Lab3 - Filip Jedrzejewski

Opis problemu

Populacja Stanow zjednoczonych na przestrzeni lat przedstawiala sie nastepujaco:

Rok	Populacja
1900	76 212 168
1910	92 228 496
1920	106 021 537
1930	123 202 624
1940	132 164 569
1950	151 325 798
1960	179 323 175
1970	203 302 031
1980	226 542 199

W celu wyznaczenia wielomianu, ktory interpoluje powyzsze dziewiec punktow rozwazono nastepujace zbiory funkcji bazowych $\phi(t)$, $j = 1, 2, ..., 9$:

$$\phi_j(t) = t^{j-1} \tag{1}$$

$$\phi_j(t) = (t - 1900)^{j-1} \tag{2}$$

$$\phi_j(t) = (t - 1940)^{j-1} \tag{3}$$

$$\phi_j(t) = \left(\frac{t - 1940}{40}\right)^{j-1} \tag{4}$$

Wyznaczanie wielomianu za pomoca macierzy

Dla kazdego z czterech zbiorow funkcji bazowych utworzono macierz Vandermonde'a, a nastepnie korzystajac z funkcji `numpy.linalg.cond` obliczono wspolczynniki uwarunkowania kazdej z nich. Wyniki przedstawiono w tabeli:

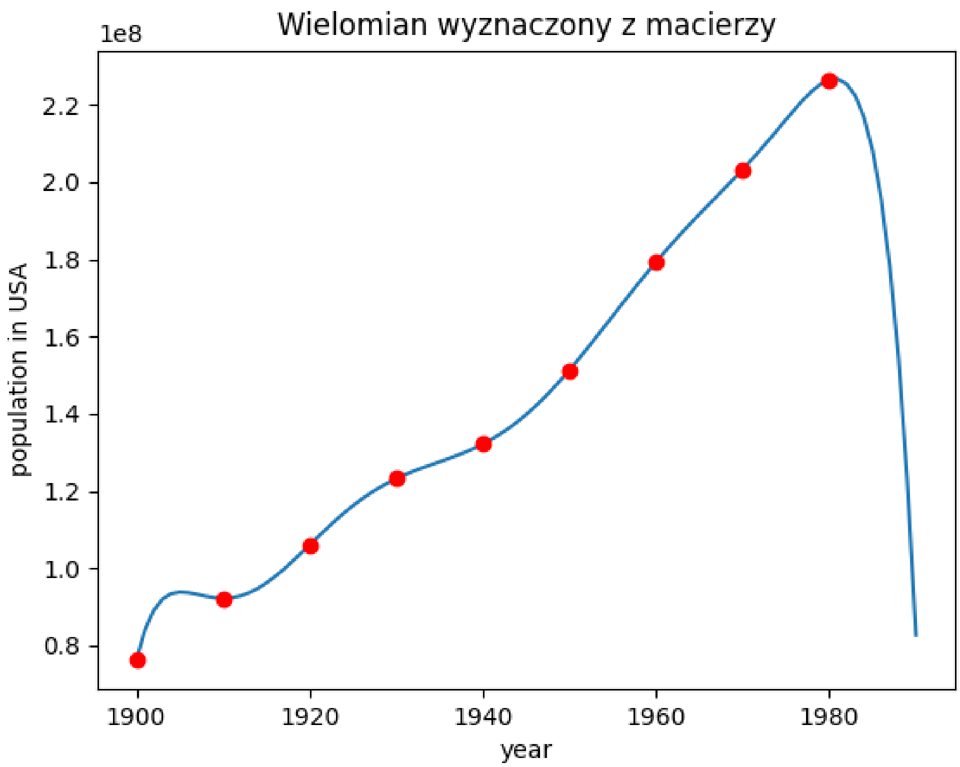
Wspolczynniki uwarunkowania macierzy

Numer funkcji bazowej	Wspolczynnik uwarunkowania macierzy
1	$5.031 \cdot 10^{26}$
2	$6.307 \cdot 10^{15}$
3	$9.316 \cdot 10^{12}$
4	$1.605 \cdot 10^{3}$

Najmniejszy wspolczynnik uwarunkowania miala baza okreslona wzorem (4), zatem zostala ona wybrana do wynaczenia wielomianu interpolacyjnego. W tym celu rozwiazano nastepujace rownanie macierzowe:

$$M \cdot C = Y \tag{5}$$

przy czym: M - macierz Vandermonde'a utworzona na najlepiej uwarunkowanej bazie, C - szukana macierz wspolczynnikow, Y - macierz wartosci wielomianu dla danych punktow.
Do rozwiazania tego rownania uzyto funkcji `numpy.linalg.solve`, ktora zwraca rozwiazanie rownania macierzowego typu $AX = B$, gdzie A i B sa dane, a X szukana.
W kolejnym kroku utworzono wykres otrzymanego wielomianu na przedziale $year \in [1900, 1990]$, na który naniesiono wezly interpolacji.



Wykres wielomianu interpolacyjnego przechodzi przez wszystkie dziewiec wezlow interpolacji, co potwierdza poprawnosc wykonanej interpolacji.
Kolejna czynnoscia bylo dokonanie ekstrapolacji wielomianu do 1990 roku. Otrzymano wartosc 82749141, która w porównaniu prawdziwej wartosci populacji dla Stanow Zjednoczonych w 1990 roku, rownej 248709873, miala blad wzgledny ekstrapolacji rowny:

$$relativeExtrapolationError = 0.6672864651416437 \approx 66.73\% \tag{6}$$

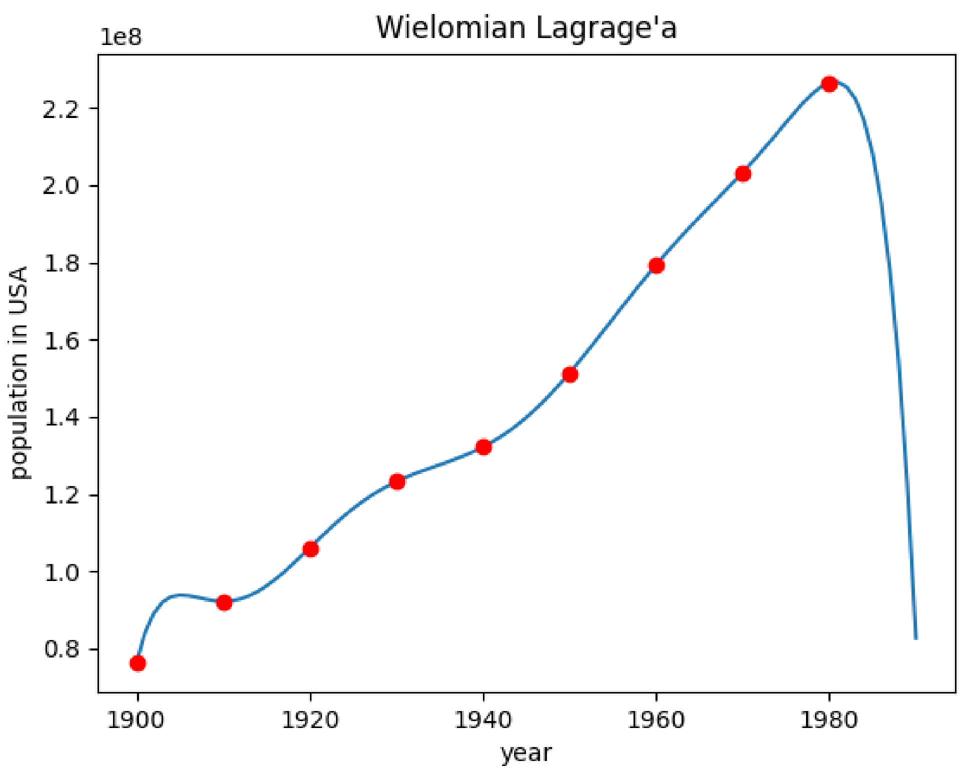
Wyznaczanie wielomianu Lagrange'a

W celu wyznaczenia wielomianu interpolacyjnego Lagrange'a uzyto nastepujacych wzorow:

$$l_j(t) = \prod_{k=1, k\neq j}^{n} \frac{t - t_k}{t_j - t_k} \tag{7}$$

$$p(t) = \sum_{i=1}^{n} y_i l_i(t) \tag{8}$$

Na ich podstawie, korzystajac z funkcji `lambda`, wyznaczono wielomian interpolacyjny Lagrange'a. Nastepnie obliczono wartosci tego wielomianu dla takiego samego przedzialu jak w poprzednim podpunkcie z krokiem co jeden rok. Na podstawie uzyskanych wartosci stworzono wykres:



Powyzszy wykres jest identyczny jak ten stworzony na podstawie macierzy, co potwierdza poprawnosc wyznaczenia wielomianu metoda Lagrange'a.

Wyznaczanie wielomianu Newtona

W celu wyznaczenia wielomianu interpolacyjnego Newtona uzyto nastepujacych wzorow:

$$\pi(t) = \prod_{k=1}^{j-1} (t - t_k) \tag{9}$$

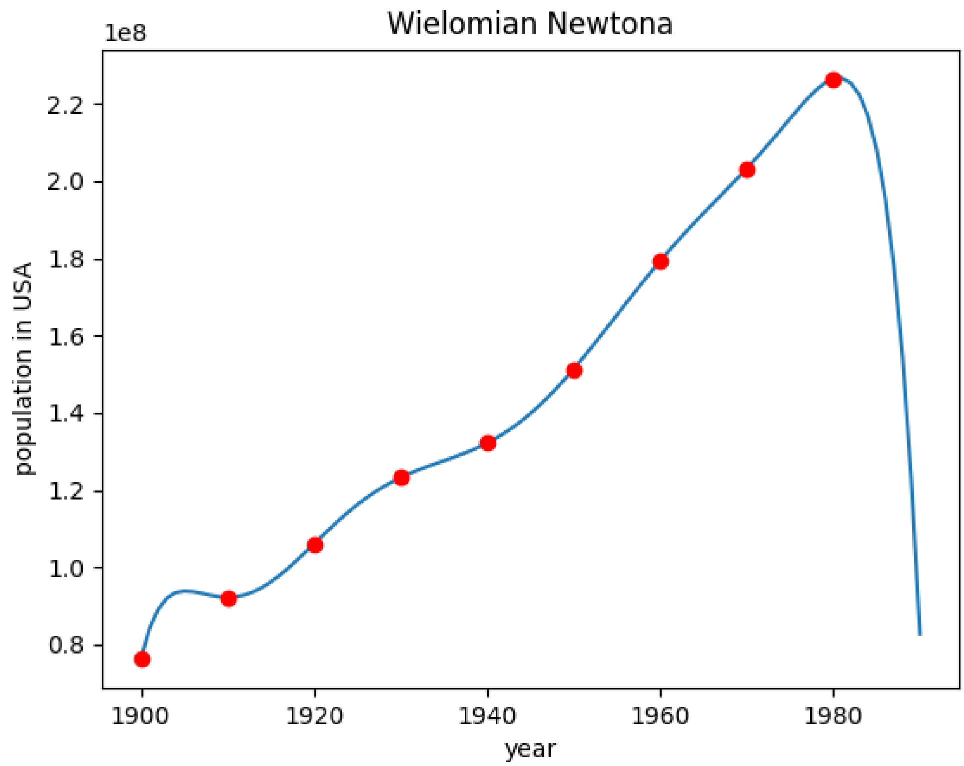
$$p(t) = \sum_{i=1}^{n} f[t_1, ..., t_i] \cdot \pi_i(t) \tag{10}$$

$$f[x_i] = f(x_i) \tag{11}$$

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f[x_{i+1}] - f[x_i]}{x_{i+1} - x_i} \tag{12}$$

$$f[x_0, ..., x_i] = \frac{f[x_1, ..., x_i] - f[x_0, ..., x_{i-1}]}{x_i - x_0} \tag{13}$$

Na ich podstawie, korzystajac z funkcji `lambda` oraz rekurencyjnie obliczajac wartosci ilorazow roznicowych, wyznaczono wielomian interpolacyjny Newtona. Nastepnie obliczono wartosci tego wielomianu dla takiego samego przedzialu jak w pierwszym podpunkcie z krokiem co jeden rok. Na podstawie uzyskanych wartosci stworzono wykres:



Powyzszy wykres jest identyczny jak ten stworzony na podstawie macierzy oraz metoda Lagrange'a, co potwierdza poprawnosc wyznaczenia wielomianu metoda Newtona.