

Lab 8

Filip Jędrzejewski

May 9, 2023

Zadanie 1

Opis problemu

Celem zadania było znalezienie pierwiastków równania

$$f(x) = x^2 - 3x + 2 = 0 \quad (1)$$

Korzystając z następujących funkcji definiujących równoważny schemat iteracyjny:

$$g_1(x) = \frac{x^2 + 2}{3} \quad (2)$$

$$g_2(x) = \sqrt{3x - 2} \quad (3)$$

$$g_3(x) = 3 - \frac{2}{x} \quad (4)$$

$$g_4(x) = \frac{x^2 - 2}{2x - 3} \quad (5)$$

Analiza teoretyczna

Dla każdego schematu iteracyjnego odpowiadającego funkcjom $g_i(x)$ przeanalizowano zbieżność i rząd zbieżności dla pierwiastka $x_0 = 2$ badając wartość $g'_i(x_0)$. Wyniki zapisano w tabeli:

g_i	$g'_i(2)$
g_1	$\frac{4}{3} \approx 1,33$
g_2	$\frac{3}{4} = 0,75$
g_3	$\frac{1}{2} = 0,50$
g_4	0

Implementacja schematu

Każdy schemat wykonano przez 10 iteracji. Zauważono, że schematy oparte na funkcjach g_1 oraz g_4 zbiegają do 1, która jest drugim pierwiastkiem równania (1).

Na podstawie wzoru:

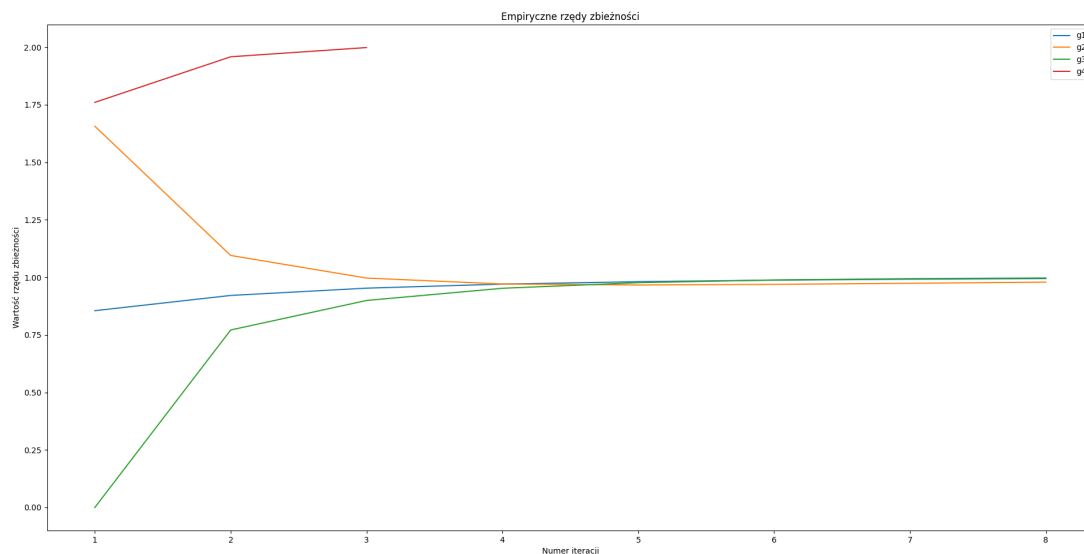
$$r = \frac{\ln \frac{\varepsilon_k}{\varepsilon_{k+1}}}{\ln \frac{\varepsilon_{k-1}}{\varepsilon_k}} \quad (6)$$

Wyznaczano empiryczne rzędy zbieżności dla każdej z metod iteracyjnych opartych na funkcjach $g_i(x)$. Wartość ε_k wyznaczano korzystając z zależności:

$$\varepsilon_k = |x_k - x_*| \quad (7)$$

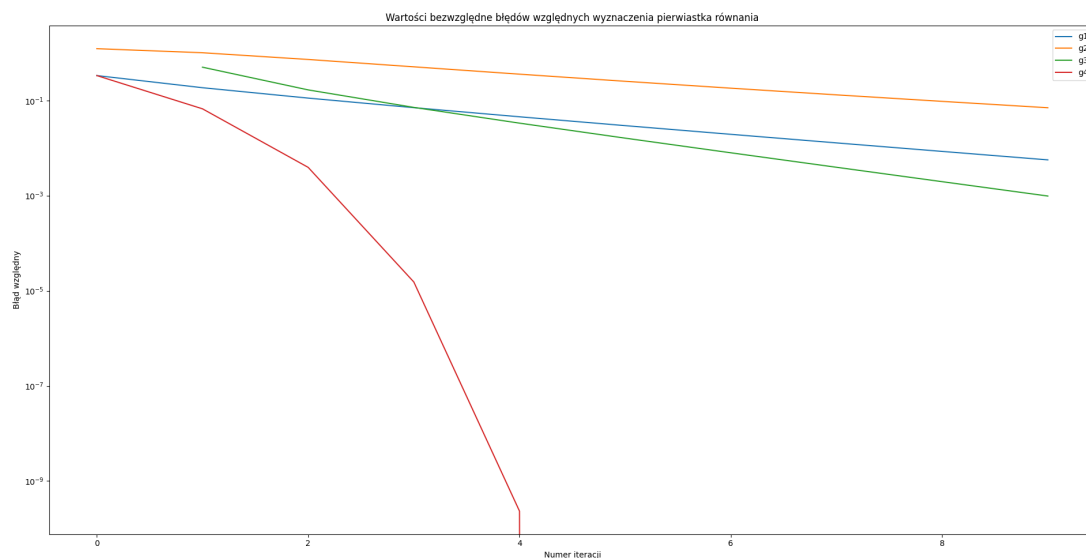
przy czym: x_k - przybliżenie pierwiastka równania w k-tej iteracji, x_* - dokładna wartość pierwiastka równania (dla g_1 i g_4 $x_* = 1$, natomiast dla g_2 i g_3 $x_* = 2$).

Na podstawie wykonanych obliczeń stworzono wykres zależności rzędu zbieżności od liczby iteracji dla każdej z metod.



Błędy względne

Na podstawie obliczonych wartości stworzono wspólny wykres wartości bezwzględnych błędów względnych dla każdej z metod iteracyjnych w zależności od liczby iteracji. Na osi y zastosowano skalę logarytmiczną.



Zadanie 2

Opis problemu

Celem zadania było napisanie schematów iteracji według metody Newtona dla każdego z następujących równań nieliniowych:

$$x^3 - 2x - 5 = 0 \quad (8)$$

$$e^{-x} = x \quad (9)$$

$$x \sin x = 1 \quad (10)$$

Wyznaczanie schematów

W celu wykonania zadania ustalono wzory funkcji f_i odpowiadających odpowiednim danym równaniom:

$$f_1(x) = x^3 - 2x - 5 \quad (11)$$

$$f_2(x) = e^{-x} - x \quad (12)$$

$$f_3(x) = x \sin x - 1 \quad (13)$$

W kolejnym kroku wyprowadzono wzory na pierwsze pochodne powyższych funkcji:

$$f'_1(x) = 3x^2 - 2 \quad (14)$$

$$f'_2(x) = -e^{-x} - 1 \quad (15)$$

$$f'_3(x) = \sin x + x \cos x \quad (16)$$

Korzystając ze wzoru:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad (17)$$

Wyznaczono funkcje $g_i(x_k)$ odpowiadające funkcjom $f_i(x)$ definiujące szukane schematy iteracyjne według metody Newtona:

$$g_1(x) = x - \frac{x^3 - 2x - 5}{3x^2 - 2} = \frac{2x^3 + 5}{3x^2 - 2} \quad (18)$$

$$g_2(x) = x - \frac{e^{-x} - x}{-e^{-x} - 1} = \frac{(x + 1) \cdot e^{-x}}{e^{-x} + 1} \quad (19)$$

$$g_3(x) = x - \frac{x \sin x - 1}{\sin x + x \cos x} = \frac{x^2 \cdot \cos x + 1}{x \cos x + \sin x} \quad (20)$$

Dokładność

Wiedząc, że x_0 jest przybliżeniem pierwiastka z dokładnością 4 bitów, aby osiągnąć 24 bitową dokładność należy wykonać 2 iteracje. Wynika to z tego, że metoda Newtona rząd zbieżności kwadratowy, co oznacza, że z każdą iteracją, liczba ustalanych bitów wzrasta dwukrotnie. Oznacza to, że skoro początkowo x_0 miało dokładność 4 bitów, to po pierwszej iteracji miało dokładność 12 bitów (+8 bitów), a po drugiej już 28 (+16 bitów). Analogicznie aby mieć dokładność 53 bitów wystarczy wykonać jeszcze jedną iterację (łącznie 3), ponieważ po niej dokładność będzie wynosiła 60 bitów (+32 bity).

Zadanie 3

Opis problemu

Celem zadania było napisanie schematu iteracji według metody Newtona dla następującego układu równań nieliniowych:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 - y = 0 \end{cases} \quad (21)$$

Wyprowadzenie schematu

Z drugiego równania mamy:

$$x^2 = y \quad (22)$$

Zatem podstawiając do pierwszego równania mamy:

$$y^2 + y - 1 = 0 \quad (23)$$

Zapiszmy:

$$f(y) = y^2 + y - 1 \quad (24)$$

Zatem:

$$f'(y) = 2y + 1 \quad (25)$$

Zatem korzystając z zależności (17), dostajemy;

$$g(x) = x - \frac{x^2 + x - 1}{2x + 1} = \frac{x^2 + 1}{2x + 1} \quad (26)$$

Na tej podstawie napisano program w Pythonie wyznaczający miejsce zerowe funkcji $f(y)$. Aby otrzymać rozwiązanie na x , należy spierwiastkować otrzymane y_0 (zgodnie z równaniem (22)). Otrzymane wyniki w zależności od liczby iteracji:

liczba iteracji	x	y
0	0.0	0.0
1	± 1.0	1.0
2	± 0.816496580927726	0.6666666666666666
3	± 0.7867957924694432	0.6190476190476191
4	± 0.7861516697315358	0.6180344478216818
5	± 0.7861513777574832	0.6180339887499892
6	± 0.7861513777574233	0.6180339887498949
7	± 0.7861513777574233	0.6180339887498948
8	± 0.7861513777574233	0.6180339887498948
9	± 0.7861513777574233	0.6180339887498948

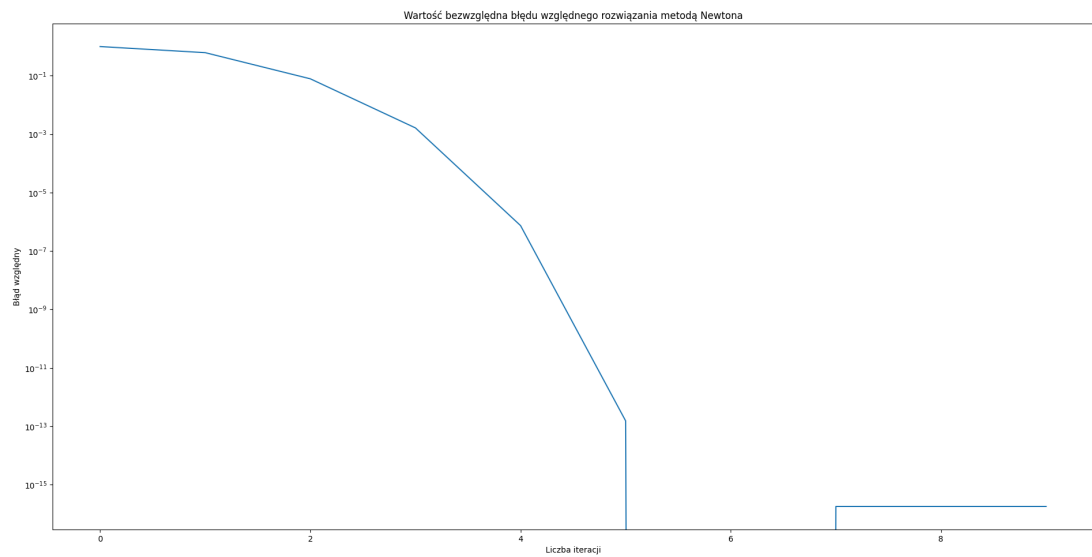
Wartości dokładne rozwiązania tego równania wynoszą:

$$x = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}} \approx \pm 0,786151377 \quad (27)$$

$$y = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} \approx 0,6118033988 \quad (28)$$

Wyniki z tabeli pokrywają się z wynikami otrzymanymi przy użyciu kalkulatora, co pozwala przypuszczać, że obliczenia zostały wykonane prawidłowo.

Na podstawie obliczonych danych stworzono wykres błędu względnego y znalezionej metodą Newtona w zależności od liczby iteracji. Na osi y została zastosowana skala logarytmiczna.



Na wykresie można zauważyć moment, w którym błąd numeryczny przeważa nad błędem metody (około 7 iteracji).