

TRANSPORT DE LA CALOR: ESTUDI DEL TRANSPORT DE LA CALOR EN UNA BARRA METÀL·LICA

30 D'OCTUBRE DE 2024

Miguel A.
1637738

Daniel B.
1603508

Sergi R.
1607805

RESUM

En aquesta pràctica s'estudien els fenòmens de transport de la calor en metalls. Es construeix un model teòric del nostre sistema a partir de les equacions de Fourier i Newton i de la llei d'Stefan-Boltzmann. A partir de dos sistemes formats principalment per barres metàl·liques i una manta calefactora comprovem experimentalment la coherència del model teòric presentat i discutim les seves limitacions i assumpcions.

1 Introducció i objectius

diàmetre de cada barra i obtenim els valors de la Taula ??.

$$\frac{dQ}{dt} = -KA \frac{dT}{dx} \quad (1)$$

$$\frac{dQ}{dt} = -\lambda A(T - T_a) \quad (2)$$

$$\frac{dQ}{dt} = e\sigma_{SB}AT^4 \quad (3)$$

$$\theta(x) = \theta_0 e^{-px} \quad (4)$$

Table 1: Diametres i radis de cada metall

Material	r ($\pm 0,001$) [cm]
Al	1,524
Cu-Zn	1,518
Fe	1,573

$$\theta(x, t) = \theta_0 e^{-px} + A_0 e^{-mx} \cos\left(\frac{2\pi}{\tau} - hx\right) \quad (5)$$

$$\langle \theta(x, t) \rangle = \theta_0 e^{-px} \quad (6)$$

$$\varphi_i = hx_i \quad (7)$$

$$\Delta\varphi_i = h\Delta x \quad (8)$$

$$\frac{a_i}{a_j} = e^{-m(x_i - x_j)} \quad (9)$$

$$\lambda = \frac{1}{2}[Kr(m^2 - h^2)] \quad (10)$$

A més, al llarg de l'experiment el laboratori ha anat canviant lleugerament de temperatura ambient. Per aquest motiu a l'hora de calcular els increments de temperatura θ_x farem servir com a temperatura ambient de referència la mitjana de tres mesures (veure Taula ?? a l'Annex). Per tant, el valor de la temperatura ambient al laboratori és: $T_a = (24,73 \pm 0,19)^\circ\text{C}$.

A partir de les dades de temperatura obtingudes per a cada barra obtenim la gràfica de la Figura ?. Es pot veure com l'increment de temperatura decau de forma exponencial amb la distància al punt calent, tal com es podia preveure del desenvolupament teòric (Equació (??)). Fent servir codi en Python obtenim un ajust exponencial de les dades mesurades. Aquest ajust es pot observar també a la Figura ?, i les dades dels coeficients ajustats a la Taula ??

2 Resultats i discussió

2.1 Estat estacionari

Segons el desenvolupament teòric que seguim no podem negligir les diferències de radi entre les tres barres metàl·liques. Mesurem a l'inici, al mig i al final el

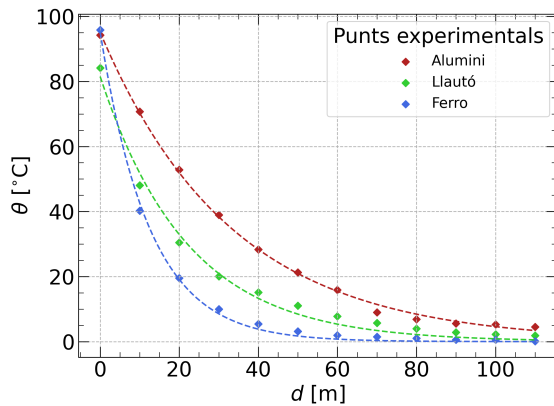


Figure 1: Increment de temperatura θ respecte a la distància, punts experimentals i regressió exponencial. Coeficients de regressió: $r_{\text{Al}}^2 = 0.999$, $r_{\text{Cu-Zn}}^2 = 0.991$ i $r_{\text{Fe}}^2 = 0.998$

Table 2: Coeficients a i b de l'ajust exponencial, amb model $y = ae^{bx}$, per als punts experimentals mesurats per l'alumini, el llautó i el ferro.

Material	a [°C]	b ($\cdot 10^{-2}$) [cm^{-1}]
Al	$95,11 \pm 0,97$	$-3,025 \pm 0,051$
Cu-Zn	$81,5 \pm 2,2$	$-4,53 \pm 0,21$
Fe	$95,1 \pm 1,3$	$-8,03 \pm 0,22$

Per a trobar el valor experimental de p apliquem logaritme als valors experimentals per a poder realitzar una regressió lineal. Observem aquestes dades experimentals i les rectes de regressió a la Figura ???. A la Taula ?? queden

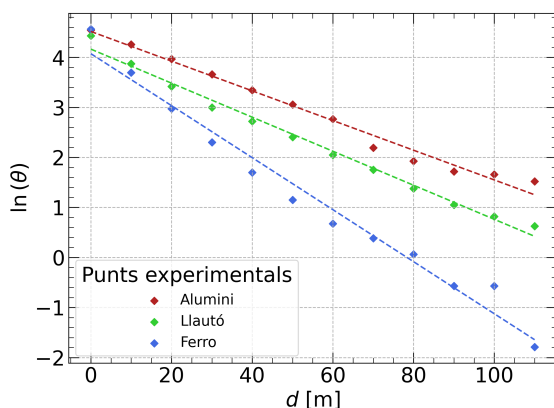


Figure 2: Regressió lineal del logaritme de les temperatures per a cada material. Coeficients de regressió obtinguts: $r_{\text{Al}}^2 = 0.983$, $r_{\text{Cu-Zn}}^2 = 0.990$, $r_{\text{Fe}}^2 = 0.976$.

Table 3: Coeficients a i b de l'ajust lineal, amb model $y = ax + b$, per al logaritme de l'increment de temperatura θ per a l'alumini, el llautó i el ferro.

Material	a ($\cdot 10^{-2}$) [cm^{-1}]	b
Al	$-2,97 \pm 0,12$	$4,517 \pm 0,080$
Cu-Zn	$-3,40 \pm 0,11$	$4,164 \pm 0,070$
Fe	$-5,20 \pm 0,26$	$4,07 \pm 0,17$

Tenint en compte de l'equació (??), què val p (valor absolut de les a a la Taula ??) i suposant el mateix valor constant del coeficient λ per als tres metalls observem la temperatura d'un metall decau com $(Kr)^{1/2}$. Deduïm doncs que la conductivitat tèrmica dels tres metalls és diferent i que es compleix

$$K_{\text{Fe}} < K_{\text{Cu-Zn}} < K_{\text{Al}}$$

i que existeixen les relacions

$$\frac{K_i r_i}{K_j r_j} = \frac{p_j^2}{p_i^2}$$

on i i j prenen valors dels diferents metalls que estem estudiant. Fent recerca a la literatura trobem el valor de la conductivitat tèrmica del ferro: $K_{\text{Fe}} = 0,802 \text{ W/cmK}$. Fent servir les relacions anteriors i el valor trobat a la literatura podem calcular, aproximadament, els valors de la conductivitat tèrmica dels altres dos metalls. Podem comparar aquests valors obtinguts amb els que podem trobar a la literatura. S'observen totes aquestes dades a la Taula ??.

Table 4: Comparació de la conductivitat tèrmica experimental i teòrica segons el patró ferro.

Material	K_{exp} [W/cmK]	K_{teo} [W/cmK]
Al	$2,54 \pm 0,28$	2,37
Cu-Zn	$1,94 \pm 0,21$	1,09

Com a aproximació alternativa podem fer servir, en comptes del ferro, l'alumini com a patró. Aplicant les mateixes relacions que amb el ferro obtenim les dades de la Taula ??.

Table 5: Comparació de la conductivitat tèrmica experimental i teòrica segons el patró alumini.

Material	K_{exp} [W/cmK]	K_{teo} [W/cmK]
Cu-Zn	$1,81 \pm 0,17$	1,09
Fe	$0,748 \pm 0,078$	0,802

Observant aquestes dues darreres taules notem com el càlcul experimental de K_{Al} segons el patró ferro i de K_{Fe} segons el patró alumini són coherents amb les dades obtingudes de la literatura d'aquests mateixos coeficients. En canvi, el valor de $K_{\text{Cu-Zn}}$ tant per al patró ferro com per al patró alumini difereix, el valor que trobem a la literatura no entra dins de les incerteses. Això ens porta a deduir que possiblement la hipòtesi inicial de considerar les λ iguals per a tots tres materials no era correcta. També cal considerar que la constant de conductivitat tèrmica pot dependre de la temperatura i d'altres propietats microscòpiques de cada material, i considerar-la constant és una simplificació.

D'igual manera, les pèrdues per convecció sofreixen una altra simplificació a l'hora de calcular l'àrea de contacte amb l'aire, el nostre model considera una barra sense forats. Tot i això aquesta simplificació no ens porta a obtenir resultats incoherents amb la teoria. Si les barres fossin totalment buides aquest canvi de l'àrea seria rellevant i canviarien els nostres resultats experimentals, hauriem de revisar el desenvolupament teòric.

Com a darrera simplificació que pateixen els nostres resultats podem fixar-nos en que no considerem els efectes de la radiació. Comparem les aportacions de conductivitat, convecció i radiació. Observant les expressions de les Equacions (??), (??) i (??) podem observar que per al nostre sistema es compleixen els següents llindars:

$$|P_F| \leq |P_F(x=0)|$$

per a l'aportació de l'equació de Fourier,

$$|P_N| \leq |P_N(T = T_{\text{max}})|$$

per a l'aportació de l'equació de Newton i

$$|P_{\text{SB}}| \leq |P_{\text{SB}}(T = T_{\text{max}})|$$

per a l'aportació de la llei d'Stefan-Boltzmann. Calculant aquests llindars tenint en compte que $T = \theta(x, t) + T_a$ obtenim els resultats de la Taula ??.

Table 6: Taula de potència llindar del sistema per a cada material i cada aportació de calor. S'ometen les incerteses per a no distreure la comparació.

Material	P_F [W]	P_N [W]	P_{SB} [W]
Al	43,73	4810,66	0,004
Cu-Zn	17,74	1951,38	0,003
Fe	1,70	187,08	0,002

Cal aclarir novament que aquestes dades es tracten de llindars, la potència absorbida o emesa pel sistema és diferent a cada punt i depèn d'altres factors, per exemple del ventilador que manté un flux d'aire al voltant de les barres. Tot i això, les dades ens són suficients per a notar que l'aportació de pèrdues per radiació, seguin la llei d'Stefan-Boltzmann és molt petita en comparació amb les altres dos. Sabent això concluïm que podem menysprear del nostre model de l'aportació de la radiació.

2.2 Estat permanent

A partir de les dades obtingudes experimentalment representem l'evolució temporal de la temperatura segons cada posició de la barra gran, Figura ??, i de la barra petita, ??.

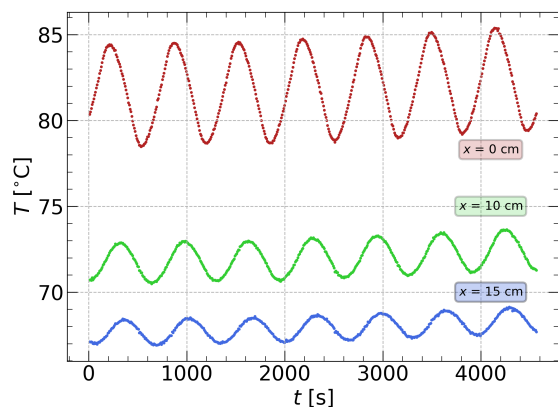


Figure 3: Gràfica de T en funció t de la barra gran. Temperatures mesurades a una distància de 0 cm (vermell), 10 cm (verd) i 15 cm (blau) del punt de referència.

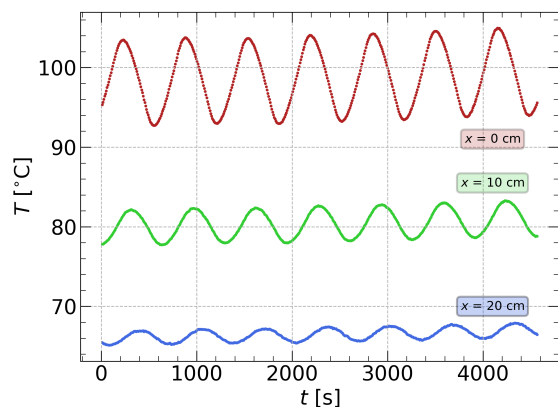


Figure 4: Gràfica de T en funció t de la barra petita. Temperatures mesurades a una distància de 0 cm (vermell), 10 cm (verd) i 20 cm (blau) del punt de referència.

Notem com l'evolució temporal mesurada de la temperatura és coherent amb la solució de l'equació diferencial vista a l'Equació (??). El segon terme de la solució correspon a una funció periòdica en el temps que decau amb la distància i presenta un desfasament, també dependent de la distància. Tant a la Figura ?? com a la Figura ?? es veu que la temperatura és funció periòdica en el temps (és una ona tèrmica) i que, quant més lluny del punt de referència ens trobem, més petita és l'amplitud de d'aquesta ona. Tot i ser complicat a simple vista veure-ho, existeix un desfasament entre les oscil·lacions de la mateixa barra a diferents distàncies.

Per a observar millor aquest desfasament podem preparar les dades d'una forma més convenient.

Com a pas previ a observar el desfasament, calculem la temperatura mitjana a cada punt de cada barra. Com a simplificació, calculem aquesta mitjana temporal fent una mitjana aritmètica de les dades obtingudes al laboratori. Els valors d'aquestes mitjanes venen recollits a la Taula ??

Table 7: Temperatura mitjana ($\langle \theta \rangle$) a cada posició x_i per a la barra gran i la barra petita.

x_i ($\pm 0,1$) [cm]	$\langle \theta \rangle$ ($\pm 0,001$) [°C]
Barra gran	
0	81,849
10	72,012
15	67,928
Barra petita	
0	98,717
10	80,420
20	66,486

Observem com la temperatura mitjana decau amb la distància respecte a l'origen de referència. Clarament són pocs punts experimentals com per a traçar una corba de tendència. Tot i això, qualitativament els valors obtinguts s'apropen al que prediu la teoria. En cas de repetir l'experiment amb més termoparells repartits al llarg de cadascuna de les barres observariem un comportament de la mitjana temporal de la temperatura com el de l'Equació (??). Si apliquem el mateix mètode que a l'estat estacionari per a obtenir el valor de p obtenim els valors que s'observen a la Taula ?? . A partir d'aquestes dades realitzem una regressió i observem, Figura ?? com s'apropen molt a un comportament lineal.

Table 8: Valors ajustats per a una regressió lineal, amb model $y = ax + b$, on y és el logaritme de les temperatures mitjanes i x les posicions x_i .

Barra	a ($\cdot 10^{-3}$) [cm $^{-1}$]	b ($\cdot 10^{-2}$)
gran	$-12,43 \pm 0,29$	$44,04 \pm 0,30$
petita	$-19,75 \pm 0,42$	$45,90 \pm 0,55$

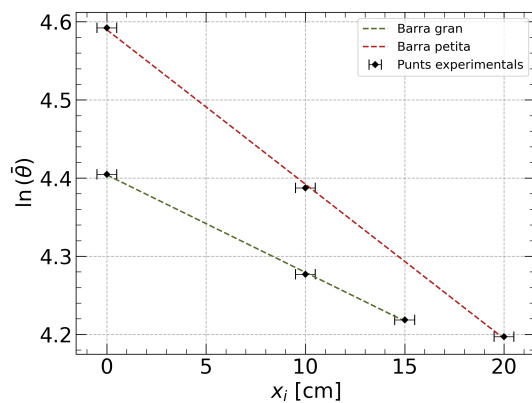


Figure 5: Regressió lineal del logaritme de temperatures respecte a la posició. Coeficients de regressió obtinguts: $r^2 = 0.999$ tant per a la barra gran com per a la barra petita.

Un cop calculades les mitjanes per a cada punt, podem normalitzar les dades experimentals dividint per la seva temperatura mitjana corresponent. Aplicant aquest mètode i, per a obtenir més detall, escollint com a molt els dos primers períodes d'oscil·lació obtenim la Figura ?? per a la barra gran i la Figura ?? per a la barra petita.

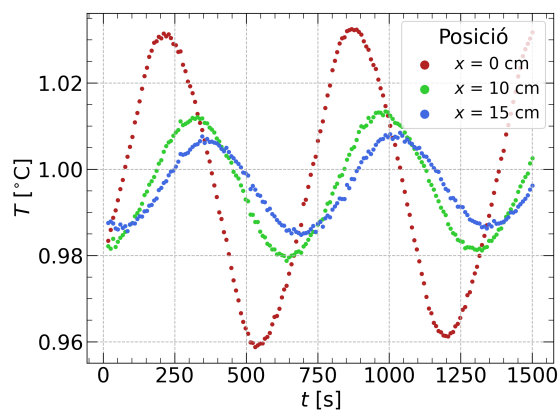


Figure 6: Gràfica de T en funció de t normalitzada de la barra gran. Temperatures mesurades a una distància de 0 cm (vermell), 10 cm (verd) i 15 cm (blau) del punt de referència.

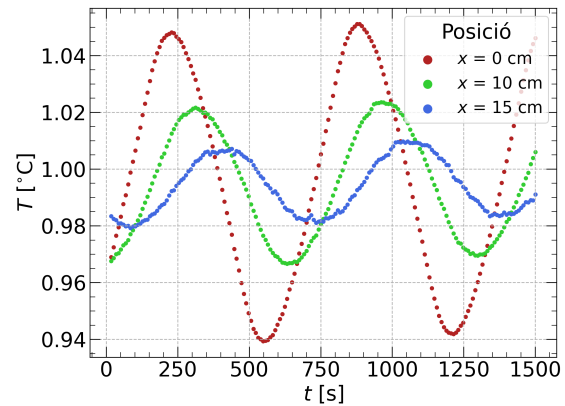


Figure 7: Gràfica de T en funció de t normalitzada de la barra petita. Temperatures mesurades a una distància de 0 cm (vermell), 10 cm (verd) i 20 cm (blau) del punt de referència.

Es pot observar com existeix desfasament entre dos punts diferents a cada barra, la ona tèrmica avança a mesura que augmenta la distància. A més, també es pot veure un comportament similar al que prediu l'Equació (??).

Per a determinar l'amplitud de la ona a cada punt per a cada barra escollim un punt màxim i un mínim consecutius i calculem la meitat de la diferència. Amb aquestes dades realitzem una mitjana i obtenim les amplituds que s'observen a la Taula ?? i a la Taula ??.

Table 9: Amplitud promig de la ona tèrmica segons la distància al punt de referència per a la barra gran.

$x_i (\pm 0.1)$ [cm]	$\bar{a}_i (\pm 0.001)$ [°C]
0	2,963
10	1,218
15	0,802

Table 10: Amplitud promig de la ona tèrmica segons la distància al punt de referència per a la barra petita.

$x_i (\pm 0.1)$ [cm]	$\bar{a}_i (\pm 0.001)$ [°C]
0	5,404
10	2,273
20	0,961

Es pot observar com segueixen un comportament exponencial, similar al que hem vist a la Taula ??. Apliquem novament

el mateix mètode amb les amplituds que amb les temperatures mitjanes i obtenim les regressions de la Figura ?? i els valors dels pendents de la Taula ??.

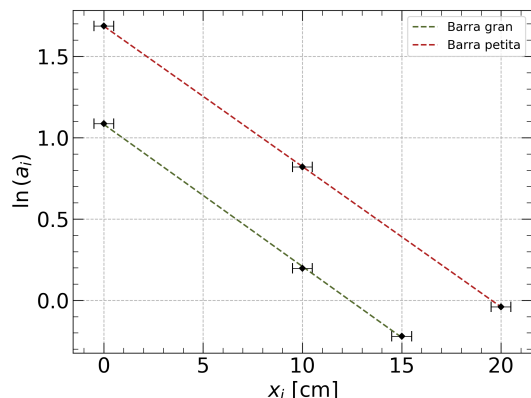


Figure 8: Regressió lineal del logaritme de les amplituds respecte a la posició. Coeficients de regressió obtinguts: $r^2 = 0.999$ tant per a la barra gran com per a la barra petita.

Table 11: Valors ajustats per a una regressió lineal, amb model $y = ax + b$, on y és el logaritme de les amplituds i x les posicions x_i .

Barra	$a \cdot 10^{-2} \text{ [cm}^{-1}\text{]}$	$b \cdot 10^{-1}$
gran	$-8,74 \pm 0,16$	$10,82 \pm 0,14$
petita	$-8,634 \pm 0,014$	$16,862 \pm 0,018$

Tenint en compte el comportament del desfasament i de les amplituds podem dir que les ones tèrmiques no són simètriques espaiament, decauen i pateixen un desfasament amb la distància.

Podem comprovar aquets resultats calculant el valor de m a partir de l'Equació ???. Aplicant logaritme podem calcular m per a qualsevol parell de posicions i qualsevol parell d'amplituds al mateix instant de temps. Escollim com a amplituds de referència les amplituds màximes trobades anteriorment. Calculem m per a cada parell de màxims i fem la mitjana de tots per a cada barra. Aquest pas el repetim per a cada parell de posicions possible (veure Annex). Fent la mitjana de cada valor trobat acabem obtenint

$$\bar{m}_{\text{gran}} = (88,30 \pm 0,14) \cdot 10^{-3} \text{ cm}^{-1}$$

per a la barra gran i

$$\bar{m}_{\text{petita}} = (86,343 \pm 0,037) \cdot 10^{-3} \text{ cm}^{-1}$$

per a la barra petita.

Comparant amb els pendent obtinguts a la Taula ?? observem com, dins de la incertesa, els valors coincideixen.

Calculem ara el període de les oscil·lacions. Per a fer-ho mesurem la distància entre els màxims trobats anteriorment, tot per a cada posició i cada barra. Trobem que, com calia esperar, aquests períodes d'oscil·lació són molt similars entre ells (veure Annex). Per tant, assumint que aquest període és només un, donem el seu valor a partir de la mitjana de les dades trobades:

$$\bar{\tau} = (654,048 \pm 0,001) \text{ s}$$

Sabent aquesta dada podem calcular el temps d'escalfament o de refredament mig senzillament dividint el període a la meitat:

$$t_{\text{esc/ref}} = (325,024 \pm 0,001) \text{ s}$$

Fent servir els màxims per a cada x_i d'una mateixa barra podem calcular el desfasament entre dos punts. Tenint en compte l'Equació (??) podem calcular el valor de h per a cada parell x_i . Fent la mitjana d'aquests valors i aplicant-ho a cada barra trobem

$$\bar{h}_{\text{gran}} = (0,09 \pm 0,11) \text{ cm}^{-1}$$

per a la barra gran i

$$\bar{h}_{\text{petita}} = (0,088 \pm 0,006) \text{ cm}^{-1}$$

per a la barra petita.

Sabent tant els valors de h i de m per a cada barra podem calcular el valor de λ segons l'equació ???. Fem servir el valor de la conductivitat tèrmica de l'alumini trobat a la literatura a la secció anterior i com a radi fem servir

$$r_{\text{gran}} = (2,6 \pm 0,1) \text{ cm}$$

$$r_{\text{petita}} = (1,5 \pm 0.1) \text{ cm}$$

per ala barra gran i la barra petita, respectivament. Aleshores, calculem els valors de λ i obtenim

$$\lambda_{\text{gran}} = (-0.21 \pm 0.72) \cdot 10^{-2} \text{ W/Kcm}^2$$

$$\lambda_{\text{petita}} = (-0.07 \pm 0.19) \cdot 10^{-2} \text{ W/Kcm}^2$$

Observem com el valor del coeficient de convecció pren un valor amb molta incertesa. També es pot notar com aquest coeficient creix amb l'àrea de la barra. Tot i això, no podem dir que els resultats coincideixen amb la realitat. Comparant amb resultats calculats amb les dades de la secció anterior aquests coeficients poden entrar dins del esperat, però només per a causa de tenir un error molt alt. Observem aquests coeficients a la Taula ??.

Table 12: Coeficients de convecció per a una barra d'alumini gran i petita ($r_g = 2.6 \text{ cm}$ i $r_p = 1.5 \text{ cm}$) calculats amb les dades de la secció de l'estat estacionari.

Barra	$\lambda \cdot 10^{-2} \text{ [W/cmK]}$
Gran	$0,291 \pm 0,042$
Petita	$0,168 \pm 0,026$

3 Conclusions

Al llarg de la pràctica s'ha posat de manifest com les diferents equacions de transport de calor defineixen el comportament del nostre sistema. Tenint en compte aquestes aportacions de cada equació, hem obtingut dues solucions per a diferents sistemes termodinàmics.

Per al primer sistema trobem una solució estacionària. Amb les mesures experimentals hem observat com el

comportament de la temperatura a cada barra és coherent amb la solució del nostre model. Aquestes dades ens han permès trobar relacions entre els coeficients de conducció tèrmica dels materials amb que treballem. Comparant amb dades de la literatura, els nostres resultats són coherents per a la barra de ferro i per a la barra d'alumini. Tot i això, per a la barra de llautó els resultats difereixen, exposant que possiblement el model falla en algún punt, i aquest error pot provenir de diverses fonts. Dos possibles fonts (a part de l'error experimental) són considerar el coeficient de convecció constant per als tres metalls, una altra, considerar que el coeficient de conducció tèrmica no depèn de la temperatura. Els nostres resultats experimentals també han permès observar la poca aportació de potència que prové de la radiació.

Per al segon sistema trobem una solució permanent. Les característiques d'aquest sistema fan que a cada barra es generi una ona tèrmica que es propaga longitudinalment. Hem observat que la solució del model és coherent amb les nostres dades experimentals, podent així calcular diferents paràmetres que definien la ona tèrmica com el període de les oscil·lacions o el temps de refredament o escalfament. Hem observat que, encara que el comportament sigui oscil·latori, encara se segueix complint el decaïment exponencial de la temperatura envers la distància, de forma anàloga a com ho feia el sistema anterior. No només això, s'ha comprovat experimentalment també que existeix un desfasament de la ona que depèn de la distància. Aquest desfasament és coherent amb la solució del model.

4 Referencies

<http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbasees/Tables/thrcn.html> - d'on treiem les conductivitats tèrmiques.