

# Lab 9

Filip Jędrzejewski

June 6, 2023

## Zadanie 1

### Opis problemu

Celem zadania było przedstawienie każdego z poniższych równań różniczkowych zwyczajnych jako równoważny układ równań pierwszego rzędu.

### Równanie Van der Pol'a

$$y'' = y'(1 - y^2) - y \quad (1)$$

Zapiszmy:

$$y_1 = y \quad (2)$$

$$y_2 = y' \quad (3)$$

Zatem:

$$\begin{cases} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= y_2(1 - y_1^2) - y_1 \end{cases} \quad (4)$$

### Równanie Blasiusa

$$y''' = -yy'' \quad (5)$$

Zapiszmy:

$$y_1 = y \quad (6)$$

$$y_2 = y' \quad (7)$$

$$y_3 = y'' \quad (8)$$

Zatem:

$$\begin{cases} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= y_3 \\ y_3' &= -y_1 y_3 \end{cases} \quad (9)$$

**Prawo powszechnego ciążenia dla problemu dwóch ciał o dużej różnicy mas**

$$\begin{cases} y_1'' &= -GM \frac{y_1}{(y_1^2 + y_2^2)^{\frac{3}{2}}} \\ y_2'' &= -GM \frac{y_2}{(y_1^2 + y_2^2)^{\frac{3}{2}}} \end{cases} \quad (10)$$

Zapiszmy:

$$x_1 = y_1 \quad (11)$$

$$x_2 = y_1' \quad (12)$$

$$x_I = y_2 \quad (13)$$

$$x_{II} = y_2' \quad (14)$$

$$R = (y_1^2 + y_2^2)^{\frac{1}{2}} = (x_1^2 + x_I^2)^{\frac{1}{2}} \quad (15)$$

Zatem:

$$\begin{cases} x_1' &= x_2 \\ x_I' &= x_{II} \\ R &= (x_1^2 + x_I^2)^{\frac{1}{2}} \\ x_2' &= -GM \cdot x_1 R^{-3} \\ x_{II}' &= -GM \cdot x_I R^{-3} \end{cases} \quad (16)$$

## Zadanie 2

### Opis problemu

Dane jest równanie różniczkowe zwyczajne:

$$y' = -5y \quad (17)$$

z warunkiem początkowym  $y(0) = 1$ . Równanie rozwiązujemy numerycznie z krokiem  $h = 0,5$ .

### Czy rozwiązania tego równania są stabilne?

Mamy dane:

$$\begin{cases} y' &= -5y \\ y(0) &= 1 \end{cases} \quad (18)$$

Zatem:

$$\begin{cases} \hat{y}' &= -5\hat{y} \\ \hat{y}(0) &= 1 + \varepsilon_0 \end{cases} \quad (19)$$

Korzystając z:

$$\varepsilon(t) = \hat{y}(t) - y(t) \quad (20)$$

$$\varepsilon'(t) = \hat{y}'(t) - y'(t) \quad (21)$$

Otrzymujemy:

$$\begin{cases} \varepsilon'(t) &= \hat{y}'(t) - y'(t) = -5 \cdot (\hat{y}(t) - y(t)) = -5 \cdot \varepsilon(t) \\ \varepsilon(0) &= \varepsilon_0 \end{cases} \quad (22)$$

Rozwiązaniem tego układu równań jest:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 e^{-5t} \quad (23)$$

Aby rozwiązania równania były stabilne, to musi być spełniony następujący warunek:

$$|\varepsilon(t)| < \infty \quad (24)$$

dla każdego  $t \geq t_0$ , zatem w tym konkretnym przypadku:

$$t \geq 0 \quad (25)$$

Łącząc zależności (23) oraz (25), otrzymujemy:

$$|\varepsilon(t)| \leq \varepsilon_0 < \infty \quad (26)$$

Zatem rozwiązania tego równania są stabilne.

### Czy jawna metoda Euler'a jest stabilna dla tego równania z użytym krokiem $h$ ?

Warunek na stabilność jawnej metody Euler'a:

$$|1 + h\lambda| < 1 \quad (27)$$

Po podstawieniu liczb:

$$|1 - 5 \cdot 0.5| = |-1.5| = 1.5 < 1 \quad (28)$$

Otrzymano sprzeczność, zatem jawna metoda Euler'a nie jest stabilna dla tego równania z krokiem  $h = 0.5$ .

### Obliczanie numerycznie wartości przybliżonego rozwiązania dla $t = 0.5$ jawną metodą Euler'a.

Wzór jawnej metody Euler'a:

$$y_{k+1} = y_k + h \cdot f(t_k, y_k) \quad (29)$$

W tym przypadku funkcja  $f(t, y)$  ma postać:

$$f(t, y) = -5 \cdot y(t) \quad (30)$$

Na podstawie równań (29) oraz (30) wyznaczamy wartość przybliżonego rozwiązania dla  $t = 0.5$ :

$$y_0 = \hat{y}(0) = y(0) = 1 \quad (31)$$

$$y_1 = \hat{y}(0.5) = y_0 + h \cdot f(0, y_0) = y_0 - 5 \cdot h \cdot y_0 = 1 - 5 \cdot 0.5 \cdot 1 = -1.5 \quad (32)$$

Zatem ostatecznie:

$$\hat{y}(0.5) = -1.5 \quad (33)$$

### Czy niejawna metoda Euler'a jest stabilna dla tego równania z użytym krokiem $h$ ?

Warunek na stabilność niejawnej metody Euler'a:

$$\left| \frac{1}{1 - h\lambda} \right| < 1 \quad (34)$$

Po podstawieniu liczb:

$$\left| \frac{1}{1 + 0.5 \cdot 5} \right| = \left| \frac{2}{7} \right| = \frac{2}{7} < 1 \quad (35)$$

Z tego wynika, że niejawna metoda Euler'a jest stabilna dla tego równania z krokiem  $h = 0.5$ .

**Obliczanie numerycznie wartości przybliżonego rozwiązania dla  $t = 0.5$  niejawną metodą Euler’a.**

Wzór niejawną metody Euler’a:

$$y_{k+1} = y_k + h \cdot f(t_{k+1}, y_{k+1}) \quad (36)$$

W tym przypadku funkcja  $f(t, y)$  ma postać:

$$f(t, y) = -5 \cdot y(t) \quad (37)$$

Łącząc zależności (36) i (37), otrzymujemy:

$$y_{k+1} = y_k - 5 \cdot h \cdot y_{k+1} \quad (38)$$

$$y_{k+1} = \frac{y_k}{1 + 5h} \quad (39)$$

Korzystając z wyrażenia (39) wyznaczamy wartość przybliżonego rozwiązania dla  $t = 0.5$ :

$$y_0 = \hat{y}(0) = y(0) = 1 \quad (40)$$

$$y_1 = \hat{y}(0.5) = \frac{y_0}{1 + 5h} = \frac{1}{1 + 5 \cdot 0.5} = \frac{2}{7} \quad (41)$$

Zatem ostatecznie:

$$\hat{y}(0.5) = \frac{2}{7} \quad (42)$$

## Zadanie 3

### Opis problemu

Celem zadania było rozwiązanie układu równań opisujących trajektorie ruchu dwóch ciał (o dużej różnicy mas ( $m \ll M$ )) poddanych wzajemnemu przyciąganiu grawitacyjnemu według teorii Newton'a:

$$\begin{cases} x'' &= -GM \cdot \frac{x}{R^3} \\ y'' &= -GM \cdot \frac{y}{R^3} \end{cases} \quad (43)$$

przy czym:  $G$  - stała grawitacji,  $R = (x^2 + y^2)^{0.5}$  - odległość orbitującego ciała od środka masy układu.

Dla potrzeb zadania dane zostały dobrane tak, że  $GM = 1$ .

Warunki początkowe:

$$x(0) = 1 - e \quad (44)$$

$$x'(0) = 0 \quad (45)$$

$$y(0) = 0 \quad (46)$$

$$y'(0) = \left( \frac{1+e}{1-e} \right)^{0.5} \quad (47)$$

Gdzie  $e$  - mimośród (ekscentryczność) orbity eliptycznej o okresie  $2\pi$ .

Powyższy układ równań należało rozwiązać stosując:

1. jawną metodę Euler'a
2. niejawną metodę Euler'a
3. półjawną metodę Euler'a
4. metodę Rungego-Kutty czwartego rzędu (RK4)

Dla każdej metody sprawdzono, w jakim stopniu rozwiązania spełniają zasady zachowania pędu oraz energii.

Zasada zachowania energii:

$$E_c = E_k + E_p = \frac{1}{2}mv^2 - GM\frac{m}{R} = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2) - GM\frac{m}{R} \quad (48)$$

$$E_c = \frac{1}{2}m((x')^2 + (y')^2) - GMm \cdot (x^2 + y^2)^{-0.5} \quad (49)$$

Przyjmując założenie, że  $GM = 1$  oraz dzieląc obie strony równania przez  $m$ , otrzymujemy:

$$\frac{E_c}{m} = \frac{(x')^2 + (y')^2}{2} - (x^2 + y^2)^{-0.5} \quad (50)$$

Zasada zachowania momentu pędu:

$$\vec{L} = \vec{R} \times \vec{p} = m \cdot (\vec{R} \times \vec{v}) \quad (51)$$

$$L = m \cdot (R_y \cdot v_x + R_x \cdot v_y) = m \cdot (y \cdot x' + x \cdot y') \quad (52)$$

Po przekształceniach, otrzymujemy równanie:

$$\frac{L}{m} = xy' + yx' \quad (53)$$

Korzystając z wyrażeń (50) oraz (53), można obserwować, jak zmienia się energia całkowita oraz moment pędu ciała podczas trwania symulacji.

## Jawna metoda Euler'a

Wzór jawnej metody Euler'a:

$$y_{k+1} = y_k + h \cdot f(t_k, y_k) \quad (54)$$

W podanej sytuacji:

$$f(t, x) = v(t) - \Delta t \cdot \frac{GM}{R^3} \cdot x \quad (55)$$

$$x_{k+1} = x_k + \Delta t \cdot f(t_k, x_k) \quad (56)$$

$$x_{k+1} = x_k + \Delta t \cdot (v_{x_k} - \Delta t \cdot \frac{GM}{R^3} \cdot x_k) \quad (57)$$

$$v_{x_{k+1}} = v_{x_k} - \Delta t \cdot GM \cdot x_k \cdot R^{-3} \quad (58)$$

Upraszczając:

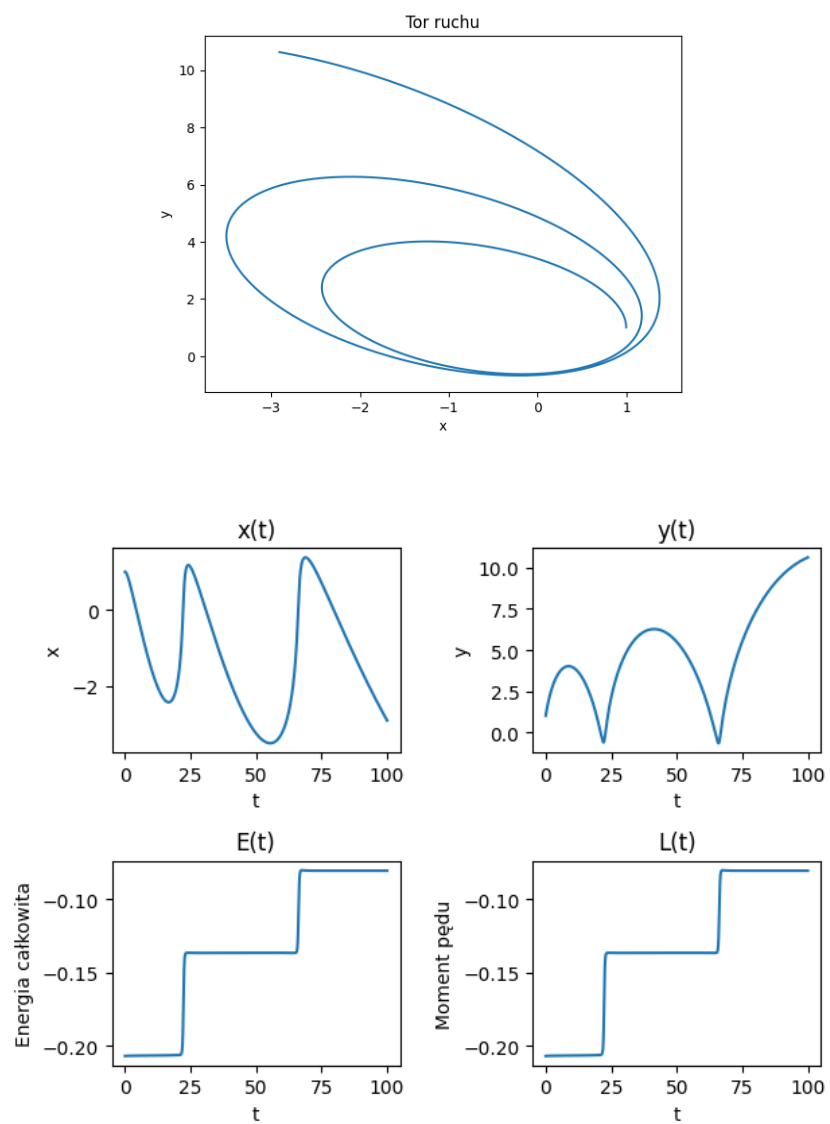
$$x_{k+1} = x_k + v_{x_k} \cdot \Delta t \quad (59)$$

$$v_{x_{k+1}} = v_{x_k} - \Delta t \cdot GM \cdot x_k \cdot R^{-3} \quad (60)$$

Analogiczne zależności wyprowadzono dla  $y$  oraz  $v_y$ , przy czym:

$$R = (x^2 + y^2)^{0.5} \quad (61)$$

Na podstawie powyższych równań stworzono wykresy (dla  $e = 0$ ):





## Niejawna metoda Euler'a

Wzór niejawnej metody Euler'a:

$$y_{k+1} = y_k + h \cdot f(t_{k+1}, y_{k+1}) \quad (62)$$

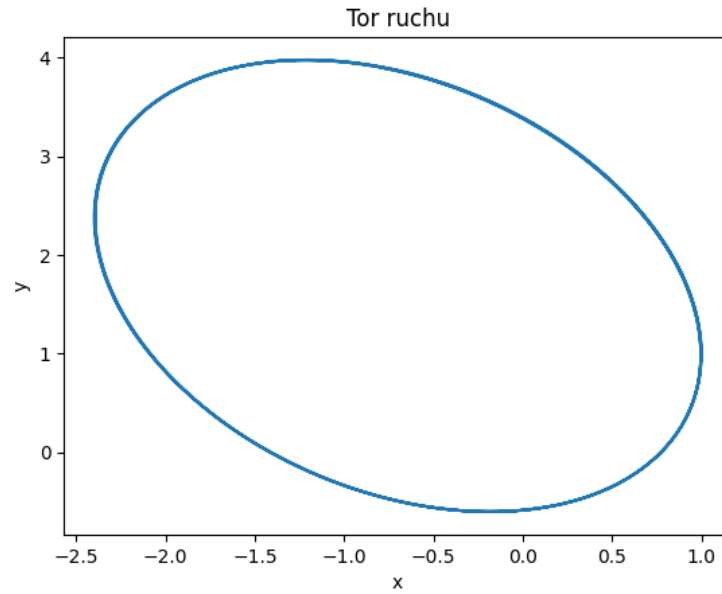
W podanej sytuacji:

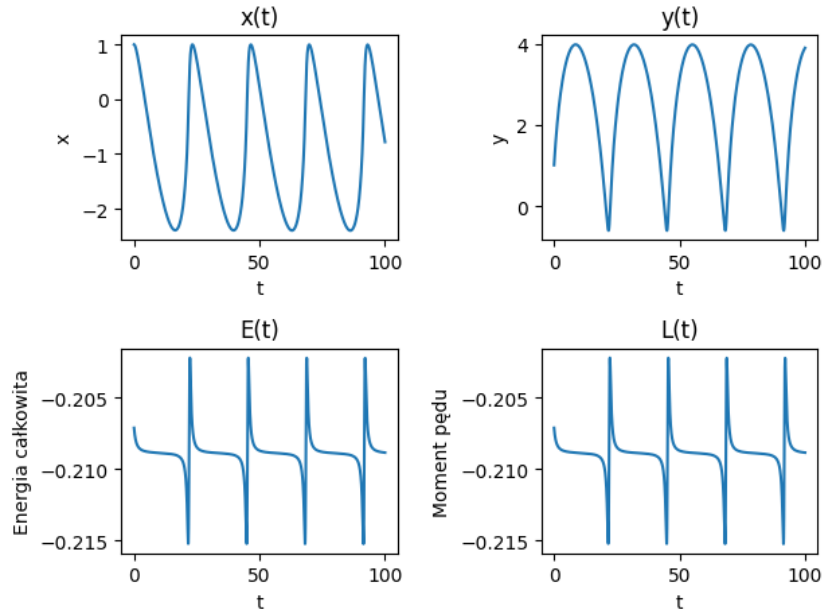
$$x_{k+1} = x_k + \Delta t \cdot f(t_{k+1}, x_{k+1}) \quad (63)$$

$$x_{k+1} = x_k + \Delta t \cdot (v_{x_k} - \Delta t \cdot \frac{GM}{R^3} \cdot x_{k+1}) \quad (64)$$

$$x_{k+1} = \frac{x_k + \Delta t \cdot v_{x_k}}{1 + (\Delta t)^2 \cdot GM \cdot R^{-3}} \quad (65)$$

Analogiczne wzory zastosowano dla  $y$  oraz  $v_y$ . Na podstawie tych czterech równań stworzono wykresy (dla  $e = 0$ ):





## Półjawna metoda Euler'a

Wzór półjawnej metody Euler'a:

$$v_{n+1} = v_n + h \cdot g(t_n, x_n) \quad (66)$$

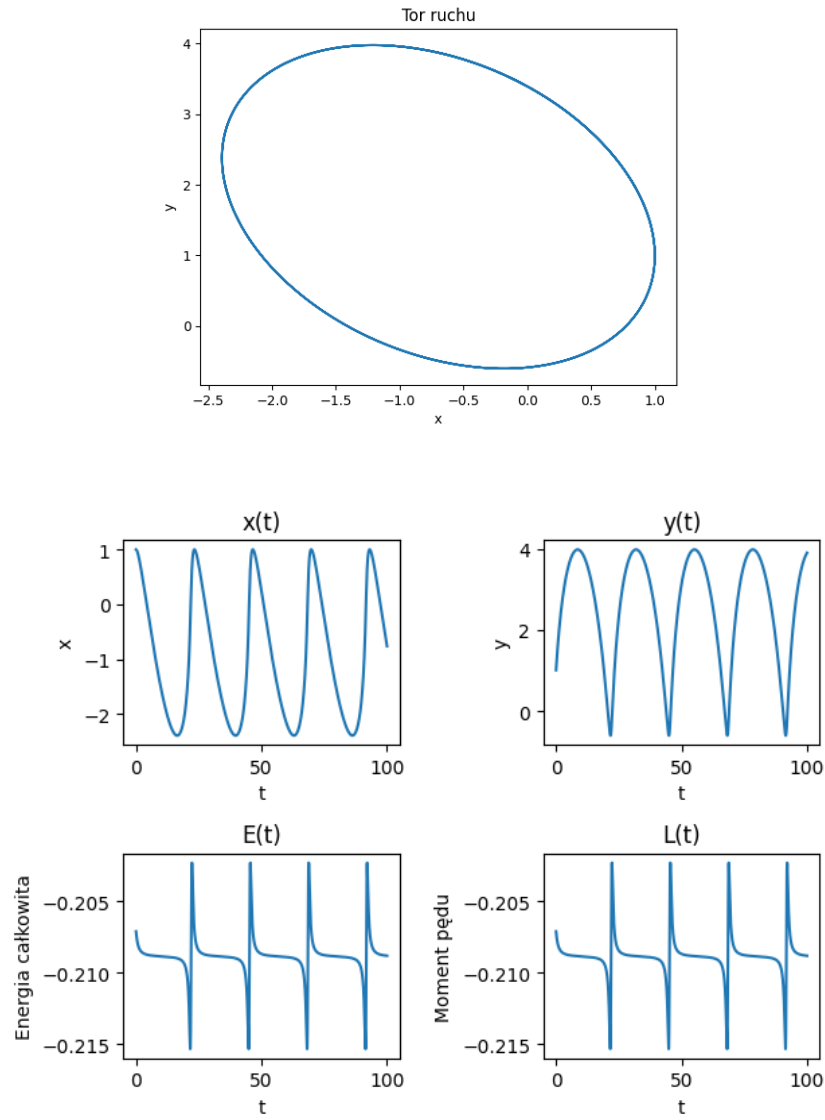
$$x_{n+1} = x_n + h \cdot f(t_n, v_{n+1}) \quad (67)$$

W podanej sytuacji:

$$v_{x_{k+1}} = v_{x_k} - \Delta t \cdot \frac{GM}{R^3} \cdot x_k \quad (68)$$

$$x_{k+1} = x_k + \Delta t \cdot v_{x_{k+1}} \quad (69)$$

Analogiczne zależności wyprowadzono dla  $y$  oraz  $v_y$ . Dla  $e = 0$  stworzono wykresy:



## Metoda Rungego-Kutty czwartego rzędu (RK4)

Wzór metody Rungego-Kutty czwartego rzędu:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6} \cdot (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (70)$$

$$k_1 = f(t_k, y_k) \quad (71)$$

$$k_2 = f\left(t_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{hk_1}{2}\right) \quad (72)$$

$$k_3 = f\left(t_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{hk_2}{2}\right) \quad (73)$$

$$k_4 = f(t_k + h, y_k + hk_3) \quad (74)$$

W podanej sytuacji:

$$x_{k+1} = x_k + \frac{\Delta t}{6} \cdot (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (75)$$

$$k_1 = v_k - \Delta t \cdot GM \cdot x_k \cdot R^{-3} \quad (76)$$

$$k_2 = v_k - \frac{1}{2} \Delta t \cdot GM \cdot R^{-3} \cdot (3x_k + \Delta t \cdot k_1) \quad (77)$$

$$k_3 = v_k - \frac{1}{2} \Delta t \cdot GM \cdot R^{-3} \cdot (3x_k + \Delta t \cdot k_2) \quad (78)$$

$$k_4 = v_k - \Delta t \cdot GM \cdot R^{-3} \cdot (2x_k + \Delta t \cdot k_3) \quad (79)$$

Analogiczne zależności wyprowadzono dla  $y$  oraz  $v_y$ . Dla  $e = 0$  stworzono wykresy:

