Lab 8

Filip Jędrzejewski

May 9, 2023

Zadanie 1

Opis problemu

Celem zadania było znalezienie pierwiastków równania

$$f(x) = x^2 - 3x + 2 = 0 \tag{1}$$

Korzystając z następujących funkcji definiujących równoważny schemat iteracyjny:

$$g_1(x) = \frac{x^2+2}{3} \tag{2}$$

$$g_2(x) = \sqrt{3x-2} \tag{3}$$

$$g_3(x) = 3 - \frac{2}{x} \tag{4}$$

$$g_4(x) = \frac{x^2-2}{2x-3} \tag{5}$$

Analiza teoretyczna

Dla każdego schematu iteracyjnego odpowiadającego funkcjom $g_i(x)$ przeanalizowano zbieżność i rząd zbieżności dla pierwiastka $x_0 = 2$ badając wartość $g_i'(x_0)$. Wyniki zapisano w tabeli:

g_i	$g_i'(2)$
g_1	$\frac{4}{3} \approx 1,33$
g_2	$\frac{3}{4} = 0,75$
g_3	$\frac{1}{2} = 0,50$
g_4	0

Implementacja schematu

Każdy schemat wykonano przez 10 iteracji. Zauważono, że schematy oparte na funkcjach g_1 oraz g_4 zbiegają do 1, która jest drugim pierwiastkiem równania (1).

Na podstawie wzoru:

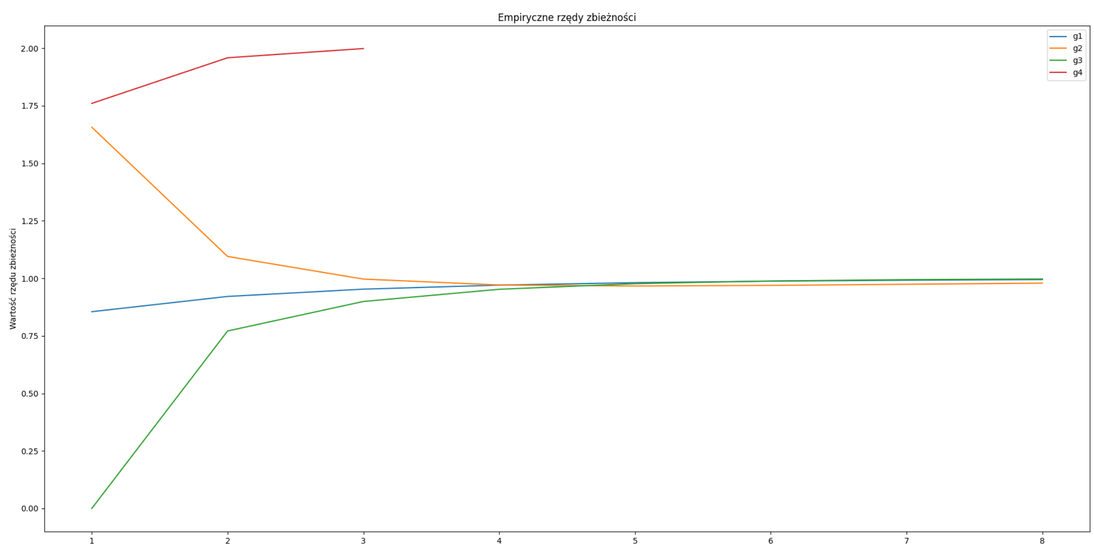
$$r = \frac{\ln \frac{\varepsilon_k}{\varepsilon_{k+1}}}{\ln \frac{\varepsilon_{k-1}}{\varepsilon_k}} \tag{6}$$

Wyznaczano empiryczne rzędy zbieżności dla każdej z metod iteracyjnych opartych na funkcjach $g_i(x)$. Wartość ε_k wyznaczano korzystając z zależności:

$$\varepsilon_k = |x_k - x_*| \tag{7}$$

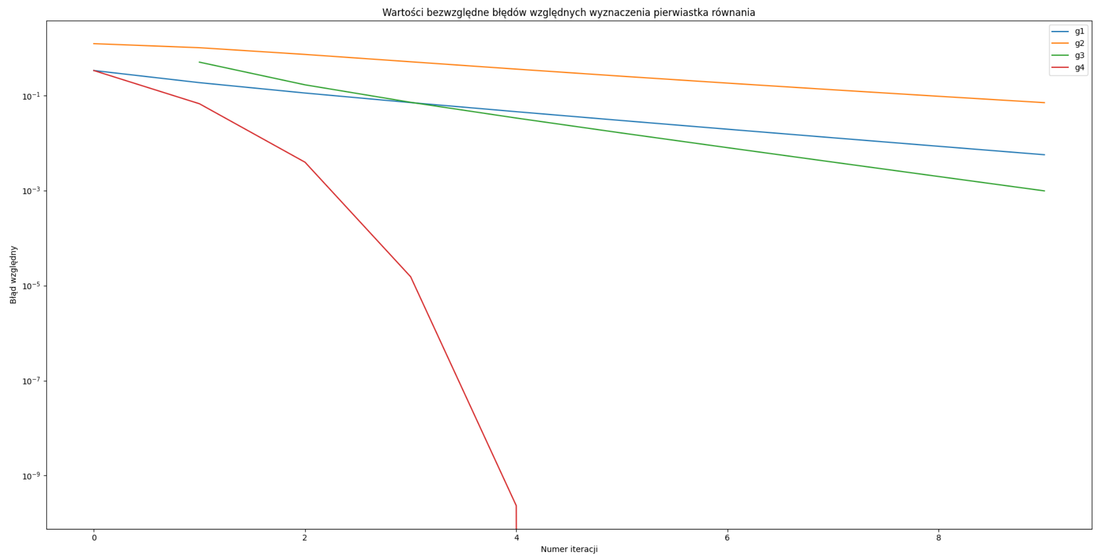
przy czym: x_k - przybliżenie pierwiastka równania w k-tej iteracji, x_* - dokładna wartość pierwiastka równania (dla g_1 i g_4 $x_* = 1$, natomiast dla g_2 i g_3 $x_* = 2$).

Na podstawie wykonanych obliczeń stworzono wykres zależności rzędu zbieżności od liczby iteracji dla każdej z metod.



Błędy względne

Na podstawie obliczonych wartości stworzono wspólny wykres wartości bezwzględnych błędów względnych dla każdej z metod iteracyjnych w zależności od liczby iteracji. Na osi y zastosowano skalę logarytmiczną.



Zadanie 2

Opis problemu

Celem zadania było napisanie schematów iteracji według metody Newtona dla każdego z następujących równań nieliniowych:

$$x^3 - 2x - 5 = 0 \tag{8}$$

$$e^{-x} = x \tag{9}$$

$$x \sin x = 1 \tag{10}$$

Wyznaczanie schematów

W celu wykonania zadania ustalono wzory funkcji f_i odpowiadających odpowiednim danym równaniom:

$$f_1(x) = x^3 - 2x - 5 \tag{11}$$

$$f_2(x) = e^{-x} - x \tag{12}$$

$$f_3(x) = x \sin x - 1 \tag{13}$$

W kolejnym kroku wyprowadzono wzory na pierwsze pochodne powyższych funkcji:

$$f_1'(x) = 3x^2 - 2 \tag{14}$$

$$f_2'(x) = -e^{-x} - 1 \tag{15}$$

$$f_3'(x) = \sin x + x \cos x \tag{16}$$

Korzystając ze wzoru:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \tag{17}$$

Wyznaczono funkcje $g_i(x_k)$ odpowiadające funkcjom $f_i(x)$ definiujące szukane schematy iteracyjne według metody Newtona:

$$g_1(x) = x - \frac{x^3 - 2x - 5}{3x^2 - 2} = \frac{2x^3 + 5}{3x^2 - 2} \tag{18}$$

$$g_2(x) = x - \frac{e^{-x} - x}{-e^{-x} - 1} = \frac{(x+1) \cdot e^{-x}}{e^{-x} + 1} \tag{19}$$

$$g_3(x) = x - \frac{x \sin x - 1}{\sin x + x \cos x} = \frac{x^2 \cdot \cos x + 1}{x \cos x + \sin x} \tag{20}$$

Dokładność

Wiedząc, że x_0 jest przybliżeniem pierwiastka z dokładnością 4 bitów, aby osiągnąć 24 bitową dokładność należy wykonać 2 iteracje. Wynika to z tego, że metoda Newtona ma kwadratowy rząd zbieżności, co oznacza, że z każdą iteracją, liczba ustalanych bitów wzrasta dwukrotnie. Oznacza to, że skoro początkowo x_0 miało dokładność 4 bitów, to po pierwszej iteracji miało dokładność 12 bitów (+8 bitów), a po drugiej już 28 (+16 bitów). Analogicznie, aby mieć dokładność 53 bitów wystarczy wykonać jeszcze jedną iterację (łącznie 3), ponieważ po niej dokładność będzie wynosiła 60 bitów (+32 bity).

Zadanie 3

Opis problemu

Celem zadania było napisanie schematu iteracji według metody Newtona dla następującego układu równań nieliniowych:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 - \ \ y = 0 \end{cases} \tag{21}$$

Wyprowadzenie schematu

Z drugiego równania mamy:

$$x^2 = y \tag{22}$$

Zatem podstawiając do pierwszego równania mamy:

$$y^2 + y - 1 = 0 \tag{23}$$

Zapiszmy:

$$f(y) = y^2 + y - 1 \tag{24}$$

Zatem:

$$f'(y) = 2y + 1 \tag{25}$$

Zatem korzystając z zależności (17), dostajemy;

$$g(x) = x - \frac{x^2 + x - 1}{2x + 1} = \frac{x^2 + 1}{2x + 1} \tag{26}$$

Na tej podstawie napisano program w Pythonie wyznaczający miejsce zerowe funcji $f(y)$. Aby otrzymać wartość x, należy spierwiastkować otrzymane y_0 (zgodnie z równaniem (22)). Otrzymane wyniki w zależności od liczby iteracji zapisano w tabeli:

liczba iteracji	x	y
0	0.0	0.0
1	±1.0	1.0
2	±0.816496580927726	0.6666666666666666
3	±0.7867957924694432	0.6190476190476191
4	±0.7861516697315358	0.6180344478216818
5	±0.7861513777574832	0.6180339887499892
6	±0.7861513777574233	0.6180339887498949
7	±0.7861513777574233	0.6180339887498948
8	±0.7861513777574233	0.6180339887498948
9	±0.7861513777574233	0.6180339887498948

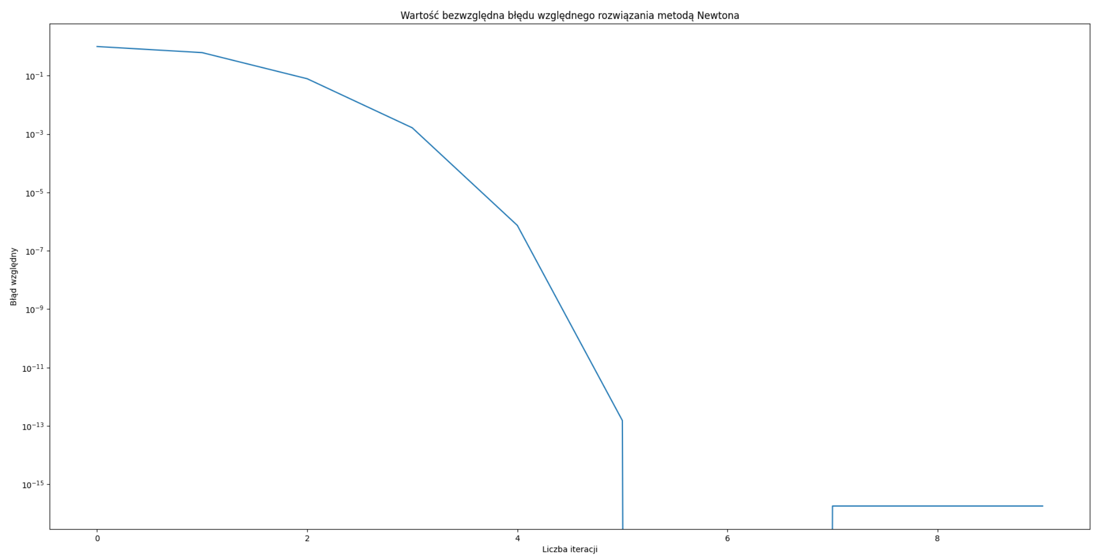
Wartości dokładne rozwiązania tego równania wynoszą:

$$x = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}} \approx \pm 0,786151377 \tag{27}$$

$$y = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} \approx 0,618033988 \tag{28}$$

Wyniki z tabeli pokrywają się z wynikami otrzymanymi przy użyciu kalkulatora, co pozwala przypuszczać, że obliczania zostały wykonane prawidłowo.

Na podstawie obliczonych danych stworzono wykres błędu względnego y znalezionego metodą Newtona, w zależności od liczby iteracji. Na osi y została zastosowana skala logarytmiczna.



Na wykresie można zauważyć moment, w którym błąd numeryczny przeważa nad błędem metody (około 7 iteracji).