Lab1 - Filip Jedrzejewski

Zadanie 1

W zadaniu należało wyznaczyć przybliżona wartość pochodnej w punkcie za pomoca wzorów:

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{1}$$

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \tag{2}$$

Badana funkcja:

$$f(x) = \tan(x) \tag{3}$$

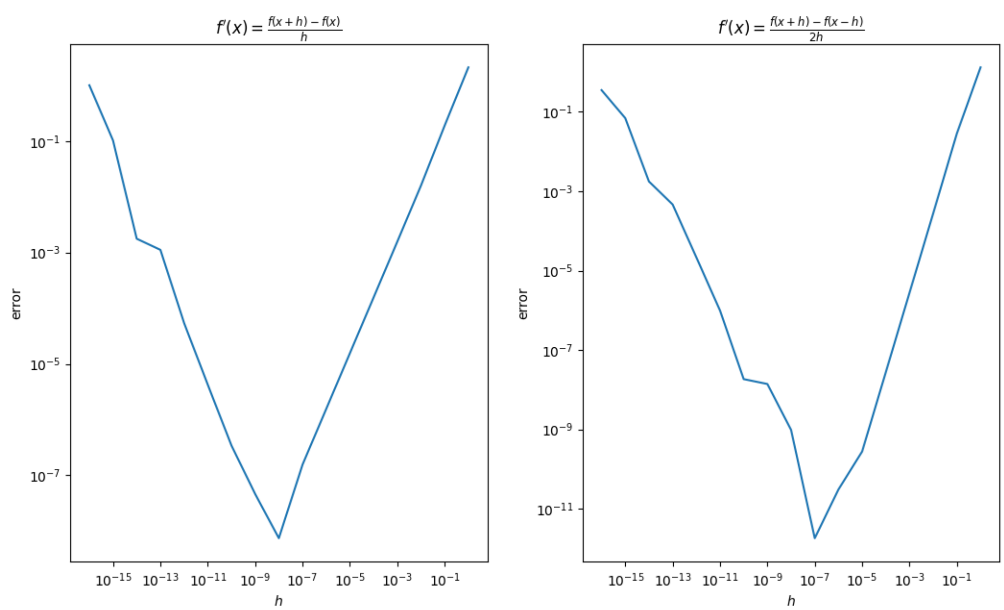
Pochodna funkcji $f(x)$ ma postać:

$$f'(x) = \sec^2(x) = 1 + \tan^2(x) \tag{4}$$

Funkcje badano dla argumentu:

$$x = 1$$

Na podstawie wzorów (1) i (2) wykonano wykresy wartości bezwzglednej błedu w zależności od wartości $h = 10^{-k}$, przy czym: $k = 0, 1, 2, 3, ..., 16$. Osie sa w skali logarytmicznej.



Wykresy wartości bezwzglednych błedów maja swoje minima dla wartości h_{min} odpowiednio:

$$h_{min_1} = 10^{-8}$$
$$h_{min_2} = 10^{-7}$$

Wartość h_{min} obliczono również ze wzoru:

$$h_{min} \approx \sqrt{\varepsilon_{mach}} \tag{5}$$

Otrzymana wartość:

$$h_{min} \approx 1.4901161193847656 \cdot 10^{-8} \approx 1.49 \cdot 10^{-8}$$

Wartość pochodnej funkcji $f(x) = \tan(x)$ dla argumentu $x = 1$ obliczonej za pomoca wzoru (1) posiadała najmniejszy bład dla $h_{min_1} = 10^{-8}$. Jest to wartość bardzo zbliżona do teoretycznej wartości wyznaczonej za pomoca zależności (5).

Wartość pochodnej tej samej funkcji przybliżana za pomoca wzoru różnic centralnych - zależność (2), przyjmowała wartość najmniejsza dla $h_{min_2} = 10^{-7}$. Jest ona prawie dziesieciokrotnie wieksza od teoretycznej $h_{min} = 1.49 \cdot 10^{-8}$.

Zadanie 2

W zadaniu należało wygenerować pierwsze 225 wyrazów ciagu danego wzorem:

$$x_{k+1} = 2.25 \cdot x_k - 0.5 \cdot x_{k-1} \tag{6}$$

Powyższy wzór przekształcono:

$$a_n = 2.25 \cdot a_{n-1} - 0.5 \cdot a_{n-2} \tag{7}$$

Z wyrazami poczatkowymi:

$$a_1 = \frac{1}{3}$$

$$a_2 = \frac{1}{12}$$

Dokładnym rozwiazaniem równania różnicowego jest:

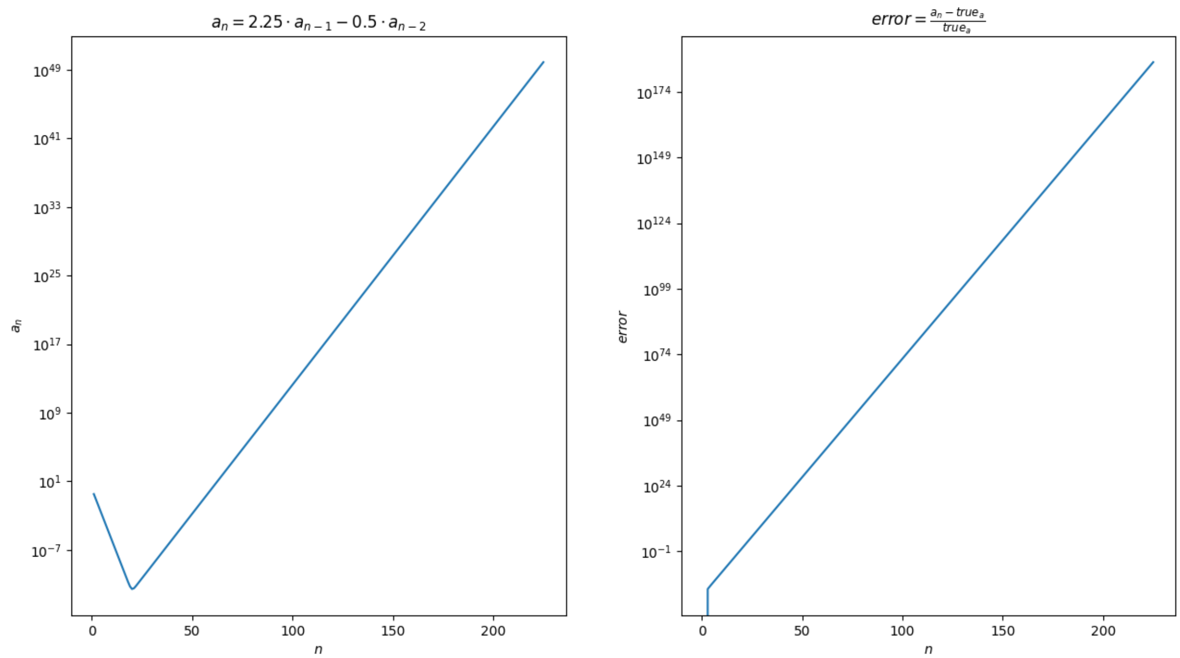
$$a_n = \frac{4^{1-n}}{3} \tag{8}$$

Na podstawie wzoru (7) wyznaczono iteracyjnie pierwsze 225 wyrazów ciagu a_n. Nastepnie dla każdego obliczonego wyrazu tego ciagu obliczono bład wzgledny za pomoca zależności:

$$error = \frac{|a_n - true_{a_n}|}{true_{a_n}} \tag{9}$$

przy czym:
$error$ - obliczana wartość błedu wzglednego,
a_n - n-ty wyraz ciagu wyznaczony za pomoca zależności (7),
$true_{a_n}$ - wartość n-tego wyrazu ciagu wyznaczona za pomoca wzoru (8).

W kolejnym kroku wykonano wykresy wartości wyrazów ciagu oraz odpowiadajacych im błedów wzglednych w zależności od n (osie y obu wykresów sa w skali logarytmicznej).



Dokładne rozwiazania równania - wzór (8), wskazuje na to, że ciag jest malejacy. Na wykresie wyraźnie widać, że wyznaczone wartości kolejnych wyrazów gwałtownie rosna. Wraz ze wzrostem wyrazów rośnie również bład wzgledny.

Wykres ciagu a_n zaczyna rosnać od 20-tego wyrazu, dla którego przyjmuje minimum równe:

$$a_{20} \approx 2.771793376831781 \cdot 10^{-12} \approx 2.77 \cdot 10^{-12}$$

Jest to zatem bardzo mała liczba, zatem z powodu dużych błedów numerycznych zwiazanych ze zbyt małymi wartościami, wykres a_n może znacznie odbiegać od oczekiwanego przebiegu.