = ٣٢

التكرار المتجمع اللاحق = ٥٧

∴ من المعادلة ط = ٤٠ + $\frac{٤٠ - ٣٢}{٥٧ - ٣٢}$ × ٥

= ٤٠ + $\frac{٨}{٥}$

= ٤١,٦

وباتباع الإسلوب نفسه يمكننا إيجاد القيم التى تقسم مجموعة البيانات إلى أكثر من مجموعتين متساويتين في العدد . فالقيم التى تقسم المجموعة إلى أربعة أجزاء متساوية ويرمز لها بالرمز $ع_١$ ، $ع_٢$ ، $ع_٣$ وتسمى الربيع الأول والربيع الثانى والثالث ، علماً أن الربيع الثانى هو الوسيط .

والربيع الأول يعرف بالربيع الأدنى ويرمز له إحياناً بالرمز $ر_١$ والربيع الثالث بالربيع الأعلى ويرمز له بالرمز $ر_٢$ أحياناً .

ويمكن تحديد الربيع بنفس الطريقة التى حسبنا بها الوسيط وذلك بتحديد ترتيب الربيع المطلوب ، ثم تحديد الفئة التى يقع الربيع بين حديها ثم تقسيم الفترة أو المسافة بين حدى الفئة بالضبط كما فعلنا في حساب قيمة س في الوسيط .

وفي المجموعات الكبيرة قد نحتاج إلى استخدام تقسيمات أدق من الارباع الاربعة ، فنقسم المجموعة إلى عشرة أعشار ويسمى كلاً منها العشير ، فتكون العشير الأول والثانى و ... والتاسع . وقد تقسم إلى مائة جزء وتسمى المئينات . ولا شك أن العشير الخامس والمئين الخمسين يساويان الوسيط أما المئينتين الخامس والعشرون ، والخامس والسبعون فيساويان الربيعين الأول والأعلى على التوالى .

مثال (٢)

مستخدماً الجدول في المثال (١) جد الربيعين الأدنى والأعلى .

الحل :

ترتيب الربيع الأدنى = $\frac{٨٠}{٤} = ٢٠$

وهو يقع بين ١٧ ، ٣٢

∴ فئة الربيع الأدنى = ٣٥ – ٤٠ وطولها ٥

التكرار المتجمع السابق = ١٧ والتكرار المتجمع اللاحق = ٣٢

∴ الربيع الادنى $ع_١$ = ٣٥ + $\frac{٢٠ - ١٧}{٣٢ - ١٧} \times ٥$

= ٣٥ + ١ = ٣٦

وبالمثل ترتيب الربيع الأعلى = ٨٠ × $\frac{٣}{٤}$ = ٦٠

∴ فئة الربيع الأعلى = ٤٥ – ٥٠

التكرار المتجمع السابق = ٥٧

التكرار المتجمع اللاحق = ٦٩

$$\therefore \text{الربيع الأعلى } ع_{3} = ٤٥ + \frac{٦٠ - ٥٧}{٦٩ - ٥٧} \times ٥$$

$$= ٤٥ + ١,٢٥ = ٤٦,٢٥$$

خواص الوسيط :

يتميز الوسيط بأنه غير مضلل في حالة وجود قيم متطرفة ؛ لأن قيمته تتعين بموقعها بين القيم وليس بإضافة القيم إلى بعضها كما في حالة الوسط الحسابى . ومن ميزاته أنه يمكن إيجاده بالرسم . إلاّ أن طريقة حسابه أكثر صعوبة من الوسط الحسابى .

تمرين (٤ – ٣)

(١) جد الوسط الحسابى والوسيط للمفردات التالية :

٤٢,٤ ، ٢٧,٥ ، ٢١,٢ ، ٢٦,٦ ، ٢٨ ، ٣٣,٨ ، ٤٢,٨ ، ٥٠,٢ ، ٥٠,٨ ، ٤١,٦

(٢) أحسب الوسيط والربيعين الأدنى والأعلى من الجدول التكرارى التالى :

الفئات	٢٠-	٢٥-	٣٠-	٣٥-	٤٠-	٤٥-	٥٠-	٥٥-	٦٠-	المجموع
التكرارات	٣	٩	١٣	١٦	٢٠	١٥	١٣	٨	٣	١٠٠

(٣) الدرجات التالية في الجدول التكرارى تمثل درجات ١٢٠ تلميذاً في امتحان العلوم ، جد :

الوسط الحسابى والوسيط لها .

الفئات	٣٠-	٤٠-	٥٠-	٦٠-	٧٠-	٨٠-	٩٠-	المجموع
التكرارات	١	٥	٥	٢٠	٤٠	٣٠	٩	١٢٠

(٤) الجدول التالى يوضح توزيع دخول عدد من الأسر بآلاف الدينارات :

الفئات	٠-	٤-	٨-	١٢-	١٦-	٢٠-	٢٤-
التكرارات	٥	١٠	١١	١٤	٣٠	٢٠	١٠

المطلوب حساب متوسط الدخول باستخدام الوسيط مرة ثم باستخدام الوسط الحسابى مرة أخرى .

(٥) أحسب الوسيط في كل من الجداول التكرارية التالية :

(أ)

الفئات	١٣-	٢٠-	٢٧-	٣٤-	٤١-	٤٨-
التكرارات	٥	١٥	٤٠	٥٠	٣٠	١٠

(ب)

الفئات	١٤-	١٨-	٢٢-	٢٦-	٣٠-	٣٤-	٣٨-
التكرارات	٢	٥	١٥	١٨	١٠	٧	٣

(جـ)

الفئات	١٠-	١٤-	١٨-	٢٢-	٢٦-	٣٠-	٣٤-
التكرارات	٢	٦	١٥	٢٠	١٠	٤	٣

(د)

الفئات	٢٠-	٢٥-	٣٠-	٣٥-	٤٠-	٤٥-	٥٠-	٥٥-
التكرارات	٥	١٠	٢٠	١٥	٢٠	١٥	٧	٨

(٤- ٥) المنوال :

يستخدم المنوال مقياساً من مقاييس النزعة المركزية ليعكس النمط العام أو النموذج الغالب للظاهرة . فهو المتوسط الذى تتوفر فيه هذه الخاصية دون المتوسطات الأخرى ويعرف بأنه أكثر القيم شيوعاً ، أى أنه القيمة الأكثر تكراراً في مجموعة من المفردات .

وتظهر أهمية المنوال كمتوسط في بعض التطبيقات العلمية التى نجد فيها أن توفر صفة الشيوع والتكرار تخدم أغراض البحث . فإذا أردنا تحديد الطول المتوسط الذى سينتج على أساسه مصنع الملبوسات الجاهزة فإننا نجد أن تحديد الطول المناسب لايمكن حسابه على أساس الوسط الحسابى أو الوسيط الذى يظهر الطول الغالب من الاشخاص (الرجال أو النساء أو الاطفال) أى الطول الأكثر تكراراً أو شيوعاً ، ولذلك تضمن إلى حد كبير أن الملابس المنتجة سوف تتناسب من حيث المقاس مع أكبر عدد من السكان .

مثال (١) :

جد المنوال للمفردات الآتية :

٤ ، ٥ ، ٢ ، ٧ ، ٥ ، ٩ ، ١٠ ، ٣ ، ٧ ، ٨ ، ٥ ، ٥ ، ٩ ، ٢ ، ٦ ، ٥

الحل :

نلاحظ أن المفردة ٥ هى أكثر المفردات تكراراً

∴ المنوال لهذه المجموعة يساوى ٥

مثال (٢) :

الجدول التالى يبين توزيع عينة من الأسر حجمها ٢٠٠ أسرة حسب عدد أفرادها . احسب متوسط عدد أفراد الأسرة الأكثر شيوعاً باستخدام المنوال .

عدد افراد الأسرة	عدد الأسر
١	٢٠
٢	٣٠
٣	٤٥
٤	٥٠
٥	٣٠
٦	٢٥

الحل :

لتحديد قيمة المنوال نبحث عن عدد افراد الأسرة الأكثر تكراراً فنجد أنه ٤ تكرر في ٥٠ أسرة ، لذا فإن قيمة المنوال هو ٤ . وذلك يعنى أن عدد أفراد الأسرة الأكثر غالبية هو أربعة اشخاص .

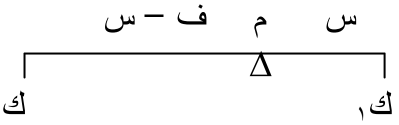
المنوال لقيم مبوبة في جدول تكرارى :

عندما تكون البيانات في جدول تكرارى فإن الفئة ذات التكرار الأكبر تحتوى على مفردات عددها أكبر من عدد المفردات الواقعة في أى واحدة من الفئات الأخرى بالطبع . وعلى إعتبار أن مركز الفئة يمثل جميع المفردات التى تقع في الفئة يتضح أن مركز الفئة ذات التكرار الأكبر هو القيمة الأكثر شيوعاً أو

القيمة ذات التكرار الأكبر بين مفردات المجموعة التى يمثلها الجدول التكرارى أى هى المنوال .

إذن في الجدول يكون المنوال هو مركز الفئة ذات التكرار الأكبر وتسمى هذه الفئة بالفئة المنوالية للجدول التكرارى .

وهناك طرق أخرى لتحديد موقع المنوال بدقة داخل الفئة المنوالية وذلك بتقسيم المسافة بين الحدين الأدنى والأعلى لهذه الفئة تقسيماً تناسبياً باستخدام تكرارى الفئتين المحيطتين بالفئة المنوالية لإجراء هذا التقسيم . وبغرض أن المنوال م يبعد مسافة س من الحد الأدنى للفئة المنوالية ولمعرفة مقدار س نفترض أن لدينا رافعة في طرفها الأيمن قوة تكرار الفئة قبل المنوالية ك$_{1}$ وفي طرفها الأيسر قوة تساوى تكرار الفئة بعد المنوالية ك$_{2}$ وفيها م نقطة ارتكاز على بعد س من طرفها الأيمن . وعلى بعد (ف – س) من طرفها الأيسر حيث ف طول الفئة.



أي ك$_{1}$ س = ك$_{2}$ (ف – س)

ونعرف هذه الطريقة بطريقة الرافعة :

وثمة طريقة أخرى لحساب س بدقة أكبر تسمى طريقة بيرسون وفيها يكون التقسيم على أساس فروق التكرارات بين الفئة المنوالية والتى قبلها والتى بعدها . بدلاً من التكرارات نفسها

فإذا كان تكرار الفئة المنوالية كَ يكون :

$$\frac{\text{س}}{\text{ف} - \text{س}} = \frac{\text{كَ} - \text{ك}_{1}}{\text{كَ} - \text{ك}_{2}}$$

مثال (١) :

الجدول التكرارى التالى يبين قياسات الملابس لعينة من ٢٠٠ شخصاً

القياسات	التكرارات
٢٠ – ٢٥	٩
٢٥ – ٣٠	٤٨
٣٠ – ٣٥	٥٧
٣٥ – ٤٠	٦١
٤٠ – ٤٥	٢٥

والمطلوب معرفة نمط القياس الأكثر شيوعاً لدى افراد هذه العينة (المنوال) ، مستخدماً الطرق الثلاثة

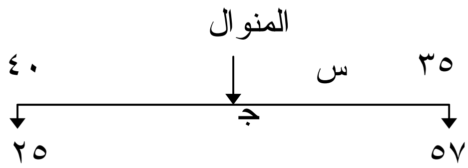
الحل :

لحساب المنوال نتبع الخطوات التالية :

(١) نجد الفئة المنوالية وهى الفئة الاكثر تكراراً وتساوى في هذا الجدول (٣٥ – ٤٠) .

(٢) يمكن إعتبار أن مركز وهو ٣٧,٥ هو المنوال بصورة تقريبية .

(٣) ولكن لتحديد المنوال بدقة أكثر يمكن استخدام قانون الرافعة بفرض أن المنوال عند جـ (انظر الشكل (٨ – ١))



الشكل (٨ – ١)

وهو متجاذب بين التكرار الذى يسبق تكرار الفئة المنوالية والتكرار الذى يلى الفئة المنوالية .

∴ المنوال = ٣٥ + س

∴ يمكن حساب س من المعادلة
٥٧ س = ٢٥ (٥ – س)
٥٧ س = ١٢٥ – ٢٥ س
٨٢ س = ١٢٥

$$\text{س} = \frac{١٢٥}{٨٢} = ١,٥٢$$

∴ المنوال = ٣٥ + ١,٥٢ = ٣٦,٥٢ (مقرب لمنزلتين)
أما إذا استخدمنا طريقة بيرسون فنجد أن :

$$\frac{\text{س}}{\text{٥ – س}} = \frac{٦١ - ٥٧}{٦١ - ٢٥} \Leftarrow \frac{\text{س}}{\text{٥ – س}} = \frac{٤}{٣٦}$$

∴ ٩ س = ٥ – س
١٠ س = ٥
س = ٠,٥
∴ المنوال = ٣٥,٥

مثال (٢) :

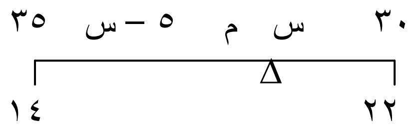
الجدول التالى يمثل قياسات نزول المطر في مدينة الدويم خلال ١٠٠ يوماً مقاسه بالملم . أحسب المنوال : مستخدماً طريقتى الرافعة وبيرسون .

الفئات	١٠–	١٥–	٢٠–	٢٥–	٣٠–	٣٥–	٤٠–	٤٥–	المجموع
عدد الأيام	٣	٧	١١	٢٢	٢٧	١٤	٩	٧	١٠٠

الحل :

من هذا التوزيع التكرارى نجد أن الفئة المنوالية ٣٠ – بفرض أن المنوال م = ٣٠ + س
س جزء من طول الفئة
طول الفئة = ٣٥ – ٣٠ = ٥
تكرار الفئة قبل المنوالية ٢٢ والتكرار بعدها ١٤

لايجاد قيمة س يمكن الاستفادة بشكل الرافعة بالشكل (٩ – ٢)



الشكل (٩ – ٢)

∴ ٢٢ س = ١٤ (٥ – س)

٢٢ س = ٧٠ – ١٤ س

٣٦ س = ٧٠

∴ س = $\frac{\text{٧٠}}{\text{٣٦}}$ = ١,٩٤

∴ المنوال = ٣١,٩٤

أما إذا استخدمنا طريقة بيرسون سنجد أن :

$\frac{\text{س}}{\text{٥ – س}}$ = $\frac{\text{٢٧ – ٢٢}}{\text{٢٧ – ١٤}}$

$\frac{\text{س}}{\text{٥ – س}}$ = $\frac{\text{٥}}{\text{١٣}}$

١٣ س = ٢٥ – ٥ س

١٨ س = ٢٥

س = $\frac{\text{٢٥}}{\text{١٨}}$ = ١,٣٩

أى المنوال ٣١,٣٩

خواص المنوال :

(١) يمثل المنوال المقياس الأكثر تعبيراً عن توزيع بعض البيانات .

(٢) لا تتأثر قيمة المنوال بالقيم المتطرفة .

(٣) قد يكون في التوزيع الواحد أكثر من منوال

تمرين (٤ – ٤)

(١) احسب الوسيط والمنوال لكل من القياسات التالية :

(أ) ٢ ، ١ ، ٥ ، -١ ، ٤ ، ٣ ، ٦ ، ٣ ، -٢ ، ٣ ، ٥

(ب) ١ ، ١ ، ٢ ، ١ ، ٣ ، ١ ، ١ ، ٢ ، ٢ ، ١

(جـ) ١٧,١ ، ١٦,٤ ، ١٧,٥ ، ١٦,٩ ، ١٧,٢

(٢) المعلومات التالية مأخوذة من سجل لغياب العاملين في أحد المؤسسات خلال شهر يناير .

عدد أيام الغياب	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧
التكرار	٥	١٥	٣٢	٢٠	١٦	١٠	٦	٣

أحسب (أ) متوسط عدد أيام الغياب .

(ب) الوسيط لعدد أيام الغياب .

(جـ) المنوال لعدد أيام الغياب .

(٣) الجدول التالى يوضح العمر الزمنى بالأسبوع بالنسبة إلى ٢٠٠ مصباح كهربائى أخذت كعينة من أحد المصانع .

العمر بالاسبوع	٢٦-	٣٠-	٣٤-	٣٨-	٤٢-	٤٦-	٥٠-	٥٤-	٥٨-
عدد المصابيح	٥	١٠	٢٠	٤٠	٥٥	٣٥	١٩	١٠	٦

أحسب الوسط الحسابى والمنوال مقرباً لأقرب أسبوع .

(٤) الجدول التالى يوضح فئات أعمار ٢٥٠ شخصاً يعملون في أحد الشركات .

فئة العمر	٢٥-	٢٨-	٣١-	٣٤-	٣٧-	٤٠-	٤٣-	٤٦-	٤٩-
عدد الأشخاص	٢	١٥	٢٠	٤٥	٧٥	٤١	٢٥	٢٠	٧

أحسب المنوال مقرباً لأقرب سنة .

(٥) جد المنوال ، الوسط الحسابى ، الوسيط ، الربعين الأدنى والأعلى من الجدول التكرارى التالى :

فئات	٢٥-	٣٥-	٤٥-	٥٥-	٦٥-	٧٥-	٨٥-	٩٥-
تكرارات	٥	١٠	١٠	٣٥	٢٠	١١	٦	٣

(٦) أحسب المنوال في كل من الجداول التكرارية التالية :

(أ)

فئات	١٣-	٢٠-	٢٧-	٣٤-	٤١-	٤٨-
تكرارات	٦	١٥	٤٠	٥٠	٢٥	١٤

(ب)

فئات	١٤-	١٨-	٢٢-	٢٦-	٣٠-	٣٤-	٣٨-
تكرارات	٢	٨	١٢	١٨	١٠	٧	٣

(جـ)

فئات	١٠-	١٤-	١٨-	٢٢-	٢٦-	٣٠-	٣٤-
تكرارات	٢	٦	١١	٢٠	١٠	٨	٣

(د)

فئات	٢٠-	٢٥-	٣٠-	٣٥-	٤٠-	٤٥-	٥٠-	٥٥-
تكرارات	٣	٥	١٥	١٦	٢٠	١٥	١٣	١٠

(٤ – ٦) **التشتت** :

درسنا في الفصل السابق كيفية الحصول على المتوسط باعتباره القيمة النموذجية التى تمثل مجموعة البيانات وتصلح لوصفها ، ولكن المتوسط وحده لايكفى لإعطاء فكرة دقيقة عن مجموعة البيانات وكيفية توزيعها ، لأن كل مجتمع نبحثه يتكون من مجموعة مفردات مختلفة بعضها عن بعض وهذا الاختلاف بين مفردات المجتمع الواحد نسميه التشتت ، ودراسة تشتت مفردات المجتمع يعطينا فكرة عن العلاقات التى تربط بينها ؛ لأن التشتت إذا كان مقداره صغيراً فإنه يدل

على أن المفردات متقاربة من بعضها أو متجانسة وما يسرى على أى واحدة منها خصوصاً المتوسطة يكاد يسرى على الجميع بدون خطأ كبير .

أما إذا كان التشتت كبيراً فهو دليل على وجود تفاوت واختلاف بين المفردات ويتعذر إصدار حكم عام على هذه المفردات بثقة عالية .

وما يهمنا من دراسة التشتت هو دراسة مقاييس التشتت وهناك عدة مقاييس له نذكر منها المدى والمدى الربيعى ، والانحراف المتوسط ، والإنحراف المعياري .

المدى :

يعرف المدى أو أحياناً المدى المطلق بأنه الفرق بين أكبر مفردة وأصغر مفردة في المجموعة الإحصائية وهو سهل في حسابه إلا أنه أقل مقاييس التشتت دقة وقد تكون قيمته مضللة لأنه يعتمد في قياسه على قيمتين فقط (الصغرى والكبرى) بغض النظر عن كيفية تشتت القيم داخل المجموعة وخصوصاً في حالات وجود مفردات متطرفة أو شاذة في المجموعة مما يجعل المدى كبيراً بدون مبرر . أما طريقة حسابه في حالة الجدول التكرارى فهى بطرح الحد الأدنى للفئة الدنيا من الحد الأعلى للفئة العليا في الجدول التكرارى .

ويستخدم المدى ببساطته هذه في مجالات مهمة كاستخدامه في مراقبة جودة الانتاج وأحوال الطقس .

الإنحراف الربيعى : (او نصف المدى الربيعي)

نظراً لأن أهم عيوب المدى هو تأثره بالقيم المتطرفة ، فقد اقترح إهمال القيم المتطرفة باستبعادها وأخذ الفرق بين الربيعين الأعلى والأدنى أى المدى الربيعى أو نحصل على نصف المدى الربيعى ويعرف (بالأنحراف الربيعى) كمقياس آخر للتشتت أدق وأكثر استقراراً من مجرد المدى بين المفردتين الكبرى والصغرى .

مثال (١) :

الدرجات التالية حصل عليها طالب في تسع مواد جلس لامتحانها

٧٥ ، ٨٢ ، ٧٤ ، ٥٦ ، ٦٥ ، ٧١ ، ٩٣ ، ٥٨ ، ٨٣

احسب المدى والانحراف الربيعى .

الحل :

المدى = أكبر مفردة – أصغر مفردة

= ٩٣ – ٥٦ = ٣٧

ترتب المفردات تصاعدياً

٥٦ ، ٥٨ ، ٦٥ ، ٧١ ، ٧٤ ، ٧٥ ، ٨٢ ، ٨٣ ، ٩٣

ترتيب الوسيط = $\frac{٩ + ١}{٢}$ = ٥

ترتيب الربيع الأدنى = $\frac{٥ + ١}{٢}$ = ٣

∴ الربيع الأدنى $ع_١$ = ٦٥

الربيع الأعلى يتوسط الخمسة مفردات الأخيرة والتى تبدأ بالوسيط .

∴ ترتيب الربيع الأعلى هو الثالث من الوسيط أو الثالث قبل الأخير

∴ الربيع الأعلى $ع_٢$ = ٨٢

المدى الربيعى = ٨٢ – ٦٥ = ١٧

الانحراف الربيعى = $\frac{١}{٢} \times ١٧$ = ٨,٥

الانحراف المتوسط :

يعرف الانحراف المتوسط بأنه متوسط بعد المفردات عن وسطها الحسابى .
وإيجاد الانحراف المتوسط يعتمد على إيجاد بُعد كل مفردة من المفردات عن وسطها الحسابى ، ونسبة لأن مجموع الانحرافات عن الوسط الحسابى يساوى الصفر فإننا نأخذ القيمة المطلقة لهذه الانحرافات (أى بدون الاشارة الجبرية)
ورياضياً يمكن تعريف الانحراف المتوسط بالمعادلة التالية

$$\text{الانحراف المتوسط} = \sum_{ر=١}^{ن} \frac{|س_ر - \overline{س}|}{ن}$$

حيث $\overline{س}$ هو الوسط الحسابى ، ن عدد المفردات إذن لإيجاد الانحراف المتوسط لمجموعة من المفردات فإننا نتبع الخطوات التالية :

١- إيجاد الوسط الحسابى للمجموعة $\overline{س}$.

٢- إيجاد إنحراف كل مفردة عن الوسط الحسابى $س_ر - \overline{س}$

٣- أخذ القيمة المطلقة لهذه الانحرافات $|س_ر - \overline{س}|$

٤- ايجاد الوسط الحسابى للقيم المطلقة للانحرافات

$$\frac{\sum |س_ر - \overline{س}|}{ن}$$

مثال (٢) :

أحسب الانحراف المتوسط للدرجات في المثال (١)

الحل :

$$\overline{س} = \frac{\sum س}{ن} = \frac{٧٥ + ٨٢ + ٧٤ + ٥٦ + ٦٥ + ٧١ + ٩٣ + ٥٨ + ٨٣}{٩}$$

$$= \frac{٦٥٧}{٩} = ٧٣$$

المفردة س	ح = س – س = س – ٧٣	| س – س |
٧٥	٢	٢
٨٢	٩	٩
٧٤	١	١
٥٦	-١٧	١٧
٦٥	-٨	٨
٧١	-٢	٢
٩٣	٢٠	٢٠
٥٨	– ١٥	١٥
٨٣	١٠	١٠
المجموع		٨٤

الانحراف المتوسط $= \dfrac{\sum |س_ر - \bar{س}|}{ن} = \dfrac{٨٤}{٩} = ٩,٣$

الانحراف المعيارى :

وهو من اشهر مقاييس التشتت وأكثرها استخداماً وهو عبارة عن الجذر التربيعى الموجب لمتوسط مربعات انحراف المفردات عن الوسط الحسابى . ويرمز له بالرمز ع

$$\boxed{\text{ورياضياً : } ع = \sqrt{\dfrac{\sum (س_ر - \bar{س})^{٢}}{ن}}}$$

وقد لجأنا هذه المرة لتفادى مشكلة الاشارة في الإنحرافات بالتربيع بدلاً عن أخذ القيمة المطلقة في الإنحراف المتوسط . ويعود السبب إلى أخذ الجذر التربيعى إلى أننا نريد أن نرجع إلى الوحدات الأصلية وذلك ليكون هذا المقياس للتشتت بنفس الوحدات المقاسة بها المفردات في المجموعة الإحصائية المراد بحثها .

أما مربع الانحراف المعيارى $ع^{٢} = \dfrac{\sum (س_ر - \bar{س})^{٢}}{ن}$

فيسمى التباين .

لاحظ مما سبق أنه لإيجاد الانحراف المعيارى لمجموعة من القيم نتبع الخطوات التالية :

١- نوجد الوسط الحسابى للقيم في المجموعة

٢- نحسب انحرافات القيم عن الوسط الحسابى .

٣- نربع الانحرافات

٤- نجمع هذه المربعات ونقسم المجموع على عدد القيم لنحصل على متوسط مربعات الانحرافات وهو ما يعرف بالتباين .

٥- نحسب الجذر التربيعى لمتوسط مربعات الانحرافات يكون هو الإنحراف المعيارى المطلوب .

مثال (٣) :

جد الانحراف المعيارى لدرجات الطالب في المثال السابق

الحل :

الوسط الحسابى للمفردات من المثال السابق = ٧٣

$(س - س)^٢$	$ح = س - \overline{س}$ $= س - ٧٣$	المفردة س
٤	٢	٧٥
٨١	٩	٨٢
١	١	٧٤
٢٨٩	١٧-	٥٦
٦٤	٨-	٦٥
٤	٢-	٧١
٤٠٠	٢٠	٩٣
٢٢٥	١٥-	٥٨
١٠٠	١٠	٨٣
١١٦٨	$\sum (س - \overline{س})^٢$	

$$ع^٢ = \frac{١١٦٨}{٩} = ١٢٩,٧ \simeq ١٢٩,٨$$

$$\therefore ع = \sqrt{١٢٩,٨} = ١١,٣٩$$

إن العلاقة $ع = \sqrt{\frac{\sum (س - \overline{س})^٢}{ن}}$

هى العلاقة الأساسية لتعريف الإنحراف المعيارى ولكننا إذا استخدمنا خواص رمز المجموع $\sum$ نستطيع أن نتوصل إلى صيغة أخرى للانحراف المعيارى وذلك باستخدام مربعات مفردات المجموعة والوسط الحسابى للمفردات وهذه العلاقة هى :

$$ع = \sqrt{\frac{\sum س^٢}{ن} - \overline{س}^٢}$$

وهذه الصيغة تؤدى إلى نفس النتيجة ولكن عبء العمليات الحسابية يختلف ولكن يمكن تخفيف العمليات الحسابية أكثر بطرح قيمة فرضية (و) من مفردات المجموعة ومن وسطها الحسابى لأن الانحراف المعيارى لايتأثر بهذه الازاحة وتكون الصيغة للانحراف المعيارى حينئذٍ على الصورة :

$$ع = \sqrt{\frac{\sum(س - و)^{٢}}{ن} - (\bar{س} - و)^{٢}}$$

وهى ما تعرف بطريقة الازاحة

مثال (٤) :

مستخدماً طريقة الازاحة جد الانحراف المعيارى لدرجات التلاميذ في المثال السابق .

الحل :

بازاحة المفردات إلى اليمين بــ ٧٤ .

المفردة س	س – ٧٤	$(س - ٧٤)^{٢}$
٧٥	١	١
٨٢	٨	٦٤
٧٤	صفر	صفر
٥٦	-١٨	٣٢٤
٦٥	-٩	٨١
٧١	-٣	٩
٩٣	١٩	٣٦١
٥٨	-١٦	٢٥٦
٨٣	٩	٨١
المجموع		١١٧٧

من العلاقة

$$ع = \sqrt{\frac{\sum(س - و)^{٢}}{ن} - (\bar{س} - و)^{٢}}$$

$$ع = \sqrt{\frac{١١٧٧}{٩} - (٧٣ - ٧٤)^{٢}}$$

$$ع = \sqrt{١٣٠,٨ - ١} = \sqrt{١٢٩,٨} = ١١,٣٩$$

وهى النتيجة نفسها التى حصلنا عليها سابقاً

ويمكن ايجاد الانحراف عن طريق الالات الحاسبة المبرمجة أو الحاسوب . وذلك بادخال المفردات فقط والضغط على زر معين يعطى الانحراف المعيارى .

الانحراف المعيارى للتوزيع التكرارى :

إذا كانت البيانات في توزيع تكرارى ، فإن كل قيمة من قيم س في الجدول تتكرر عدداً من المرات ويتولد عن ذلك عدد مساوٍ له من الإنحرافات ومربعات الانحرافات ولحساب الإنحراف المعيارى من جدول التوزيع التكرارى نتبع الخطوات التالية :

(١) نوجد الوسط الحسابى س بالطريقة التى عرفناها سابقاً .
(٢) نحسب الانحرافات ح عن هذا الوسط ونكتبها في عمود منفصل . تحت عنوان = س – س
(٣) تربيع ح في كل سطر ونضع الناتج في عمود ملاصق لهذا تحت عنوان $ح^٢$.
(٤) نضرب أرقام هذا العمود $ح^٢$ في أرقام عمود التكرارات ك كل في نظيره على نفس السطر ونكتب الناتج في نفس السطر في خانة جديدة بعنوان $ح^٢$ ك وستكون هذه النواتج كلها موجبة .
(٥) نجمع العمود $ح^٢$ ك فنحصل على مجموع مربعات الانحرافات
(٦) نوجد الإنحراف المعيارى مستخدمين العلاقة

$$ع = \sqrt{\frac{\sum ح^٢ ك}{\sum ك}}$$

ويمكن استخدام طريقة أخرى للتعبير عن ع وهى

$$ع = \sqrt{\frac{\sum ك س^٢}{\sum ك} - س^٢}$$

وإذا استخدمنا طريقة الازاحة بـــ و إلى اليمين تصبح العلاقة في الصورة :

$$\text{ع} = \sqrt{\frac{\sum \text{ك} \,(\text{س} - \text{و})^{٢}}{\sum \text{ك}} - (\bar{\text{س}} - \text{و})^{٢}}$$

مثال (٥) :

الجدول التالى يمثل الأجر اليومي بالجنيهات لمجموعة مكونة من ٥٠ عاملاً في أحدى الشركات :

الأجر اليومي	١٢	١٥	١٧	٢١	٢٢	٢٥	٣٦	المجموع
عدد العمال	٣	٤	١١	١٤	٩	٥	٤	٥٠

جد الانحراف المعيارى لأجور هؤلاء العاملين .

الحل :

المرتب س	عدد العمال ك	ك س	$\text{ح} = \text{س} - \bar{\text{س}}$	$\text{ح}^{٢}$	$\text{ك ح}^{٢}$
١٢	٣	٣٦	−٨,٨٨	٧٨,٨٥	٢٣٦,٥٥
١٥	٤	٦٠	−٥,٨٨	٣٤,٥٧	١٣٨,٢٨
١٧	١١	١٨٧	−٣,٨٨	١٥,٠٥	١٦٥,٥٥
٢١	١٤	٢٩٤	٠,١٢	٠,٠١٤	٠,١٩٦
٢٢	٩	١٩٨	١,١٢	١,٢٥٤	١١,٢٨٦
٢٥	٥	١٢٥	٤,١٢	١٦,٩٧	٨٤,٨٥
٣٦	٤	١٤٤	١٥,١٢	٢٢٨,٦١	٩١٤,٤٤
	٥٠	١٠٤٤			١٥٥١,١٥٢

$$\bar{\text{س}} = \frac{\sum \text{ك س}}{\sum \text{ك}} = \frac{١٠٤٤}{٥٠} = ٢٠,٨٨$$

$$\therefore ع = \sqrt{\frac{\sum ح^{٢} ك}{\sum ك}} = \sqrt{\frac{١٥٥١,١٥٢}{٥٠}} = \sqrt{٣١,٠٢٣}$$

$$\simeq \underline{\underline{٥,٥٧}}$$

الانحراف المعيارى من الجدول التكرارى ذى الفئات :

طريقة حساب الانحراف المعيارى من الجدول التكرارى ذى الفئات لاتختلف كثيراً عن طريقة حسابه من جدول التوزيع التكرارى والاختلاف الوحيد هو أننا نوجد مراكز الفئات ونعتبر أن جميع القياسات التى تنتمى إلى فئة مساوية لمركز هذه الفئة . ولتخفيف العمليات الحسابية نلجأ أحياناً إلى إختيار وسط فرضى ويكون أحد مراكز الفئات ويستحسن أن يكون هو مركز الفئة ذات التكرارات الكبيرة . ثم نحسب الانحرافات ح عن هذا الوسط ثم نوجد $ح^{٢}ك$ كما فعلنا سابقاً وهو يساوى $\sum ك (س - و)^{٢}$ في العلاقة التى مرت بنا سابقاً والمثال التالى يوضح ذلك .

مثال (٦) :

في سجل المواليد بأحد المستشفيات كانت أعمار أمهات المواليد اللائى وضعن بالمستشفى في أحد الشهور كما يلى :

الفئات	٢٠-	٢٥-	٣٠-	٣٥-	٤٠-	٤٥-	المجموع
التكرارات	١٥	٢٨	٤٦	٣٥	٢٢	٤	١٥٠

أحسب الانحراف المعيارى لأعمار الأمهات في هذا الجدول

الحل :

نختارمقداراً للازاحة وليكن هو مركز الفئة ٣٠ – أي ٣٢,٥

فئات العمر	مركز الفئة س	التكرار ك	الانحراف ح = س– ٣٢,٥	ح × ك	ح٢ ك
٢٠–	٢٢,٥	١٥	– ١٠	– ١٥٠	١٥٠٠
٢٥–	٢٧,٥	٢٨	– ٥	– ١٤٠	٧٠٠
٣٠–	٣٢,٥	٤٦	صفر	صفر	صفر
٣٥–	٣٧,٥	٣٥	٥	١٧٥	٨٧٥
٤٠–	٤٢,٥	٢٢	١٠	٢٢٠	٢٢٠٠
٤٥–	٤٧,٥	٤	١٥	٦٠	٩٠٠
المجموع		١٥٠	١٥	١٦٥	٦١٧٥

$$\overline{س} = ٣٢,٥ + \frac{١٦٥}{١٥٠}$$

$$\therefore \overline{س} - و = \frac{١٦٥}{١٥٠}$$

$$\therefore ع^٢ = \frac{\sum ح^٢ ك}{\sum ك} - (\overline{س} - و)^٢$$

$$= \frac{٦١٧٥}{١٥٠} - \left(\frac{١٦٥}{١٥٠}\right)^٢$$

$$= ٤١,١٧ - ١,٢١ = ٣٩,٩٦$$

$$\therefore ع = \sqrt{٣٩,٩٦} \simeq ٦,٣$$

تمرين (٤ – ٥)

(١) جد المدى المطلق ، المنوال ، الوسط الحسابى ، الوسيط ، الانحراف الربيعى ، الانحراف المتوسط والانحراف المعيارى لمجموعة القيم التالية :

١٢،١٧ ، ١٣ ، ١٥ ، ١٧ ، ١٣ ، ١٤ ، ١٥ ، ١٣ ، ١٧ ، ١٥ ، ٢١ ، ٢٣ ، ٢٧ ، ١٧ ، ١٩ ، ١٠ ، ١٢ ، ١٦ ، ١٤ .

(٢) جد المدى المطلق ، المنوال ، الوسط الحسابى ، الوسيط ، الانحراف الربيعى ، الانحراف المتوسط والانحراف المعيارى من الجدول أدناه :

فئات	٢٥-	٣٥-	٤٥-	٥٥-	٦٥-	٧٥-	٨٥-	٩٥-
تكرارات	٥	٩	١١	٣٥	١٦	١٢	٩	٣

(٣) جد المدى المطلق ، الانحراف المتوسط ، الانحراف الربيعى والانحراف المعيارى من الجدول أدناه :

فئات	١٢-	١٦-	٢٠-	٢٤-	٢٨-
تكرارات	٧	٩	١٥	٦	٣

(٥) الجدول التكرارى التالى يوضح توزيع أعمار ٤٠ شخصاً

فئات	١٠-	١٤-	١٨-	٢٢-	٢٦-	المجمع
تكرارات	٣	٧	١٦	١٠	٤	٤٠

جد المدى المطلق ، المنوال ، الوسط الحسابى ، الوسيط ، الانحراف الربيعى ، الانحراف المتوسط والانحراف المعيارى .

(٦) الجدول إدناه يبين التوزيع التكرارى لدرجات ١٢٠ تلميذاً في امتحان العلوم ، جد :

الوسط الحسابى ، المدى المطلق ، المنوال ، الوسيط ، والانحراف المعيارى الانحراف الربيعى ، الانحراف المتوسط .

فئات	٣٠-	٤٠-	٥٠-	٦٠-	٧٠-	٨٠-	٩٠-	المجموع
تكرارات	١	٣	١١	٢١	٤٣	٣٢	٩	١٢٠

الوحدة الخامسة

الاحتمالات

أهداف الوحدة الخامسة

الإحتمالات

بعد دراسة هذه الوحدة نتوقع أن يكون الطالب قادراً على أن :

١/ يحدد فضاء العينة للتجربة العشوائية .
٢/ يحدد نقاط العينة للتجربة العشوائية .
٣/ يجد نقاط العينة لإتحاد أو تقاطع أو فرق حادثتين .
٤/ يميز الحوادث المنفصلة .
٥/ يجد مكملة الحادثة .
٦/ يجد مسلمات نظرية الاحتمالات .
٧/ يجد احتمالات الحادثة في حالة حوادث الاحتمالات المتساوية .

الوحدة الخامسة

مبادئ الاحتمالات

(٥ – ١) مقدمة :

الاحتمالات أحد فروع الرياضيات الذى يهتم بدراسة نتائج التجارب أو المحاولات العشوائية . وهى تلعب دوراً خاصاً في الحياة اليومية لأنها تستخدم في قياس عدم التأكد .

فكثيراً ما يتم إتخاذ قرارات بناء على معلومات غير كاملة ، فيكون دور الاحتمالات المساعدة على الاختيار . فقد نلغى رحلة تم الترتيب لها ؛ لأن إحتمال أن يكون الجو رديئاً إحتمال كبير . وكثيراً ما نتحدث عن إحتمال هطول المطر أو إحتمال فوز فريق كرة قدم على فريق آخر .

وقد نعبر عن هذه الاحتمالات في صورة عددية كالنسبة المئوية كأن تقول أن إحتمال ارتفاع درجات الحرارة هذه الليلة ٧٠٪ . وإحتمال أن ينجح أحمد في الامتحان ٨٥٪ . وهذه التقريرات لاتستند إلى أساس رياضي محض ، بل تعتمد على أحداث وخبرات سابقة عن الطقس أو عن حالة أحمد التعليمية ولنظرية الاحتمالات تطبيقات كثيرة ومهمة في مجال التخطيط للتنمية الاقتصادية والإجتماعية والبحث العلمي . وفي اتخاذ القرارات في كثير من مجالات العمل اليومي .

(٥–٢) التجربة العشوائية :

التجربة هى كل عملية او إجراء يؤدي إلى ملاحظة أو مشاهدة . تسمى التجربة أو المحاولة عشوائية إذا كنا نعلم مسبقاً جميع نواتجها الممكنة دون أن نتمكن من التنبؤ بأن أي من هذه النواتج سيحقق فعلاً .

فمثلاً عن إلقاء قطعة نقود فإن نواتج هذه التجربة ستكون إحدى الحالتين الصورة أو الكتابة ، ولكننا لانستطيع أن نتنبأ أيهما سيكون السطح العلوى لقطعة النقود . إذن إلقاء قطعة النقود تجربة عشوائية وكذلك عند إلقاء حجر النرد (زهرة النرد) وتسجيل عدد النقط المنقوشة على الوجه الظاهر ، فإن النواتج الممكنة ستكون أحد القيم ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ دون أن نتمكن من التنبؤ بناتج التجربة فعلاً . وعليه فإن هذه التجربة تجربة عشوائية .

(٥-٣) فضاء العينة :

إن مجموعة جميع النتائج الممكنة للتجربة العشوائية تسمى فضاء العينة.

(٥ – ١) تعريف :

فضاء العينة هو مجموعة النتائج الممكنة لتجربة عشوائية . وتسمى كل نتيجة ممكنة نقطة عينة . وسنرمز لفضاء العينة بالرمز ع .

ففى تجربة قذف قطعة النقود ، وملاحظة الوجه الذى سيظهر عند استقرار القطعة نجد أن جميع النتائج الممكنة لها هى (صورة) أو (كتابة) فإذا رمزنا للصورة بالرمز (ص) وللكتابة بالرمز (ك) فإن مجموعة النواتج لهذه التجربة هى { ص ، ك } .

وعليه يكون فضاء العينة لهذه التجربة هو :

ع = { ص ، ك } .

وبالمثل فإن فضاء العينة لتجربة رمى حجر النرد وتسجيل عدد النقط التى تظهر على الوجه العلوى هو

ع = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ } .

أما إذا نظرنا إلى تجربة مثل التجربة التالية :

إلقاء قطعة النقود ثم إلقاء حجر النرد . تسمى مثل هذه التجربة عشوائية مركبة لأنها تكونت من تجربتين عشوائيتين بسيطتين . أو كتجربة إلقاء قطعة النقود مرتين فإذا أردنا تحديد فضاء العينة للتجربة المركبة الأخيرة مثلاً نجد أن فضاء العينة لها يتضمن أربعة ازواج مرتبة حيث يرمز المكون الأول من كل زوج إلى نتيجة القطعة في المرة الأولى ويرمز المكون الثانى لنتيجة القطعة في المرة الثانية .

ونقطة العينة في هذه الحالة هى زوج مرتب من الحروف وهى :

{ (ص ، ص) ، (ص ، ك) ، (ك ، ص) ، (ك ، ك) }

تدريب :
أكتب فضاء العينة لتجربة إلقاء ثلاث قطع نقود .

مثال (١) :
التجربة هى إلقاء حجري نرد . أكتب فضاء العينة ع لهذه التجربة :
الحل :
الجدول (٧ – ١) التالي يمثل فضاء العينة لهذه التجربة

النتيجة على الحجر الثانى

النتيجة على الحجر الأول

(١ ، ١)	(١ ، ٢)	(١ ، ٣)	(١ ، ٤)	(١ ، ٥)	(١ ، ٦)
(٢ ، ١)	(٢ ، ٢)	(٢ ، ٣)	(٢ ، ٤)	(٢ ، ٥)	(٢ ، ٦)
(٣ ، ١)	(٣ ، ٢)	(٣ ، ٣)	(٣ ، ٤)	(٣ ، ٥)	(٣ ، ٦)
(٤ ، ١)	(٤ ، ٢)	(٤ ، ٣)	(٤ ، ٤)	(٤ ، ٥)	(٤ ، ٦)
(٥ ، ١)	(٥ ، ٢)	(٥ ، ٣)	(٥ ، ٤)	(٥ ، ٥)	(٥ ، ٦)
(٦ ، ١)	(٦ ، ٢)	(٦ ، ٣)	(٦ ، ٤)	(٦ ، ٥)	(٦ ، ٦)

جدول (٥ – ١)

أو بصورة رمزية :
ع = { (س ، ص) : س عدد صحيح بين ٠ ، ٧ ؛ ص عدد صحيح بين ٠ ، ٧ }
حيث س هى النتيجة الملحوظة على الحجر الأول ، ص هى النتيجة الملحوظة على الحجر الثانى .
عدد نقاط العينة ٣٦ ، لماذا ؟
ما عدد نقاط فضاء العينة في تجربة إلقاء ثلاثه احجار نرد وهل يكافئ ذلك تجربة قذف حجر نرد ثلاث مرات .

مثال (٢) :

خذ قطعة نقود والقها عدداً من المرات حتى نحصل على الصورة لأول مرة جد عدد مرات ظهور الكتابة قبل ظهور الصورة واكتب فضاء العينة لهذه التجربة .

الحل :

قد يكون أحد نواتج هذه التجربة ص . أى أن الصورة ظهرت في الرمية الأولى فيكون عدد مرات ظهور الكتابة صفراً . وقد يكون الناتج ك ، ص . أى الكتابة ظهرت مرة واحدة قبل ظهور الصورة . وقد يكون الناتج هو ك ، ك ، ص . أى ظهرن الكتابة مرتين قبل ظهور الصورة للمرة الأولى . وقد يكون ك ، ك ، ك ، ك ، ص وهو ناتج من نواتج هذه التجربة وهو ٤ .

أى أن فضاء العينة لهذه التجربة هو مجموعة غير منتهية يمكن تمثيلها بمجموعة الأعداد الكلية أى :

{ ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ... }

تمرين (٥ – ١)

(١) يراد تكوين لجنة من الطلاب أ ، ب ، جـ تتكون من عضوين فقط . أكتب فضاء العينة لهذه التجربة .

(٢) صندوق يحتوى على كرات بيضاء ، وسوداء ، وصفراء . رمز للكرة البيضاء بالرمز ب ، وللسوداء بالرمز س ، وللصفراء بالرمز ص . يراد سحب ثلاث كرات على التوالى من الصندوق . أكتب فضاء العينة لهذه التجربة .

(٣) إذا كانت التجربة هى تسجيل عدد حوادث السيارات بطريق الخرطوم مدنى خلال شهر يوليو . ما فضاء العينة لهذه التجربة ؟

(٤) التجربة هى إلقاء نرد ثم إلقاء قطعة نقود أكتب فضاء العينة لهذه التجربة.

(٥ – ٤) الحادثة :

عرفنا أن فضاء العينة يمثل مجموعة جميع النواتج الممكنة للتجربة العشوائية . ولكن أحياناً ينحصر اهتمامنا على بعض نتائج التجربة العشوائية . وفى هذه الحالة سوف ينحصر اهتمامنا على العناصر التى تمثلها تلك النتائج وهذه العناصر تكون مجموعة جزئية من فضاء العينة وكل مجموعة جزئية من فضاء العينة تسمى حادثة :

(٥ – ٢) تعريف :

> الحاثة هى أى مجموعة جزئية من فضاء العينة . وإذا كانت هذه المجموعة الجزئية تحتوى عنصراً واحداً فقط تسمى حادثة بسيطة .

فإذا اخذنا تجربة القاء قطعتى نقود مرة واحدة ، فإن فضاء العينة لهذه التجربة كما نعلم هو :

ع= { (ص ، ص) ، (ص ، ك) ، (ك ، ص) ، (ك ، ك) }

فلنأخذ المجموعات الجزئية التالية ونعبر عنها لفظياً

أ$_{١}$ = { (ص ، ص) } : حادثة بسيطة تمثل صورتين .

أ$_{٢}$ = { (ص ، ص) ، (ك ، ك) } : حادثة ظهور وجهين متشابهين .

أ$_{٣}$ = { (ص ، ص) (ص ، ك) ، (ك ، ص) } : حادثة ظهور صورة واحدة على الأقل .

مثال (١) :

تجربة إلقاء حجر نرد وتسجيل عدد النقط على الوجه الظاهر عند استقراره ، اكتب الحوادث التالية :

أ : الحصول على عدد أقل من ٤.

ب: الحصول على عدد زوجى .

جـ : الحصول على عدد فردى .

د : الحصول على عدد أكبر من ٣ .

هـ : الحصول على عدد أكبر من ٦ .

الحل :

أ = { ١ ، ٢ ، ٣ }

ب = { ٢ ، ٤ ، ٦ }

جـ = { ١ ، ٣ ، ٥ }

د = { ٤ ، ٥ ، ٦ }

هـ = { } = $\varnothing$

مثال (٢) :

في تجربة إلقاء حجري نرد وتسجيل عدد النقط على الوجهين الظاهرين، اكتب الحوادث التالية :

أ : الحصول على العدد نفسه من الحجرين .

ب: الحصول على مجموع أكبر من ٩ .

جـ : الحصول على مجموع أقل من ٥ .

د : الحصول على ١ من حجر النرد الأول .

هـ : الحصول على مجموع أقل من ٣ .

و : الحصول على عددين الفرق بينهما يساوى الواحد .

الحل :

أ = { (١ ، ١) ، (٢، ٢) ، (٣، ٣) ، (٤، ٤) ، (٥، ٥) ، (٦، ٦) }

ب = { (٤ ، ٦) ، (٥، ٥) ، (٦ ،٤) ، (٥ ،٦) ، (٦ ،٥) ، (٦، ٦) }

جـ = { (١ ، ١) ، (١ ،٢) ، (١ ،٣) ، (٢ ،١) ، (٢ ،٢) ، (٣ ،١) }

د = { (١ ، ١) ، (١ ،٢) ، (١ ،٣) ، (١ ،٤) ، (١ ،٥) ، (١ ،٦) }

هـ = { (١ ، ١) }

و= { (١ ، ٢) ، (٢ ،١) ، (٢ ،٣) ، (٣ ،٢) ، (٣ ،٤) ، (٤ ،٣) ، (٤ ،٥) ، (٥ ،٤) ، (٥ ،٦) ، (٦ ،٥) }

لاحظ أنه قد برز لنا أن بعض الحوادث تساوى المجموعة الخالية $\varnothing$.

وبالمثل بما أن مجموعة فضاء العينة ع مجموعة جزئية من نفسها (ع $\supseteq$ ع) فإنه من التعريف يمكننا القول أن $\varnothing$ ، ع حادثتان .

وفي نظرية الاحتمالات نفرض دائماً أن $\varnothing$ حادثة ونسميها الحادثة المستحيلة ، كما نفرض أن ع حادثة ونسميها الحادثة الأكيدة .

تمرين (٥ – ٢)

(١) في تجربة إلقاء حجر النرد اكتب كلاً من الحوادث التالية :

$أ_{١}$: أن يكون مجموع النقط على وجهى الحجرين ٨ .

$أ_{٢}$: أن يكون العدد على الحجر الأول زوجياً وعلى الثانى فردياً .

$أ_{٣}$: أن يكون العدد على الحجر الأول ٣ وعلى الثانى فردياً .

(٢) في تجربة إلقاء حجر النرد ثم قطعة النقود ، اكتب فضاء العينة ع ، وحدد نقاط العينة في كل من الحوادث التالية :

أ : الحصول على عدد فردى على حجر النرد .

ب : الحصول على الوجه ك على قطعة النقود .

جـ : الحصول على الوجه ص من قطعة النقود وعلى عدد أقل من ٤ على حجر النرد .

هـ : الحصول على الوجه ك من قطعة النقود وعدد لا يقل عن ٣ من حجر النرد .

(٣) إلقينا قطعة نقود ثلاث مرات . اكتب فضاء العينة ع ، عبر عن الحوادث التالية :

أ : أن تكون نتيجة الإلقاء الثانية ص .

ب : الحصول على الوجه ك مرتين على الأكثر .

جـ : أن تكون نتيجة الإلقاء الثالثة ك .

(٥ – ٥) العمليات على الحوادث :

عرفنا الحادثة على أنها مجموعة جزئية من فضاء العينة ع ، وعناصرها هى نقاط فضاء العينة . فإذا إتخذنا كلمة حادثة بدلاً عن مجموعة ، ونقطة عينة بدلاً عن العنصر في المجموعة ، يمكننا أن نعرف بعض العمليات التى تجرى على الحوادث العشوائية كما يلى :

اتحاد حادثتين :

(٥ – ٣) تعريف :

اتحاد حادثتين أ ، ب هو حادثة تتضمن كافة نقاط العينة التى تنتمى إلى أ أو ب (أو كليهما) ونرمز له بالرمز أ $\cup$ ب وذلك يعنى وقوع أ أو ب أو كليهما ، أو بمعنى آخر وقوع إحدى الحادثتين أ أو ب على الأقل .

وهذا التعريف يصلح للتعبير عن اتحاد ثلاث حوادث أو أكثر إذ أن اتحاد ن من الحوادث ثلاث حوادث $أ_{١}$ ، $أ_{٢}$ ، ... ، $أ_{ن}$ هو حادثة تتضمن كافة نقاط العينة التى تنتمى إلى واحدة منها على الأقل ونرمز له بـــ :

$$\bigcup_{ر=١}^{ن} أ_{ر} = أ_{١} \cup أ_{٢} \cup \cdots \cup أ_{ن}$$

تقاطع حادثتين :

(٥ – ٤) تعريف :

> تقاطع حادثتين أ ، ب هو حادثة تتضمن كافة نقاط العينة التى تنتمى إلى أ و ب ويرمز له أ ∩ ب

أى هى الحادثة التى تتكون من العناصر المشتركة بين أ ، ب ونرمز لوقوع الحادثتين أ ، ب معاً .
وبالمثل تقاطع ن من الحوادث $أ_١$ ، $أ_٢$ ، ٠٠٠ ، $أ_ن$ هو حادثة تتضمن كافة نقاط العينة التى تنتمى اليها جميعاً ويرمز له بـــ :

$$\bigcap_{ر=١}^{ن} أ_ر = أ_١ \cap أ_٢ \cap \cdots \cap أ_ن$$

لاحظ أنه عند ربط الحادثتين بالرابط (أو) فإن ذلك يعنى إتحاد الحادثتين وعند ربطهما بالرابط (و) (أو ما يفيد ذلك) فإن ذلك يعنى تقاطهما.

مثال (١) :

إذا القى حجر نرد مرة واحدة فإن :

ع = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ } فإذا كان :

أ : هى حادثة ظهور عدد زوجى .

ب : هى حادثة ظهور عدد فردى .

جـ : هو حادثة ظهور عدد أكبر من ٤

د : هى حادثة ظهور عدد يقبل القسمة على ٣ .

فجد (١) حادثة ظهور عدد زوجى يقبل القسمة على ٣ .

(٢) حادثة ظهور عدد فردى أو عدد أكبر من ٤ .

(٣) حادثة ظهور عدد فردى أو عدد زوجى .

(٤) حادثة ظهور عدد فردى أكبر من ٤ .

(٥) حادثة ظهور عدد زوجى وعدد فردى .

الحل :

من الواضح أن :

أ = { ٢ ، ٤ ، ٦ }

ب = { ١ ، ٣ ، ٥ }

جـ = { ٥ ، ٦ }

د = { ٣ ، ٦ }

وبالتالى فإن :

(١) أ ∩ د = { ٦ }

(٢) ب ∪ جـ = { ١ ، ٣ ، ٥ ، ٦ }

(٣) ب ∪ أ = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ }

(٤) ب ∩ جـ = { ٥ }

(٥) أ ∩ ب = ∅

الحوادث المنفصلة أو المتنافية :

(٥ – ٥) تعريف :

> نقول أن الحادثتين أ ، ب متنافيتان أو منفصلتان
> إذا كان تقاطعهما المجموعة الخالية أى أ ∩ ب = ∅

وتنافى حادثتين يعنى أنه لايمكن وقوعهما معاً ، وهذا واضح من عدم وجود أى نقطة عينة مشتركة بينهما أو أن وقوع إحدى الحادثتين ينفى إمكانية وقوع الأخرى كما في الحالة ٥ في المثال السابق .

تمرين (٥ – ٣)

(١) تتألف تجربة من إلقاء حجر نرد ، أكتب فضاء العينة ع ، وحدّد نقاط العينة في كل من الحوادث التالية :

(أ) الحصول على عدد أقل من ٣

(ب) الحصول على ٥

(جـ) الحصول على كل من (أ) و (ب)

(د) الحصول على (أ) أو (ب)

(٢) إلقاء حجر نرد ثم قطعة نقود ، أكتب فضاء العينة ع ثم حدّد نقاط العينة لكل من الحوادث التالية :

(أ) الحصول على عدد زوجى على حجر النرد .

(ب) الحصول على الوجه ص على قطعة النقود .

(جـ) الحصول على الوجه ك من قطعة النقود وعدد أقل من ٣ على حجر النرد.

(د) الحصول على الوجه ص من قطعة النقود وعدد لا يقل عن ٣ على حجر النرد .

(هـ) الحصول على (أ) و (ب)

(و) الحصول على (أ) أو (ب)

(ز) الحصول على واحد على الأقل من الحوادث أ ، جـ ، د

(٣) القيت قطعة نقود ثم حجر نرد ، وكان :

أ : ظهور صورة وعدد زوجى .

ب : ظهور عدد أولى .

جـ : ظهور كتابة وعدد فردى .

(٤) أى من ازواج الحوادث التالية أحداث منفصلة

(أ) أ ، ب

(ب) أ ، جـ

(جـ) ب ، جـ

(٥– ٦) الفرق بين حادثتين :

(٥ – ٦) تعريف :

> الفرق بين حادثتين أ ، ب هو حادثة تتضمن كافة نقاط العينة التى تنتمى إلى أ ولا تنتمى إلى ب ونرمز له بـــ أ – ب ، ويرمز لوقوع أ وعدم وقوع ب .

مكملة الحادثة أ :

(٥ – ٧) تعريف

> مكملة أو متممة الحادثة أ هى حادثة تتضمن كافة نقاط العينة التى لا تنتمى إلى أ ويرمز لها بـــ أ ′

أ ′إذن هى تعنى مكملة أ ونعبر عنها أحياناً بقولنا (ليس أ) ونلاحظ أن أ ′ = ع – أ . أى الفرق بين فضاء العينة ع و أ . لاحظ أن الفرق أ – ب هو أ وليس ب ويمكن كتابته على الصورة أ $\cap$ ب′ .

مثال (١) :

سحبت بطاقة واحدة عشوائياً من صندوق به ٩ بطاقات مرقمة من ١ إلى ٩ وكان

أ هو حدث سحب بطاقة مرقمة بعدد فردى

ب هو حدث سحب بطاقة مرقمة بعدد أولى

أى : أ = { ١ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩ }

ب = { ٢ ، ٣ ، ٥ ، ٧ }

جد نقاط العينة لكل من الحوادث :

أ – ب ، أ ′ ، ب′ ثم عبر عن كل منها لفظياً

الحل :

أ – ب = { ١ ، ٩ } أى حدث سحب بطاقة مرقمة بعدد فردى غير أولى (أى حدث وقوع أ وعدم وقوع ب)

أ′ = { ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ } : سحب بطاقة ليس بها رقم فردى أو سحب بطاقة مرقمة بعدد زوجى .

ب′ = { ١ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، ٩ } أى حدث سحب بطاقة ليس عليها عدد أولى .

مثال (٢) :

إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء العينة لتجربة عشوائية عبر عن كل من الأحداث التالية بلغة المجموعات رمزياً :

(١) حدث وقوع أ أو عدم وقوع ب .
(٢) حدث عدم وقوع أ ، ب معاً .
(٣) حدث وقوع أحد الحدثين فقط .
(٤) حدث وقوع أحد الحدثين على الأكثر .

الحل :

(١) حدث عدم وقوع ب = ب′

(٢) حدث وقوع أ ، ب = أ ∩ ب

∴ حدث عدم وقوع أ ، ب = (أ ∩ ب)′

(٣) حدث وقوع أحد الحدثين فقط = (حدث وقوع أ وعدم وقوع ب) أو (حدث وقوع ب وعدم وقوع أ)

= (أ – ب) ∪ (ب – أ)

= (أ ∩ ب′) ∪ (ب∩ أ ′)

(٤) حدث وقوع أحد الحدثين على الأكثر هو نفس حدث عدم وقوعهما معاً

= (أ ∩ ب)′ = أ ′ ∪ ب′

تمرين (٥– ٤)

(١) في تجربة إلقاء قطعة نقود ثلاث مرات متتالية وملاحظة تتابع الصور والكتابات اكتب فضاء العينة ع ثم عبّر عن الاحداث التالية بعناصرها :

(أ) حدث الحصول على صورتين فقط .

(ب) حدث حصول على صورتين على الأقل .

(جـ) حدث الحصول على صورتين على الأكثر

(٢) إذا كان أ ، ب حدثين في فضاء العينة لتجربة عشوائية فعبر عن الأحداث التالية رمزياً بلغة المجموعات :

(أ) حدث عدم وقوع أ .

(ب) حدث عدم وقوع أ أو وقوع ب .

(ج)حدث عدم وقوع أحد الحدثين دون الآخر .

(د) حدث عدم وقوع أحد الحدثين أو وقوعهما معاً

(ه) حدث وقوع أحد الحدثين على الأقل .

(و) حدث وقوع ب فقط .

(ز) حدث وقوع ب أو عدم وقوع أ .

(٣) نفرض أن أ ، ب ، جـ احداث ، عبّر عن ثم ظلل في شكل ڤن للاحداث :

(أ) وقوع أ و ب وعدم وقوع جـ

(ب) وقوع أ فقط

(جـ) وقوع أ فقط أو وقوع جـ فقط .

(٥ –٧) مسلمات نظرية الاحتمالات :

إذا كان ع فضاء العينة لتجربة عشوائية ، وكان ق (ع) مجموعة جميع الحوادث المعرفة على ع ، فإنه يرافق كل حادثة أ ∍ ق (ع) عدد معين ع (أ) ∍ [٠ ، ١] ويسمى إحتمال الحادثة أ ويتمتع بالخواص التالية : والتى تسمى مسلمات نظرية الاحتمالات :

(١) إذا كانت أ ⊂ ع فإن ح (أ) ≤ 0

(٢) ح (ع) = ١

(٣) إذا كان أ ، ب حادثتين متنافيتين (أى أ $\cap$ ب = $\varnothing$) فإن ح (أ $\cup$ ب) = ح (أ) + ح (ب)
(٤) لاحظ أن ح (أ) هو عدد حقيقى يعبر عن إحتمال وقوع الحدث أ .
أى إحتمال أن يكون ناتج التجربة هو أحد عناصر أ حيث أ $\supset$ ع

ومن هذه المسلمات يتضح لنا أن :

(١) إحتمال وقوع أى حدث هو عدد حقيقى غير سالب .
(٢) المسلمة (٢) تعنى أن إحتمال وقوع الحدث المؤكد يساوى ١ .
(٣) المسلمة (٣) يمكن أن نعبر عنها بالصورة الآتية إذا كان أ $\cap$ ب = $\varnothing$ فإن ح (أ $\cup$ ب) = ح (أ) + ح (ب) حيث أ ، ب $\in$ ق (ع) .
وبصورة عامة إذا كان أ$_{١}$ ، أ$_{٢}$ ، ... ، أ$_{ن}$ احداثاً متنافية على مجموعة فضاء العينة ع فإن :

ح (أ$_{١}$ $\cup$ أ$_{٢}$ $\cup$ ... $\cup$ أ$_{ن}$) = ح (أ$_{١}$) + ح (أ$_{٢}$) + ... + ح (أ$_{ن}$)

وحيث أن الأحداث الأولية هى احداث متنافية مثنى مثنى ، إذن يكون احتمال أى حدث = مجموع إحتمالات الاحداث الأولية لهذا الحدث .
وحيث أن فضاء العينة لأى تجربة عشوائية يتألف من إتحاد جميع الأحداث الأولية لهذه التجربة ، وحيث أن الاحداث الأولية هى احداث متنافية مثنى مثنى، عليه نستنتج أن :
مجموع إحتمالات الأحداث الأولية لفضاء العينة لتجربة عشوائية = ١
وباستخدام المسلمات السابقة يمكن التوصل إلى إثبات بعض النظريات .

(٥ – ١) نظرية :

إذا كان أ $'$ هى الحادثة المتتمة للحادثة أ فإن :
ح (أ$'$) = ١ – ح (أ)

البرهان :

∵ ع = أ ∪ أ ′

∴ ح (ع) = ح (أ ∪ أ ′)

وحيث أن أ ∩ أ ′ = ∅

∴ ح (ع) = ح (أ) + ح (أ ′) مسلمة (٣)

∴ ١ = ح (أ) + ح (أ ′) مسلمة (٢)

∴ ح (أ ′) = ١ − ح (أ)

نتيجة (٥ – ١) :

ح (∅) = صفر .

البرهان :

ع′ = ∅

لكن ح (ع ′) = ١ − ح (ع)

∴ ح (ع ′) = ١ – ١ = صفر

∴ ح (∅)= صفر

(٥ – ٢) نظرية :

إذا كان أ ⊃ ب فإن :
ح (أ) ≥ ح (ب)

البرهان :

∵ أ ⊃ ب

∴ ب = أ ∪ (ب – أ)

(أستعن بشكل **ڤن**)

∴ ح (ب) = ح (أ ∪ (ب – أ))

وحيث أن :

أ ∩ (ب – أ) = ∅ (حدثان متنافيان)

∴ ح (ب) = ح (أ) + ح (ب – أ))
(مسلمة (٣))
لكن ح(ب – أ) ≥ ح (أ)

نتيجة (٥ – ٢) :
ح(أ) ≤ ح ١ حيث أ أى حادثة في ع

البرهان :
أ ⊂ ع
∴ ح(أ) ≤ ح (ع)
ح(أ) ≤ ح ١
من المسلمة (١) والنتيجة السابقة نستنتج أنه لأى حادثة أ فإن ٠ ≤ ح (أ) ≤ ١

نظرية (٥ – ٣) :

إذا كان أ ، ب حادثتين ، يكون :
ح (أ ∪ ب) = ح (أ) + ح (ب) – ح (أ ∩ ب)

البرهان :

استعن بشكل **ڤن** :

أ ∪ ب = أ ∪ (ب – أ)
وأن : أ ∩ (ب – أ) = ∅
∴ ح (أ ∪ ب) = ح (أ) + ح (ب – أ)
ولكن ب = (أ ∩ ب) ∪ (ب – أ)
(أ ∩ ب) ∩ (ب – أ) = ∅
ح (ب) = ح (أ ∩ ب) + ح (ب – أ)
ح (ب – أ) = ح (ب) – ح (أ ∩ ب) (٢)
من (٠١) ، (٢) نستنتج أن :

ح (أ ∪ ب) = ح (أ) + ح (ب) – ح (أ – ب)

دالة الاحتمال :

مما سبق يتضح أنه يمكن تعريف دالة تقرن كل حدث من فضاء العينة ع بعدد معين من الفترة [٠ ، ١] كما يلى :

(٥ – ٨) تعريف :

إذا كان ع هو فضاء العينة لتجربة عشوائية
ق (ع) هى مجموعة أحداث هذا الفضاء ،
ح هى مجموعة الأعداد الحقيقية فإن الدالة :
ح : ق (ع) ← ح تسمى دالة احتمال
إذا توفرت فيها الشروط التالية :

١. ح (أ) ⩾ ٠ ، ∀ أ ∊ ق (ع)
٢. ح (ع) = ١
٣. إذا كان أ ∩ ب = ∅ ، ∀ أ ، ب ∊ ق (ع)
فإن ح (أ ∪ ب) = ح (أ) + ح (ب)

وحيث أن ٠ ≤ ح (أ) ≤ 1 ∀ أ ∊ ق (ع)
فإن مدى دالة الاحتمال هو الفترة [٠ ، ١]

مثال (١) :

إذا كانت ع = { $أ_١$ ، $أ_٢$ ، $أ_٣$ } هى فضاء لتجربة عشوائية ، فبين أى الدوال التالية تكون دالة إحتمال على ع مع ذكر السبب

(١) ح ($أ_١$) = ٠,٣ ، ح($أ_٢$) = ٠,٦ ، ح ($أ_٣$) = ٠,٢
(٢) ح ($أ_١$) = ٠,٥ ، ح($أ_٢$) = ٠,٥ ، ح ($أ_٣$) = ٠,٣
(٣) ح ($أ_١$) = ٠,٤ ، ح($أ_٢$) = –٠,١ ، ح ($أ_٣$) = ٠,٣
(٣) ح ($أ_١$) = ٠,٣ ، ح($أ_٢$) = ٠,٤ ، ح ($أ_٣$) = ٠,٣
(٥) ح ($أ_١$) = ٠,٦ ، ح($أ_٢$) = ٠ ، ح ($أ_٣$) = ٠,٤

الحل :

(١) ح (أ$_١$) + ح(أ$_٢$) + ح (أ$_٣$) = ٠,٣ + ٠,٦ + ٠,٢ = ١,١ > ١

∴ ليست دالة إحتمال

(٢) ح (أ$_١$) + ح(أ$_٢$) + ح (أ$_٣$) = ٠,٥ + + ٠,٥ ٠,٣ = ٠,٩ < ١

∴ ليست دالة إحتمال

(٣) ح(أ$_٢$) = –٠,١ ليست دالة احتمال لأنه يتناقض مسلمه ١ .

(٤) ح (أ$_١$) + ح(أ$_٢$) + ح (أ$_٣$) = ٠,٣ + ٠,٤ + ٠,٣ = ١

وايضاً مع ح (أ) ≥ 0

∴ هذه الدالة دالة احتمال

(5) ح(أ$_٢$) = ٠ ∴ { أ$_٢$ } ليست حدثاً أولياً

∴ ليست دالة احتمال .

مثال (٢) :

ك إذا كان أ ، ب حدثين في تجربة ، وكان :

ح (أ) = $\frac{٣}{٥}$ ، ح (ب) = $\frac{١}{٤}$

ح (أ ∩ ب) = $\frac{١}{٥}$ جد

(أ) ح (أ ′) (ب) ح (ب′)

(جـ) ح (أ ∪ ب) (د) ح (أ – ب)

(هـ) ح (ب – أ) (و) ح (أ ′ ∪ ب)

(ز) ح (أ ∩ ب′) (ح) ح (أ ′ – ب)

الحل :

(أ) ح (أ ′) = ١ – ح (أ) = ١ – $\frac{٣}{٥}$ = $\frac{٢}{٥}$

(ب) ح (ب′) = ١ – ح (ب) = ١ – $\frac{١}{٤}$ = $\frac{٣}{٤}$

.

(جـ) ح (أ ∪ ب) = ح (أ) + ح (ب) – ح (أ ∩ ب)

= $\frac{٣}{٥}$ – $\frac{١}{٤}$ – $\frac{١}{٥}$ = $\frac{١٢ + ٥ - ٤}{٢٠}$ = $\frac{١٣}{٢٠}$

(د) ح (أ – ب) = ح (أ) – ح (أ ∩ ب)

(لأن أ = (أ – ب) ∪ (أ ∩ ب) وهما متنافيان)

∴ ح (أ – ب) = $\frac{٣}{٥}$ – $\frac{١}{٥}$ = $\frac{٢}{٥}$

(هـ) ح (ب – أ) = ح (ب) – ح (أ ∩ ب)

= $\frac{١}{٤}$ – $\frac{١}{٥}$ = $\frac{١}{٢٠}$

(و) ح (أ ′ ∪ ب) = ح (أ ′) + ح (ب) – ح (أ ′ ∩ ب)

= ح (أ ′) + ح (ب) – ح (ب – أ)

(لأن أ ′ ∩ ب = ب – أ)

= $\frac{٢}{٥}$ + $\frac{١}{٤}$ – $\frac{١}{٢٠}$ = $\frac{٣}{٥}$

(ز) ح (أ ∩ ب′) = ح (أ – ب) = $\frac{٢}{٥}$

(ح) ح (أ ′ – ب) = ح (أ ′ ∩ ب′) = ح (أ ∪ ب)′

= ١ – ح (أ ∪ ب)

= ١ – $\frac{١٣}{٢٠}$ = $\frac{٧}{٢٠}$

تمرين (٥– ٥)

(١) أفرض أن أ ، ب حدثان منفصلان في تجربة عشوائية بحيث أن :

ح (أ) = $\frac{١}{٥}$ ، ح (ب) = $\frac{١}{٣}$

جد احتمال كل من الاحداث التالية :

(أ) أ أو ب (ب) أ و ب

(جـ) $أ'$ — (د) أ – ب

(هـ) ب – أ — (و) $أ - ب'$

(ز) $(أ \cup ب)'$ — (ح) $(أ \cap ب)'$

(٢) في تجربة إلقاء حجر نرد مرة واحدة إذا كان احتمالات ظهور الأعداد

الفردية متساوية وكل منها يساوى $\frac{١}{٩}$ واحتمالات ظهور الأعداد الزوجية متساوية وكل منها يساوى $\frac{٢}{٩}$ ، أى .

$$ح(١) = ح(٣) = ح(٥) = \frac{١}{٩}$$

$$ح(٢) = ح(٤) = ح(٦) = \frac{٢}{٩}$$

جد احتمال كل من الاحداث التالية :

(أ) احتمال ظهور عدد زوجى .

(ب) احتمال ظهور عدد فردى .

(جـ) احتمال ظهور عدد أولى فردى .

(د) احتمال ظهور يقبل القسمة على ٣ .

(هـ) احتمال ظهور عدد زوجى أو أولى .

(و) احتمال ظهور عدد $\geq$ ٤ .

(٣) أ ، ب حدثان في تجربة عشوائية ، فإذا كان :

$$ح(أ \cup ب) = \frac{٤}{٥} \quad ، ح(أ') = \frac{١}{٤} \quad ، ح(ب) = \frac{٣}{٥}$$

جد احتمال كل من الاحداث التالية :

(أ) احتمال وقوع أ فقط .

(ب) احتمال وقوع أ ، ب .

(جـ) احتمال وقوع أحد الحدثين فقط .

(د) احتمال وقوع الحدثين .

(هـ) احتمال وقوع أحد الحدثين على الأكثر .

(٤) إذا كان فضاء العينة لتجربة ما ع = { $أ_١$ ، $أ_٢$ ، $أ_٣$ ، $أ_٤$ } أى من الدوال التالية تعرّف دالة احتمال على ع .

(أ) ح ($أ_١$) = $\frac{١}{٢}$ ، ح ($أ_٢$) = $\frac{١}{٣}$ ، ح ($أ_٣$) = $\frac{١}{٤}$ ، ح ($أ_{١}$٤) = $\frac{١}{٥}$

(ب) ح ($أ_١$) = $\frac{١}{٢}$ ، ح ($أ_٢$) = $\frac{١}{٤}$ ، ح ($أ_٣$) =− $\frac{١}{٤}$ ، ح ($أ_٤$) = $\frac{١}{٢}$

(جـ) ح ($أ_١$) = $\frac{١}{٢}$ ، ح ($أ_٢$) = $\frac{١}{٤}$ ، ح ($أ_٣$) = $\frac{١}{٣}$ ، ح ($أ_٤$) = $\frac{١}{٨}$

(د) ح ($أ_١$) = $\frac{١}{٢}$ ، ح ($أ_٢$) = $\frac{١}{٤}$ ، ح ($أ_٣$) = $\frac{١}{٤}$ ، ح ($أ_٤$) = ٠

(٥) نفرض أن ع = { $أ_١$ ، $أ_٢$ ، $أ_٣$ ، $أ_٤$ } وأن ح دالة احتمال معرفة على ع .

(أ) جد ح($أ_١$) إذا كان ح($أ_٢$) = $\frac{١}{٣}$ ، ح ($أ_٣$) = $\frac{١}{٦}$ ، ح($أ_٤$) = $\frac{١}{٩}$

(ب) جد ح($أ_١$) إذا كان ح ({ $أ_٢$ ، $أ_٣$ }) = $\frac{١}{٣}$ ، ح ({ $أ_٢$ ، $أ_٤$ }) = $\frac{١}{٣}$
ح ($أ_٢$) = $\frac{١}{٣}$

(جـ) جد ح ($أ_١$) ، ح ($أ_٢$) إذا كان ح ($أ_٣$) = ح ($أ_٤$) = $\frac{١}{٤}$
وكان ح ($أ_١$) = ٢ ح ($أ_٢$)

(٥ – ٨) الاحتمالات المتساوية :

إذا القيت قطعة نقود ١٠ مرات ، وظهرت الصورة للأعلى في ٦ منها فإن التكرار النسبى لعدد مرات ظهور الصورة هو $\frac{٦}{١٠}$ = ٠,٦ . وإذا القيت القطعة ١٠ مرات أخرى وظهرت الصورة في ٥ منها تكون الصورة قد ظهرت للأعلى ٦ + ٥ = ١١ مرة في العشرين رمية . ويكون التكرار النسبى لظهور

الصورة للأعلى في ٢٠ رميه هو $\frac{١١}{٢٠}$ = ٠,٥٥ . والسؤال الآن هو ماذا

يحدث لهذا التكرار النسبى عندما يزداد عدد مرات إلقاء قطعة النقود .
حاول أن تقوم بنفسك بالقاء قطعة النقود ولاحظ ماذا يحدث .
ففي إحدى التجارب التى قام بها العالم بيرسون . وجد أن الصورة قد ظهرت ٦٠١٩ مرة من ١٢٠٠٠رمية . أى أن التكرار النسبى كان ٠,٥٠١٦ (تقريباً).
وعندما زاد عدد الرميات إلى ٢٤٠٠٠ رمية اظهرت الصورة في ١٢٠١٢ رمية . أى بتكرار نسبى ٠,٥٠٠٥ . تلاحظ أن التكرار النسبى يؤول إلى العدد $\frac{١}{٢}$.
وتسمى هذه الظاهرة ظاهرة ثبات التكرار النسبى عند ازدياد عدد التجارب بشكل كبير ويسمى هذا العدد الذى يؤول إليه التكرار النسبى الاحتمال التجريبى لوقوع الحدث .
أى أن احتمال ظهور الصورة تساوى $\frac{١}{٢}$
لاحظ أن إحتمال أنه لايمكن أن يكون هذا الاحتمال أكبر من ١ ولا يمكن أن يكون سالباً . ولذلك تكون دالة احتمال . وبالمثل يكون الاحتمال التجريبى لظهور الكتابة = $\frac{١}{٢}$ ايضاً وبما أن فضاء العينة لتجربة إلقاء النقود هى :

{ ص ، ك }
فإن ح (ص) = $\frac{١}{٢}$

ح (ك) = $\frac{١}{٢}$

أى تساوت إحتمالات الأحداث الأولية في هذه التجربة مثل هذه التجارب العشوائية التى يكون فيها فضاء العينة ع مجموعة منتهية لاحتمالات جميع الأحداث الأولية فيها متساوية تسمى دالة إحتمال منتظمة . وتكون دالة الاحتمال منتظمة (فضاء العينة متساوى الاحتمال) في التجارب التى يتم فيها اختيار عنصر من مجموعة عشوائياً أو مثل إلقاء قطعة من النقود عشوائياً أو إلقاء حجر النرد إذا كان منتظماً أو سحب ورقة عشوائياً من أوراق اللعب (الكوتشينة) أو سحب كرة من مجموعة كرات متماثلة من كيس عشوائياً .

وفي مثل هذه التجارب التى تخصص الاحتمال نفسه لكل نقطة عينة من ع ولنفترض أن عددها ن يكون إحتمال كل منها $\frac{١}{ن}$. ولنفرض أن حادثة أ تتضمن م نقطة عينة فيكون :

$$ح (أ) = \frac{١}{ن} + \frac{١}{ن} + ... + \frac{١}{ن} = \frac{م}{ن}$$

(م مرة)

ونقول في هذه الحالة أن إحتمال حادثة هو حاصل قسمة عدد النتائج الملاءمة (أى عدد عناصر المجموعة التى تمثل للحادثة) على عدد جميع النتائج الممكنة (عدد عناصر فضاء العينة) ومن ذلك يمكن أن نضع التعريف التالى :

(٥ – ٩) تعريف :

إذا امكن لتجربة أن تظهر في ن من نقـاط العينـة أى عدد عناصر ع فيها يساوى ن . متنافية مثنى مثنى ومتساوية في الأفضلية . وكان م من هذه النقاط يؤدى إلى تحقيق حادثة أ . فإن إحتمال أ يساوى $\frac{م}{ن}$

$$أى \ ح (أ) = \frac{\text{عدد نقاط العينة في الحادثة أ}}{\text{عدد نقاط العينة في ع}}$$

مثال (١) :

القى حجر نرد متماثل مرة واحدة فما إحتمال ظهور عدد زوجى .

الحل :

ع = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ }

حجر النرد متماثل من حيث الأبعاد والكثافة ، لذلك نفترض تساوى إحتمال ظهور أى وجه أى :

$$ح (١) = ح (٢) = ح (٣) = ... = ح (٦) = \frac{١}{٦}$$

فإذا كانت أ حادثة ظهور عدد زوجى

∴ أ = { ٢ ، ٤ ، ٦ }

$$ويكون \ ح (أ) = \frac{\text{عدد عناصر أ}}{\text{عدد عناصر ع}} = \frac{٣}{٦} = \frac{١}{٢}$$

مثال (٢) :

القى حجراً نرد متمايزان مرة واحدة فما إحتمال الحصول على مجموع يساوى ٩

الحل :

نعلم سابقاً أن عدد عناصر فضاء العينة ع في هذه التجربة = ٣٦

أ : حادثة ظهور مجموع يساوى ٩

∴ أ = { (٣ ، ٦) ، (٦ ، ٣) ، (٤ ، ٥) ، (٥ ، ٤) }

∴ ح (أ) = $\frac{\text{عدد عناصر أ}}{\text{عدد عناصر ع}}$ = $\frac{٤}{٣٦}$ = $\frac{١}{٩}$

مثال (٢) :

كيس يحوى ٦ كرات بيضاء و ٤ كرات سوداء ، فإذا كانت الكرات جميعها متماثلة وسحبت كرة عشوائياً جد إحتمال أن تكون الكرة المسحوبة

(١) بيضاء (٢) سوداء (٣) بيضاء أو سوداء

الحل :

العدد الكلى للكرات = ٦ + ٤ = ١٠

∴ عدد عناصر ع = ١٠

(١) إحتمال أن تكون الكرة المسحوبة بيضاء = $\frac{\text{عدد الكرات البيضاء}}{\text{عدد الكرات الكلى}}$

= $\frac{٦}{١٠}$ = $\frac{٣}{٥}$

(٢) احتمال أن تكون الكرة سوداء = $\frac{٣}{١٠}$ = $\frac{٥}{٥}$

(٣) إحتمال أن تكون بيضاء أو سوداء = $\frac{٤ + ٦}{١٠}$ = $\frac{١٠}{١٠}$ = ١

تمرين (٥ – ٦)

(١) تتألف تجربة من إلقاء حجر النرد ، أحسب إحتمال كل من الحوادث التالية:

أ : الحصول على ٥ .
ب : الحصول على عدد أقل من ٣.
جـ : الحصول على أ أو ب .
د : الحصول على عدد فردى .
هـ : الحصول على كل من ب و د .

(٢) ألقي حجر نرد ثم قطعة نقود ، أحسب إحتمال كل من الحوادث التالية :

أ : الحصول على عدد زوجى على حجر نرد .
ب : الحصول على الوجه ص على قطعة نقود .
جـ : الحصول على الوجه ك من قطعة النقود على عدد أقل من ٣ على حجر نرد .
د : الحصول على أ و ب .
هـ : الحصول على أ و جـ .
و : الحصول على واحد على الأقل من الحوادث أ ، جـ ، د .

(٣) صندوق به ٤ كرات حمر ، ٦كرات زرق ، ٥ كرات بيض سحبت كرة واحدة من الصندوق بطريقة عشوائية أحسب إحتمال أن تكون الكرة المسحوبة .

(أ) حمراء (ب) بيضاء (جـ) بيضاء أو حمراء

الحل :

(د) زرقاء أو بيضاء (هـ) حمراء أو زرقاء أو بيضاء
(و) ليست بيضاء (ح) ليست حمراء أو بيضاء
(ط) ليست بيضاء ولا حمراء ولا زرقاء

(٤) إذا سحبت ورقة من أوراق اللعب (الكوتشينة) عشوائياً أحسب احتمال :

(أ) سجب ورقة بها ٨ نقاط .
(ب) سحب ورقة عليها قلب .
(جـ) سحب ورقة عليها صورة .

(٥) اختبر عدد من العشرين عدداً الصحيحة الموجبة الأولى بطريقة عشوائية .
أحسب احتمال أن يكون العدد :

(أ) زوجياً أو يقبل القسمة على ٣ .
(ب) فردياً أو يقبل القسمة على ٥ .
(جـ) يقبل القسمة على ٢ أو على ٣ .
(د) لا يقبل القسمة على ٢ أو لايقبل القسمة على ٣ .
(هـ) لايقبل القسمة على ٣ أو زوجياً .

الوحدة السادسة

المصفوفات

أهداف الوحدة السادسة

المصفوفات

يتوقع بعد تدريس هذه الوحدة أن يكون الطالب قادراً على أن :

١/ يعرّف مفهوم المصفوفة وأبعادها وبعض الأنواع الخاصة لها.
٢/ يعرّف شرط تساوي المصفوفتين ومنقول المصفوفة.
٣/ يجمع ويطرح مصفوفتين لهما البعد نفسه.
٤/ يضرب المصفوفة بعدد ثابت.
٥/ يعرّف خواص جمع المصفوفتين وخواص ضرب المصفوفة بالعدد الثابت.

الوحدة السادسة

المصفـوفـات

(٦ – ١) تمهيد :

إن تطور المجتمع الإنساني وما ترتب على ذلك من كثرة المعلومات وتنوعها استلزم البحث عن سبل أيسر لحفظ هذه المعلومات وتنظيمها . ومن الوسائل البسيطة التى استخدمت في ذلك المصفوفات .

ولقد لوحظت المصفوفات لأول مرة من قبل العالم كيلى (١٨٢١ – ١٨٩٥).ثم تطورت فكرتها لتصبح نظاماً رياضياً له أسسه وقواعده،وأصبح يستخدم في حل كثير من مسائل الرياضيات وتطبيقاتها وفي علم الاقتصاد وعلم الاجتماع وغيره .

ولنفرض أن أحد مصانع تجميع التلفزيون ينتج ثلاثة أنواع ١٤ بوصة ، ٢٠ بوصة ، ٢٤ بوصة . وللمصنع فرعان أ ، ب . وكان عدد الأجهزة التى انتجها كل فرع من كل نوع خلال شهر ما ما يلي :

الفرع (أ) انتج ٦٥ من النوع الأول ، ٥٠ من النوع الثانى و ٤٥ من النوع الثالث .

الفرع (ب) انتج ٧٠ من النوع الأول ، ٥٥ من النوع الثانى و ٣٥ من النوع الثالث .

إن هذه المعلومات معروضة بهذه الصورة لاتساعد على تذكرها أو المقارنة بينها . غير أنه من الممكن عرض هذه المعلومات بصورة افضل واوضح في الجدول التالي:

	النوع الأول ١٤″	النوع الثاني ٢٠″	النوع الثالث ٢٤″
الفرع أ	٦٥	٥٠	٤٥
الفرع ب	٧٠	٥٥	٣٥

لاحظ أننا رتبنا المعلومات في الجدول السابق على شكل صفوف وأعمدة، صفين وثلاثة أعمدة .

فإذا اكتفينا بالأعداد المرتبة في الصفوف والأعمدة وأهملنا الكلام المميز بها فإننا نحصل على التنظيم التالي:

$$\begin{matrix} ٤٥ & ٥٠ & ٦٥ \\ ٣٥ & ٥٥ & ٧٠ \end{matrix}$$

يسمى مثل هذا التنظيم العددى **مصفوفة** ، ويرمز للمصفوفة بأحد الحروف الابجدية وتكتب داخل قوسين من النوع [ ] فتصبح :

$$\begin{pmatrix} ٤٥ & ٥٠ & ٦٥ \\ ٣٥ & ٥٥ & ٧٠ \end{pmatrix}$$

والصورة هذه ما هى إلاّ تنظيم للمعلومات على شكل مستطيل من الأعداد يتضمن صفين وثلاثة أعمدة . إن أي تنظيم لمجموعة من الاعداد على شكل صفوف واعمدة مثل الصورة السابقة يسمى **مصفوفة أعداد** .

تعريف (٦ – ١) :

المصفوفة هي مجموعة من الأعداد مرتبة على شكل مستطيل مكــون من عــدد من الصفوف والأعمدة .

فإذا كانت مصفوفة ما مكونة من م صفاً ، ن عموداً فنقول إن المصفوفة من النوع **م × ن** . وإذا تساوى عدد الصفوف وعدد الأعمدة في مصفوفة ما فنسمي المصفوفة **مصفوفة مربعة** .

فمثلاً إذا كانت أ = $\begin{pmatrix} ٥ & ٣ & ٢ \\ ١ & ١- & ٧ \end{pmatrix}$

فإن أ مصفوفة مكونة من صفين وثلاثة أعمدة يتكون الصف الأول من الاعداد ٢ ، ٣ ، ٥ بينما يتكون الصف الثاني من الأعداد ٧ ، –١ ، ١ ويتكون العمود الأول من الأعداد ٢ ، ٧ . ويتكون العمود الثاني من الأعداد ٣ ، –١ والعمود الثالث من الأعداد ٥ ، ١ .

تسمى الأعداد التي تتألف منها الصفوف والأعمدة في المصفوفة **عناصر المصفوفة** . فالعدد ٢ هو العنصر الذي يقع في الصف الأول والعمود الأول ويرمز له بالرمز $أ_{١١}$ والعدد ١ هو عنصر الصف الثاني والعمود الثالث ويرمز له بالرمز $أ_{٣٢}$. وبصورة عامة يرمز لعنصر الصف هـ والعمود ى بالرمز $أ_{هى}$ ويقرأ (ألف هـ ، ى) حيث يدل الرمز هـ إلى ترتيب الصف والرمز ى إلى ترتيب العمود .

- كيف يرمز للعناصر ٣ ، ٧
- جد $أ_{٢٢}$ ، $أ_{٣١}$

وبشكل عام إذا كانت أ مصفوفة مكونة من م صفاً و ن عموداً فإننا نكتب المصفوفة على الشكل التالي :

$$\begin{pmatrix} أ_{١ن} & \cdots\ أ_{٣١} & أ_{٢١} & أ_{١١} \\ أ_{٢ن} & \cdots\ أ_{٣٢} & أ_{٢٢} & أ_{١٢} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ أ_{م\,ن} & \cdots\ أ_{م٣} & أ_{م٢} & أ_{م١} \end{pmatrix} = أ$$

ونقول إن أ مصفوفة من النوع م × ن أو بعدها م × ن . لاحظ أنه عند كتابة بُعْدِ مصفوفة ما يجب أن نذكر عدد الصفوف أولاً. فمثلاً إذا كانت ب مصفوفة ٢ × ٥ ، وجـ مصفوفة ٥ × ٢ فإن ب مصفوفه مكونة من صفين وخمسة أعمدة بينما تتكون المصفوفة جـ من خمسة صفوف وعمودين .

(٦ – ٢) بعض المصفوفات الخاصة :

(١) إذا كانت مصفوفة ما مكونة من صف واحد فإنها تسمى **مصفوفة صف** ، وإذا تكونت من عمود واحد فإنها تسمى **مصفوفة عمود** . وهذه المصفوفات المكونة من صف واحد أو عمود واحد تسمى **متجهات** فالمصفوفة $\begin{pmatrix} ٢ \\ ٣ \\ ٥- \end{pmatrix}$ متجه عمود .

والمصفوفة [١   -٣   ٤] متجه صف

(٢) تسمى المصفوفة التي جميع عناصرها ، أصفاراً **مصفوفة صفرية** فالمصفوفة

$$\begin{pmatrix} ٠ & ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ & ٠ \end{pmatrix} = \textbf{ص}$$

مصفوفة صفرية ٣ × ٤

(٣) إذا كانت المصفوفة مربعة بحيث أن أ$_{\text{هى}}$ = صفر ى $\neq$ هـ فإن المصفوفة تسمى **مصفوفة قطرية** ، قطرها الرئيس مكون من العناصر أ$_{\text{ىى}}$ ، مثلاً :

المصفوفة $\begin{pmatrix} ٠ & ٠ & ٢ \\ ٠ & ٣ & ٠ \\ ١- & ٠ & ٠ \end{pmatrix}$ مصفوفة قطرية

(٤) إذا كانت و مصفوفة قطرية بحيث جميع عناصر القطر الرئيسي متساوية وتساوى الواحد فإن هذه المصفوفة تسمى **مصفوفة الوحدة** مثلاً :

$$\textbf{و} = \begin{pmatrix} ٠ & ٠ & ٠ & ١ \\ ٠ & ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ & ٠ \\ ١ & ٠ & ٠ & ٠ \end{pmatrix}$$

مصفوفة وحدة من النوع ٤ × ٤

مثال :

اكتب أبعاد كل من المصفوفات التالية :

$$\textbf{أ} = \begin{pmatrix} ٣ & ١ \\ ١- & ٢ \end{pmatrix} \qquad \textbf{ب} = \begin{pmatrix} ١- & ٦٣ \\ ٢ & ٠ \\ ٦ & ٢- \end{pmatrix}$$

$$\textbf{جـ} = \begin{pmatrix} ٠ \\ ٧ \\ ٢ \\ ٣ \end{pmatrix} \qquad \textbf{د} = \begin{pmatrix} ١ & ٠ & ٥ & ٢ & ٣- \end{pmatrix}$$

الحل :

ملاحظات :

(١) عدد عناصر المصفوفة = عدد الصفوف × عدد الأعمـــدة . فـــإذا كانت لمصفوفة م صفاً و ن عموداً فإن عدد عناصر المصفوفة = م × ن عنصراً .

(٢) المصفوفة هي مجرد طريقة لعرض البيانات في تشكيل مستطيل يحتوي على صفوف وأعمدة .
لاحظ أن التشكيلات التالية ليست مصفوفات لأنها ليست تشكيلات مستطيلة .

$$\begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ٣ & \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} ٤ & \\ ٦ & ٥ \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} & ١١ & \\ ٨ & ٧ & ١٠ \\ & ٩ & \end{pmatrix}$$

تمرين (٦ – ١)

(١) اكتب أبعاد كل من المصفوفات التالية :

أ = $\begin{pmatrix} -١ & ٥ & ٢ \\ ١ & ٢ & ٣ \\ ٦ & ٠ & ٤ \end{pmatrix}$ **ب** = $\begin{pmatrix} ٣ & ٧ & ٤ & ٢ \\ -٢ & ٩ & ٠ & ١ \end{pmatrix}$

جـ = $\begin{pmatrix} ٢ \\ ١ \\ ٠ \\ ٣ \end{pmatrix}$ **د** = $\begin{pmatrix} ٠ & ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ & ٠ \end{pmatrix}$

هـ = $\begin{pmatrix} -٤ & ٧ & ٢ & ١ \end{pmatrix}$

(٢) إذا كانت أ = $\begin{pmatrix} ٢ & ٥ \\ ١ & -٣ \end{pmatrix}$

ب = $\begin{pmatrix} ٧ & ١ \\ ٤ & ٠ \\ ٣ & -٢ \end{pmatrix}$

(أ) جد أبعاد كل من المصفوفتين أ ، **ب**

(ب) جد العناصر أ$_{١٢}$ ، أ$_{٢١}$ ، أ$_{٢٢}$ ، ب$_{١٣}$ ، ب$_{٢٢}$ ، ب$_{١١}$

(٣) أكتب مصفوفة معاملات المتغيرين س ، ص من المعادلتين

٢ س + ٥ ص = ٣

س − ٢ ص = ٦

(٦ – ٣) تساوي المصفوفات :

يمكن تقديم مفهوم تساوي المصفوفتين من خلال التعريف التالي :

تعريف (٦ – ٢) :

نقول إن المصفوفتين أ ، **ب** متساويتان إذا وفقط إذا تحقق الشرطان التاليان معاً :

(١) إذا كان أ ، **ب** لهما البعد نفسه أي أن عدد صفوف أ يساوي عدد صفوف **ب** ، وعدد أعمدة أ يساوي عدد أعمدة **ب** .

(٢) العناصر المتناظرة متساوية أي أن :

أ$_{هى}$ = ب$_{هى}$ لجميع قيم هـ ، ى الممكنة .

إذا تحقق شرط التساوي نكتب أ = **ب**

والمثال التالي يوضح هذا التعريف .

مثال (١) :

إذا كان

أ= $\begin{pmatrix} ٣- & ١ & ٥ \\ ١ & ٣ & ٢ \end{pmatrix}$ **ب** = $\begin{pmatrix} ٥ & ٢ \\ ٠ & ٣ \\ ٦ & ٢- \end{pmatrix}$

جـ = $\begin{pmatrix} ٥ & ٢ \\ ١ & ٣ \\ ٦ & ٢- \end{pmatrix}$

فإن أ ≠ **ب** لأن بعديهما مختلفان

ب ≠ جـ لأن ب$_{٢٢}$ ≠ جـ$_{٢٢}$

ويستخدم تعريف تساوي المصفوفات في ايجاد بعض المجاهيل في عناصر مصفوفات متساوية .

مثال (٢) :

جد قيمة س إذا كان

$$\begin{pmatrix} \text{س} + ٣ & ٢ \\ -١ & ٥ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٥ & ٢ \\ -١ & ٥ \end{pmatrix}$$

الحل :

بما أن المصفوفتين متساويتان فإن عناصرهما المتناظرة متساوية، وعليه فإن:

$$\text{س} + ٣ = ٥ \quad \Leftarrow \quad \text{س} = ٢$$

مثال (٣) :

جد قيمة س ، ص إذا كان

$$\begin{pmatrix} \text{س}^{٢} & ٦ \\ ٤ & -٣ \\ ٤ & ٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٤ & ٦ \\ ٥ & -٣ \\ ٤ & \text{ص} \end{pmatrix}$$

الحل :

$$\text{س}^{٢} = ٤ \quad \Leftarrow \quad \text{س} = \pm ٢$$

$$\text{ص} = ٢$$

تمرين (٦ – ٢)

جد قيمة كل من س ، ص ، ع إذا كان :

(١) $$\begin{pmatrix} \text{س} & ٣ \\ -٢ & \text{ع} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٤ & ٣ \\ \text{ص} + ١ & ٠ \end{pmatrix}$$

(٢) $$\begin{pmatrix} \text{س}^{٢} - ١ \\ ٥ \\ \text{ص} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٨ \\ \text{ع} + ٢ \\ -١ \end{pmatrix}$$

$$(٣) \qquad \begin{pmatrix} \text{٣س} & ١٠ & ٣ \\ ٤ & ٠ & ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١٥ & \text{٣ع − ٢} & \text{ص} \\ ٤ & ٠ & ١ \end{pmatrix}$$

$$(٤) \qquad \begin{pmatrix} \text{س + ص} & \text{٢ع − ١} \\ \text{س − ص} & ٤ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣ & ٥ \\ ١ & ٤ \end{pmatrix}$$

(٦ – ٤) منقول المصفوفة : (مدور المصفوفة)

إذا كانت ب مصفوفة من الدرجة م × ن فإن منقول المصفوفة ب عبارة عن مصفوفة من الدرجة ن × م صفوفها هي بالترتيب أعمدة المصفوفة ب ويرمز لها بالرمز ب′ .

إذن يكون العنصر $\text{ب}_{\text{هـ و}}$ الواقع في المصفوفة ب عند تقاطع الصف ذي الرقم هـ مع العمود ذي الرقم و يصبح عنصراً في ب′ واقعاً عند تقاطع الصف ذي الرقم و مع العمود ذي الرقم هـ .

لذلك يمكن أن نضع ب′ = $[\text{ب}_{\text{هـ و}}]'$

حيث $\text{ب}'_{\text{هـ و}} = \text{ب}_{\text{و هـ}}$ هـ = ١ ، ٢ ، .. ، ن

و = ١ ، ٢ ، .. ، م

مثال :

إذا كان

$$\text{أ} = \begin{pmatrix} ٤ & ٣ & ٢ \\ ٩- & ٦ & ١ \end{pmatrix}$$

$$\text{فإن أ}' = \begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ٦ & ٣ \\ ٩- & ٤ \end{pmatrix}$$

حيث أ من الدرجة ٢ × ٣ ، بينما أ′ من الدرجة ٣ × ٢

لاحظ أن أ ≠ أ´

مثال :

جد س´ إذا كان **س** =
$$\begin{pmatrix} -٧ & ٣ & ١ \\ ٠ & -١ & ٤ \\ ٥ & ٦ & ١٣ \end{pmatrix}$$

الحل: **س**´
$$\begin{pmatrix} ١٣ & ٤ & ١ \\ ٦ & -١ & ٣ \\ ٥ & ٠ & -٧ \end{pmatrix}$$

لاحظ أن س مربعة كذلك **س**´ ومن درجة واحدة

مثال :

إذا كان **أ** =
$$\begin{pmatrix} ٣ & -١٠ & ٢ \\ ١ & -٤ & -١٠ \\ ١١ & ١ & ٣ \end{pmatrix}$$

جد أ´

الحل :-

لاحظ في هذه الحالة أن أ = أ´

وفي هذه الحالة نقول أن **أ** مصفوفة متماثلة

تمرين (٦ -٣)

جد المنقول لكل من المصفوفات التالية :

(١)

$$\begin{pmatrix} -٥ & ٢ \\ -١ & ٣ \end{pmatrix}$$

(٢)

$$\begin{pmatrix} ٧ & -١ & ٢ \\ -٥ & ٠ & ٣ \end{pmatrix}$$

(٣)

$$\begin{pmatrix} ١ & -٢ & ٧ \\ -١ & ٥ & ٤ \\ ٥ & ٧ & ٠ \end{pmatrix}$$

(٤)

$$\begin{pmatrix} \text{جاهـ} & \text{جتاهـ} \\ \text{جتاهـ} & -\text{جاهـ} \end{pmatrix}$$

(٦ – ٥) جمع المصفوفات :

لتكن أ ، ب مصفوفتين لهما نفس البُعد ، أى أن لهما نفس العدد من الصفوف ونفس العدد من الأعمدة ولتكن كل منهما مصفوفة م × ن .
أي :

$$\text{أ} = \begin{pmatrix} \text{أ}_{١ن} & \cdots & \text{أ}_{٢١} & \text{أ}_{١١} \\ \text{أ}_{٢ن} & \cdots & \text{أ}_{٢٢} & \text{أ}_{١٢} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \text{أ}_{م ن} & \cdots & \text{أ}_{م٢} & \text{أ}_{م١} \end{pmatrix}$$

$$\textbf{ب} = \begin{pmatrix} ب_{١١} & ب_{٢١} & \cdots & ب_{١ن} \\ ب_{١٢} & ب_{٢٢} & \cdots & ب_{٢ن} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ب_{م١} & ب_{م٢} & \cdots & ب_{م ن} \end{pmatrix}$$

فإن مجموع **أ** ، **ب** ويكتب **أ** + **ب** هي المصفوفة التي نحصل عليها **بجمع العناصر المتناظرة** من المصفوفتين .

$$\textbf{أ} + \textbf{ب} = \begin{pmatrix} أ_{١١} + ب_{١١} & أ_{٢١} + ب_{٢١} & \cdots & أ_{١ن} + ب_{١ن} \\ أ_{١٢} + ب_{١٢} & أ_{٢٢} + ب_{٢٢} & \cdots & أ_{٢ن} + ب_{٢ن} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ أ_{م١} + ب_{م١} & أ_{م٢} + ب_{م٢} & \cdots & أ_{م ن} + ب_{م ن} \end{pmatrix}$$

ينتج مما سبق أنه لكي يكون لمصفوفتين مجموع يجب أن تكونا من بعد واحد ، أى أن يكون لهما عدد الصفوف نفسه وعدد الاعمدة نفسها . وتكون المصفوفة الناتجة من نفس بعد المصفوفتين اللتين أجريت عليهما عملية الجمع . نجد مثلاً :

$$\begin{pmatrix} ٣ & ٠ & -٢ \\ ١ & ٥ & ٤ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ١ & ٣ & -١ \\ ٤ & ٦ & ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٤ & ٣ & -٣ \\ ٥ & ١١ & ٥ \end{pmatrix}$$

مثال :

عين المصفوفة **س** التي تحقق ما يلي :

$$\begin{pmatrix} -١ & ٢ \\ ٤ & -٥ \end{pmatrix} + \textbf{س} = \begin{pmatrix} ٣ & ٤ \\ ٢ & -٦ \end{pmatrix}$$

الحل : تلاحظ أولاً أن المصفوفة س من الشكل

$$\begin{pmatrix} أ_{١١} & أ_{٢١} \\ أ_{١٢} & أ_{٢٢} \end{pmatrix}$$

وأن:

$$-١ + أ_{١١} = ٣ \Leftarrow أ_{١١} = ٤$$

$$٢ + أ_{٢١} = ٤ \Leftarrow أ_{٢١} = ٢$$

$$٤ + أ_{١٢} = ٢ \Leftarrow أ_{١٢} = -٢$$

$$-٥ + أ_{٢٢} = -٦ \Leftarrow أ_{٢٢} = -١$$

$$\therefore س = \begin{pmatrix} -٤ & ٢ \\ -٢ & -١ \end{pmatrix}$$

(٦ – ٦) خواص جمع المصفوفات :

نستنتج بسهولة العلاقة التى عرفنا بها جمع مصفوفتين ما يلي :

(١) جمع المصفوفات إبدالي ، أي
أ + ب = ب + أ لكل مصفوفتين أ ، ب من نفس البعد .

(٢) جمع المصفوفات تجميعي أي:
(أ + ب) + جـ = أ + (ب + جـ) لكل ثلاث مصفوفات أ ، ب ، جـ من نفس البعد .

(٣) لجمع المصفوفات من النوع م × ن عنصر محايد جمعي هو المصفوفة الصفرية من النوع م × ن .

(٤) لكل مصفوفة أ من النوع م × ن نظير جمعي هو المصفوفة – أ من النوع م × ن حيث :

$$- أ = \begin{pmatrix} -أ_{١١} & -أ_{٢١} & \cdots & -أ_{١ن} \\ -أ_{١٢} & -أ_{٢٢} & \cdots & -أ_{٢ن} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -أ_{م١} & -أ_{م٢} & \cdots & -أ_{م ن} \end{pmatrix}$$

مما سبق نستطيع أن نقول إن مجموعة المصفوفات من النوع م × ن مزودة بعملية الجمع + زمرة إبدالية .

(٦ – ٧) طرح المصفوفات :

وكذلك يمكن تعريف طرح المصفوفتين أ ، ب اللتين من النوع م × ن كما يلي :

$$\text{أ} - \text{ب} = \begin{pmatrix} \text{أ}_{١١} - \text{ب}_{١١} & \text{أ}_{٢١} - \text{ب}_{٢١} & \cdots & \text{أ}_{١ن} - \text{ب}_{١ن} \\ \text{أ}_{١٢} - \text{ب}_{١٢} & \text{أ}_{٢٢} - \text{ب}_{٢٢} & \cdots & \text{أ}_{٢ن} - \text{ب}_{١ن} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \text{أ}_{م١} - \text{ب}_{م١} & \text{أ}_{م٢} - \text{ب}_{م٢} & \cdots & \text{أ}_{من} - \text{ب}_{من} \end{pmatrix}$$

أي أن المصفوفة الناتجة هى المصفوفة الناتجة من طرح **عناصر ب من عناصر أ المناظرة لها** مثلاً :

$$\begin{bmatrix} ٢ & -٤ & ٥ \\ ١ & ٣ & -٢ \end{bmatrix} - \begin{pmatrix} ١ & ٠ & ٣ \\ ٢ & -١ & ١ \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & -٤ & ٢ \\ -١ & ٤ & -٣ \end{bmatrix}$$

(٦ – ٨) ضرب المصفوفة بعدد ثابت :

حاصل ضرب العدد ك بالمصفوفة أ ويكتب ك٠أ أو ك أ هو المصفوفة التي نحصل عليها بضرب **كل عنصر من أ بالعدد ك .**

أ ي : $$\text{ك أ} = \begin{pmatrix} \text{ك أ}_{١١} & \text{ك أ}_{٢١} & \cdots & \text{ك أ}_{١ن} \\ \text{ك أ}_{١٢} & \text{ك أ}_{٢٢} & \cdots & \text{ك أ}_{٢ن} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \text{ك أ}_{م١} & \text{ك أ}_{م١} & \cdots & \text{ك أ}_{من} \end{pmatrix}$$

مثلاً :

$$٣ \begin{pmatrix} ٢ & -٤ & ٥ \\ ١ & ٣ & -٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٦ & -١٢ & ١٥ \\ ٣ & ٩ & -٦ \end{pmatrix}$$

(٦ – ٩) خواص ضرب مصفوفة بعدد :

إذا كانت أ ، **ب** مصفوفتين من نفس النوع ، ك ، ل أي عددين حقيقيين، فإن عملية ضرب المصفوفات بعدد تحقق خواص التوزيع التالية :

(١) ك (أ + ب) = ك أ + ك ب

(٢) (ك + ل) أ = ك أ + ل أ

(٣) ك (ل أ) = (ك ل) أ

اعط أمثلة تحقق صحة هذه الخواص .

مثال :

إذا كان

$$أ = \begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ -٥ & ٠ \\ ١ & ٤ \end{pmatrix} \quad ، \quad \mathbf{ب} = \begin{pmatrix} ٧ & -٢ \\ ٣ & ١ \\ ٢ & -٣ \end{pmatrix}$$

جد (١) **٢ أ + ب** (٢) **٣ أ – ٢ ب**

الحل :

(١) $٢ أ + ب = ٢ \begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ -٥ & ٠ \\ ١ & ٤ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٧ & -٢ \\ ٣ & ١ \\ ٢ & -٣ \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} ٤ & ٦ \\ -١٠ & ٠ \\ ٢ & ٨ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٧ & -٢ \\ ٣ & ١ \\ ٢ & -٣ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١١ & ٤ \\ -٧ & ١ \\ ٤ & ٥ \end{pmatrix}$$

(٢) $٣ أ – ٢ \mathbf{ب} = ٣ \begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ -٥ & ٠ \\ ١ & ٤ \end{pmatrix} - ٢ \begin{pmatrix} ٧ & -٢ \\ ٣ & ١ \\ ٢ & -٣ \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} ٦ & ٩ \\ -١٥ & ٠ \\ ٣ & ١٢ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ١٤ & -٤ \\ ٦ & ٢ \\ ٤ & -٦ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -٨ & ١٣ \\ -٢١ & -٢ \\ -١ & ١٨ \end{pmatrix}$$

تمرين (٦ – ٤)

(١) اجمع ما أمكن :

(أ) $$\begin{pmatrix} ٣ & ٢ & ٠ \\ ٢ & ٤ & -١ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٠ & ٢ & ٣ \\ -٤ & ٢ & ١ \end{pmatrix}$$

(ب) $$\begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ٠ & ٣ \\ ١ & ٢ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٠ & ١ & ٢ \\ ١ & ٢ & ٣ \\ -١ & ٣ & ٠ \end{pmatrix}$$

(جـ) $$\begin{pmatrix} ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{جـ} & \text{ب} & \text{أ} \\ \text{و} & \text{هـ} & \text{د} \end{pmatrix}$$

(د) $$\begin{pmatrix} -\text{ب} & -\text{أ} \\ -\text{د} & -\text{جـ} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{ب} & \text{أ} \\ \text{د} & \text{جـ} \end{pmatrix}$$

(٢) اجر العمليات المبينة إن أمكن :

(أ) $$\begin{pmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -٤ & ٣ \\ ٦ & ٢ \end{pmatrix}$$

(ب) $$\begin{pmatrix} ٤ & ٣ & -٢ \\ ١ & ٢ & ٢ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -٢ & ١ & ٤ \\ ٠ & ٣ & ٣ \end{pmatrix}$$

(ج) $\begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ٤ & ٣ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ٢ \\ ٤ \end{pmatrix}$

(د) $\begin{pmatrix} أ & ب & ج \\ د & هـ & و \\ ز & ح & ط \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{pmatrix}$

(هـ) $\begin{pmatrix} ٢\,أ & ٢\,ب \\ ٤\,أ & أ + ب \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -أ & -٢\,ب \\ ب & أ - ب \end{pmatrix}$

(٣) إذا كان

$$أ = \begin{pmatrix} ١ & ٣ & ٢ \\ ٤ & -١ & ٣ \\ ٢ & ١ & ٤ \\ -٢ & -٣ & ٠ \end{pmatrix} ، \mathbf{ب} = \begin{pmatrix} ٤ & -٢ & ١ \\ ٢ & -٣ & ٤ \\ -٣ & ١ & ٢ \\ ٤ & ٤ & -٧ \end{pmatrix}$$

جد العناصر الآتية للمجموع أ + ب

(أ) العنصر الموجود في الصف الثالث والعمود الثاني .

(ب) العنصر الموجود في الصف الرابع والعمود الأول

(ج) العنصر $أ_{١٣} + ب_{١٣}$

(٤) إذا علمت أن

$$أ = \begin{pmatrix} -٢ & -٣ \\ -١ & ٢ \\ ٠ & ٥ \end{pmatrix} ، ب = \begin{pmatrix} ٣ & ١ \\ -٢ & ٢ \\ -٤ & -٢ \end{pmatrix} ، \mathbf{هـ} = \begin{bmatrix} -٢ & -٣ \\ ١ & ٢ \\ ٠ & ٤ \end{bmatrix}$$

فاحسب :

(أ) ٢ أ + **ب**   (ب) أ – ٣ **ب**   (جـ) (أ + **ب**) + **جـ**

(د) (أ – **ب**) + **جـ**   (هـ) أ + (**ب** + **جـ**)

(٥) حل المعادلات المصفوفية الآتية :

(أ) $\text{س} + \begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & -١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{pmatrix}$

(ب) $\text{س} - \begin{pmatrix} ٣ & ٢ \\ ٤ & -٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٤ & ٤ \\ ١ & ٢ \end{pmatrix}$

(جـ) $\begin{pmatrix} ٣ & ٢ \\ ٤ & -١ \end{pmatrix} - \text{س} = \begin{pmatrix} ٤ & ٤ \\ ١ & ٢ \end{pmatrix}$

(د) $\begin{pmatrix} ١ & ٣ & ٢ \end{pmatrix} - \text{س} = \begin{pmatrix} ٢ & ١ \end{pmatrix}$