Filip Jedrzejewski

1 Metoda Elementów Skończonych

1.1 Problem obliczeniowy

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_r} \tag{1}$$

przy czym:

$$\rho = 1 \tag{2}$$

$$\varepsilon_r(x) = \begin{cases} 10 & \text{dla } x \in [0,1] \\ 5 & \text{dla } x \in (1,2] \\ 1 & \text{dla } x \in (2,3] \end{cases} \tag{3}$$

1.2 Warunki brzegowe

Warunek brzegowy Cauchy'ego:

$$\phi'(0) + \phi(0) = 5 \tag{4}$$

Warunek brzegowy Dirichleta:

$$\phi(3) = 2 \tag{5}$$

2 Sformułowanie wariacyjne

Mnożymy równanie (1) przez funkcje testowa v spełniajaca warunek: $v(3) = 0$:

$$\phi'' v = -\frac{\rho}{\varepsilon_r} v \tag{6}$$

Całkujemy obustronnie:

$$\int_0^3 \phi'' v dx = -\int_0^3 \frac{\rho}{\varepsilon_r} v dx \tag{7}$$

Całkujac lewa strone równania przez cześci otrzymujemy:

$$\phi'(3) \cdot v(3) - \phi'(0) \cdot v(0) - \int_0^3 \phi' v' dx = -\int_0^3 \frac{\rho}{\varepsilon_r} v dx \tag{8}$$

Z własności funkcji $v(x)$ wiemy, że $v(3) = 0$, zatem:

$$\phi'(0) \cdot v(0) + \int_0^3 \phi' v' dx = \int_0^3 \frac{\rho}{\varepsilon_r} v dx \tag{9}$$

Z (4) mamy:

$$\phi'(0) = 5 - \phi(0) \tag{10}$$

Łaczac (9) i (10) otrzymujemy:

$$5 \cdot v(0) - \phi(0) \cdot v(0) + \int_0^3 \phi' v' dx = \int_0^3 \frac{\rho}{\varepsilon_r} v dx \tag{11}$$

$$\int_0^3 \phi' v' dx - \phi(0) \cdot v(0) = \int_0^3 \frac{\rho}{\varepsilon_r} v dx - 5 \cdot v(0) \tag{12}$$

Równanie (12) można zapisać w nastepujacy sposób:

$$B(\phi, v) = L(v) \tag{13}$$

przy czym:

$$B(\phi, v) = \int_0^3 \phi' v' dx - \phi(0) \cdot v(0) \tag{14}$$

$$L(v) = \int_0^3 \frac{\rho}{\varepsilon_r} v dx - 5 \cdot v(0) \tag{15}$$

Zapiszmy:

$$\phi = w + \Phi \tag{16}$$

Funkcja $w(x)$ spełnia warunek $w(3) = 0$, zatem $\Phi(3) = 2$. Przyjmijmy zatem, że:

$$\Phi(x) = 2 \tag{17}$$

Łaczac zależności (13) i (17) otrzymujemy:

$$B(w + \Phi, v) = L(v) \tag{18}$$

Korzystajac z liniowości B wzgledem pierwszego argumentu, dostajemy:

$$B(w, v) + B(\Phi, v) = L(v) \tag{19}$$

Zatem ostatecznie:

$$B(w, v) = L(v) - B(\Phi, v) \tag{20}$$