Lab 9

Filip Jędrzejewski

June 6, 2023

Zadanie 1

Opis problemu

Celem zadania było przedstawienie każdego z poniższych równań różniczkowych zwyczajnych jako równoważny układ równań pierwszego rzędu.

Równanie Van der Pol'a

$$y'' = y'(1 - y^2) - y \tag{1}$$

Zapiszmy:

$$y_1 = y \tag{2}$$

$$y_2 = y' \tag{3}$$

Zatem:

$$\begin{cases} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= y_2(1 - y_1^2) - y_1 \end{cases} \tag{4}$$

Równanie Blasiusa

$$y''' = -yy'' \tag{5}$$

Zapiszmy:

$$y_1 = y \tag{6}$$

$$y_2 = y' \tag{7}$$

$$y_3 = y'' \tag{8}$$

Zatem:

$$\left\{\begin{array}{lcl} y_1' & = & y_2 \\ y_2' & = & y_3 \\ y_3' & = & -y_1 y_3 \end{array}\right. \tag{9}$$

Prawo powszechnego ciążenia dla problemu dwóch ciał o dużej różnicy mas

$$\left\{\begin{array}{lcl} y_1'' & = & -GM\frac{y_1}{(y_1^2+y_2^2)^{\frac{3}{2}}} \\ y_2'' & = & -GM\frac{y_2}{(y_1^2+y_2^2)^{\frac{3}{2}}} \end{array}\right. \tag{10}$$

Zapiszmy:

$$x_1 = y_1 \tag{11}$$

$$x_2 = y_1' \tag{12}$$

$$x_I = y_2 \tag{13}$$

$$x_{II} = y_2' \tag{14}$$

$$R = (y_1^2 + y_2^2)^{\frac{1}{2}} = (x_1^2 + x_I^2)^{\frac{1}{2}} \tag{15}$$

Zatem:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1' & = & x_2 \\ x_I' & = & x_{II} \\ R & = & (x_1^2 + x_I^2)^{\frac{1}{2}} \\ x_2' & = & -GM \cdot x_1 R^{-3} \\ x_{II}' & = & -GM \cdot x_I R^{-3} \end{array}\right. \tag{16}$$

Zadanie 2

Opis problemu

Dane jest równanie różniczkowe zwyczajne:

$$y' = -5y \tag{17}$$

z warunkiem początkowym $y(0) = 1$. Równanie rozwiązujemy numerycznie z krokiem $h = 0,5$.

Czy rozwiązania tego równania są stabilne?

Mamy dane:

$$\begin{cases} y' &= -5y \\ y(0) &= 1 \end{cases} \tag{18}$$

Zatem:

$$\begin{cases} \hat{y}' &= -5\hat{y} \\ \hat{y}(0) &= 1 + \varepsilon_0 \end{cases} \tag{19}$$

Korzystając z:

$$\varepsilon(t) = \hat{y}(t) - y(t) \tag{20}$$

$$\varepsilon'(t) = \hat{y}'(t) - y'(t) \tag{21}$$

Otrzymujemy:

$$\begin{cases} \varepsilon'(t) &= \hat{y}'(t) - y'(t) = -5 \cdot (\hat{y}(t) - y(t)) = -5 \cdot \varepsilon(t) \\ \varepsilon(0) &= \varepsilon_0 \end{cases} \tag{22}$$

Rozwiązaniem tego układu równań jest:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 e^{-5t} \tag{23}$$

Aby rozwiązania równania były stabilne, to musi być spełniony następujący warunek:

$$|\varepsilon(t)| < \infty \tag{24}$$

dla każdego $t \geqslant t_0$, zatem w tym konkretnym przypadku:

$$t \geqslant 0 \tag{25}$$

Łącząc zależności (23) oraz (25), otrzymujemy:

$$|\varepsilon(t)| \leqslant \varepsilon_0 < \infty \tag{26}$$

Zatem rozwiązania tego równania są stabilne.

Czy jawna metoda Euler'a jest stabilna dla tego równania z użytym krokiem h?

Warunek na stabilność jawnej metody Euler'a:

$$|1 + h\lambda| < 1 \tag{27}$$

Po podstawieniu liczb:

$$|1 - 5 \cdot 0.5| = |-1.5| = 1.5 < 1 \tag{28}$$

Otrzymano sprzeczność, zatem jawna metoda Euler'a nie jest stabilna dla tego równania z krokiem $h = 0.5$.

Obliczanie numerycznie wartości przybliżonego rozwiązania dla $t = 0.5$ jawną metodą Euler'a.

Wzór jawnej metody Euler'a:

$$y_{k+1} = y_k + h \cdot f(t_k, y_k) \tag{29}$$

W tym przypadku funkcja $f(t, y)$ ma postać:

$$f(t, y) = -5 \cdot y(t) \tag{30}$$

Na podstawie równań (29) oraz (30) wyznaczamy wartość przybliżonego rozwiązania dla $t = 0.5$:

$$y_0 = \hat{y}(0) = y(0) = 1 \tag{31}$$

$$y_1 = \hat{y}(0.5) = y_0 + h \cdot f(0, y_0) = y_0 - 5 \cdot h \cdot y_0 = 1 - 5 \cdot 0.5 \cdot 1 = -1.5 \tag{32}$$

Zatem ostatecznie:

$$\hat{y}(0.5) = -1.5 \tag{33}$$

Czy niejawna metoda Euler'a jest stabilna dla tego równania z użytym krokiem h?

Warunek na stabilność niejawnej metody Euler'a:

$$\left|\frac{1}{1 - h\lambda}\right| < 1 \tag{34}$$

Po podstawieniu liczb:

$$\left|\frac{1}{1 + 0.5 \cdot 5}\right| = \left|\frac{2}{7}\right| = \frac{2}{7} < 1 \tag{35}$$

Z tego wynika, że niejawna metoda Euler'a jest stabilna dla tego równania z krokiem $h = 0.5$.

Obliczanie numerycznie wartości przybliżonego rozwiązania dla $t = 0.5$ niejawną metodą Euler'a.

Wzór niejawnej metody Euler'a:

$$y_{k+1} = y_k + h \cdot f(t_{k+1}, y_{k+1}) \tag{36}$$

W tym przypadku funkcja $f(t, y)$ ma postać:

$$f(t, y) = -5 \cdot y(t) \tag{37}$$

Łącząc zależności (36) i (37), otrzymujemy:

$$y_{k+1} = y_k - 5 \cdot h \cdot y_{k+1} \tag{38}$$

$$y_{k+1} = \frac{y_k}{1 + 5h} \tag{39}$$

Korzystając z wyrażenia (39) wyznaczamy wartość przybliżonego rozwiązania dla $t = 0.5$:

$$y_0 = \hat{y}(0) = y(0) = 1 \tag{40}$$

$$y_1 = \hat{y}(0.5) = \frac{y_0}{1 + 5h} = \frac{1}{1 + 5 \cdot 0.5} = \frac{2}{7} \tag{41}$$

Zatem ostatecznie:

$$\hat{y}(0.5) = \frac{2}{7} \tag{42}$$

Zadanie 3

Opis problemu

Celem zadania było rozwiązanie układu równań opisujących trajektorie ruchu dwóch ciał (o dużej różnicy mas ($m \ll M$)) poddanych wzajemnemu przyciąganiu grawitacyjnemu według teorii Newton'a:

$$\begin{cases} x'' &= -GM \cdot \frac{x}{R^3} \\ y'' &= -GM \cdot \frac{y}{R^3} \end{cases} \tag{43}$$

przy czym: G - stała grawitacji, $R = (x^2 + y^2)^{0.5}$ - odległość orbitującego ciała od środka masy układu.

Dla potrzeb zadania dane zostały dobrane tak, że $GM = 1$.

Warunki początkowe:

$$x(0) = 1 - e \tag{44}$$

$$x'(0) = 0 \tag{45}$$

$$y(0) = 0 \tag{46}$$

$$y'(0) = \left(\frac{1+e}{1-e}\right)^{0.5} \tag{47}$$

Gdzie e - mimośród (ekscentryczność) orbity eliptycznej o okresie 2π.

Powyższy układ równań należało rozwiązać stosując:

1. jawną metodę Euler'a
2. niejawną metodę Euler'a
3. półjawną metodę Euler'a
4. metodę Rungego-Kutty czwartego rzędu (RK4)

Dla każdej metody sprawdzono, w jakim stopniu rozwiązania spełniają zasady zachowania pędu oraz energii.

Zasada zachowania energii:

$$E_c = E_k + E_p = \frac{1}{2}mv^2 - GM\frac{m}{R} = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2) - GM\frac{m}{R} \tag{48}$$

$$E_c = \frac{1}{2}m((x')^2 + (y')^2) - GMm \cdot (x^2 + y^2)^{-0.5} \tag{49}$$

Przyjmując założenie, że $GM = 1$ oraz dzieląc obie strony równania przez m, otrzymujemy:

$$\frac{E_c}{m} = \frac{(x')^2 + (y')^2}{2} - (x^2 + y^2)^{-0.5} \tag{50}$$

Zasada zachowania momentu pędu:

$$\overrightarrow{L} = \overrightarrow{R} \times \overrightarrow{p} = m \cdot (\overrightarrow{R} \times \overrightarrow{v}) \tag{51}$$

$$L = m \cdot (R_y \cdot v_x + R_x \cdot v_y) = m \cdot (y \cdot x' + x \cdot y') \tag{52}$$

Po przekształceniach, otrzymujemy równanie:

$$\frac{L}{m} = xy' + yx' \tag{53}$$

Korzystając z wyrażeń (50) oraz (53), można obserwować, jak zmienia się energia całkowita oraz moment pędu ciała podczas trwania symulacji.

Jawna metoda Euler'a

Wzór jawnej metody Euler'a:

$$y_{k+1} = y_k + h \cdot f(t_k, y_k) \tag{54}$$

W podanej sytuacji:

$$f(t, x) = v(t) - \Delta t \cdot \frac{GM}{R^3} \cdot x \tag{55}$$

$$x_{k+1} = x_k + \Delta t \cdot f(t_k, x_k) \tag{56}$$

$$x_{k+1} = x_k + \Delta t \cdot (v_{x_k} - \Delta t \cdot \frac{GM}{R^3} \cdot x_k) \tag{57}$$

$$v_{x_{k+1}} = v_{x_k} - \Delta t \cdot GM \cdot x_k \cdot R^{-3} \tag{58}$$

Upraszczając:

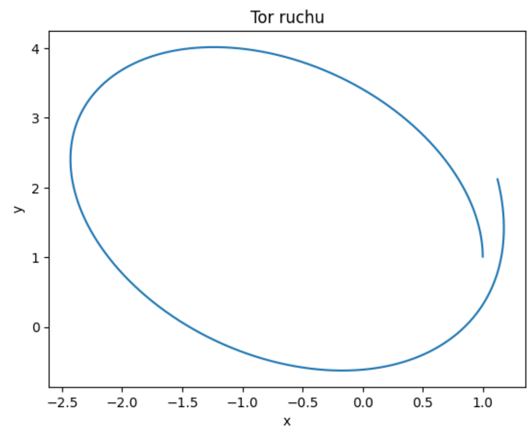
$$x_{k+1} = x_k + v_{x_t} \cdot \Delta t \tag{59}$$

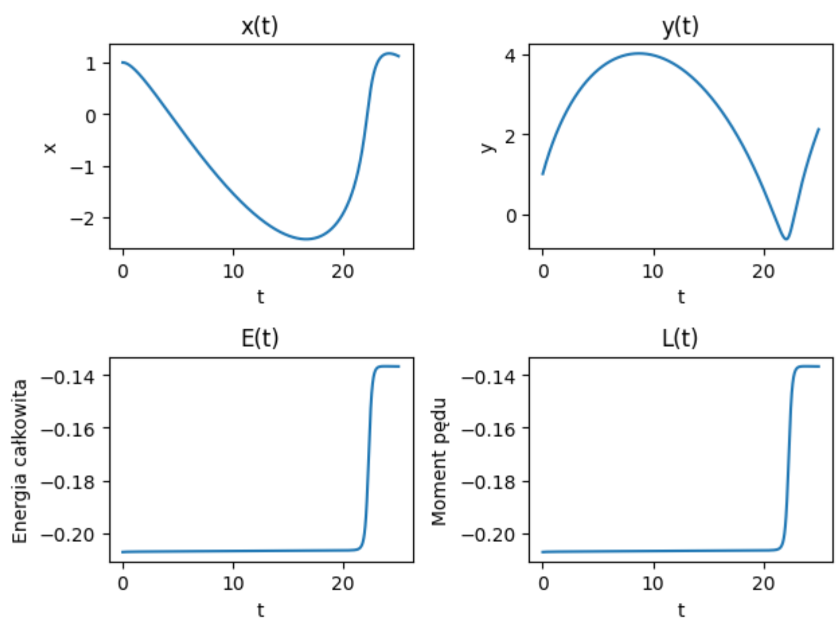
$$v_{x_{k+1}} = v_{x_k} - \Delta t \cdot GM \cdot x_k \cdot R^{-3} \tag{60}$$

Analogiczne zależności wyprowadzono dla y oraz v_y, przy czym:

$$R = (x^2 + y^2)^{0.5} \tag{61}$$

Na podstawie powyższych równań stworzono wykresy (dla $e = 0$):





Niejawna metoda Euler'a

Wzór niejawnej metody Euler'a:

$$y_{k+1} = y_k + h \cdot f(t_{k+1}, y_{k+1}) \tag{62}$$

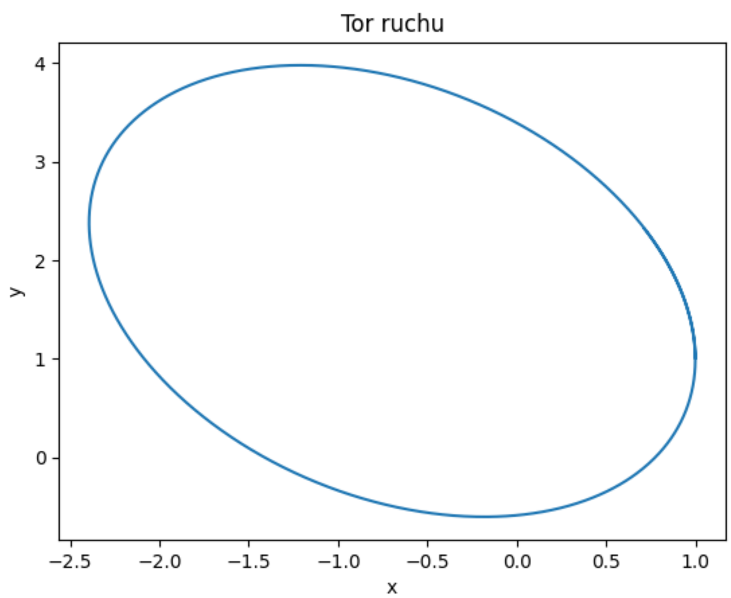
W podanej sytuacji:

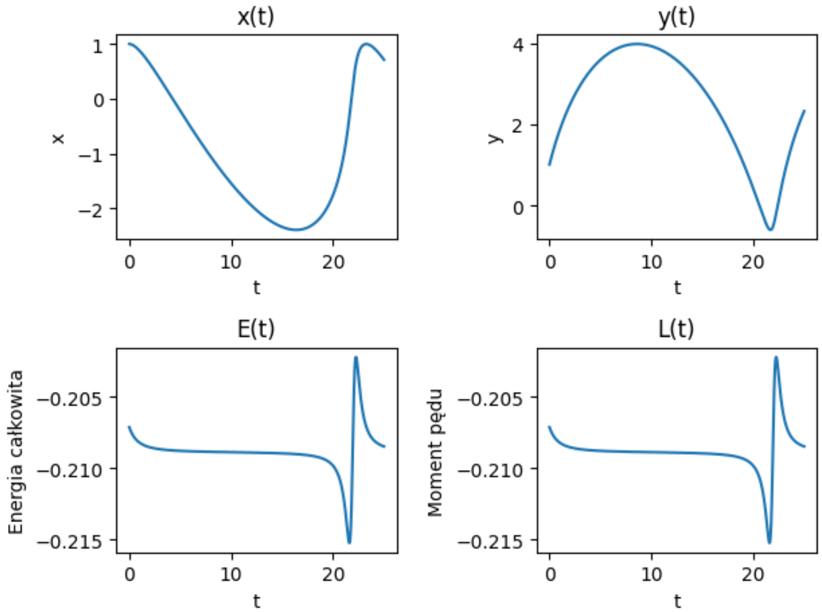
$$x_{k+1} = x_k + \Delta t \cdot f(t_{k+1}, x_{k+1}) \tag{63}$$

$$x_{k+1} = x_k + \Delta t \cdot (v_{x_k} - \Delta t \cdot \frac{GM}{R^3} \cdot x_{k+1}) \tag{64}$$

$$x_{k+1} = \frac{x_k + \Delta t \cdot v_{x_k}}{1 + (\Delta t)^2 \cdot GM \cdot R^{-3}} \tag{65}$$

Analogiczne wzory zastosowano dla y oraz v_y. Na podstawie tych czterech równań stworzono wykresy (dla $e = 0$):





Półjawna metoda Euler'a

Wzór półjawnej metody Euler'a:

$$v_{n+1} = v_n + h \cdot g(t_n, x_n) \tag{66}$$

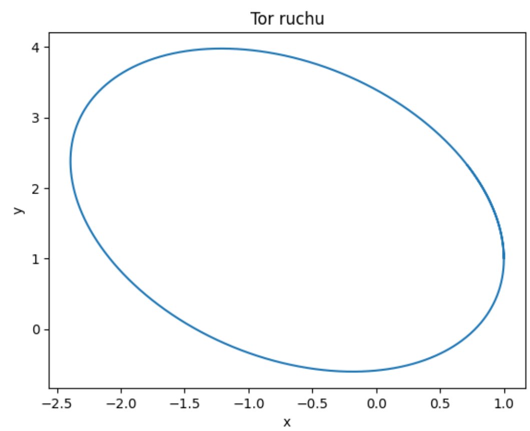
$$x_{n+1} = x_n + h \cdot f(t_n, v_{n+1}) \tag{67}$$

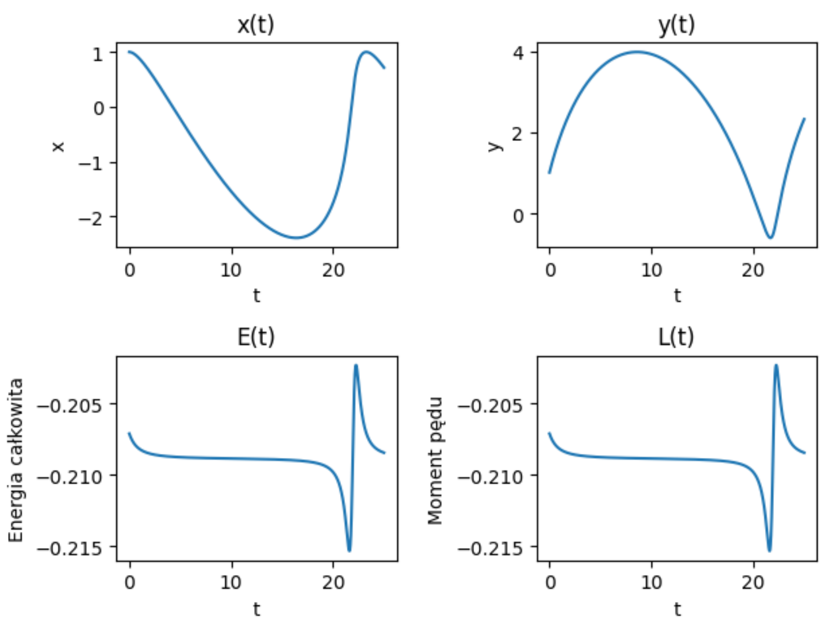
W podanej sytuacji:

$$v_{x_{k+1}} = v_{x_k} - \Delta t \cdot \frac{GM}{R^3} \cdot x_k \tag{68}$$

$$x_{k+1} = x_k + \Delta t \cdot v_{x_{k+1}} \tag{69}$$

Analogiczne zależności wyprowadzono dla y oraz v_y. Dla $e = 0$ stworzono wykresy:





Metoda Rungego-Kutty czwartego rzędu (RK4)

Wzór metody Rungego-Kutty czwartego rzędu:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6} \cdot (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \tag{70}$$

$$k_1 = f(t_k, y_k) \tag{71}$$

$$k_2 = f(t_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{hk_1}{2}) \tag{72}$$

$$k_3 = f(t_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{hk_2}{2}) \tag{73}$$

$$k_4 = f(t_k + h, y_k + hk_3) \tag{74}$$

W podanej sytuacji:

$$x_{k+1} = x_k + \frac{\Delta t}{6} \cdot (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \tag{75}$$

$$k_1 = v_k - \Delta t \cdot GM \cdot x_k \cdot R^{-3} \tag{76}$$

$$k_2 = v_k - \frac{1}{2}\Delta t \cdot GM \cdot R^{-3} \cdot (3x_k + \Delta t \cdot k_1) \tag{77}$$

$$k_3 = v_k - \frac{1}{2}\Delta t \cdot GM \cdot R^{-3} \cdot (3x_k + \Delta t \cdot k_2) \tag{78}$$

$$k_4 = v_k - \Delta t \cdot GM \cdot R^{-3} \cdot (2x_k + \Delta t \cdot k_3) \tag{79}$$

Analogiczne zależności wyprowadzono dla y oraz v_y. Dla $e = 0$ stworzono wykresy: