

Lab 5

Filip Jedrzejewski

April 4, 2023

Zadanie 1

Opis problemu

Celem zadania było wykonanie aproksymacji średniokwadratowej punktowej populacji Stanów Zjednoczonych wielomianami stopnia m ($0 \leq m \leq 6$) dla danych:

Rok	Populacja
1900	76 212 168
1910	92 228 496
1920	106 021 537
1930	123 202 624
1940	132 164 569
1950	151 325 798
1960	179 323 175
1970	203 302 031
1980	226 542 199

Ekstrapolacja do roku 1990

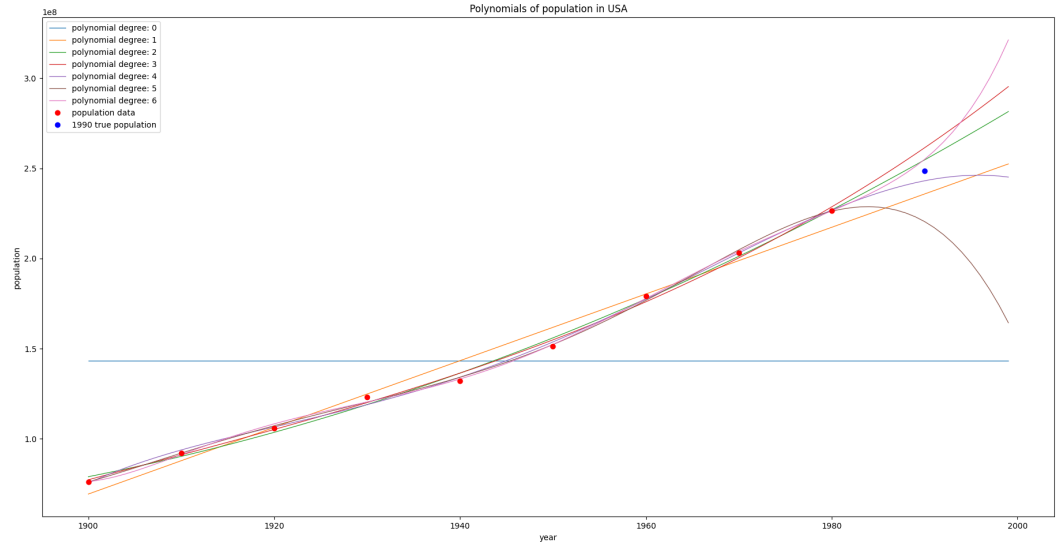
Wielomian wyznaczano za pomocą funkcji `numpy.polynomial.polynomial.Polynomial.fit()`. Dla każdego wielomianu dokonano jego ekstrapolacji do roku 1990 i porównywano jego wartość z wartością prawdziwą wynoszącą 248709873. Wyniki błędów względnych dla każdego wielomianu przedstawiono w tabeli:

Stopień wielomianu	Błąd względny
0	0,4235
1	0,0519
2	0,0241
3	0,0512
4	0,0225
5	0,1137
6	0,0255

Najmniejszym błędem obarczony był wielomian stopnia 4.

Wykres

Aproksymowane wielomiany, dane wejściowe i prawdziwa wartość dla 1990 roku zostały przedstawione na wykresie:



Kryterium informacyjne Akaikego

W celu znalezienia najlepszego stopnia wielomianu aproksymującego dane, można się posłużyć kryterium informacyjnym Akaikego:

$$AIC = 2k - k \ln \left(\frac{\sum_{i=1}^n [y_i - \hat{y}(x_i)]^2}{k} \right) \quad (1)$$

gdzie: $k = m + 1$, y_i - prawdziwa wartość funkcji dla argumentu x_i , $\hat{y}(x_i)$ - wartość funkcji przewidywana przez model (wartość wielomianu dla argumentu x_i). Jeżeli rozmiar próbki (n) jest niewielki, czyli $\frac{n}{k} < 40$, to należy dodać do wzoru (1) składnik korygujący:

$$AIC = AIC + \frac{2k(k+1)}{n-k-1} \quad (2)$$

Im wartość AIC jest mniejsza, tym model jest lepszy. Obliczone wartości AIC dla wyznaczonych wielomianów zapisano w tabeli:

Stopień wielomianu	AIC
0	−35.01
1	−59.91
2	−82.05
3	−103.86
4	−117.90
5	−119.94
6	−74.30

Według kryterium informacyjnego Akaikego najlepszym wielomianem aproksymującym dane jest wielomian stopnia 5.

Wnioski

Stopień wielomianu, który najlepiej aproksymuje dane, według kryterium informacyjnego Akaikego jest różny od stopnia wielomianu, dla którego błąd względny ekstrapolacji do roku 1990 jest najmniejszy. Ta różnica może wynikać z tego, że AIC analizuje przebieg funkcji na całym przedziale danych, natomiast błąd względny był wyznaczany jedynie dla jednego punktu poza przedziałem danych, co czyni go dużo mniej dokładnym wyznacznikiem jakości aproksymacji.

Zadanie 2

Opis problemu

Celem zadania było wykonanie aproksymacji średniokwadratowej ciągłej funkcji $f(x)$ wielomianem drugiego stopnia używając wielomianów Czebyszewa.

$$f(x) = \sqrt{x} \quad , \quad x \in [0, 2] \quad (3)$$

Podejście do problemu

Do wykonania zadania użyto następująca funkcje wagi:

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad , \quad x \in [-1, 1] \quad (4)$$

Dla wielomianu drugiego stopnia należy użyć pierwszym trzech wielomianów Czebyszewa, danych wzorami:

$$T_0(x) = 1 \quad (5)$$

$$T_1(x) = x \quad (6)$$

$$T_2(x) = 2x^2 - 1 \quad (7)$$

W celu wykonania aproksymacji należało przesunąć funkcję $f(x)$ z przedziału $[0, 2]$ na przedział $[-1, 1]$, w tym celu przesunięto ją o wektor $v = [-1, 0]$. Otrzymano:

$$f_p(x) = \sqrt{x+1} \quad (8)$$

Wielomian aproksymujący wyznaczono według wzoru:

$$p(x) = \sum_{k=0}^2 c_k T_k \quad (9)$$

gdzie: T_k - k -ty wielomian Czebyszewa, c_k - współczynnik danego wielomianu Czebyszewa dany wzorem:

$$c_k = \frac{\int_{-1}^1 w(x) f_p(x) T_k(x) dx}{\int_{-1}^1 w(x) T_k^2(x) dx} \quad (10)$$

gdzie $w(x)$ to funkcja wag ze wzoru (4).

Wyniki

Ze wzoru (10) otrzymano następujące współczynniki:

$$c_0 = 0.9126$$

$$c_1 = 0.5705$$

$$c_2 = -0.3187$$

Po stworzeniu wielomianu aproksymującego funkcję $f_p(x)$, przesunieto go o wektor $-v = [1, 0]$, aby przybliżał funkcję $f(x)$.

Wykonano wspólny wykres wielomianu aproksymującego oraz funkcji $f(x)$:

