Lab4 - Filip Jedrzejewski

Opis problemu

Celem zadania było wyznaczenie wielomianów interpolujacych nastepujace funkcje:

$$f_1(x) = \frac{1}{1+25x^2} \qquad x \in [-1,1] \tag{1}$$

$$f_2(x) = e^{\cos x} \qquad x \in [0, 2\pi] \tag{2}$$

używajac:

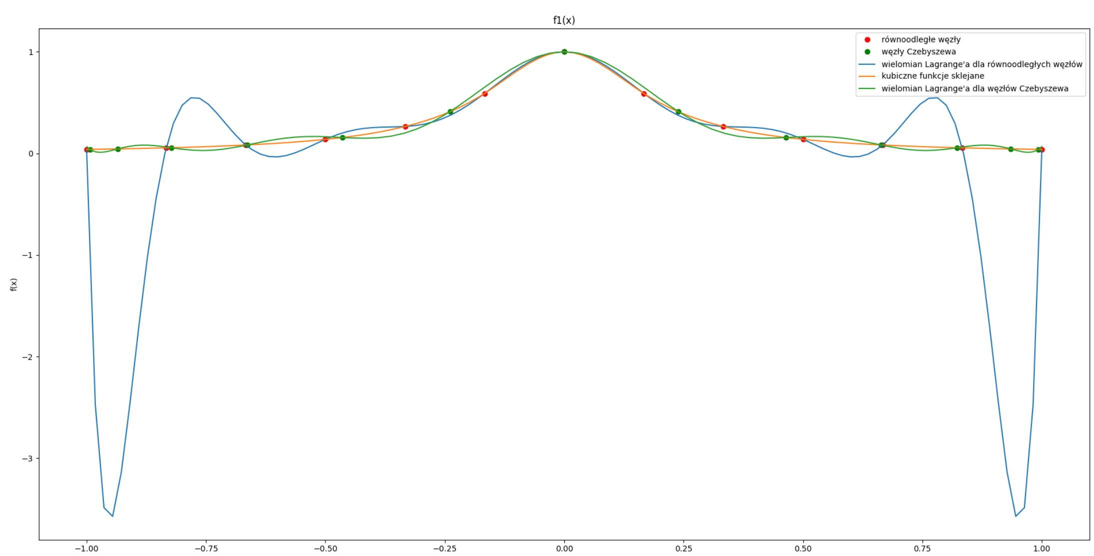
- Wielomianów Lagrange'a z równoodległymi wezłami
- Kubicznych funkcji sklejanych z równoodległymi wezłami
- Wielomianów Lagrange'a z wezłami Czebyszewa

$$x_j = cos(\theta_j) \quad , \quad \theta_j = \frac{2j+1}{2(n+1)}\pi \tag{3}$$

przy czym $j = 0, 1, 2, ..., n$

Analiza funkcji $f_1(x)$

Dla funkcji $f_1(x)$ z $n = 12$ wezłami interpolacji przedstawiono na wspólnym wykresie wyznaczone wielomiany interpolacyjne, funkcje sklejana oraz wezły interpolacji.



Na wykresie można zauważyć, że wielomian Lagrange'a korzystajacy z równoodległych wezłów znaczaco różni sie od wielomianu Lagrange'a korzystajacego z wezłów Czebyszewa albo funkcji sklejanej, szczególnie na brzegach przedziału.

Wykresy błedów

Wykonano interpolacje funkcji $f_1(x)$ i $f_2(x)$ dla $n = 4, 5, ..., 70$ wezłów interpolacji, używajac każdej z powyższych metod przybliżania funkcji. Dla 500 losowo wybranych argumentów z dziedzin $f_1(x)$ oraz $f_2(x)$ wyznaczano wartości tych funkcji oraz ich przybliżeń. Na podstawie tych danych tworzono 500-wymiarowy wektor błedów, którego współrzedne były wyznaczane w nastepujacy sposób:

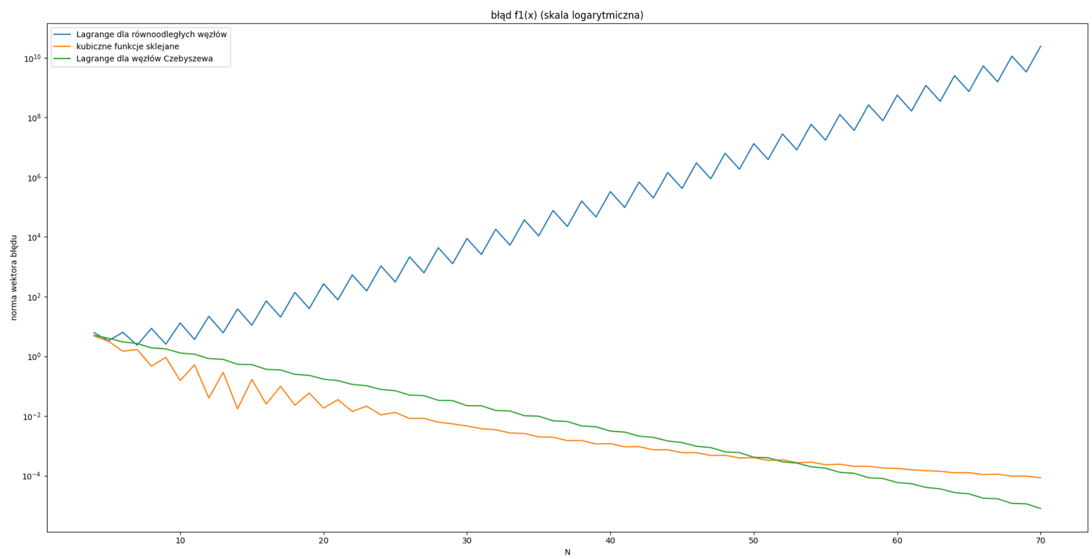
$$a_i = f(x_i) - f_p(x_i) \tag{4}$$

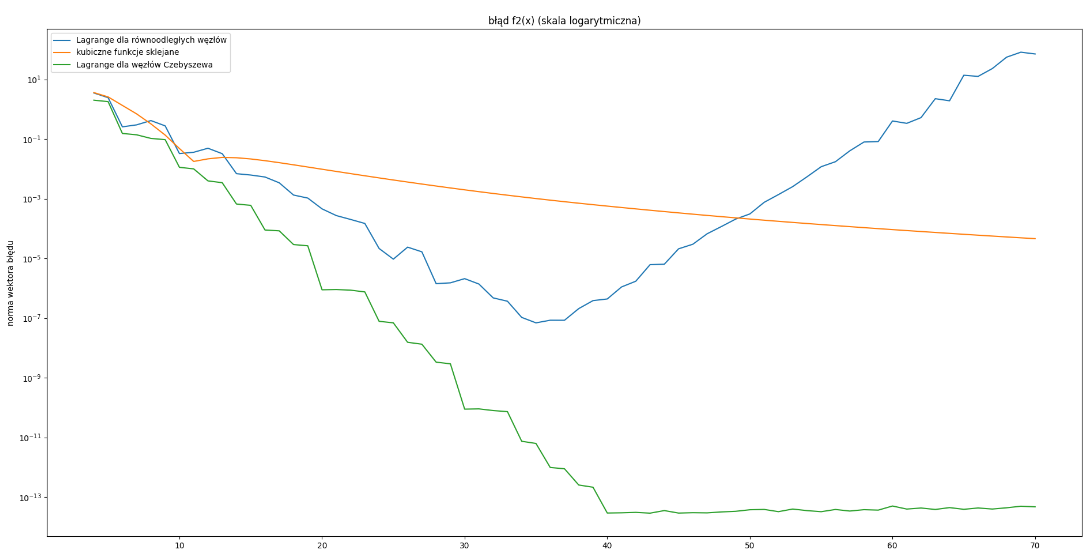
przy czym: a_i - i-ta współrzedna wektora błedów, f - przybliżana funkcja (f_1 lub f_2), f_p - wyznaczone przybliżenie funkcji f, x_i - wylosowana wartość z dziedziny funkcji f.

Jako całościowy bład danego przybliżenia wybrano norme wektora błedu. Na podstawie tych danych wykonano wykresy błedu danego przybliżenia w zależności od liczby wezłów dla obu funkcji. Oś pionowa wykresów przedstawiono w skali logarytmicznej ze wzgledu na duże rozbieżności wartości błedów.

Na wykresie dotyczacym funkcji f_1 można zauważyć, że wartość błedu w metodzie Lagrange'a dla równoodległych wezłów rośnie wraz ze wzrostem liczby wezłów. Jest to przykład efektu Rungego. Najbardziej dokładna metoda do przybliżania funkcji dla $n < 50$ sa kubiczne funkcje sklejane, natomiast dla $n > 50$ najlepsza metoda jest interpolacja funkcji metoda Lagrange'a korzystajaca z wezłów Czebyszewa.

Na wykresie funkcji f_2 widzimy, że bezkonkurencyjnie najlepsza metoda przybliżania funkcji bez wzgledu na liczbe wezłów n jest interpolacja Lagrange'a z wezłami Czebyszewa. Dla $n < 50$ najgorsza metoda sa kubiczne funkcje sklejane, jednak ich skuteczność wraz ze wzrostem liczby wezłów rośnie (bład maleje), natomiast poczatkowo malejacy bład interpolacji Lagrange'a z równoodległymi wezłami, dla $n > 35$ zaczyna rosnać (efekt Rungego) i dla $n > 50$ staje sie najmniej dokładna metoda przybliżania funkcji, stajac sie mniej dokładna niż kubiczne funkcje sklejane.


błąd f1(x) (skala logarytmiczna)
Lagrange dla równoodległych węzłów
kubiczne funkcje sklejane
Lagrange dla węzłów Czebyszewa
norma wektora błędu
N


błąd f2(x) (skala logarytmiczna)
Lagrange dla równoodległych węzłów
kubiczne funkcje sklejane
Lagrange dla węzłów Czebyszewa
norma wektora błędu
N